

A Relatividade Geral e a Cosmologia

Ronaldo E. de Souza
`mailto:ronaldo@astro.iag.usp.br`



20 de abril de 2007

Fundamentos da Relatividade Geral

- Campo Gravitacional x Percurso da Luz
- O Redshift Gravitacional
- O Buraco Negro
- A Dilatação do Tempo

Gravitação e Curvatura do Espaço-Tempo

- Métrica e Gravitação
- Curvatura do Espaço
- Curvatura de Gauss
- Métrica de Robertson-Walker

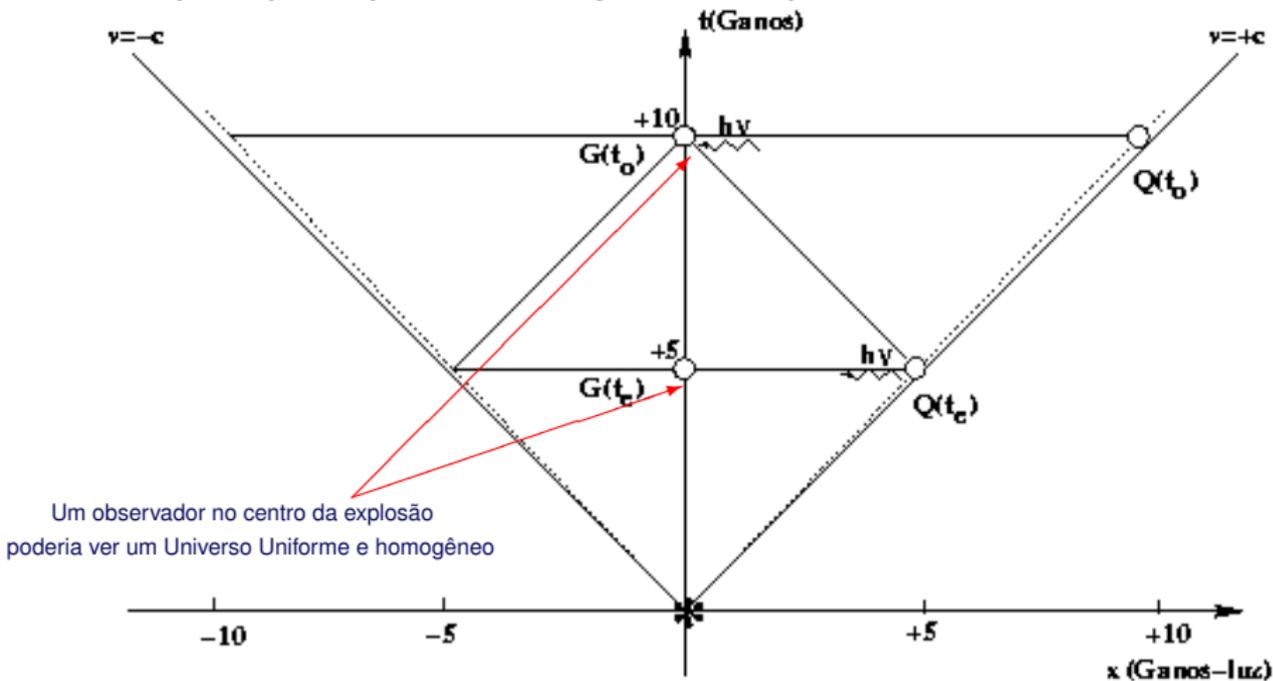
Cosmologia Relativista

- Modelos Cosmológicos
- O princípio Cosmológico na Relatividade Geral
- O Redshift
- Distâncias no Universo em Expansão

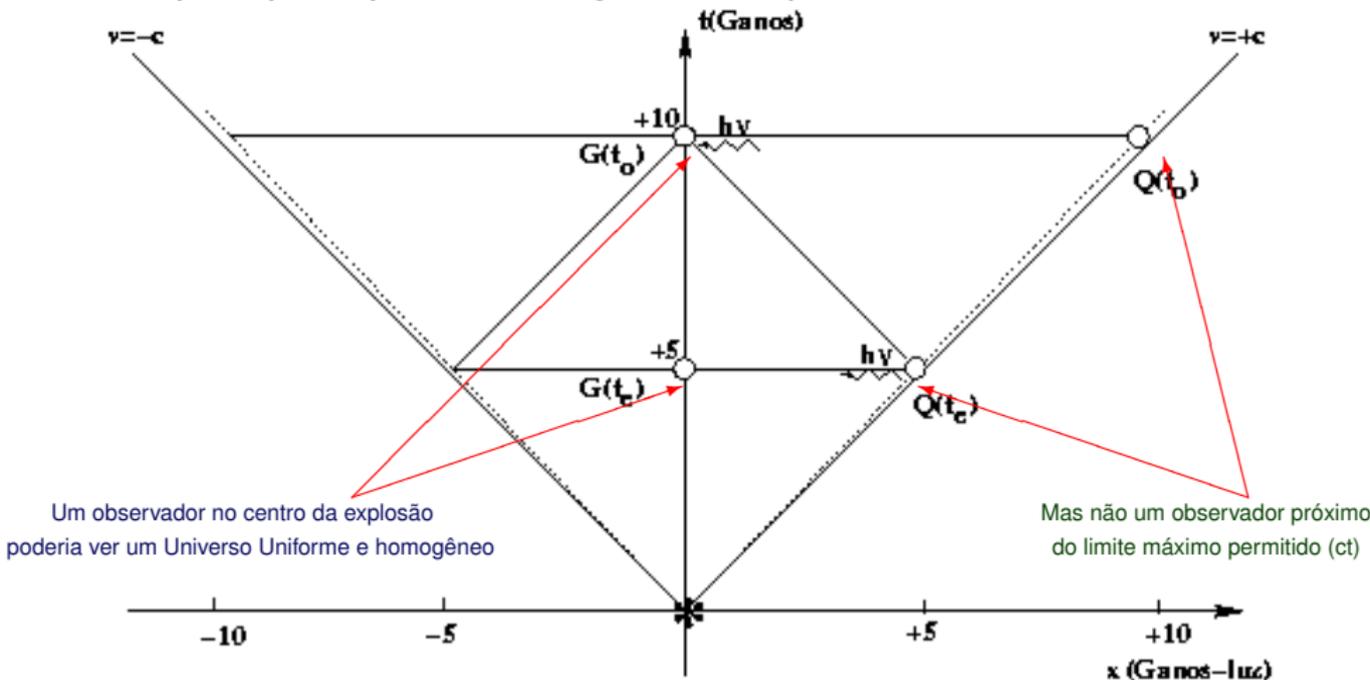
Testes Cosmológicos

- Fluxo de Fontes Padrões
- horizonte causal
- Correção K
- Evolução do Universo e Paradoxo de Olbers

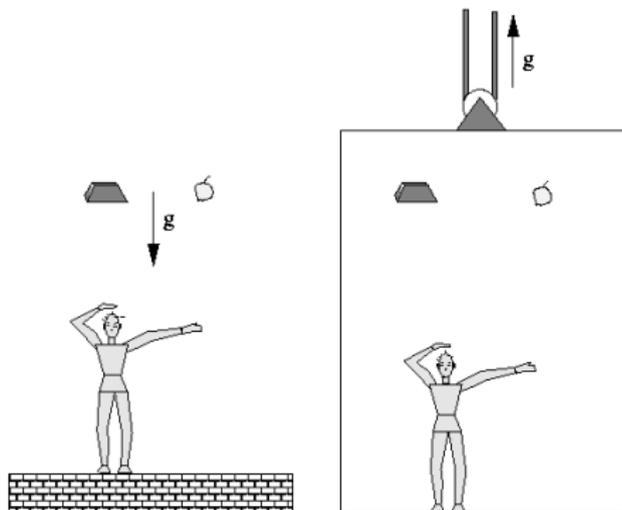
A relatividade restrita é insuficiente para explicar ao mesmo tempo o princípio cosmológico e a expansão do Universo.



A relatividade restrita é insuficiente para explicar ao mesmo tempo o princípio cosmológico e a expansão do Universo.

