

# HALOS TRIAXIAIS E A RAZÃO AXIAL DE GALÁXIAS ESPIRAIS



**RUBENS EDUARDO GARCIA MACHADO**

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Eustáquio de Souza

Dissertação apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE EM ASTRONOMIA.

MARÇO DE 2006



à Vó Clarice



# Agradecimentos

Agradeço o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, que possibilitou a realização deste trabalho, através do processo 03/09678-8.

Agradeço ao Ronaldo toda a sua colaboração, atenção e permanente disposição em me ajudar.

Agradeço à minha família que, proporcionando-me sempre um ambiente de incentivo, foi fundamental na minha formação.

Agradecimentos especialmente intensos são devidos à Adriana e ao Laerte, sem cuja bem humorada convivência diária o trabalho poderia ter sido bastante enfadonho.

E agradeço enormemente à Cecília, que me acompanhou durante estes anos e foi sempre tão compreensiva e atenciosa e adorável.



*“... esas cosas incompatibles  
que solo por razón de coexistir  
llevan el nombre de universo.”*

J. L. Borges





# Sumário

<b>RESUMO</b>	<b>xi</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 A forma das galáxias espirais . . . . .	1
1.2 Classificação morfológica . . . . .	2
1.3 Elipsóides oblatos, prolatos e triaxiais . . . . .	6
1.4 Distribuições de razões axiais . . . . .	9
1.5 Halos de matéria escura . . . . .	10
1.6 Sloan Digital Sky Survey . . . . .	12
1.7 Objetivos . . . . .	13
<b>2 A Amostra de Galáxias</b>	<b>15</b>
2.1 Critérios de seleção . . . . .	15

2.2	Classificação morfológica . . . . .	16
2.3	Verificação da classificação morfológica . . . . .	25
2.4	Características da amostra . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Medidas das Razões Axiais</b>	<b>31</b>
3.1	Procedimento e critérios de medição . . . . .	31
3.2	Comparação com as medidas provenientes do SDSS . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Análise das Funções de Distribuição de Razões Axiais</b>	<b>43</b>
4.1	Deconvolução das distribuições . . . . .	43
4.2	Resultados da amostra completa . . . . .	46
4.3	Resultados separados em tipos morfológicos . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Fusões de Elipsóides Homogêneos</b>	<b>55</b>
5.1	Elipsóides de Jacobi . . . . .	57
5.2	O caso da esfera . . . . .	59
5.3	Fusão frontal de duas esferas sem rotação . . . . .	59
5.4	Fusão não frontal de duas esferas . . . . .	62
5.5	Redshift de formação . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>71</b>

6.1	Conclusões . . . . .	71
6.2	Perspectivas . . . . .	73
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>75</b>
	<b>APÊNDICE A</b>	<b>79</b>

# Lista de Figuras

1.1	Diagrama de Hubble original (Hubble, 1936) incluindo as galáxias S0 que na época ainda não haviam sido identificadas. . . . .	3
1.2	A classificação morfológica pioneira de Wolf (1908) é meramente descritiva e não configura uma seqüência contínua. . . . .	3
1.3	Exemplo ilustrativo de um diagrama de Hubble com imagens do SDSS. . .	5
1.4	Classificação morfológica de de Vaucouleurs. . . . .	6
1.5	Elipsóides oblatos (i) e prolatos (ii) são figuras de revolução que possuem uma secção transversal circular (cinza). Em ambos os casos, há dois eixos iguais e um eixo diferente, que é ortogonal ao plano que contém a secção circular. No caso oblato, o eixo ortogonal ao plano circular é menor que os outros e no caso prolato, o eixo ortogonal ao plano circular é o maior. . . .	8
1.6	Um esferóide triaxial é uma figura que apresenta os três eixos diferentes: $1 \geq p \geq q$ e nenhuma das secções é circular. Se $p = 1$ , temos o caso oblato. . . . .	8
1.7	Área de cobertura do céu (imageamento) do Data Release 4 do SDSS em coordenadas galácticas (Adelman-McCarthy et al., 2005) . . . . .	12
2.1	Distribuição dos subtipos morfológicos das galáxias espirais: as barradas correspondem a aproximadamente um quarto e cada subtipo a,b,c contribui com cerca de um terço. . . . .	18

2.2	Exemplos de classificação morfológica: galáxias não-barradas. As três galáxias da primeira linha são Sa, as da segunda linha são Sb e as da terceira são Sc. . . . .	20
2.3	Exemplos de classificação morfológica: galáxias barradas. As três galáxias da primeira linha são SBa, as da segunda linha são SBb e as da terceira são SBc. . . . .	21
2.4	Exemplos de imagens excluídas da amostra: galáxias aproximadamente alinhadas com estrelas próximas. Nestes casos, a presença de estrelas muito brilhantes comprometeria ou impossibilitaria a medida da razão axial do disco. . . . .	22
2.5	Exemplos de imagens excluídas da amostra: galáxias irregulares, sofrendo interação ou com companheiras próximas. . . . .	23
2.6	Verificação da classificação morfológica: nossa classificação e a do NED não diferem significativamente para uma sub-amostra de $\sim 200$ galáxias brilhantes. . . . .	25
2.7	A distribuição das magnitudes $g$ da amostra de espirais (histograma) mostra que o corte em magnitude está bem abaixo do limite de completudeza. A reta corresponde a $\log N \propto 0,6\Delta m$ . . . . .	27
2.8	Distribuição de redshifts para a amostra completa. Cerca de metade das galáxias têm redshift menor que 0,03. . . . .	27
2.9	A função de luminosidade da amostra de espirais é consistente com estimativas recentes para galáxias de campo. . . . .	28
2.10	Diagramas cor-cor para as galáxias espirais separadas em subtipos morfológicos. O coeficiente angular aumenta para as galáxias mais tardias. . . . .	29
3.1	Exemplo ilustrativo de isofotas elípticas superpostas à imagem de uma galáxia Sb. O campo tem 198 arcsec de lado. . . . .	34
3.2	Exemplo de razão axial em função do semi-eixo maior. A linha horizontal corresponde ao valor de $b$ adotado para esta galáxia. . . . .	35

