Problemas Capítulo 2: Solução e Dicas

José Fernando de Jesus & Rodrigo Fernandes Lira de Holanda

4 de junho de 2007

2.1 - A precisão máxima de paralaxe alcançada hoje, dada pelo satélite Hipparcus, é da ordem de 0,001". Desta forma, podemos estimar distâncias de estrelas de até 100 pc, ou cerca de 300 anos-luz, com precisao da ordem de 10%. Como as distâncias cosmologicamente significantes são da ordem de 10 Mpc, temos:

$$D_{COSM}/D_{PAR} = 10^7/10^2 = 10^5.$$

Portanto, a mínima distância cosmológica relevante é 5 ordens de grandeza maior que a distância máxima mensurável por paralaxe.

A máxima distância que pode ser estimada pelo método das cefeidas, mesmo com telescópios espaciais é 10 Mpc, portanto:

$$D_{COSM}/D_{CEF} = 10^7/10^7 = 1.$$

Ou seja, a maior distância que pode ser estimável pelas cefeidas é da mesma ordem das menores distâncias cosmológicas.

Temos:

$$m - M = 5logd - 5$$
$$m = M + 5logd - 5$$

Para Virgo, $d \sim 10^7$ Mpc, portanto:

$$m = M + 30$$

Considerando que as cefeidas possuem, em geral, uma magnitude visual absoluta no intervalo $-6 < M_V < -3$, temos que $24 < m_V < 27$, para cefeidas em Virgo.

2.2 - Como a distância Sol-Marte (1,52 UA) é maior que a distância Sol-Terra (1 UA), a distância máxima possível de ser medida por paralaxe para um mesmo ângulo será maior, pois $d = \frac{1{,}52UA}{tg\theta}$, onde θ é o ângulo de paralaxe. No caso a distância máxima possível é de aproximadamente 10^3pc.

2.3 - A velocidade de rotação observada, projetada na linha de visada, é dada por:

$$v_{obs} = v_{rot}/sin(i)$$

onde v_{rot} é a verdadeira velocidade de rotação da galáxia e i é o ângulo de inclinação entre o eixo perpendicular à galáxia e a linha de visada. Logo:

$$v_{rot} = v_{obs}sin(i) \tag{1}$$

Quando olhamos para uma galáxia circular de raio R orientada aleatoriamente, vemos, na verdade, a sua projeção no céu, que é uma elipse de semi-eixo maior a e semi-eixo menor b. O que vemos como semi-eixo maior é o próprio raio R da galáxia, já que nesse eixo, ele não sofre projeção. O semi-eixo menor, porém, é uma projeção do raio R no plano perpendicular à linha de visada.
Assim sendo, essa projeção é dada por:

$$b/R = cos(i) \Rightarrow b = Rcos(i)$$

E a razão axial aparente q = b/a é então, dada por:

$$q = Rcos(i)/R = cos(i)$$

Assim sendo, a velocidade de rotação, dada por (1), pode ser escrita:

$$v_{rot} = \sqrt{1 - q^2}$$

2.4 - Tomando $H_0 \approx 72Km/s/Mpc$, devemos saber a partir de qual distância esta velocidade peculiar é cerca de 10% da velocidade de recessão, então

Para $v_{pec} = 200Km/s \rightarrow d = 27,7Mpc$
Para $v_{pec} = 300Km/s \rightarrow d = 41,6Mpc$

2.5 - Temos, pela teoria da relatividade restrita:

$$v/c = ((1+z)^2 - 1)/((1+z)^2 + 1) = (5,5^2 - 1)/(5,5^2 + 1) = 0,936$$

É necessário alertar, porém, que essa fórmula não se aplica à expansão do Universo. Segundo a Teoria da Relatividade Geral, o redshift deve ser interpretado como devido à expansao do próprio espaço, e nao devido à velocidade do objeto, via efeito Doppler relativístico. Mesmo se quisesse se interpretar como velocidade do objeto, a fórmula correta nao seria essa, já que esta fórmula só é válida para um espaço-tempo de Minkowski. O mais correto seria utilizar, por exemplo, a derivada temporal da distância própria do objeto.

