Problemas Capítulo 3: Solução e Dicas

José Fernando de Jesus & Rodrigo Fernandes Lira de Holanda

4 de junho de 2007

3.1 - Temos, para campos fracos:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\phi}{c^2} \tag{1}$$

onde $\Delta\phi$ é dado por:

$$\Delta\phi = -\frac{GM}{r} + \frac{GM}{R} = -\frac{GM}{R+h} + \frac{GM}{R} \tag{2}$$

onde M é a massa da Terra, G é a constante da gravitação de Newton, r é a distância radial do centro da Terra, R é o raio da Terra e h é a altura acima da superfície da Terra. Assim, teremos, no caso em que $h << R$:

$$-\frac{GM}{R+h} = -\frac{GM}{R\left(1+\frac{h}{R}\right)} \simeq -\frac{GM}{R}\left(1-\frac{h}{R}\right) = -Rg\left(1-\frac{h}{R}\right) \tag{3}$$

onde foi usado que $g = \frac{GM}{R^2}$ é a gravidade superficial da Terra. Assim, teremos, de 2:

$$\Delta\phi = gR - gR + gh = gh \tag{4}$$

e, portanto:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\phi}{c^2} \tag{5}$$

como em (1).

3.2 - Nesta equação é direto usar $z = \frac{GM}{c^2R}$.

3.3 - Temos, para campos fracos:

$$z \simeq \frac{GM}{c^2 R} \tag{6}$$

o que, para $M = 10^9 M_\odot$ e $R = 1kpc$, fornece:

$$M = 10^9 * 1,989 * 10^{33} g = 1,989 * 10^{42} g \tag{7}$$

$$R = 1kpc = 10^3 * 3,0857 * 10^{18} cm = 3,0857 * 10^{21} cm \tag{8}$$

$$z \simeq \frac{6,67259 * 10^{-8} * 1,989 * 10^{42}}{(2,99792458 * 10^{10})^2 * 3,0857 * 10^{21}} = 4,786 * 10^{-8} \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

3.4 - De $1/R = 1 + z$ é direto que $R = 0,18$ se $R_0 = 1$. No modelo de Einstein de Sitter

$$\dot{R} = \pm(\frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3R})^{1/2}$$

como o universo expande $\dot{R} > 0$, então chega-se a $(\alpha = 8\pi G \rho_0 R_0^3/3)$

$$R(t) = (\frac{9\alpha}{4})^{1/3} t^{2/3}$$

Assim $\frac{R_0}{R} = (\frac{t_0}{t})^{2/3} \rightarrow t = \frac{t_0}{(1+z)^{3/2}}$, com $z = 4,5$, $t = 0,08 t_0$.

3.5 - A equação (3.14) se escreve:

$$\int_0^{r_*} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} \tag{11}$$

A qual, para um Universo crítico $(k = 0)$, podemos escrever:

$$\int_0^{r_*} dr = r_* = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_{R_e}^{1} \frac{c}{R} \frac{dt}{dR} dR = \int_{R_e}^{1} \frac{cdR}{R\dot{R}} \tag{12}$$

Temos, também, para um Universo crítico, composto somente por matéria sem pressão (poeira):

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{8\pi G \rho_0 R^{-3}}{3} \Rightarrow \frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_0 R^{-3} = R^{-3} \tag{13}$$

onde usamos que $\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{c0}} = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2}$ e $\Omega_0 = 1$ para um Universo crítico. Substituindo esse resultado em (12), temos:

$$r_* = \int_{R_e}^{1} \frac{cdR}{H_0 R^{1/2}} = \frac{c}{H_0}[2R^{1/2}]_{R_e}^{1} = \frac{2c}{H_0}[1 - R_e^{1/2}] \tag{14}$$

Mas temos que $R_e = (1+z)^{-1}$, portanto:

$$r_* = \frac{2c}{H_0}[1 - (1+z)^{-1/2}] \tag{15}$$

No limite $z \to \infty$, $r_* \to \frac{2c}{H_0}$, que é a distância do horizonte causal. Para $z << 1$, temos:

$$r_* \simeq \frac{2c}{H_0}\left[1 - 1 + \frac{z}{2}\right] = \frac{cz}{H_0} \tag{16}$$

A distância percorrida pelo fóton é dada por (eq. (3.18)):

$$l(z) = c(t_0 - t_e) = \frac{2c}{3H_0}[1 - (1+z)^{-3/2}] \tag{17}$$

a qual, para $z << 1$, fornece:

$$l(z) \simeq \frac{2c}{3H_0}\left[1 - 1 + \frac{3z}{2}\right] = \frac{cz}{H_0} \tag{18}$$

Portanto, a distância comóvel se aproxima da distância percorrida pelo fóton, para $z \to 0$.