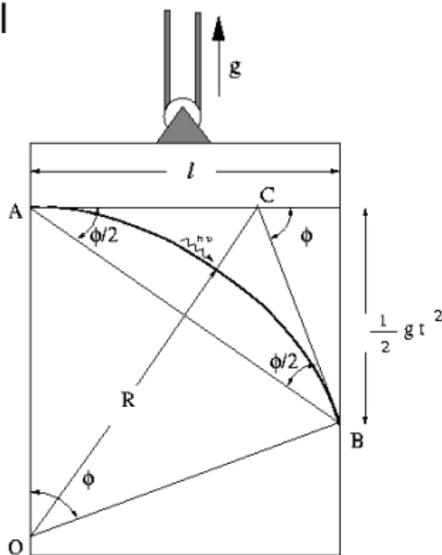


- ▶ No limite de campos gravitacionais fracos é válida a teoria da relatividade restrita
- ▶ É válido o **Princípio da Equivalência** segundo o qual um observador acelerado detecta os mesmos efeitos daqueles experimentados em um campo gravitacional

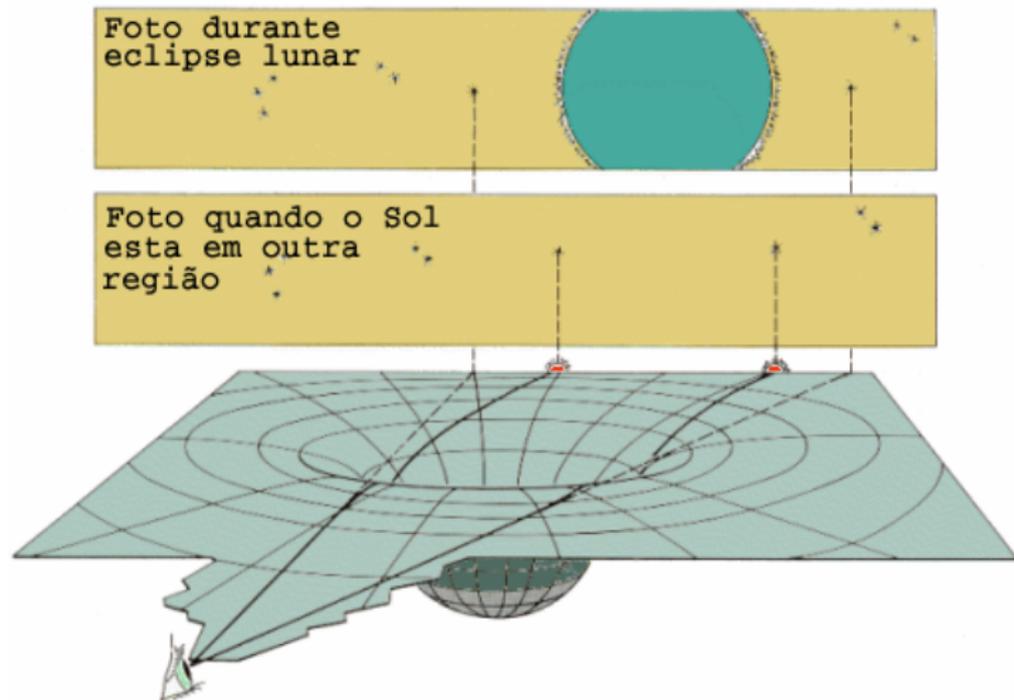


Para um observador externo a curvatura do raio de luz, vista pelo observador no laboratório, seria uma consequência da aceleração daquele referencial. Já para o observador no referencial acelerado o raio de luz se curvaria devido ao efeito do campo gravitacional

Para pequenos ângulos $l \simeq R\phi$
como $\phi/2 \simeq 1/2gt^2/l$
e $t \simeq l/c$
resulta que $R \simeq c^2/g$



Deflexão da luz de uma estrela ao passar pela vizinhança solar.



Pela física newtoniana a deflexão da luz pelo Sol deve ocorrer devido à interação ocorrida durante o intervalo de passagem $\Delta t \simeq b/v$. A velocidade não se altera mas apenas a sua direção por um ângulo tal que $\Delta v \simeq v\Delta\phi$.

$$\Delta v \simeq \frac{GM_{\odot}}{b^2} \Delta t \simeq \frac{GM_{\odot}}{b^2} \frac{b}{v}$$

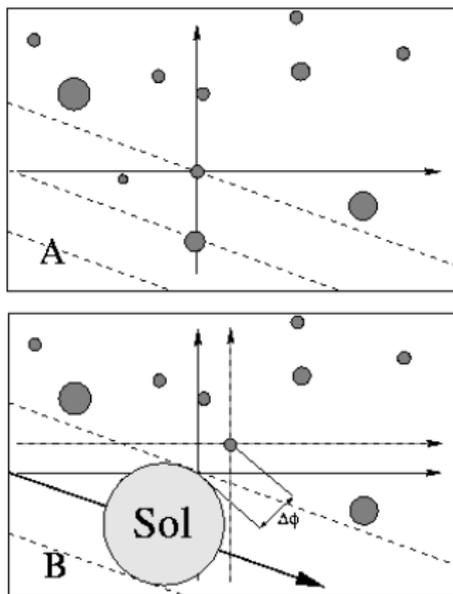
ou

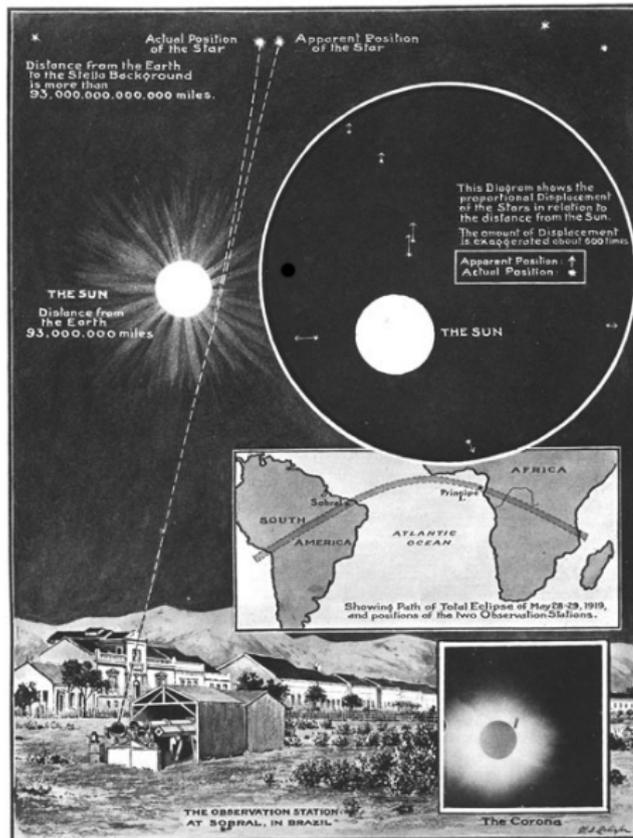
$$\Delta\phi \simeq \frac{GM_{\odot}}{v^2 b}$$