2.6 - Na Teoria da Relatividade Restrita

$$\frac{v}{c} = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1}$$

Após expandir

$$\frac{v}{c} = \frac{z + z^2/2}{z + z^2/2 + 1}$$

Para $z << 1$

$$\frac{v}{c} = \frac{z}{z+1} \rightarrow \frac{v}{c} \approx z$$

Para calcular o *redshift* máximo, devemos fazer:

$$\frac{Z_{rel} - Z_{cla}}{Z_{rel}} = 0,01$$

Encontra-se $z \approx 0,019$.

2.7 - Temos, para a velocidade orbital das galáxias:

$$v^2 = G(M_1 + M_2)/r = 2GM_1/r$$

onde M_1 e M_2 são as massas das galáxias e r é a distância entre elas. Por outro lado, a lei de Hubble diz que:

$$v = H_0 r$$

Temos então, igualando as duas velocidades:

$$H_0^2 r^2 = 2GM_1/r$$
$$r^3 = 2GM_1/H_0^2 \Rightarrow r = (2GM_1/H_0^2)^{1/3}$$
$$M_1 = 2 * 10^{11} M_\odot$$
$$H_0 = h/9,7778 \cdot 10^9 anos^{-1}$$

Usando $h = 0,72$ e 1 ano $= 31556926s$, temos:

$$H_0 = 2,3334 * 10^{-18} s^{-1}$$

$M_\odot = 1,989 * 10^{30} g$ e $G = 6,6732 * 10^{-11}$ no SI, portanto:

$$r = 2,1364 * 10^{24} cm$$

Como $1pc = 3,0857 * 10^{18} cm$ e $1pc = 3,2616 a.l.$, temos:

$$r = 692,4kpc = 2,26 * 10^6 a.l.$$

que é, aproximadamente, a distância de Andrômeda.

2.8 - No modelo padrão $H(t) = \frac{2}{3t}$, então, para o sistema solar $t = 14,5 * 10^{16}$ s, colocando o valor em termos de $km/s/Mpc$, encontra-se $H(t) = 138$ km/s/Mpc. Metodologia idêntica para as outras idades.

2.9 - Se o Universo é bastante uniforme e homogêneo, mesmo para pequenas escalas, a distância típica entre galáxias é dada por:

$$\ell_* = (3/(4 * \pi * n_*))$$

onde n_* é a densidade numérica média de galáxias. Para $n_* \sim 0,0034\text{Mpc}^{-3}$, temos $\ell_* \sim 4,1$ Mpc.
O tempo necessário para uma galáxia típica encontrar outra é, então:

$$t_{col} = \ell_*/v_{pec}.$$

Para $200 < v_{pec} < 300$ kms^{-1}, temos:

$$4,1/300 < t_{col} < 4,1/200 \text{ Mpc km}^{-1} \text{ s}$$
$$0,0137 < t_{col} < 0,0205 \text{ Mpc km}^{-1} \text{ s}$$

Mas Mpc km^{-1} s $= 9,7778 * 10^{11}$ anos, portanto:

$$1,34 * 10^{10} < t_{col} < 2,00 * 10^{10} anos$$

Comparando, com a idade do Universo, dada pelas estimativas atuais como $t_0 = 13,4 * 10^9$ anos, temos:

$$1 < t_{col}/t_0 < 1,49$$

Portanto, o tempo médio para uma galáxia típica encontrar outra galáxia é da mesma ordem da idade do Universo.

2.10 - Sabemos que $\rho = \rho_0/a^3$ e, no modelo crítico, $\rho_0 = \rho_{cri} = 1,9 * 10^{-29} h^2 gcm^{-3}$. Tem-se também que $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$, portanto, $t = (\rho_0/\rho)^{1/2} t_0$. Utilizando $h = 0,72$, chega-se a (com ρ em g/cm^3):

$$t = \frac{3.10^{-15}}{\rho^{1/2}} t_0$$

Na era Planck $t = 1,35 * 10^{-43} s$ e t_0 no modelo padrão é $6,51 * 10^9$ anos.