3.6 - A distância de luminosidade é $d_L = (1+z)r_*$, onde r_* é a distância radial comóvel da fonte em relação a nós no momento da emissão. Pela relação de Mattig:

$$r(z) = \frac{2c}{H_0\Omega_0^2(1+z)}[\Omega_0 z + (\Omega_0 - 2)(\sqrt{1+\Omega_{0z}} - 1])]$$

Para o modelo plano $d_L = \frac{2c}{H_0}[z + 1 - \sqrt{1+z}]$

Como

$m - M = -5 + 5log[d_L(pc)]$

vem $m - M = -5 + 5log\frac{2c10^6}{100h}[(z+1) - \sqrt{1+z}]$

então $m - M = -5 + 5logc - 5log100h + log\left\{2[(z+1) - \sqrt{1+z}]\right\} + 5log10^6$

Colocando os valores, chega-se a

$$m - M + 5logh = 42,38 + 5log\left\{2[(1+z) - \sqrt{1+z}]\right\}$$

3.7 - Para um Universo plano, $k = 0$, temos:

$$\theta = \frac{1+z}{1-(1+z)^{-1/2}}\frac{H_0 D}{2c} \tag{19}$$

Derivando:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{H_0 D}{2c}\left[\frac{1-(1+z)^{-1/2} - \frac{1}{2}(1+z)^{-1/2}}{(1-(1+z)^{-1/2})^2}\right] \tag{20}$$

A condição de existência de extremo implica:

$$\frac{d\theta}{dz} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{3}{2}(1+z)^{-1/2} = 0 \Rightarrow (1+z)^{-1/2} = \frac{2}{3} \tag{21}$$

Portanto:

$$1 + z = \frac{9}{4} \Rightarrow z = \frac{5}{4} = 1,25 \tag{22}$$

Portanto, $z = 1,25$ é um extremo, resta ver se é um mínimo para θ. Já poderia se deduzir que sim, uma vez que $\theta(z)$ é decrescente para $z's$ pequenos e crescente para $z >> 1$. Porém, vamos verificar isso pelo método matemático padrão, calculando a segunda derivada. Derivando (20) e rearranjando termos, chegamos a:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = \frac{H_0 D}{8c}(1+z)^{-3/2}\frac{[3(1+z)^{-1/2} - 1]}{[1-(1+z)^{-1/2}]^3} \tag{23}$$

a qual, para $z = 5/4$, fornece:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}(z = 5/4) = \frac{H_0 D}{c} > 0 \tag{24}$$

Portanto, $z = 5/4$ é um mínimo para θ e o valor de θ neste ponto, calculado a partir de (19) é dado por:

$$\theta_{min} = \theta(z = 5/4) = \frac{27 H_0 D}{8c} \tag{25}$$

Para a nossa Galáxia, neste *redshift*, teríamos:

$$D \simeq 40kpc = 4 * 10^{-2} Mpc \quad (26)$$
$$H_0 = 100hkms^{-1}Mpc^{-1} = 65kms^{-1}Mpc^{-1} \quad (27)$$
$$c = 299792,458kms^{-1} \quad (28)$$
$$\theta_{min} = \frac{27}{8}\frac{65 * 4 * 10^{-2}}{299792,458} = 2,93 * 10^{-5} rad = 0,00168^o = 6,04'' \quad (29)$$

Se o resultado deste teste fosse negativo, e não houvesse um diâmetro angular mínimo, poderia se inferir que o Universo não está em expansão e seria euclidiano.

3.8 - $\theta_{min} = \frac{27H_0D}{8c}$, se $\theta_{min} = 0.05''$ e considerando $H_0 = 72$ km/s/Mpc e $c = 3.10^5$ km/s, teremos $D \approx 60$ Mpc.

3.9 - Da equação para θ (19), podemos escrever uma equação para D:

$$D = \frac{2c\theta}{H_0}\left[\frac{1-(1+z)^{-1/2}}{(1+z)}\right] \quad (30)$$

a qual, para um diâmetro angular $\theta = 5'' = 2,424 * 10^{-5} rad$, *redshift* $z = 4,25$ e $h = 0,65$, resulta em:

$$D = \frac{2 * 299792,458 * 2,424 * 10^{-5}}{65} * \frac{1-5,25^{-1/2}}{5,25} = 0,024Mpc = 24kpc \quad (31)$$

3.10 - $d_H(t) = R(t)\int_0^t \frac{cdt}{R(t)}$ e $R(t) = R_0(t/t_0)^{2/3}$.

