Problemas Capítulo 5: Soluções e Dicas

José Fernando de Jesus & Rodrigo Fernandes Lira de Holanda

13 de junho de 2007

5.1 - A dimensão do horizonte causal quando a temperatura era 10^{15} GeV é dada por $d_H \simeq 2ct$, mas o tempo na era da radiação relaciona-se com o fator de escala como:

$$t = t_r R^2 = \sqrt{\frac{3}{32\pi G\rho_{r0}}} R^2 \tag{1}$$

e a temperatura é dada por $T = T_0/R$, portanto, temos para a dimensão do horizonte causal na era da radiação:

$$d_H \simeq c\sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho_{r0}}} \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 \tag{2}$$

o que resulta, para $T_0 = 2,726$ K, numa temperatura $T = 10^{15}$ GeV em:

$$d_H = 1,026 * 10^{-25} \text{ cm.}$$

Agora, a dimensão física hoje, do horizonte causal que ocorreu em um instante arbitrário t, no passado, é dada por (Ex. 3.10):

$$d_{H(t)}(t_0) = 3ct_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/3} = 3ct_0 R^{1/2} \tag{3}$$

ou:

$$d_{H(t)}(t_0) = \frac{2c}{H_0} \left(\frac{T_0}{T}\right) \tag{4}$$

onde usamos $t_0 = \frac{2}{3H_0}$ para um Universo de Einstein-deSitter. Esta quantidade deve ser comparada com 2 vezes o raio de Hubble hoje, que dá uma estimativa do tamanho do Universo observável atual, $D_{H0} = \frac{2c}{H_0}$. Assim:

$$\frac{D_{H0}}{d_H} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/2} \quad (5)$$

Portanto, se temos uma partícula por horizonte causal em $T = 10^{15}$ GeV, temos $N = \frac{D_{H0}}{d_H} = (10^{15}/2,3492{*}10^{-13})^{1/2} \simeq 6,52{*}10^{13}$ partículas hoje. Assim, a densidade destas partículas hoje seria:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{3N}{4\pi}\left(\frac{H_0}{c}\right)^3 = 7,3454 * 10^{-72}\ \text{cm}^{-3} \quad (6)$$

para $h = 0,72$.

5.2 - A nucleossíntese durou cerca de 1000 segundos, para um cálculo aproximado do horizonte vamos utilizar este valor. O horizonte é obtido através de $d_H = R\int_0^t \frac{cdt}{R}$, na era da radiação $R(t) = R_0(t/t_0)^{1/2}$. Integrando a expressão anterior chega-se facilmente a $d_H = 2ct \approx 10^{-5}$pc. Do capítulo 3, temos que o tamanho hoje de um horizonte em um tempo t (exercício 3.10) é dado por (modelo Einstein-de Sitter): $d_H = 3ct_0(t/t_0)^{1/3}$, o que nos fornece $d_H = 10^5$pc. Diante destas estimativas era de se esperar que o Universo observado hoje, que é $\approx 10^3$ Mpc, contivesse inomogeneidades, pois seu tamanho é muito maior que as regiões causalmente conectadas provenientes da nucleossíntese.

5.3 - Supondo que o buraco negro pode ser aproximado por um corpo negro, podemos utilizar a lei de Stefan-Boltzmann:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (7)$$

onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann, que é dada por:

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60\hbar^3 c^2} \quad (8)$$

usando como temperatura do buraco negro a temperatura de Hawking:

$$T_H = \frac{\hbar c}{4kR_S} \quad (9)$$

onde R_S é o raio de Schwarzchild dado por $R_S = \frac{2GM}{c^2}$, que pode ser considerado como o raio do buraco negro, a sua luminosidade fica como:

$$L = \frac{\pi^3 \hbar c^6}{4^4 * 60 * G^2 M^2} \quad (10)$$

Vamos definir a constante $\alpha = \frac{\pi^3 \hbar c^6}{4^4 * 60 * G^2}$, se a luminosidade do buraco negro é uma perda de energia, $L = -\dot{M}c^2$, temos:

$$\dot{M} = -\frac{\alpha}{c^2 M^2} \tag{11}$$

Portanto:

$$M^2 \frac{dM}{dt} = -\frac{\alpha}{c^2} \Rightarrow \frac{M^3 - M_0^3}{3} = -\frac{\alpha t}{c^2} \tag{12}$$

onde M_0 é a massa inicial do buraco negro. Usando a equação acima e fazendo $M = 0$, temos a vida média de um buraco negro:

$$t = \frac{5 * 4^5 G^2 M_0^3}{\hbar c^4} \tag{13}$$

que pode também ser escrito:

$$t = 6,67 * 10^{66} \left(\frac{M_0}{M_\odot} \right)^3 \tag{14}$$

Para que um buraco negro sobreviva até hoje à expansão cosmológica, devemos ter $M \geq 0$ em (12). Para que isso seja válido, temos a condição:

$$M_0 \geq \frac{\pi}{4} \left(\frac{\hbar c^4}{120 G^2 H_0} \right)^{1/3} \tag{15}$$

onde usamos $t_0 = \frac{2}{3H_0}$. Essa condição se traduz em:

$$M_0 \geq 3,48 * 10^{-19} M_\odot.$$

5.4 - As unidades naturais ($c = 1$ e $\hbar = 1$) implicam que s $= 3 * 10^{10}$ cm e $1,054 * 10^{-27}$ g cm^2/ s $= 1$.

- 1 GeV $= 1,6022 * 10^{-3}$ erg
  Temos que eV $= 1,6022 * 10^{-19}$ J e erg $= 10^{-7}$ J, então eV $= 1,6022 * 10^{-12}$ erg.
- 1 GeV $= 1,7827 * 10^{-24}$ g Temos que 1 GeV $= 1,6022 * 10^{-3}$ erg $=$ 1 GeV $= 1,6022 * 10^{-3}$ g cm^2 s^{-2}, mas $[L] = [T] = c = 1$, então s $= 3 * 10^{10}$ cm, assim 1 GeV $= 1,7827 * 10^{-24}$ g.

- 1 GeV^{-1} $= 1,9733 * 10^{-14}$ cm

  Temos que 1 GeV $= 1,602 * 10^{-3}$ g cm^2/ s^2 $= \frac{1,602*10^{-3}}{1,054*10^{-27}} \frac{1}{\text{s}}$, mas s $= 3 * 10^{10}$ cm, substituindo na expressão anterior chega-se a 1 GeV $= 0,5066.10^{14}$/ cm, invertendo, 1 GeV^{-1} $= 1,973*10^{-14}$ cm.

- 1 GeV^{-1} $= 6,5821 * 10^{-25}$ s

  Temos que 1 GeV^{-1} $= 1,9733 * 10^{-14}$ cm, como $s = 3 * 10^{10}$ cm, invertendo esta relação e substituindo na expresão anterior chega-se a 1 GeV^{-1} $= 1,9733 * 10^{-14}$ s/$3 * 10^{10} = 6,5821 * 10^{-25}$ s.

- 1 GeV $= 1,1604 * 10^{13}$ K

  Temos $E = k_B T = 1,38.10^{-16}$ erg K^{-1}, vamos obter a temperatura que corresponde a 1 GeV: $E =$ 1 GeV $= 1,6022 * 10^{-3}$ erg $= kT$, então $T = 1,6022 * 10^{-3}$ erg/$1,38 * 10^{-16}$ erg K^{-1} $= 1,1604 * 10^{13}$ K.