Enquanto que pela relatividade geral

$$\Delta\phi = 4 \frac{GM_{\odot}}{c^2 b}$$

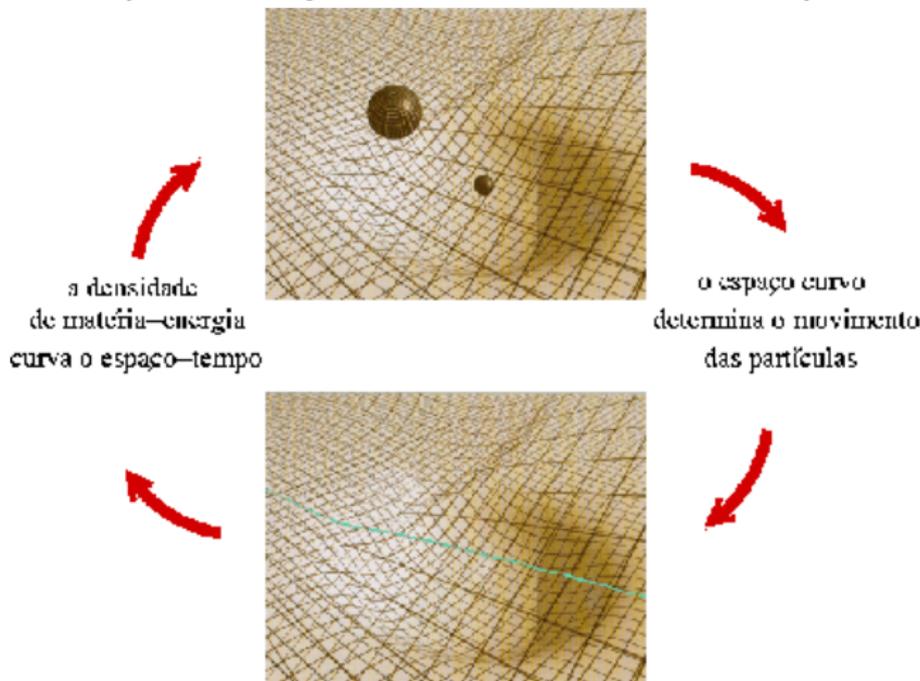
Na teoria da relatividade geral o campo gravitacional do Sol perturba a geometria do espaço ao seu redor fazendo com que a geodésia deixe de ser uma linha reta, provocando assim a deflexão da luz da estrela.





Apesar do entusiasmo de Eddington as medições do experimento de Sobral não atingiram o nível de precisão necessário para representar um teste convincente. Mas o eclipse da Australia foi bem mais eficiente:
Sept 21 1922, Australia: $1'' .77 \pm 0'' .40$

O conteúdo de matéria-energia perturba a geometria e em contrapartida a geometria determina o comportamento da luz.



Pela teoria quântica cada fóton transporta um quantum de energia $h\nu$ e uma inércia equivalente $h\nu/c^2$. Portanto no limite de campos gravitacionais fracos

$$\Delta h\nu + \frac{h\nu}{c^2} \Delta\phi = 0$$

dando origem a um redshift

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\phi}{c^2}$$

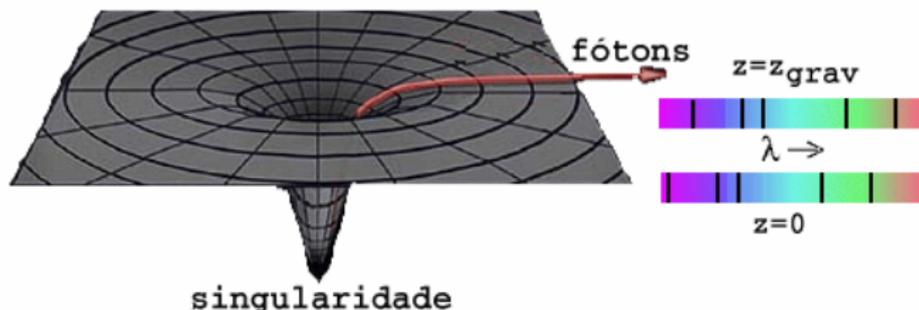
ou ainda

$$z \simeq \frac{GM}{c^2 R}$$

No caso de campos fortes, por exemplo nas vizinhanças de buracos negros, a descrição correta é dada pela equação

$$\frac{\nu_{\infty}}{\nu_0} = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{1/2}$$

Um fóton emitido a uma distância inferior ao raio de Schwarzschild, $R_S = 2GM/c^2$, não pode escapar do campo gravitacional do buraco negro. Este raio para um objeto da massa do Sol seria de apenas $3,0 \times 10^5$ cm.



Considere que um observador utiliza como relógio uma linha atômica padrão, H_α por exemplo, e se encontra no ponto onde o potencial gravitacional nulo. O seu padrão de tempo será $\delta t_0 = 1/\nu_\infty$. Ao se movimentar em direção a um potencial gravitacional mais profundo o seu padrão de tempo se modifica para $\delta t_1 = 1/\nu_o$. Portanto, podemos concluir que as marchas dos dois relógios se alteram na proporção

$$\frac{\delta t_0}{\delta t_1} \simeq 1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}$$

Portanto relógios idênticos, que se movimentem através de campos gravitacionais distintos, acabam se alterando quando o seu sinal é percebido pelo parceiro.

O deslocamento na relatividade geral é medido por

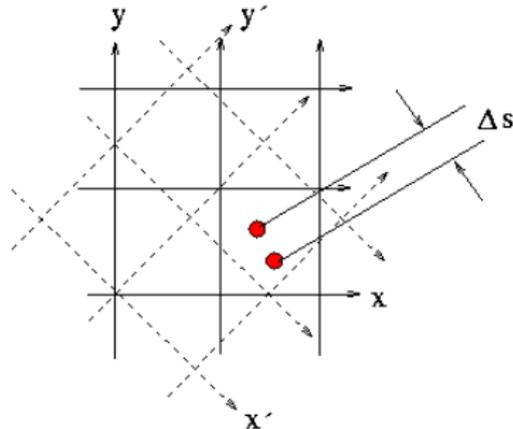
$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

ou ainda

$$\Delta s^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2$$

Na teoria da relatividade, espaço e tempo estão integrados em uma única estrutura e Δs é a forma de medir os deslocamentos neste espaço-tempo quadridimensional (x^0, x^1, x^2, x^3) .

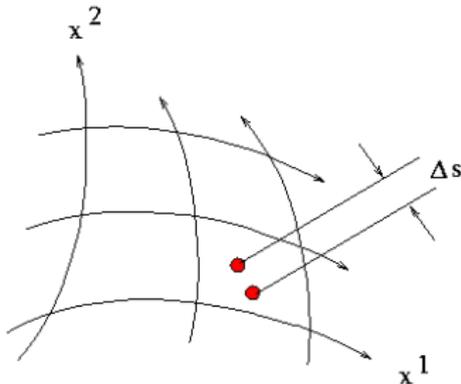
Na métrica euclidiana os deslocamentos são mensurados utilizando-se o teorema de Pitágoras.



$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= \Delta x^2 + \Delta y^2 \\ &= \Delta x'^2 + \Delta y'^2\end{aligned}$$

↑ métrica euclidiana

Na relatividade geral os deslocamentos são mensurados utilizando-se a expressão válida para espaços curvos.



$$\Delta s^2 = g_{11} \Delta x^1 \Delta x^1 + g_{12} \Delta x^1 \Delta x^2 + g_{22} \Delta x^2 \Delta x^2$$

$$= g_{\nu\mu} x^\nu x^\mu$$

coeficientes da métrica

Em um espaço plano sem curvatura

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No caso mais geral

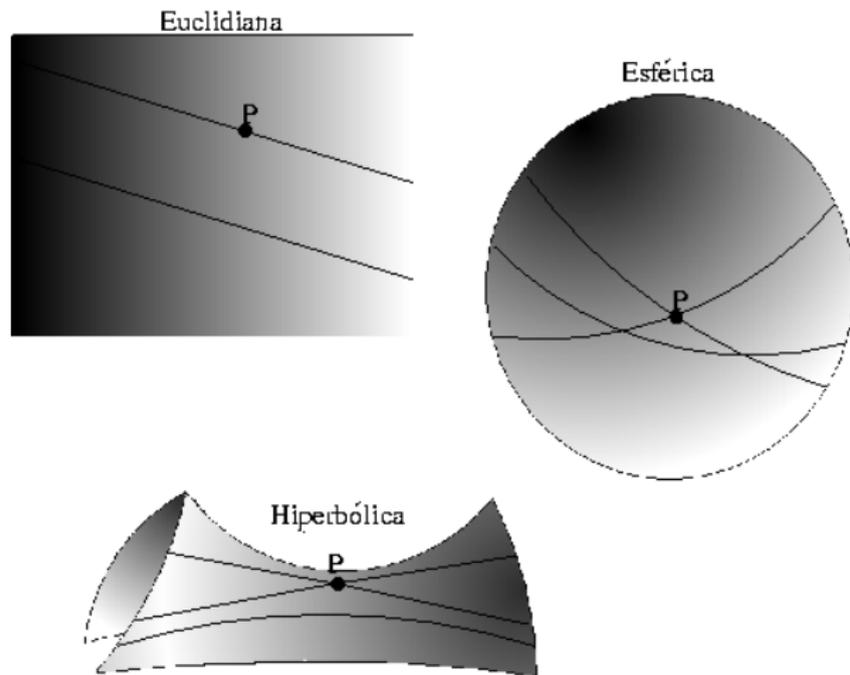
$$\Delta s^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

$$\mathcal{G} = \frac{8\pi G}{c^2} \mathcal{T}$$

que, na relatividade geral, generaliza a equação de Poisson

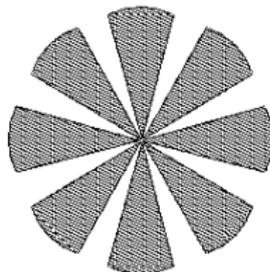
$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$$

Nos espaços curvos o número de paralelas que passam por um dado ponto depende do tipo de geometria considerado.