3.3	Exemplo de brilho superficial em função do semi-eixo maior. . . . .	35
3.4	Distribuição das razões axiais aparentes para todas as 1603 galáxias medidas. . . . .	36
3.5	Comparação entre nossas medidas e dados do SDSS. Ambos correspondem a razões axiais medidas em imagens no filtro $r$ . . . . .	37
3.6	Incerteza das medidas em função da razão axial, para as nossas medições. As incertezas aumentam levemente para os objetos mais circulares, conforme se nota pelo ajuste linear. . . . .	38
3.7	Exemplo de galáxia (SBc) com medidas discordantes de razão axial (o campo tem cerca de 277 arcsec de lado). . . . .	39
3.8	Este é um exemplo extremo em que a nossa medida ( $b \simeq 0,7$ ) discorda da medida do SDSS ( $b_{SDSS} \simeq 0,3$ ), que provavelmente se limitou à região da barra. O nosso valor é mais consistente com a forma do disco. . . . .	39
3.9	Comparação entre nossas medidas e dados do SDSS separados em tipos morfológicos. . . . .	41
3.10	Comparação entre nossas medidas e dados do SDSS mostra que nós medimos as razões axiais em raios $r$ ligeiramente maiores. . . . .	42
4.1	Distribuição de razões axiais aparentes para 1446 galáxias espirais. Note que o modelo triaxial (curva espessa) reproduz a observada falta de galáxias aparentemente circulares (dois últimos intervalos), enquanto que o modelo oblato (curva tracejada) prevê um número maior de objetos. . . . .	47
4.2	Funções de distribuição intrínsecas de $p$ e de $q$ , para o modelo triaxial, conforme os parâmetros da Tabela 4.1. . . . .	48

4.3	Distribuições de razões axiais aparentes com os ajustes oblato e triaxial, separadas em barradas e não-barradas. Observe que a distribuição das galáxias barradas não contém tantos objetos de baixa razão axial quanto a das galáxias não-barradas (devido à dificuldade de observar barras em galáxias de perfil). No entanto, as distribuições na região das galáxias aproximadamente de face são semelhantes, indicando que tanto galáxias barradas quanto não-barradas apresentam discos não-circulares. . . . .	51
4.4	Distribuições de razões axiais aparentes com os ajustes oblato e triaxial, separadas em tipos morfológicos Sa, Sb e Sc; barradas e não-barradas incluídas. . . . .	53
5.1	Relação entre o parâmetro de impacto $\beta$ e a razão de velocidades $\gamma$ que geram um elipsóide triaxial com razão axial meridional $p$ . Note que para um dado $p$ , a velocidade quase independe do parâmetro de impacto. . . .	65
5.2	Relação entre a razão de velocidades $\gamma$ e a razão axial $p$ do objeto resultante do encontro, para três parâmetros de impacto (resultando em um objeto triaxial); e o resultado aproximado para uma colisão frontal que gera um elipsóide prolato. A linha vertical é a razão axial obtida através das medidas das galáxias do SDSS. . . . .	66
5.3	Relação entre a razão axial $q$ e o parâmetro $\gamma$ . . . . .	67

# Lista de Tabelas

1.1	Comprimentos de onda centrais $\lambda_c$ dos filtros do SDSS comparados com os dos filtros de Johnson. . . . .	13
2.1	Crêterios de sele�o da amostra de galáxias. . . . .	16
2.2	Morfologia da amostra completa. . . . .	17
2.3	Morfologia da amostra de espirais. . . . .	18
2.4	Coordenadas dos objetos das figuras de exemplo. . . . .	24
2.5	Dependência morfológica das rela�es cor-cor. . . . .	28
3.1	Incertezas médias nas razões axiais aparentes $b$ conforme o parâmetro de qualidade $Q$ . . . . .	33
3.2	Ajustes das rela�es entre nossas medidas de razão axial e as do SDSS, separadas por tipo morfológico. . . . .	40
4.1	Parâmetros das fun�es de distribui�o (gaussianas) das razões axiais intr�secas para todas as espirais. O modelo triaxial � estatisticamente mais significativo. . . . .	46
4.2	Parâmetros das fun�es de distribui�o (gaussianas) das razões axiais intr�secas para as espirais separadas em barradas e não-barradas. . . . .	50



4.3	Parâmetros das funções de distribuição (gaussianas) das razões axiais intrínsecas para as espirais separadas em tipos morfológicos. . . . .	50
-----	---	----



# Resumo

A triaxialidade dos halos das galáxias espirais foi estudada através das funções de distribuição de razões axiais aparentes dos seus discos. Utilizou-se uma amostra de galáxias limitada por magnitude ( $g \leq 16$ ). Foram selecionadas  $\sim 1600$  galáxias espirais do SDSS (*Sloan Digital Sky Survey*), que foram classificadas morfológicamente por inspeção visual. Para evitar contaminações espúrias, removeram-se da amostra galáxias em interação, com companheiras próximas ou aproximadamente alinhadas com estrelas da Galáxia.

As razões axiais das galáxias foram medidas individualmente e com critérios uniformes, ajustando-se isofotas elípticas a cada imagem no filtro  $r$ . Um algoritmo de Monte Carlo foi empregado para inferir a distribuição de razões axiais intrínsecas. O modelo de disco oblato é incapaz de reproduzir a observada falta de galáxias aparentemente circulares. A fração reduzida de galáxias aparentemente circulares, que se observa sistematicamente nas espirais de todos os sub-tipos morfológicos, é uma forte indicação de que os discos destas galáxias sejam intrinsecamente elípticos. O modelo triaxial mostrou-se mais estatisticamente significativo, além de ser capaz de prever a fração correta de galáxias quase circulares. Concluimos, portanto, que o modelo de disco não-circular descreve melhor as observações e que a razão dos eixos no plano do disco deve ser de  $p = 0,849 \pm 0,063$ .

Empregando uma abordagem analítica simplificada, nós propusemos uma descrição da formação de halos escuros triaxiais no contexto de colisões de protogaláxias. Aproximando as protogaláxias por elipsóides homogêneos de Jacobi, notamos que a triaxialidade do objeto resultante de uma fusão depende da velocidade de colisão e calculamos a época em que estes encontros devem ter ocorrido, para gerar elipsóides com a triaxialidade em questão. Estimamos que neste cenário os discos das galáxias espirais tenham sido construídos a partir de aproximadamente  $z \simeq 0,69 \pm 0,32$ .