5.5 - Como no Exercício 5.1, a dimensão do horizonte causal para $T = 10^{15}$ GeV é dada por $d_H = 1,026 * 10^{-26}$ cm. A dimensão atual desta região é dada por (5) e é, portanto:

$$D_{H0} = 6,689 * 10^{-12} \text{ cm}.$$

A densidade atual de defeitos topológicos seria dada por (6):

$$n = 7,3454 * 10^{-72} cm^{-3}.$$

5.6 - $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, mas $\lambda = ln2/t_{1/2} = 10^{-38}$, para $t = 1$ dia temos $t = 10^4 s$. Então $N_0 - 1 = N_0 e^{-10^{-34}}$ ou $N_0 = \frac{1}{1-e^{10^{-34}}}$, mas $e^{10^{-34}} \approx 1 - 10^{-34}$, portanto $N_0 \approx 10^{34}$ prótons. Como a massa de um próton é de $\approx 10^{-24}$g, devemos ter uma massa inicial de $N_0 * 10^{-24} g$, ou seja, $m_0 = 10^{10}$g.

5.7 - Segundo Sakharov, uma explicação para a assimetria entre bárions e antibários é dada pelas GUTs, através de processos que não conservam o número bariônico. Nessas teorias, os *quarks* interagem trocando um bóson superpesado, X. Enquanto as reações entre *quarks* se processam em equilíbrio, o número de bárions e antibárions é igual e a abundância dos bósons X é:

$$n_X = n_\gamma e^{\frac{-M_X c^2}{kT}} \tag{16}$$

Com a expansão, a temperatura diminui e quando ela ficar menor que $T_X = M_X c^2/k \sim 10^{14}$ K as interações mediadas pelo bóson X saem do equilíbrio e estes bósons começam a decair. Supondo que esses bósons sobrevivem algum tempo quando $T < T_X$, os bósons X estarão fora do equilíbrio e $n_X \approx n_\gamma$. Devido à não-conservação do número bariônico, quando os bósons X decaem é produzido um pequeno excesso ϵ de bárions em relação a antibárions. Então, quando os bósons X tiverem decaído, o Universo terá um excesso de bárions e a razão entre o número de bárions e o número de fótons será:

$$\eta = \frac{n_b}{n_\gamma} = \epsilon \left(\frac{n_X}{n_\gamma} \right) \tag{17}$$

Como $n_x/n_\gamma \sim 1$, o excesso de bárions em relação a antibárions é dado por $\epsilon \sim \eta \sim 10^{-9} - 10^{-10}$. Portanto, uma assimetria de $1 : 10^{9-10}$ é suficiente para justificar a quantidade de matéria bariônica que observamos hoje.

5.8 - Como mostrado anteriormente, o horizonte é obtido por $d_H = R(t) \int_0^t \frac{dt}{R(t)}$, no período inflacionário $R \propto e^{Ht}$, onde $H = (8\pi G \rho_{vacuo}/3)^{1/2}$, ou seja, o horizonte cresce devido ao rápido aumento do fator de escala nesse instante, esse aumento contudo deve ser pensado como decorrente do aumento do próprio espaço. Nesse sentido, não há violação da relatividade especial, pois esta velocidade não é uma velocidade usual, em que um objeto desloca-se no espaço. Ela decorre do aumento do espaço devido à expansão e em princípio pode ser infinita.

5.9 - Temos, a partir da equação (4.8), a equação de Friedmann para um Universo plano, válida para a era da radiação:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 \tag{18}$$

Portanto, $\dot{R}^2 \propto \rho R^2$ na era da radiação. O horizonte causal é dado por:

$$d_H = R \int_0^t \frac{cdt}{R} = R \int_0^R \frac{cdR}{\dot{R}} = R \int_0^R \frac{cdR}{\sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho R^2}} \tag{19}$$

onde, na última igualdade, usamos a equação (18). Assim, vemos a partir desta equação, que para que o horizonte causal divirja quando

$R \to 0$, devemos ter $\rho R^2 \to 0$. Agora, supondo que $\rho \propto R^{-3\gamma}$, temos que $\rho R^2 \propto R^{2-3\gamma}$ e, para essa condição ser satisfeita devemos ter, portanto, $2 - 3\gamma > 0$ ou $\gamma < 2/3$.