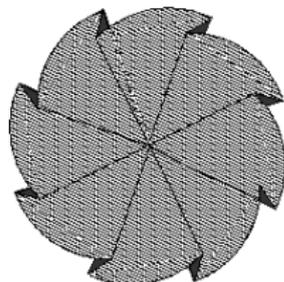


A soma dos ângulos internos dos setores circulares pode ser diferente de 2π , se a geometria não é euclidiana.

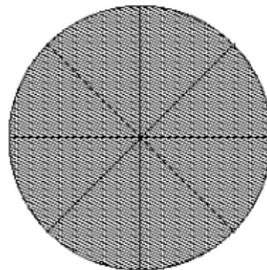
Estérica



Hiperbólica



Euclidiana



O perímetro e a área de um "círculo"

$$C_S = 2\pi\mathcal{R} \sin(l/\mathcal{R})$$

$$A_S = 2\pi\mathcal{R}^2 \left[1 - \cos\left(\frac{l}{\mathcal{R}}\right) \right]$$

tendem à solução euclidiana quando $l \rightarrow 0$ e determinam a constante de curvatura

$$K = \lim_{l \rightarrow 0} 6\pi \frac{C_E - C_S}{C_E A_E}$$

Portanto no caso da geometria sobre uma esfera

$$K = \lim_{l \rightarrow 0} 6 \frac{l - \mathcal{R} \sin l/\mathcal{R}}{l^3}$$

e os habitantes podem realizar testes locais, $l \ll \mathcal{R}$, e descobrir que

$$K = 1/\mathcal{R}^2$$

Podemos agora adotar uma normalização,

$$k = K * \mathcal{R}^2 = \mathcal{R}^2 \lim_{l \rightarrow 0} 6\pi \frac{C_E - C_S}{C_E A_E}$$

A constante de curvatura vale $k = +1$ para uma esfera, $k = -1$ para um hiperbolóide e $k = 0$ para uma superfície plana. Essa é a constante de curvatura da equação de Friedmann

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi}{3} G \rho_0 \frac{1}{R} = -\frac{kc^2}{\mathcal{R}_0^2}$$

em $R = 1$ podemos estimar o raio de curvatura do Universo

$$\mathcal{R}_0 = \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_0 - 1|}}$$

Num Universo unidimensional, descrito por um círculo imerso em um plano

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = \mathcal{R}^2$$

$$x^1 = \mathcal{R} \cos \phi$$

$$x^2 = \mathcal{R} \sin \phi$$

$$(dl)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 = \mathcal{R}^2(d\phi)^2$$

em duas dimensões imersas em um espaço tridimensional

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \mathcal{R}^2$$

$$x^1 = \mathcal{R} \sin \theta \cos \phi$$

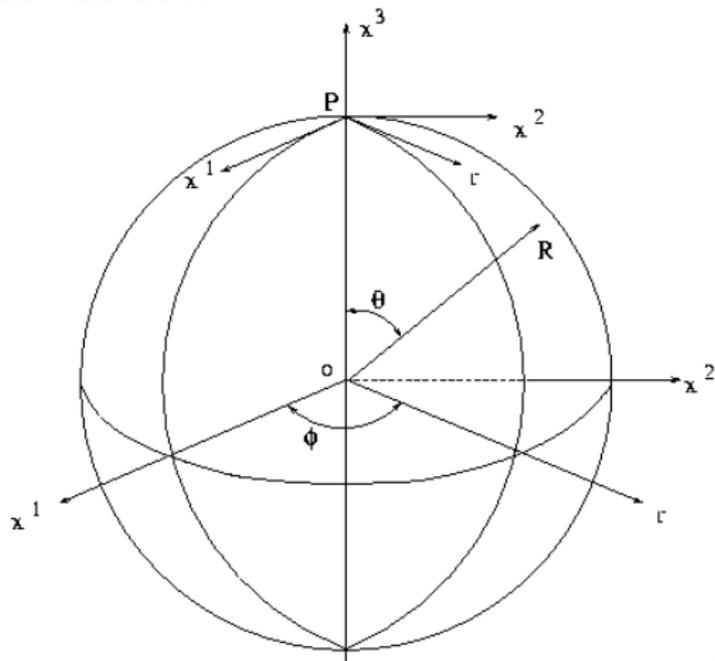
$$x^2 = \mathcal{R} \sin \theta \sin \phi$$

$$x^3 = \mathcal{R} \cos \theta .$$

$$(dl)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

$$= \mathcal{R}^2 (d\theta)^2 + \mathcal{R}^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2$$

Observe que o habitante deste espaço bidimensional consegue entender o significado geométrico das coordenadas x^1, x^2 mas não de x^3 !



No caso de um espaço tridimensional, como o nosso,

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \mathcal{R}^2$$

$$x^1 = \mathcal{R} \sin \psi \sin \theta \cos \phi$$

$$x^2 = \mathcal{R} \sin \psi \sin \theta \sin \phi$$

$$x^3 = \mathcal{R} \sin \psi \cos \theta$$

$$x^0 = \mathcal{R} \cos \psi$$

correspondendo a um elemento de deslocamento espacial conhecida como a métrica de Robertson-Walker

$$(dl)^2 = \mathcal{R}^2 (d\psi)^2 + \mathcal{R}^2 \sin^2 \psi (d\theta)^2 + \mathcal{R}^2 \sin^2 \psi \sin^2 \theta (d\phi)^2$$

Como o raio r é a projeção do “raio” quadridimensional \mathcal{R} sobre o nosso espaço tridimensional

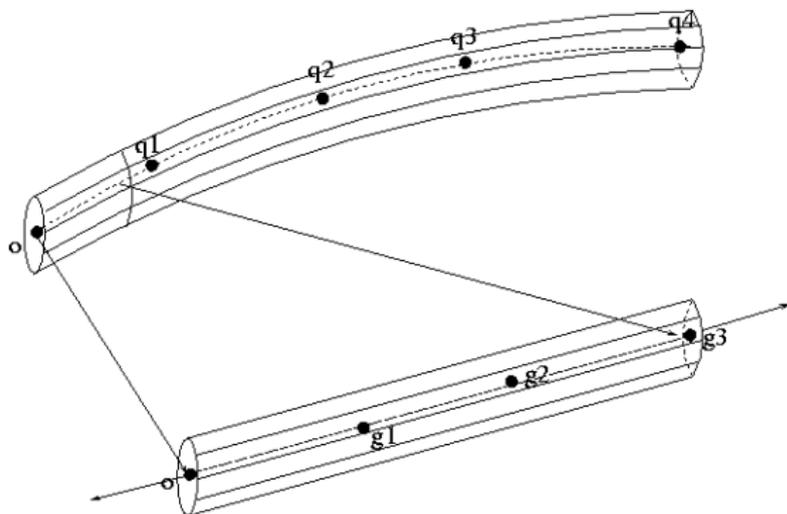
$$r = \mathcal{R} \sin \psi$$

temos que

$$(dl)^2 = \frac{(dr)^2}{1 - r^2/\mathcal{R}^2} + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2$$

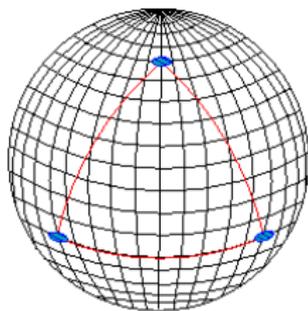
que é a forma mais conhecida da métrica de Robertson-Walker.