Embora a densidade fosse alta, estruturas não se formaram devido ao acoplamento entre a matéria e radiação. Estas densidades ocorreram na época da radiação, onde não era possível formar átomos, pois a energia dos fótons nessa época era suficiente para ionizá-los.

2.11 - Essa estimativa não depende muito do parâmetro de densidade, uma vez que temos, na equaçao de Friedmann:

$$\dot{R}^2 - H_0^2\Omega_0/R = -H_0^2(\Omega_0 - 1)$$

Para $R = 10^{-3}$, temos que o segundo termo do lado esquerdo corresponde, em módulo a:

$$| - 10^3 H_0^2\Omega_0| >> |H_0^2(\Omega_0 - 1)|$$

para qualquer valor razoável de Ω_0 não muito próximo de zero. Podemos, portanto, admitir que $\Omega_0 = 1$ e calcular:

$$R = (t/t_0)^{2/3} \Rightarrow t = t_0 * R^{3/2} \Rightarrow t_R = t_0 * 10^{-4,5}$$

onde t_R é a idade do Universo na recombinação. Para $t_0 = 13,4 * 10^9$ anos, temos:

$$t_R = 13,4 * 10^{4,5} = 424000 \text{ anos}$$

É necessário que se alerte, porém, que essa estimativa é feita para um modelo dominado por matéria nao-relativística, o que nao é muito adequado para essa época, já que nao se leva em conta a época de dominaçao dos fótons. A inclusão dos fótons nas equações não é possível no contexto da cosmologia newtoniana como desenvolvida no capítulo 2, uma vez que esses possuem pressão e a inclusão do efeito da pressão só é possível no contexto da Relatividade Geral ou de uma Cosmologia Newtoniana modificada.
A densidade de massa é dada por:

$$\rho = \rho_0 R^{-3}$$

onde ρ_0 é a densidade atual de massa do Universo, que para um modelo plano, é dada pela densidade crítica atual:

$$\rho_0 = \rho_{c0} = 3H_0^2/(8\pi G) \tag{2}$$

Para $H_0 = 72kms^{-1}Mpc^{-1}$, temos:

$$\rho_0 = 3 * (2,3334 * 10^{-18})^2/(8\pi * 6,6732 * 10^{-11}) =$$
$$9,7393 * 10^{-27}kg/m^3 = 9,7393 * 10^{-30}g/cm^3$$

Portanto:

$$\rho_{rec} = 9,7393 * 10^{-30} * 10^9 = 9,7393 * 10^{-21} g/cm^3.$$

2.12 - O teorema do virial no fornece que: $2K + U = 0$, onde K é a energia cinética e U a energia gravitacional. Portanto,

$$M = \frac{v^2 R}{G}$$

com $R = 1,5Mpc$, $v = 977km/s$ e $M_\odot = 2 * 10^{30}$kg obtém-se $M = 3 * 10^{14} M_\odot$. Para achar a massa é direto a expressão $M = \frac{3\rho_{0c}}{4\pi R^3}$, com $\rho_{cri} = 1,9 * 10^{-29} h^2 gcm^{-3}$.

2.13 - Como no exercício 2.9), temos:

$$t_{cruz} = l_{Coma}/v_{pec}.$$

Para as velocidades radiais em Coma, da ordem de $977kms^{-1}$, e para $l_{Coma} \sim 3Mpc$, temos:

$t_{cruz} = 3/977 Mpckm^{-1}s = 3/977 * 9,7778 * 10^{11} anos = 3,00 * 10^9 anos$

A idade do Universo para $h = 0,67$ é dada por:

$$t_0 = 6,5185 * 10^9/0,67 = 9,73Ganos$$

Portanto, temos:

$$t_{cruz}/t_0 = 0,31$$

Portanto, o tempo de colisão médio em Coma está cerca de uma ordem de grandeza a menos que a idade do Universo.