# Abstract

The triaxiality of the halos of spiral galaxies was studied through the distribution function of the apparent axial ratios of their disks. We used a magnitude-limited sample of galaxies ( $g \leq 16$ ). We selected  $\sim 1600$  spiral galaxies from the SDSS (*Sloan Digital Sky Survey*), which were morphologically classified by visual inspection. In order to avoid spurious contaminations, interacting galaxies were removed from the sample, as well as those with nearby companions or with foreground stars.

The axial ratios of the galaxies were measured individually and with uniform criteria, by fitting elliptical isophotes to each  $r$ -filter image. A Monte Carlo algorithm was used to infer the distribution of intrinsic axial ratios. The oblate disk model is unable to account for the observed lack of apparently circular galaxies. The small fraction of apparently circular galaxies, which is systematically observed in spirals of all morphological subtypes, is as strong indication that the disks are indeed intrinsically elliptical. The triaxial model is more statistically significant and also, it is able to predict the correct fraction of nearly circular galaxies. We find, therefore, that the non-circular disk model provides a better description of the observations and that the axes on the plane of the disk should be in the ratio  $p = 0.849 \pm 0.063$ .

By adopting a simplified analytical approach, we propose a description of the formation of triaxial dark halos in the context of collisions of protogalaxies. Assuming that the protogalaxies might be represented by homogeneous Jacobi ellipsoids, we noted that the triaxiality of the resulting object depends on the collision velocity. We also find the epoch at which such encounters would yield the required triaxiality. We estimate that in this scenario the disks of spiral galaxies would have been assembled at  $z \simeq 0.69 \pm 0.32$ .



# Capítulo 1

## Introdução

Neste capítulo, depois de uma introdução sobre o formato das galáxias espirais (Seção 1.1), é feita uma breve revisão histórica sobre os sistemas de classificação de galáxias, com ênfase às espirais e ao esquema de Hubble (Seção 1.2). Em seguida, são apresentados os conceitos de elipsóides oblatos, prolatos e triaxiais, que serão utilizados ao longo de todo o texto (Seção 1.3). Na Seção 1.4 faz-se uma revisão da literatura relativa aos trabalhos que se dedicaram à análise das distribuições de razões axiais das galáxias espirais. A Seção 1.5 insere o problema dos discos não-circulares no contexto dos halos de matéria escura, no que diz respeito à forma destas estruturas. Na Seção 1.6 o leitor é apresentado ao *Sloan Digital Sky Survey* e algumas das suas principais características. Finalmente, na Seção 1.7 estão delineados os conteúdos dos capítulos seguintes e os objetivos principais desta Dissertação.

### 1.1 A forma das galáxias espirais

As galáxias espirais são sistemas estelares constituídos principalmente por um disco aproximadamente circular e bastante achatado que, além de estrelas, contém gás e poeira e se encontra imerso em um halo de matéria escura. A característica mais marcante destas galáxias são seus braços espirais, evidentemente, onde ocorre intensa formação estelar. As galáxias espirais apresentam ainda um bojo no centro do disco, cuja importância relativa diminui conforme o tipo morfológico seja mais tardio; e um halo de material estelar, constituído basicamente de aglomerados estelares e de estrelas pobres em metais; além do halo de matéria escura. A dimensão radial dos discos é tipicamente da ordem de kiloparsecs (ou algumas dezenas de kiloparsecs), enquanto que a escala de altura é de poucas centenas

de parsecs. Portanto, trata-se de estruturas de fato bastante achatadas. Que as galáxias espirais se constituem de discos achatados já era conhecido desde o início da astronomia extragaláctica.

O entendimento da estrutura das galáxias espirais requer o estudo da sua dinâmica, isto é, de como as estrelas reagem ao potencial gravitacional no qual elas se encontram imersas. Para este propósito, as galáxias espirais são freqüentemente aproximadas por discos finos, ou seja, estruturas circulares e achatadas, uma vez que a quase totalidade da sua massa (atrelada às estrelas e ao gás) e certamente da luz estão concentradas em um plano. Além disso, a abordagem da dinâmica estelar em potenciais gravitacionais axissimétricos facilita enormemente o tratamento analítico (veja por exemplo, Binney & Tremaine, 1994).

Contudo, a possibilidade de que os discos não sejam axissimétricos sempre se insinuou através de uma série de evidências observacionais. A existência de barras, por exemplo, sugere que haja uma direção privilegiada no disco; e pelo menos um terço das espirais são fortemente barradas. Outra componente cuja forma reforça a idéia de assimetria são os próprios braços espirais, que, afinal, são estruturas que carecem de simetria azimutal. Além disso, as galáxias espirais se encontram inseridas em halos de matéria escura, que também não precisam ser simétricos. Na falta de informações a respeito da sua estrutura, supõe-se usualmente que estes halos sejam esféricos, mesmo não existindo evidências observacionais que apoiem essa suposição. A sua forma, no entanto, deve estar relacionada à forma dos discos luminosos, já que os atuais discos colapsaram sob a influência do potencial gravitacional do halo. E se este for triaxial, dificilmente poder-se-ia esperar que se formasse um disco circular.

Neste contexto, é necessário estabelecer vínculos observacionais quanto à forma dos discos luminosos para que se possa avaliar precisamente a estrutura não apenas dos próprios discos, mas também dos halos de matéria escura nos quais os discos se encontram imersos, sofrendo a influência do seu potencial gravitacional.

## 1.2 Classificação morfológica

O primeiro passo para selecionar uma amostra de galáxias tipo disco que represente de maneira justa a população de galáxias do Universo consiste em entender os fundamentos da classificação morfológica.