As observações de galáxias locais, vista na parte inferior da figura, revelam uma estrutura indistinguível da geometria euclidiana. Já as observações de objetos mais distantes, por exemplo os quasares, começam a revelar as distorções associadas com a curvatura do Universo.



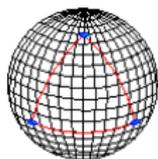
- ▶ *caso 1: para $k = -1$* temos um raio de curvatura imaginário e podemos inferir que $\Omega_0 < 1$. Este é o modelo análogo à situação que encontramos na superfície de um hiperbolóide.
- ▶ *caso 2: para $k = 0$* temos um raio de curvatura infinito e o chamado Universo crítico, ou $\Omega_0 = 1$, também conhecido como modelo de Einstein-de Sitter.
- ▶ *caso 3: para $k = +1$* temos um raio de curvatura real e $\Omega_0 > 1$. Este é o modelo análogo ao caso de uma superfície esférica.

Os três casos de curvatura do Universo: fechado, Aberto e Plano



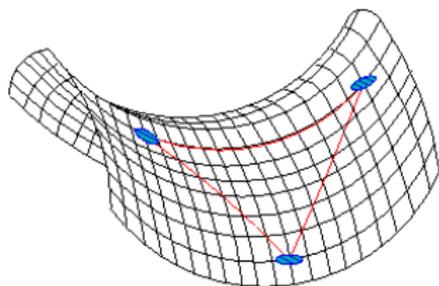
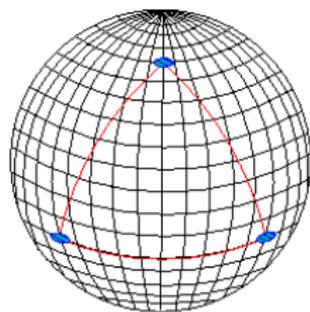
$$t = t_0$$

$$R = 1$$

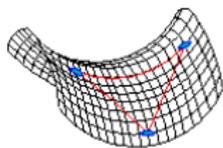
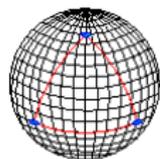


$$R = 0.5$$

Os três casos de curvatura do Universo: fechado, Aberto e Plano

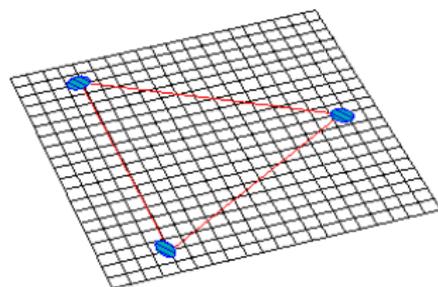
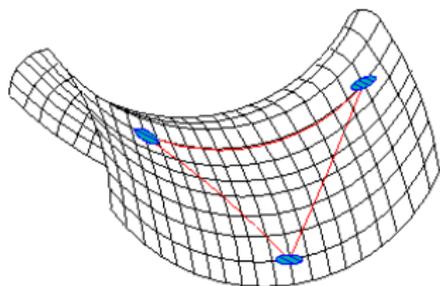
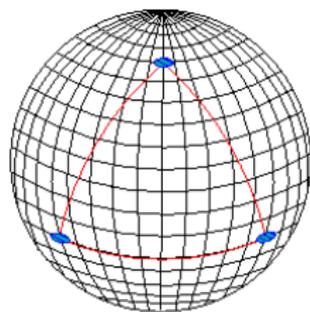


$$t = t_0$$
$$R = 1$$

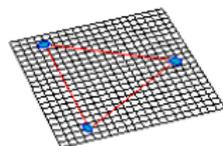
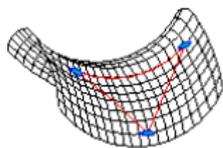
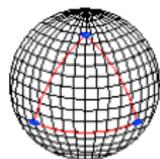


$$R = 0.5$$

Os três casos de curvatura do Universo: fechado, Aberto e Plano

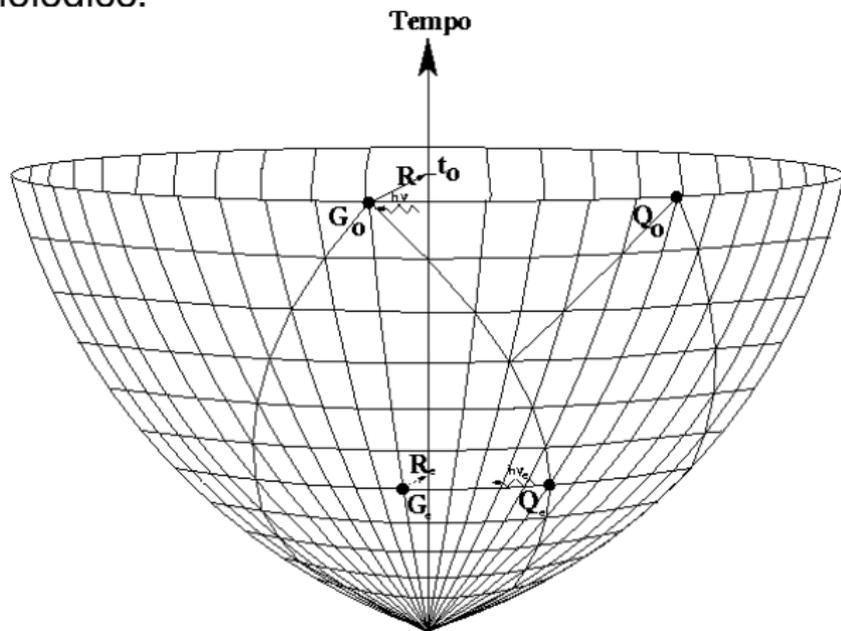


$$t = t_0$$
$$R = 1$$



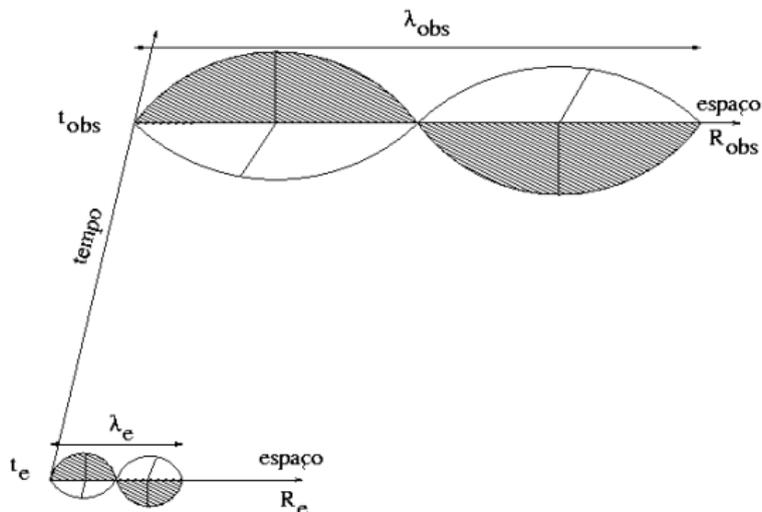
$$R = 0.5$$

Visualização do processo de evolução de um Universo de uma dimensão imerso em duas dimensões ilustrando como a relatividade geral obedece naturalmente ao princípio cosmológico.