2.14 - Basta dividir: $5 * 10^{12} L_\odot / 2,3 * 10^{10} L_\odot \approx 200$. Segunda parte:

$l_* = (\frac{3}{4\pi n_*})^{1/3} = (\frac{3V}{4\pi N})^{1/3} = \frac{R}{N^{1/3}}$
onde
$n_* = N/V = \frac{3N}{4\pi R^3}$ e $V = \frac{4\pi R^3}{3}$

Assim, com $R = 3Mpc$ e $N = 200 \rightarrow l_* = 1,5 * 10^{24}$cm. O tempo de colisão é $t_{col} = \frac{l_*}{v_{pec}} = 4,7 * 10^8$ anos. Portanto:

$$\frac{t_H}{t_{col}} = 13,5$$

2.15 - $d = vt$, convertendo a velocidade para km/s e a idade da Terra para segundos chega-se a $d = 8,5$ Mpc. Esta distância é obtida considerando que a taxa de expansão do Universo e, conseqüentemente, a velocidade do objeto foi sempre a mesma durante esta idade de 4,6 bilhões de anos. Na cosmologia moderna, a equação que se usa é $v(t) = H(t)d(t)$ onde as grandezas v, H e d são tomadas ao mesmo tempo. Assim, a questão deve ser interpretada da seguinte maneira, a velocidade hoje é 1100 milhas por segundo, o valor do parâmetro de Hubble hoje é cerca de 72 km/s/Mpc e a distância hoje deste objeto até nós é 350 Mpc.

2.16 - Para $\Omega_0 < 1$, temos:

$$\chi = \frac{1}{2}(cosh\eta - 1) \tag{3}$$

$$\tau = \frac{1}{2}(senh\eta - \eta) \tag{4}$$

Que podem ser expandidos por série de Taylor como:

$$\chi = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{2} \tag{5}$$

$$\tau = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{\eta}{2} \tag{6}$$

Portanto, χ e τ podem ser aproximados por:

$$\chi = \frac{\eta^2}{4} + \frac{\eta^4}{48} + O(\eta^6) \tag{7}$$

$$\tau = \frac{\eta^3}{12} + \frac{\eta^5}{240} + O(\eta^6) \tag{8}$$

Considerando apenas termos de quarta ordem em (8), temos:

$$\tau = \frac{\eta^3}{12} \Rightarrow \eta = 12^{1/3}\tau^{1/3} \tag{9}$$

Considerando termos até quarta ordem em (8) e substituindo (9), temos:

$$\chi = \frac{\eta^2}{4} + \frac{\eta^4}{48} = \frac{12^{2/3}}{4}\tau^{2/3} + \frac{12^{4/3}}{48}\tau^{4/3} \tag{10}$$

$$\chi = \frac{3^{2/3}}{4^{1/3}}\tau^{2/3} + \frac{3^{1/3}}{4^{2/3}}\tau^{4/3} \tag{11}$$

Agora, temos que:

$$R = p\chi \tag{12}$$

$$t = q\tau \Rightarrow \tau = \frac{t}{q} \tag{13}$$

onde:

$$p = \frac{\Omega_0}{|1-\Omega_0|} \tag{14}$$

$$q = \frac{\Omega_0}{H_0|1-\Omega_0|^{3/2}} \tag{15}$$

Com (11), (12) e (13), podemos escrever:

$$R = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} p\left[3^{1/3}\frac{t^{2/3}}{q^{2/3}} + \frac{t^{4/3}}{4^{1/3}q^{4/3}}\right] \tag{16}$$

Usando as definições de p e q, teremos:

$$R_- = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \Omega_{0-}^{1/3}(H_0 t)^{2/3} + \frac{3^{1/3}}{2^{4/3}}\frac{(1-\Omega_{0-})}{\Omega_{0-}}^{1/3}(H_0 t)^{4/3} \tag{17}$$

onde usamos o subscrito (-) para indicar as quantidades que se referem ao modelo aberto. O modelo fechado se calcula analogamente e se usa as expansões:

$$\chi = \frac{1}{2}(1 - cos\eta) \simeq \frac{\eta^2}{4} - \frac{\eta^4}{48} \tag{18}$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\eta - sen\eta) \simeq \frac{\eta^3}{12} - \frac{\eta^5}{240} \tag{19}$$