O sistema de classificação morfológica de Hubble é amplamente utilizado atualmente, embora não tenha sido o primeiro nem o único esquema proposto nos primórdios da



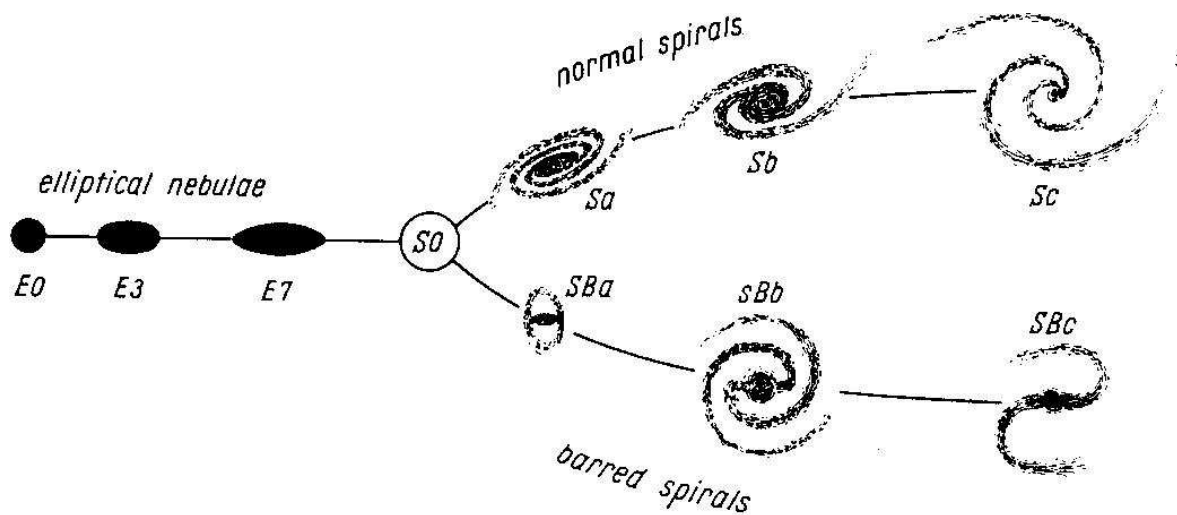


Figura 1.1: Diagrama de Hubble original (Hubble, 1936) incluindo as galáxias S0 que na época ainda não haviam sido identificadas.

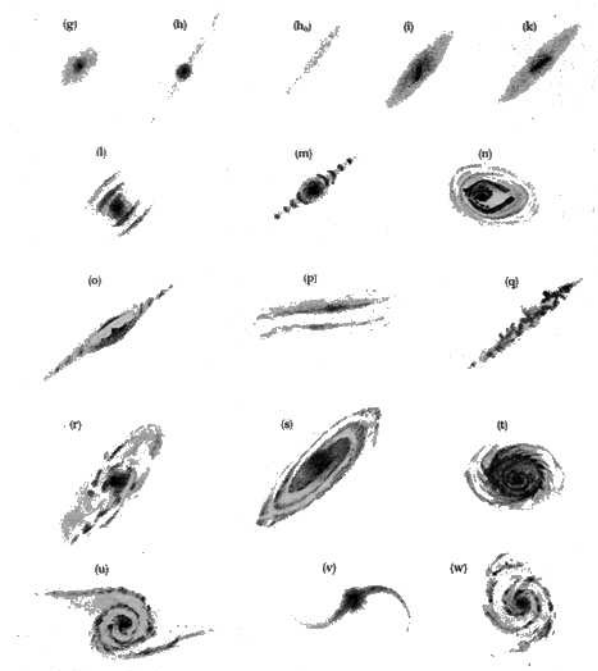


Figura 1.2: A classificação morfológica pioneira de Wolf (1908) é meramente descritiva e não configura uma seqüência contínua.

astronomia extragaláctica. Por sua extrema simplicidade e utilidade, acabou prevalecendo como o sistema mais empregado. O chamado “diagrama de diapasão” de Hubble (*tuning fork diagram*) não apareceu pela primeira vez no artigo clássico de 1926, mas sim no seu livro semi-popular de 1936, *The Realm of the Nebulae* (Figura 1.1). Uma revisão recente do caráter histórico das classificações de galáxias encontra-se em Sandage (2005).

Uma classificação pioneira, mas meramente descritiva, foi feita por Wolf (1908) e utilizada por Hubble na sua tese de doutoramento (1917). Wolf desenhou 17 formatos de galáxias que, no entanto, não se dispunham em nenhuma seqüência contínua (Figura 1.2); a ausência de uma lógica taxonômica clara torna esse sistema pouco útil. Dreyer (1888) e Herschel (1864) já haviam utilizado certas notações para indicar brilhos, formas e concentrações das galáxias dos seus catálogos. Mas um desenvolvimento realmente fundamental deu-se em 1920, quando Reynolds propôs o primeiro sistema de classificação que consistia de uma seqüência de formas de galáxias espirais. Reynolds separou as espirais em classes de I a VII, que iam desde aquelas que eram “nebulosidades amorfas” até as que apresentavam mais “condensações” e “granulações” e quase não tinham núcleo. Esta classificação é claramente análoga à adotada por Hubble, que além de ordenar as elípticas conforme a variação contínua do achatamento aparente, também postula a classe hipotética S0 (lenticulares) na junção entre S (espirais) e E (elípticas). Na classificação de Hubble, os critérios que separam as galáxias espirais em subtipos ao longo da seqüência de Sa para Sc, nesta ordem, são:

1. a abertura dos braços espirais
2. o grau de resolução dos braços
3. o tamanho relativo do bojo

Desse modo, as galáxias Sa têm bojos relativamente maiores, braços mais enrolados e uniformes; as galáxias Sc têm bojos menores, braços mais abertos e mais resolvidos em estrelas e regiões HII; as Sb são, naturalmente, casos intermediários (a Figura 1.3 constitui um exemplo ilustrativo). Hubble chamou as galáxias mais à esquerda do diagrama de *early type* e às mais à direita de *late type*. Embora não haja uma relação evolutiva de idade ao longo da seqüência, estes nomes ainda são empregados para designar a posição no diagrama. Também são utilizadas as traduções equivocadas “tipo jovem” e “tipo tardio”, que contribuem para o caráter confuso desta nomenclatura. Além disso, as galáxias espirais são separadas em barradas e não-barradas, que constituem os dois ramos do diagrama e freqüentemente recebem a notação de SB e SA, respectivamente.