O tamanho hoje de um horizonte em um tempo t é:

$$d_{H(t)}(t_0) = R_0c\int_0^t \frac{dt}{R(t)} = ct_0^{2/3}\int_0^t \frac{dt}{t^{2/3}} = 3ct_0^{2/3}t^{1/3}$$

e, assim, $d_{H(t)}(t_0) = 3ct_0(\frac{t}{t_0})^{1/3}$, como $\frac{t}{t_0} = \frac{1}{(1+z)^{2/3}}$

$$d_{H(t)}(t_0) = \frac{3ct_0}{(1+z)^{1/2}}$$

3.11 - A correção K é a diferença em magnitude entre a luminosidade observada através de um filtro (isto é, uma banda espectral fixa) de uma fonte em movimento (isto é, afetada pelo efeito Doppler) e a luminosidade que esta mesma fonte teria no referencial de repouso do observador:

$$K(z) = 2.5 * log(1+z) + 2.5 * log\left[\frac{\int_0^\infty S(\lambda)f(\lambda)d\lambda}{\int_0^\infty S(\lambda)f(\lambda/(1+z))d\lambda}\right]$$

onde $S(\lambda)$ é o perfil do filtro. Como $f \propto \lambda^\alpha$, então:

$$K(z) = 2.5 * log(1+z) + 2.5 * log\left[\frac{\int_0^\infty S(\lambda)\lambda^\alpha d\lambda}{\int_0^\infty S(\lambda)\lambda^\alpha/(1+z)^\alpha d\lambda}\right]$$

e

$$K(z) = 2.5 * log(1+z) + 2.5 * log(1+z)^\alpha = 2.5(1+\alpha)log(1+z)$$

3.12- Um Universo que fosse infinito teria diferentes características (taxa de expansão, temperatura, etc) em diferentes regiões, segundo este raciocínio e, assim, não poderíamos aplicar o princípio cosmológico, que é a idade de um Universo homogêneo e isotrópico.

3.13 - A idade de Hubble é dada por:

$$t_H = \frac{1}{H} = \frac{R^{3/2}}{H_0} \tag{32}$$

onde a segunda igualdade se dá para um Universo crítico. Também para um Universo crítico temos que:

$$R = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{3/2} = \left(\frac{3H_0 t}{2}\right)^{3/2} \tag{33}$$

Inserindo (33) em (32), temos que:

$$t_H = \frac{3t}{2} \tag{34}$$

Derivando a relação $r_H = ct_H$, temos:

$$\dot{r}_H = c\dot{t}_H = \frac{3c}{2} \tag{35}$$

Portanto a velocidade de expansão do raio de Hubble é de $3c/2$. O raio de Hubble dá a ordem de grandeza do raio de horizonte de eventos. Como o raio do horizonte de eventos aumenta devido à expansão do espaço-tempo, a sua velocidade de expansão pode ser maior que c, uma vez que é uma expansão geométrica. Na verdade, esta velocidade poderia até mesmo ser infinita.

3.14 - Este modo de pensar nos leva a uma idéia de que o espaço já existia *a priori*, o que contradiz o pensamento sustentado pela teoria da relatividade geral, segundo o qual, tempo, espaço, matéria e energia surgiram concomitantemente.

3.15 - O problema conceitual provocado por esta prática é a má interpretação dos *redshifts* como sendo devido à velocidade de recessão das galáxias. Na verdade, a maior parte do valor dos *redshifts* medidos é devido à expansão cosmológica do espaço-tempo e apenas uma pequena parcela é devida aos movimentos peculiares das galáxias.

3.16 - O fator de escala em $z = 5$ é $R(z = 5) = 1/6R_0$, enquanto em $z = 1$ é $R(z = 1) = 1/2R_0$, portanto, no momento da emissão o quasar em $z = 5$ estava mais próximo de nós. Entretanto, a taxa de expansão no momento da emissão do quasar em $z = 5$ era $H(t) = (1 + z)^{2/3}H_0 = 6^{2/3}H_0$, enquanto que no quasar em $z = 1$ era $H(t) = 2^{2/3}H_0$, por isso, a luz do quasar que hoje está em $z = 5$ chega tão “redshiftada”.