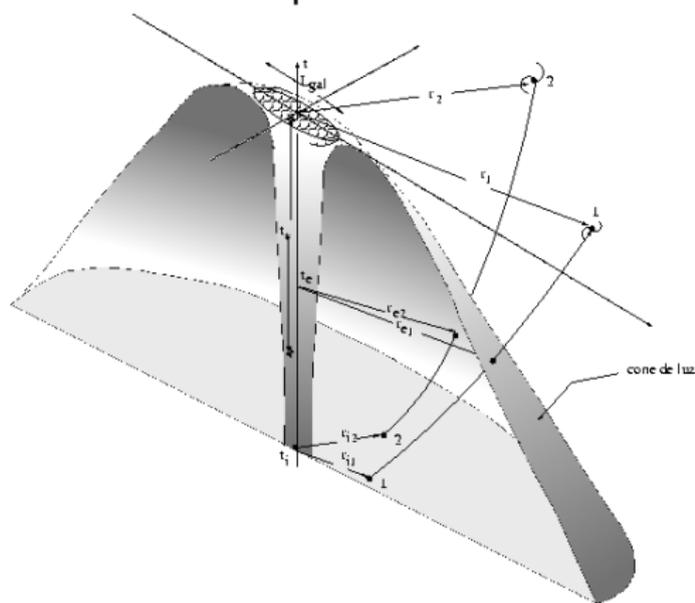


O redshift na Relatividade Geral se deve à expansão cosmológica que afeta o comprimento de uma onda eletromagnética ($\lambda \propto R$) resultando que $\lambda_{obs} = \lambda_0/R$ ou

$$1 + z = \frac{1}{R}$$



As estrelas da Galáxia não participam da expansão cosmológica e nos permitem examinar o passado primordial do Universo. A outra contribuição vem dos objetos distantes quando estes interceptam o nosso cone de luz.



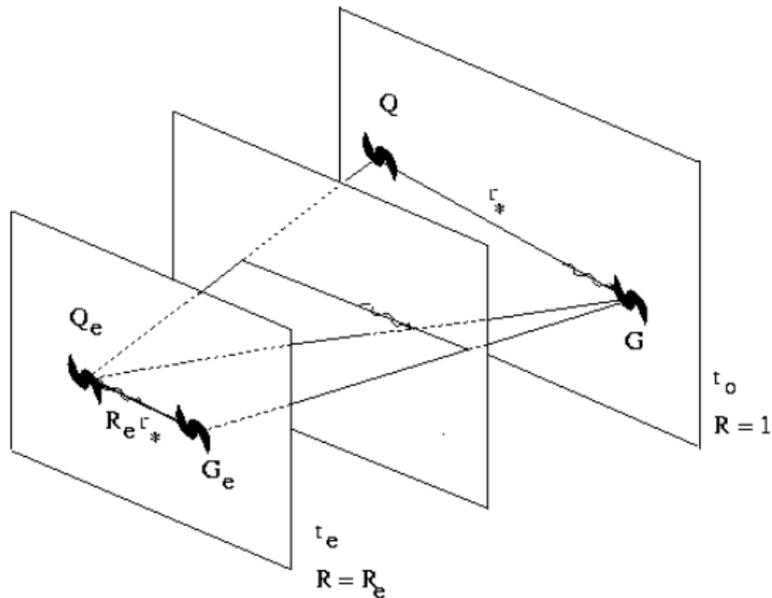
Considerando que as galáxias são partículas de teste que acompanham a expansão, podemos introduzir o conceito do fator de escala

$$\frac{r_1(t_0)}{r_{1e}(t_e)} = \frac{r_2(t_0)}{r_{2e}(t_e)} = \dots = \frac{1}{R_e(t_e)}$$

A expansão cosmológica afeta também a detecção de intervalos de tempo observados em redshifts elevados. Após a emissão, a separação entre um pulso e o seguinte deve ser $L_e = c\Delta t_e$ no referencial do quasar. Devido à expansão do espaço a separação entre esses dois pulsos é amplificada pela variação do fator de escala e

$$\Delta t_{obs} = (1 + z)\Delta t_e$$

Devido à expansão cosmológica o percurso total do fóton ($\int c dt$) é bem diferente da separação comóvel, r_* , que ele é capaz de varrer entre a emissão e a sua detecção final.



Em um Universo isotrópico, homogêneo e em expansão, os deslocamentos espaciais podem ser obtidos através da métrica de Robertson-Walker corrigida pelo fator de escala

$$dl^2 = R^2(t) \left[\frac{(dr)^2}{1 - Kr^2} + r^2 \left((d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2 \right) \right]$$

Como a direção do nosso referencial é arbitrária, podemos considerar sem perda de generalidade que $\phi = \theta = 0$, e neste caso obtemos que o deslocamento de um raio luminoso deve obedecer à relação

$$R(t)^2 \frac{(dr/dt)^2}{1 - Kr^2} = \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 = c^2$$

$$\int_0^{r_*} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)}$$

Para um dado modelo de Friedmann utilizamos as expressões de $R(t)$, para obter a fórmula de Mattig,

$$r_*(z) = \frac{2c}{H_0 \Omega_0^2 (1+z)} [\Omega_0 z + (\Omega_0 - 2)(-1 + \sqrt{1 + \Omega_0 z})]$$

que fornece a distância comóvel percorrida pelo fóton em função do *redshift* da fonte emissora. Em particular, para um Universo de Einstein-de Sitter ($k = 0$, $\Omega_0 = 1$) temos,

$$r_*(z) = \frac{2c}{H_0} (1 - (1+z)^{-1/2}), \quad \Omega_0 = 1$$

Em particular, se observarmos uma fonte em um *redshift* muito elevado, a distância comóvel se aproxima do limite

$$r_* \simeq 2 \frac{c}{H_0 \Omega_0} \quad z \gg 1$$

Observe ademais que, uma vez que o fóton é obrigado a percorrer o nosso cone de luz, a distância comóvel é diferente da distância física realmente percorrida pelo fóton.

$$l(z) = c(t_0 - t_e) = \frac{2}{3} \frac{c}{H_0} (1 - (1+z)^{-3/2})$$

válida para $\Omega_0 = 1$. Essas relações podem ser diretamente deduzidas lembrando que no modelo plano $R(t) = (t/t_0)^{2/3}$ e $t_0 = 2/3H_0$.

Como os fótons foram emitidos em um *redshift* z , a energia de cada um deles, $h\nu = hc/\lambda$, sofreu uma diluição

$$dE_{obs} = \frac{1}{1+z} dE_{emi}$$

como o tempo sofreu uma dilatação

$$dt_{obs} = (1+z) dt_{emi}$$

temos que o fluxo observado

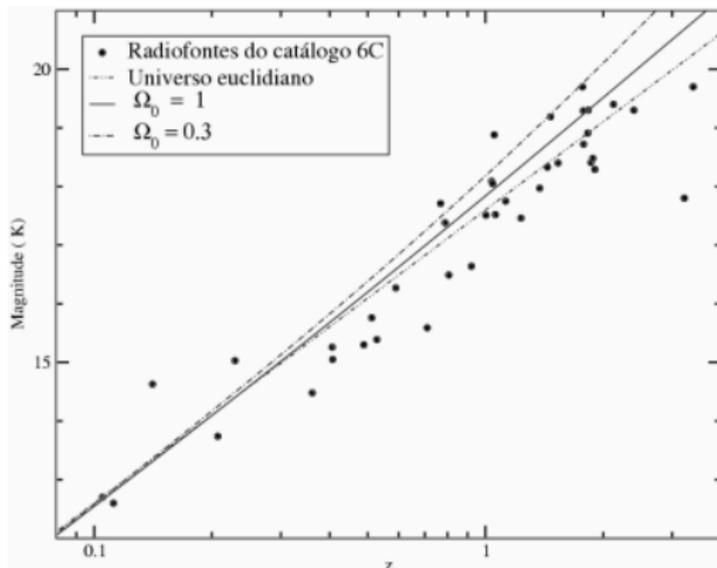
$$f_{obs} = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{L}{4\pi r_*^2} = \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

sendo $d_L = (1+z)r_*$, denominada distância de luminosidade.