Observe-se que a aplicação prática deste critério nem sempre é muito clara e objetiva. Freqüentemente é impossível identificar claramente os elementos que fundamentam estes

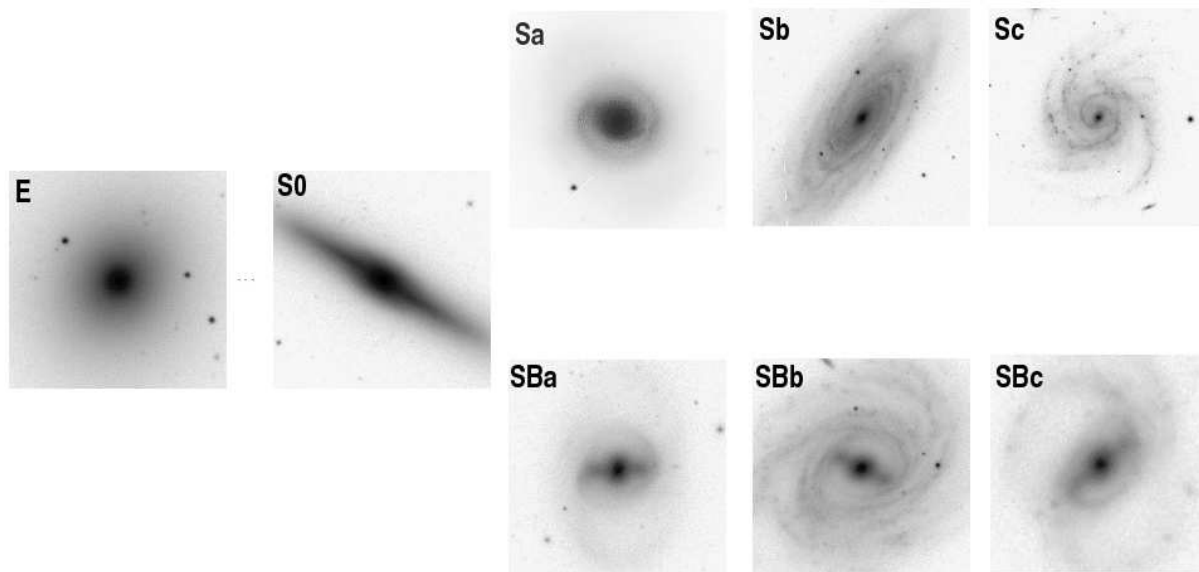


Figura 1.3: Exemplo ilustrativo de um diagrama de Hubble com imagens do SDSS.

critérios. Por exemplo, no caso das galáxias vistas de perfil é praticamente impossível perceber os braços e devemos nos guiar pela forma dos bojos, que são relativamente menores nas galáxias de tipo mais tardio.

Posteriormente, foram feitas diversas extensões à seqüência de Hubble. Uma das primeiras modificações consistiu em acrescentar subtipos (S0/a, Sab, Sbc) refinando a classificação que, além disso, foi estendida até Sd (incluindo Scd). Outra classe intermediária adicionada foi a de galáxias SAB, que são a transição entre não-barradas e barradas. Também foi introduzida a notação (r) e (s) para especificar de que forma os braços se conectam ao bojo. Esta distinção é mais facilmente percebida em galáxias barradas, nas quais os braços começam no fim da barra (s); ou tangencialmente a um anel (r). Também surgiu a notação de se utilizar um R antes do S no caso de galáxias que têm um anel externo. Outras adições ao sistema de classificação dizem respeito às classes tardias Sm (bem como Sd/m) e Im (magelânicas); esta substitui as Irr de Hubble. Passaram também a fazer parte das classificações as galáxias anãs. Em 1959, de Vaucouleurs sistematizou várias das extensões, propondo um novo esquema tridimensional de classificação que desde então

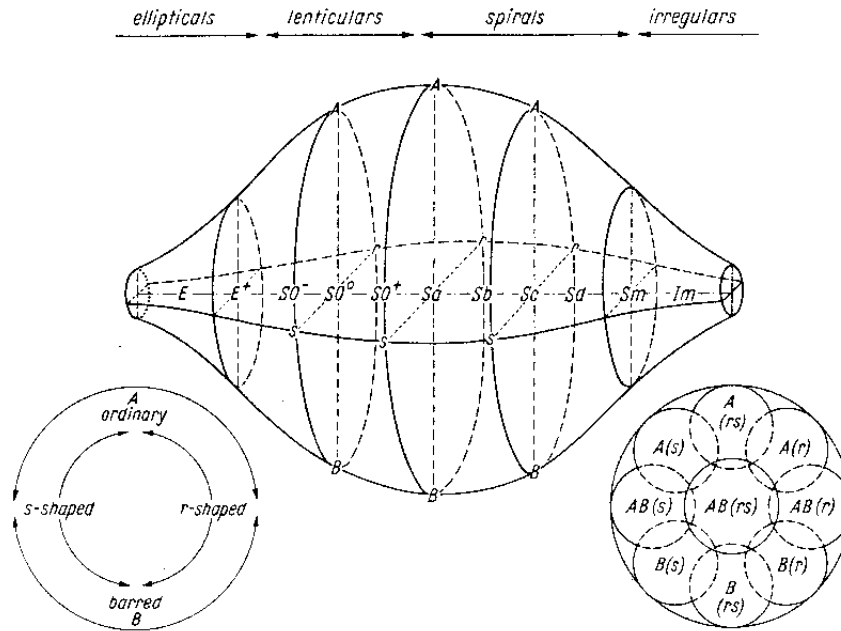


Figura 1.4: Classificação morfológica de de Vaucouleurs.

também tem sido bastante empregado e descrito em várias referências (Mihalas & Binney, 1981 ou Combes et al., 1991).

Sabe-se que de fato há correlações entre as classes morfológicas de Hubble e os parâmetros físicos das galáxias. Isto é, várias propriedades das galáxias de fato variam ao longo da seqüência de Hubble, tais como fração de gás, taxa de formação estelar, índice de cor, metalicidade e razão bojo/disco (Roberts & Haynes, 1994). Estas correlações reforçam a idéia de que exista realmente algum parâmetro ou conjunto de parâmetros (como momento angular efetivo, por exemplo) de cuja variedade resultassem os tipos morfológicos.

### 1.3 Elipsóides oblatos, prolatos e triaxiais

A suposição de que os discos das galáxias espirais sejam circulares é usualmente adotada por simplicidade. Esta suposição é útil, por exemplo, para se determinar a inclinação de uma galáxia com relação à linha de visada. Se admitimos que o disco é intrinsecamente circular (e de espessura muito menor que o diâmetro), então a forma elíptica da imagem da galáxia se deve exclusivamente a um efeito de projeção. Neste caso, o ângulo de inclinação  $i$  entre a normal ao plano da galáxia e a linha de visada se relaciona diretamente com a razão axial aparente  $b$ , que é simplesmente a razão entre o eixo menor e o eixo maior da

elipse:

$$\cos i = b$$

Entretanto, esta relação só é válida se adotarmos um modelo oblato achatado, ou seja um modelo no qual o disco da galáxia é circular e a altura é muito menor que o raio. Se o disco da galáxia for intrinsecamente elíptico, então não é possível obter sua inclinação a partir da razão axial aparente (a menos que soubéssemos sua razão axial intrínseca).