Com o que, ao final, teremos:

$$R_+ = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \Omega_{0+}^{1/3}(H_0 t)^{2/3} + \frac{3^{1/3}}{2^{4/3}}\frac{(1-\Omega_{0+})}{\Omega_{0+}}^{1/3}(H_0 t)^{4/3} \tag{20}$$

Agora, definindo $\Delta \equiv R_- - R_+$, temos:

$$\Delta = (\Omega_{0-}^{1/3} - \Omega_{0+}^{1/3}) \left(\frac{3H_0 t}{2}\right)^{2/3} + \frac{3^{1/3}}{2^{4/3}} \left(\frac{1-\Omega_{0-}}{\Omega_{0-}^{1/3}} - \frac{1-\Omega_{0+}}{\Omega_{0+}^{1/3}}\right) (H_0 t)^{4/3} \tag{21}$$

Para o modelo plano, $R = R_{pl} = \left(\frac{3H_0 t}{2}\right)^{2/3}$, portanto, podemos escrever:

$$\Delta = (\Omega_{0-}^{1/3} - \Omega_{0+}^{1/3}) R_{pl} + \left(\frac{1-\Omega_{0-}}{\Omega_{0-}^{1/3}} - \frac{1-\Omega_{0+}}{\Omega_{0+}^{1/3}}\right) \frac{R_{pl}^2}{3} \tag{22}$$

Resolvendo esta equação para R_{pl}, com $\Delta = 0,01$, encontramos o fator de escala que corresponde, aproximadamente, ao instante em que as três soluções passam a diferir por mais de 1%. Utilizamos o modelo plano para definir o parâmetro de escala porque este modelo sempre possui parâmetros de escala intermediários entre os modelos aberto e fechado. Assim, definindo:

$$\alpha \equiv \left(\frac{1-\Omega_{0-}}{\Omega_{0-}^{1/3}} - \frac{1-\Omega_{0+}}{\Omega_{0+}^{1/3}}\right) \tag{23}$$

$$\beta \equiv (\Omega_{0-}^{1/3} - \Omega_{0+}^{1/3}) \tag{24}$$

Temos:

$$\frac{\alpha R_{pl}^2}{3} + \beta R_{pl} - \Delta = 0 \tag{25}$$

Portanto:

$$R_{pl} = \frac{-3\beta \pm \sqrt{9\beta^2 + 12\alpha\Delta}}{2\alpha} \tag{26}$$

No nosso caso, em que temos $\Omega_{0+} = 10$ e $\Omega_{0-} = 0,1$, temos que $\alpha = -6,1164$ e $\beta = 1,6903$, portanto as soluções para R_{pl} são $R_{pl} = 0,00596$ e $R_{pl} = 0,8231$. A segunda solução deve ser descartada, uma vez que corresponde a uma segunda região em que as curvas se cruzam. Portanto, as curvas começam a diferir por mais de 1% para $R = 0,00596$.

Utilizando o modelo plano novamente, encontramos que a idade correspondente a esse parâmetro de escala é $H_0 t = \frac{2R^{3/2}}{3} = 3,07 * 10^{-4}$. Usando $H_0 = 72 km/s/Mpc$, temos: $t = 4,17$ milhões de anos.

2.17 - Se o Universo parasse de expandir não haveriam mais desvios das linhas espectrais observadas em relação às linhas esperadas teoricamente. Em seguida, na contração, observaríamos o *blueshift*.

2.18 - Das equações de Friedmann $\frac{8\pi G\rho_0}{3a^3} = (\frac{\dot{a}}{a})^2$, como $1/a = 1 + z$ e $\Omega_0 = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2}$, obtem-se

$$\frac{1}{(1+z)^{5/2}}\frac{dz}{dt} = \pm\frac{1}{t_{H0}}$$

como o sinal de luz está vindo, devemos utilizar o sinal negativo na integração, então

$$\int_z^0 \frac{dz}{(1+z)^{5/2}} = -1/t_{H0}\int_t^{t_0} dt$$

Assim

$$t_0 - t = t_L = t_{H0}\frac{2}{3}(1 - a^{3/2})$$

Para $z = 5$ e $1/a = (1+z) \rightarrow t_L = 0,55t_{H0}$.