em termos de magnitude temos

$$m - M = -5 + 5 \log(d_L(\text{pc}))$$

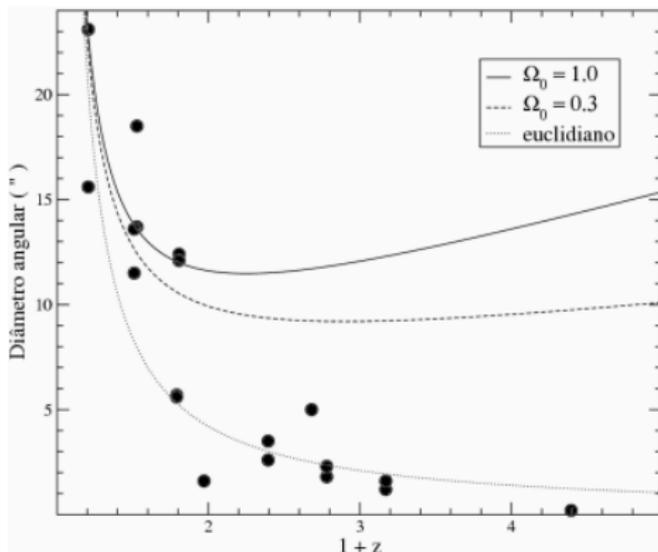
$$m - M + 5 \log h \simeq 42.38 + 5 \log z - 1.086(\Omega_0/2 - 1)z + \dots$$



Analogamente a dimensão angular de uma fonte é dada por

$$\theta = \frac{D}{R_{\theta} r_*} = (1+z) \frac{D}{r_*}$$

$$\theta = \frac{1+z}{1-(1+z)^{-1/2}} \frac{H_0 D}{2c}, \quad \Omega_0 = 1$$

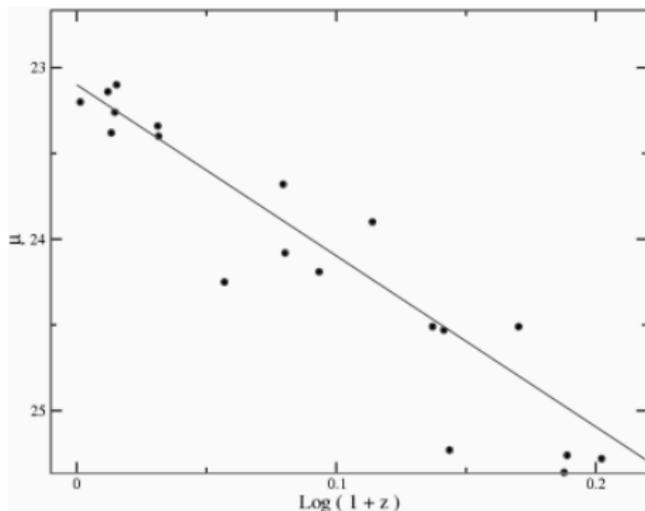


Em decorrência, temos uma consequência muito positiva quando da observação de objetos em *redshifts* elevados, já que, ao contrário de um espaço euclidiano, mesmo nessa situação podemos estudar a estrutura destes objetos distantes. No caso particular de um objeto de dimensão física \mathcal{L}_{Mpc} no momento da emissão do fóton, por exemplo um aglomerado de galáxias, visto em um *redshift* muito elevado o seu diâmetro angular, para nós, será

$$\theta = 0',57(1 + z)\mathcal{L}_{Mpc}\Omega_0 h, \quad z \gg 1$$

outra consequência destas relações é o **Teste de Tolman** prevendo que o brilho superficial médio deve ser fortemente afetado pelo *redshift*

$$SBR = \frac{f_{obs}}{\pi\theta^2} = \frac{SBR_0}{(1+z)^4},$$



No intervalo dt o fóton percorre a distância cdt , sendo o parâmetro de escala $R(t)$. O elemento de distância comóvel deve ser $cdt/R(t)$ que, integrado desde a origem até um instante arbitrário

$$d = \int_0^t \frac{cdt}{R(t)}$$

Transformando esta distância comóvel em distância física

$$d_H(t) = R(t) \int_0^t \frac{cdt}{R(t)}$$

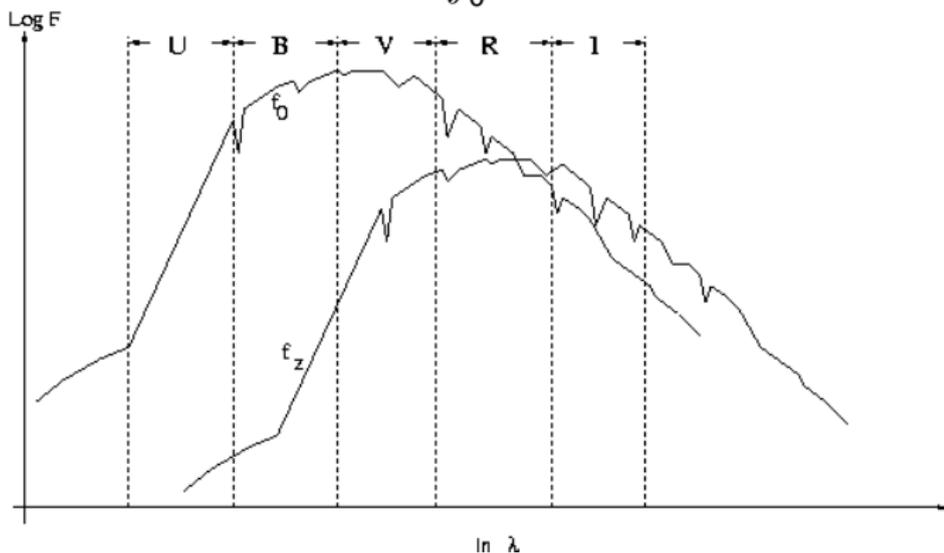
Representado-se o fator de escala na forma de uma lei de potência $R \propto qt^a$, temos

$$d_H = \frac{ct}{1 - a}$$

No caso de um Universo plano, temos $a = 2/3$ e $d_H = 3ct$

O fluxo integrado observado através de um filtro qualquer pode ser definido pela relação

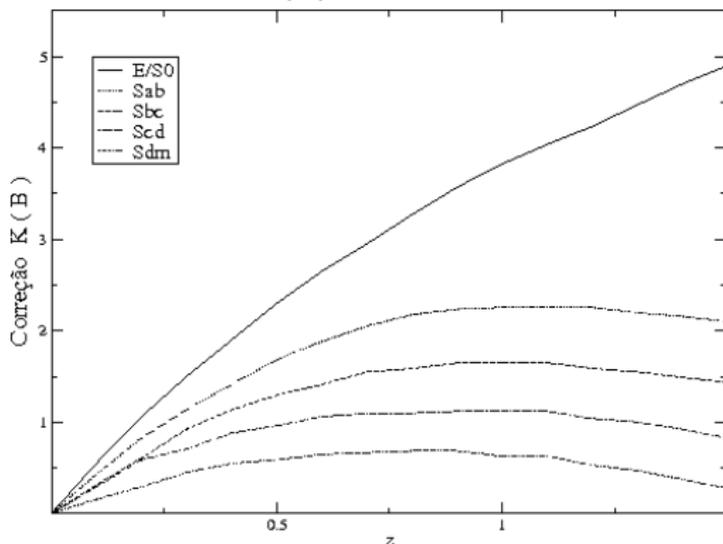
$$f_{S0} = \int_0^{\infty} S(\lambda) f_0(\lambda) d\lambda$$