Em um elipsóide **oblato**, os dois eixos iguais têm dimensões maiores que a do terceiro eixo. Já em um elipsóide **prolato**, os dois eixos iguais são menores que o terceiro eixo (Figura 1.5). Em ambos os casos, existe uma secção transversal que é uma circunferência (obviamente, aquela secção que contém os dois eixos iguais). Um esferóide **triaxial**, por sua vez, apresenta os três eixos diferentes e não aparenta ser circular sob nenhum ângulo.

No caso mais geral do esferóide triaxial, os eixos estão na razão  $1 : p : q$  (sendo  $1 \geq p \geq q$ ), onde tomamos o maior dos eixos como unitário. Chamamos  $p$  e  $q$  de **razões axiais intrínsecas**. Aplicando estes conceitos ao caso de interesse,  $q$  seria a razão axial intrínseca que representa a espessura vertical da galáxia e  $p$  é o parâmetro que mede a elipticidade do disco: se  $p = 1$ , os dois eixos do plano do disco são iguais e voltamos ao caso particular do elipsóide oblato; quanto mais  $p$  se afasta da unidade ( $p \leq 1$ ), mais elíptico é o disco (Figura 1.6).

Convém ressaltar que o modelo prolato não é uma representação realista da estrutura do *disco* das galáxias espirais, embora pudesse ser relevante no estudo das galáxias elípticas. Nas espirais, se existe simetria (aproximadamente) circular em alguma secção transversal é evidente que ela deva se dar no plano do disco e não perpendicularmente a ele. Por isso, um modelo prolato de discos não é fisicamente plausível (no Capítulo 5, fazemos uso momentâneo de tais estruturas no contexto de fusões de protogaláxias, mas neste caso, o formato prolato é referente ao halo, não ao disco).

Mesmo nos modelos de disco não-circular, chamamos de **razão axial aparente** a razão entre os eixos menor e maior da figura projetada. De fato,  $b$  é a única grandeza diretamente mensurável e o seu valor depende obviamente da orientação espacial do elipsóide.

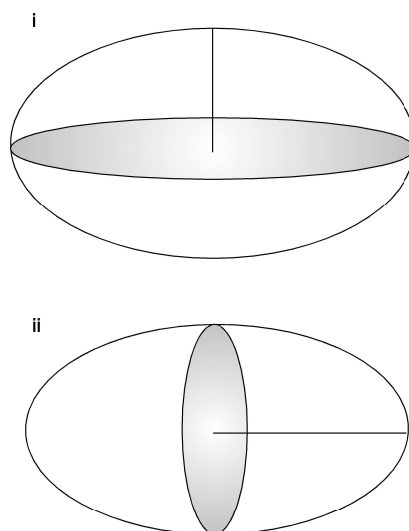


Figura 1.5: Elipsóides oblatos (i) e prolatos (ii) são figuras de revolução que possuem uma secção transversal circular (cinza). Em ambos os casos, há dois eixos iguais e um eixo diferente, que é ortogonal ao plano que contém a secção circular. No caso oblato, o eixo ortogonal ao plano circular é menor que os outros e no caso prolato, o eixo ortogonal ao plano circular é o maior.

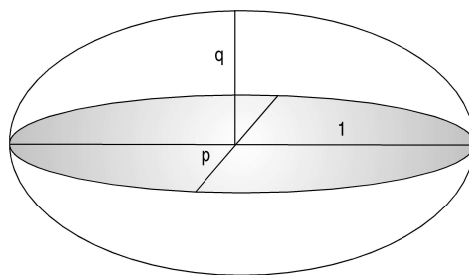


Figura 1.6: Um esferóide triaxial é uma figura que apresenta os três eixos diferentes:  $1 \geq p \geq q$  e nenhuma das secções é circular. Se  $p = 1$ , temos o caso oblato.

## 1.4 Distribuições de razões axiais

A distribuição de razões axiais aparentes  $\varphi(b)$  de uma amostra de galáxias espirais reflete as distribuições de razões axiais intrínsecas  $f(p)$  e  $f(q)$ , modificadas pelos efeitos de projeção. Uma vez que a desprojeção só é trivial e só poderia ser feita individualmente para elisóides de revolução, o uso das funções de distribuição é extremamente útil para se determinar estatisticamente os parâmetros intrínsecos de uma amostra de galáxias. Se observamos uma amostra razoavelmente expressiva podemos corrigir o efeito de projeção aleatória e inferir os parâmetros da distribuição intrínseca.

As primeiras tentativas de se inferir o formato intrínseco das galáxias pela deconvolução das distribuições de razões axiais aparentes utilizavam amostras pequenas e inomogêneas de imagens fotográficas, cujas medições visuais freqüentemente sofriam de erros acidentais ou sistemáticos.

Em um artigo clássico, Sandage, Freeman & Stokes (1970) determinaram as distribuições de achatamentos intrínsecos utilizando uma amostra de galáxias de diferentes tipos, admitindo que elas pudessem ser bem representadas por elipsóides oblatos. Com 254 galáxias espirais do *Reference Catalogue of Bright Galaxies* (de Vaucouleurs & de Vaucouleurs, 1964), calcularam que elas poderiam ser bem representadas por discos circulares de razão axial intrínseca  $q \sim 0,25$ , mesmo resultado obtido em seguida por van den Bergh (1977). Naturalmente, as técnicas utilizadas para este tipo de análise também se prestam ao estudo da estrutura de galáxias elípticas, como em Binggeli (1980).

Binney & de Vaucouleurs (1981), utilizando algumas centenas de galáxias do *Second Reference Catalogue of Bright Galaxies* (de Vaucouleurs et al., 1976), admitiram também os modelos prolato e triaxial para espirais, lenticulares e elípticas. Para inverter as distribuições, eles empregaram o algoritmo de deconvolução de Lucy (1974), que também foi utilizado por Noerdlinger (1979). Este algoritmo consiste em convoluir uma estimativa inicial da distribuição intrínseca  $f(q)$  com  $P(b|q)$ , que é a probabilidade de que uma galáxia com uma dada razão intrínseca  $q$  seja projetada com razão aparente  $b$ . Para as espirais, concluíram que o achatamento deveria estar no intervalo  $0,15 \leq q \leq 0,35$  e que os tipos mais tardios admitiam discos levemente elípticos com  $p \sim 0,9$ .

Lambas et al. (1992) utilizaram uma ampla amostra de 13 482 imagens de espirais medidas automaticamente, provenientes do *Automated Photographic Measuring (APM) Bright Galaxy Survey* (Loveday, 1989) e concluíram que um modelo com  $q \sim 0,2$  e  $p \sim 0,9$  ajustava melhor a distribuição observada do que um modelo simplesmente oblato. Esta conclusão baseou-se na observada falta de objetos aparentemente circulares, que tem sido confirmada por diversos autores. Esta ausência foi notada indiretamente por Grosbøl (1985);

Fasano et al. (1993) observaram-na em dados do *Third Reference Catalogue of Bright Galaxies* (de Vaucouleurs et al., 1991), de onde inferiram  $0,8 \leq p \leq 0,9$ . Mais recentemente, Ryden (2004) encontrou uma não-circularidade de aproximadamente  $p \sim 0,85$  utilizando cerca de 13 000 galáxias espirais do SDSS na banda  $i$ . Para evitar a contaminação pela poeira e a estrutura espiral causada pelas estrelas de população mais jovem, Rix & Zaritsky (1995) fizeram imageamento na banda K de uma amostra de galáxias *face-on* (de face) e mesmo assim, obtiveram uma persistente não-circularidade de  $\sim 0,955$  no potencial gravitacional.

Além disso, existem evidências dinâmicas para a não circularidade do disco. Em um potencial gravitacional que seja elíptico no plano do disco, as órbitas fechadas das partículas de teste serão também elípticas (Binney, 1978). Se o potencial é logarítmico, gerando uma curva de rotação plana (Binney & Tremaine, 1994), então a elipticidade das órbitas é igual à elipticidade do potencial. Esta configuração gera um efeito observacional relevante: se a galáxia é vista sob projeção o eixo maior isofotal e o eixo maior dinâmico não estarão, em geral, alinhados. Como consequência, há um gradiente de velocidades não nulo ao longo do eixo menor isofotal. Este tipo de efeito foi estudado por Franx & de Zeeuw (1992); Schoenmakers, Franx & de Zeeuw (1997) e Andersen et al. (2001).

## 1.5 Halos de matéria escura

A existência de matéria escura vem sendo sugerida desde a primeira metade do século XX. Zwicky (1937) mostrou que a massa do aglomerado de Coma era consideravelmente maior que a soma das massas das galáxias individuais. Ostriker & Peebles (1973), argumentando que discos estelares auto-gravitantes seriam instáveis a certas perturbações, sugeriram que as galáxias espirais estivessem embebidas em halos massivos, que as estabilizariam. Já em 1939, Babcock observara a curva de rotação de M31, mostrando que a razão massa-luminosidade crescia com o raio. Na década de 1970, curvas de rotação planas de inúmeras galáxias foram observadas por diversos autores (Rubin et al., 1978), indicando que deveria existir uma grande quantidade de massa invisível ao redor das galáxias espirais. Em última análise, a distribuição de massa que observamos através das curvas de rotação dos discos está distribuída nos halos de matéria escura.

Aliado a isso, efeitos de lentes gravitacionais têm sido utilizados para determinar massas desde a observação do primeiro “quasar duplo” (Walsh et al., 1979). Determinações de massa através de lentes gravitacionais são importantes pois este é um método que independe de considerações a respeito do estado de equilíbrio ou de relaxação dos sistemas observados; também independe de suposições sobre a composição química e utiliza parâmetros como as distâncias e o tamanho angular, cuja determinação é relativamente



direta. Desde que passou a haver algum consenso acerca da existência dos halos de matéria escura, já se reconhecia que estes envelopes massivos não poderiam ser estruturas extremamente achatadas, mas que deveriam ser grosseiramente esferoidais (Ostriker et al., 1974; Faber & Gallagher, 1979 e referências aí contidas).

A possibilidade de que os halos de matéria escura em torno das galáxias não sejam esféricos tem sido freqüentemente sugerida na literatura. Kuijken & Tremaine (1994), através da cinemática da vizinhança solar, estimaram que as equipotenciais do disco da Galáxia têm razão axial  $\sim 0,9$ . Binney (1978) considerou os efeitos de halos triaxiais e sua influência nos discos de espirais que apresentam as distorções conhecidas como *warps*. Dubinski & Carlberg (1991) fizeram simulações de N-corpos do colapso gravitacional de picos de densidade e obtiveram halos fortemente triaxiais. Cole & Lacey (1996) obtiveram halos moderadamente triaxiais através de simulações numéricas de modelos hierárquicos de formação. Dubinski (1994) avaliou os efeitos provocados na estrutura do halo triaxial pela dissipação de energia do gás durante a formação da galáxia. El-Zant et al. (2003) estudaram a formação de galáxias em halos triaxiais e a sua relação com o bojo e o buraco negro central. Sackett (1999) e Combes (2002) fizeram revisões sobre a forma e as propriedades dos halos de matéria escura.

Mesmo se admitíssemos por simplicidade que os primeiros halos escuros fossem esféricos, as interações e fusões subseqüentes dificilmente poderiam preservar a estrutura esférica, encarregando-se de destruir a simetria inicial. Além disso, é possível que no processo de formação de estruturas em larga escala, os halos já colapsem não-esfericamente. Portanto, parece mais plausível que os halos não-esféricos tenham sido favorecidos ao longo da formação e evolução cosmológica das estruturas.

Se um disco bariônico colapsa, imerso neste potencial gravitacional assimétrico, parece altamente improvável que a galáxia resultante apresente simetria circular. É razoável esperar que o disco se acomode seguindo o formato do potencial do halo que, não sendo esférico, deve desempenhar um papel importante na dinâmica do disco estelar. Como consequência, a razão axial intrínseca do plano do disco luminoso das galáxias espirais deve ser uma assinatura importante da triaxialidade dos seus halos.