Em conseqüência podemos definir a constante de correção

$$K = 2,5 \log(1 + z) + 2,5 \log \frac{\int_0^\infty S(\lambda) f_0(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty S(\lambda) f_z(\lambda) d\lambda} .$$

tal que $m = m_{obs}(z) - K$



Se estivéssemos em um Universo euclidiano, uniformemente preenchido com n_0 fontes por unidade de volume, cada uma contribuiria com um fluxo observado

$$f_0 = \frac{L}{4\pi r^2}$$

a máxima distância em que poderíamos observável seria

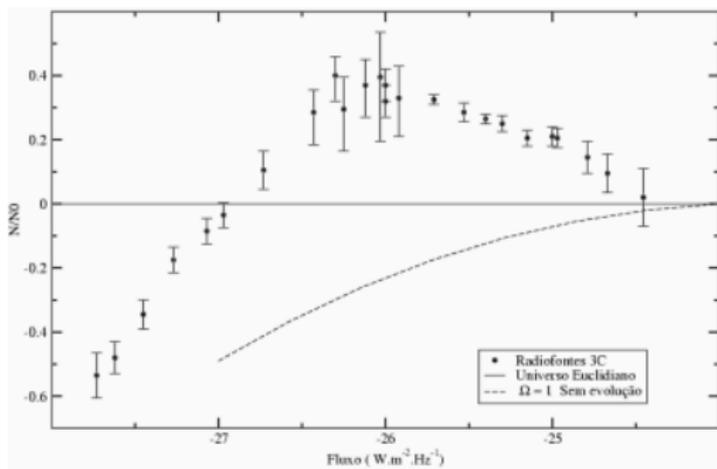
$$r_{max} = \left(\frac{L}{4\pi f_0}\right)^{1/2}$$

donde se conclui que

$$N(f > f_0) = \frac{4\pi}{3} n_0 r_{max}^3 = \frac{n_0 L^{3/2}}{3\sqrt{4\pi}} \frac{1}{f_0^{3/2}}$$

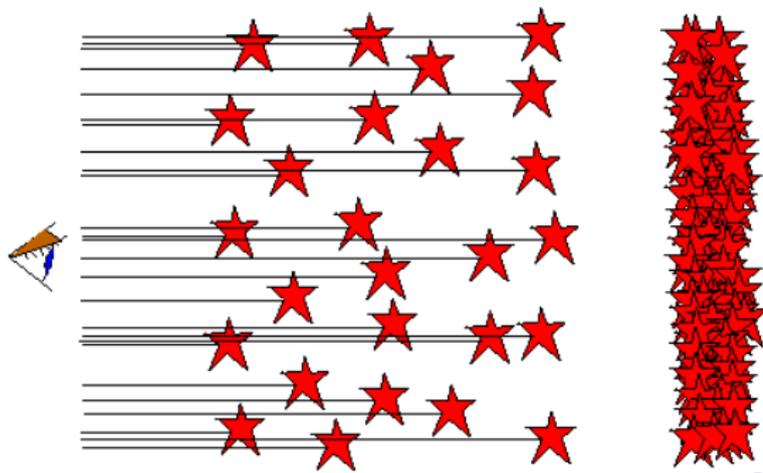
$$N(f > f_0) f_0^{3/2} = \frac{n_0 L^{3/2}}{3\sqrt{4\pi}} = C^{te},$$

contrariamente ao que se observa como ilustrado na figura abaixo. Portanto o Universo está evoluindo contrariamente ao que se poderia prever na teoria do estado estacionário.



Paradoxo de Olbers

Raciocínio exposto por Olbers no século XVIII argumentando que o céu noturno devia ser iluminado, contrariamente ao que se observa. O motivo é que em um Universo euclidiano, infinito, homogeneamente preenchido com estrelas sempre veremos uma estrela em qualquer linha de visada.



Em um Universo preenchido com uma densidade volumétrica n_0 de estrelas, cada uma contribuiria com

$$f = \frac{L}{4\pi r^2}$$

para o fluxo observado na Terra. Como deveriam existir

$$n_0 4\pi r^2 dr$$

dessas estrelas, em uma camada esférica de espessura dr , a contribuição total de todas as fontes seria

$$df = \frac{L}{4\pi r^2} n_0 4\pi r^2 dr$$

Portanto, o fluxo total recebido por todas as estrelas contidas no interior de uma esfera de raio r seria a soma destas contribuições de cada camada, ou

$$f = \int_0^r n_0 L dr = n_0 L r$$

Mesmo considerando-se que as estrelas têm dimensões finitas deveríamos observar uma estrela dentro de um ângulo sólido,

$$\delta\Omega = \frac{\pi R_*^2}{r^2}$$

Como $\delta V = \delta\Omega r^3/3 = \pi R_*^2 r/3$ e $n_0 \delta V = 1$ resulta que poderíamos observar, em média, as estrelas que estivessem a uma distância típica

$$r = \frac{3}{n_0 \pi R_*^2}$$

e cada uma destas estrelas estaria fornecendo uma contribuição, para o fluxo observado na Terra, igual a

$$f = \frac{L n_0^2 \pi R_*^4}{36}$$

Considerando-se o número total destas estrelas ($n_0 4\pi r^3/3$) o fluxo total seria

$$f = 4f_*$$

e portanto o céu noturno deveria ser tão brilhante quanto a superfície do Sol!

A solução deste quebra-cabeça depende do modelo cosmológico adequado para descrever o Universo em que estamos vivendo.

- ▶ Como o Universo está em expansão, as distâncias são maiores que a estimativa euclidiana e devem ser previstas pelo modelo cosmológico considerando a relatividade geral.
- ▶ A população de estrelas está evoluindo ao longo do tempo, o que diminui o seu número no passado. As estrelas, e conseqüentemente as galáxias, podem brilhar apenas por um tempo limitado. O fator dominante é que o Universo tem uma idade finita e apenas um número finito de estrelas está dentro do horizonte cosmológico.

Considerando uma densidade de matéria bariônica $\rho_b = \Omega_{0b}\rho_{0c} \simeq 7,52 \times 10^{-31} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} h^2$ deveríamos ter uma densidade média de estrelas do tipo solar de aproximadamente $3,96 \times 10^{-64} \text{ *} \cdot \text{cm}^{-3} h^2$. Portanto num Universo euclidiano, a distância média dentro da qual deveríamos esperar a presença de uma estrela deveria ser

$$r = \frac{3}{n_0 \pi r_*^2} \simeq 5,26 \times 10^{23} \text{ anos} - \text{luz} \quad h^{-2}$$

Sendo a idade do Universo de 10^{10} anos, não podemos observar estrelas mais distantes do que 10^{10} anos-luz. O número de estrelas que efetivamente observáveis é ordens de grandeza menor do que aquele necessário para cobrir todo o céu, o que explica o fato de termos uma noite escura.

Problemas

1. Qual é o *redshift* gravitacional que devemos esperar quando observamos um fóton emitido da superfície de uma anã branca cuja massa é $2,1 \times 10^{33}$ g e cujo raio é da ordem de $5,5 \times 10^8$ cm?
2. Estime o *redshift* gravitacional sofrido por um fóton que escapa de uma galáxia de $10^9 M_{\odot}$ após ter sido emitido por uma estrela distante 1 kpc do centro da galáxia.
3. Um quasar é observado em $z = 4,5$. Qual é o fator de escala dessa época? Adotando-se o modelo plano, qual deve ser a idade do Universo nessa época quando comparada à sua idade atual?

4. Mostre, a partir das definições das distâncias de luminosidade e comóvel, que no caso de um Universo plano, $\Omega_0 = 1$, sem considerarmos a evolução e a correção K,

$$m - M - 5 \log h = 42,386 + 5 \log \left\{ 2 \left[(1 + z) - \sqrt{1 + z} \right] \right\}$$

5. Mostre que em um universo plano o diâmetro angular aparente de uma fonte passa por um mínimo,

$$\theta_{min} = \frac{27}{8} \frac{H_0 D}{c},$$

em $z = 1,25$. Qual seria o diâmetro angular da nossa Galáxia, $D \simeq 40$ Kpc, nesse *redshift* para $h = 0,65$? Que conclusões você poderia inferir se o resultado deste teste fosse negativo?

6. No momento, as melhores resoluções espaciais atingidas pelos telescópios ópticos são da ordem de $0,05''$. Em um universo plano, qual seria a dimensão linear do menor objeto cosmológico que poderíamos resolver?

7. A radiogaláxia 8C 1435+63 tem um *redshift* $z = 4,25$.
Observa-se que a sua região nuclear tem uma dimensão angular aparente de $5''$. Supondo que o nosso Universo seja plano e $h = 0,65$, qual deve ser o diâmetro métrico desta região nuclear em *parsecs*?

FIM