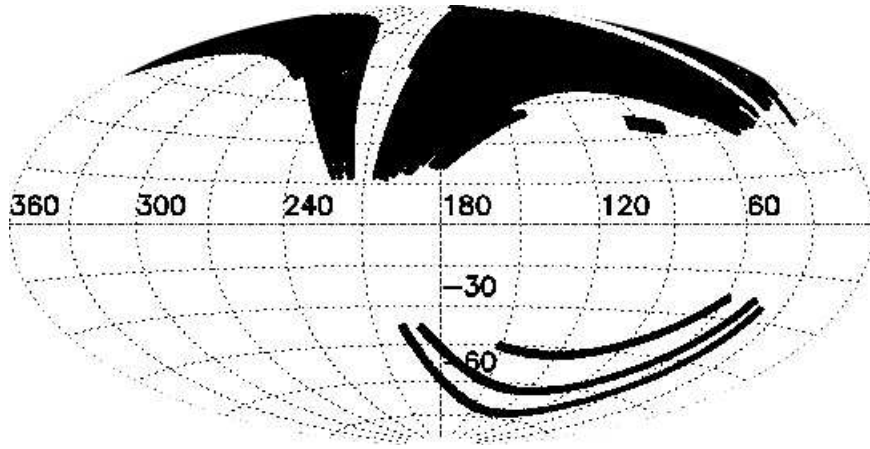


Figura 1.7: Área de cobertura do céu (imageamento) do Data Release 4 do SDSS em coordenadas galácticas (Adelman-McCarthy et al., 2005)

## 1.6 Sloan Digital Sky Survey

As imagens de galáxias utilizadas neste trabalho são provenientes do SDSS, uma importante fonte atual de dados extragalácticos. O SDSS (*Sloan Digital Sky Survey*<sup>1</sup>) é um ambicioso mapeamento do céu que, quando completado (previsto para julho de 2006), terá observado cerca de um quarto da esfera celeste, principalmente ao redor do pólo norte galáctico. No *Data Release 4* (Adelman-McCarthy et al., 2005), o imageamento já cobriu 6670 graus quadrados (dos 7700 pretendidos), tendo sido identificados 180 milhões de objetos fotométricos, além de 565 715 espectros de galáxias, 76 483 espectros de quasares e 153 087 espectros de estrelas (Figura 1.7).

Todas as observações do SDSS são feitas em cinco filtros ( $u, g, r, i, z$ ) centrados respectivamente em 3551, 4686, 6165, 7481 e 8931 Å (Tabela 1.1) e com larguras de cerca de 20 Å (Stoughton et al., 2002). A largura média da *point-spread function* (PSF) é de 1,4" no filtro  $r$  e a escala de placa das imagens é 0,396"/pixel. As observações do SDSS são feitas com um telescópio de 2,5 m no Apache Point Observatory, em Sunspot, New Mexico, a 2 788 metros de altitude.

---

<sup>1</sup>The SDSS is managed by the Astrophysical Research Consortium (ARC) for the Participating Institutions. The Participating Institutions are The University of Chicago, Fermilab, the Institute for Advanced Study, the Japan Participation Group, The Johns Hopkins University, the Korean Scientist Group, Los Alamos National Laboratory, the Max-Planck-Institute for Astronomy (MPIA), the Max-Planck-Institute for Astrophysics (MPA), New Mexico State University, University of Pittsburgh, University of Portsmouth, Princeton University, the United States Naval Observatory, and the University of Washington. Funding for the creation and distribution of the SDSS Archive has been provided by the Alfred P. Sloan Foundation, the Participating Institutions, the National Aeronautics and Space Administration, the National Science Foundation, the U.S. Department of Energy, the Japanese Monbukagakusho, and the Max Planck Society. The SDSS Web site is <http://www.sdss.org/>.

Tabela 1.1: Comprimentos de onda centrais  $\lambda_c$  dos filtros do SDSS comparados com os dos filtros de Johnson.

SDSS	$\lambda_c$ (Å)	$\lambda_c$ (Å)	Johnson
u	3551	3600	U
g	4686	4400	B
r	6166	5500	V
i	7480	7000	R
z	8932	8800	I

Todos os dados do SDSS são publicamente disponíveis e existe uma série de parâmetros fotométricos e espectroscópicos que foram medidos automaticamente. As imagens utilizadas neste trabalho são campos de cerca de  $2048 \times 1489$  pixels.

## 1.7 Objetivos

O objetivo central deste trabalho de mestrado consiste em avaliar a triaxialidade dos halos de matéria escura usando como indicador a distribuição de razões axiais aparentes dos discos luminosos de uma amostra de galáxias espirais do SDSS. Mostramos que a elipticidade dos discos é da ordem de 0,85 para barradas e não-barradas de tipos morfológicos Sa, Sb e Sc.

No Capítulo 2, apresentamos a amostra de galáxias, seus critérios de seleção e características globais, o processo de classificação morfológica e sua verificação, bem como a remoção de objetos espúrios. São apresentados alguns exemplos ilustrativos de imagens das galáxias da amostra.

No Capítulo 3, são descritos o método de medição das razões axiais aparentes e os critérios empregados; alguns exemplos de galáxias são apresentados.

O Capítulo 4 descreve o procedimento estatístico utilizado para obter as distribuições intrínsecas e apresenta os resultados provenientes desta análise.

O Capítulo 5 consiste de uma abordagem analítica da formação de halos triaxiais no contexto de colisões de protogaláxias, da qual resulta uma estimativa do redshift no qual as fusões ocorreriam. Finalmente, no Capítulo 6, apresentam-se conclusões e perspectivas.



# Capítulo 2

## A Amostra de Galáxias

O objetivo deste capítulo é caracterizar a amostra de galáxias utilizada no trabalho. A Seção 2.1 especifica quais foram os parâmetros utilizados para fazer a busca de objetos na base de dados do SDSS. A Seção 2.2 justifica a classificação morfológica das galáxias e a exclusão de certos tipos de objetos da amostra, além de relatar as distribuições de morfologia resultantes. São apresentados exemplos ilustrativos dos tipos morfológicos, bem como uma descrição das dificuldades e pontos sensíveis do processo de classificação. Na Seção 2.3, avalia-se a qualidade da classificação morfológica através de um teste aplicado a uma subamostra. A Seção 2.4 é dedicada à caracterização geral da amostra, por meio de diversas grandezas tais como magnitudes, redshifts e cores.

### 2.1 Critérios de seleção

Uma amostra de galáxias, limitada por magnitude, foi selecionada da base de dados do *Sloan Digital Sky Survey*. Foram selecionadas galáxias com magnitudes  $g \leq 16$ . Uma vez que o filtro  $g$  é centrado em  $4686 \text{ \AA}$ , ele é aproximadamente equivalente ao filtro B de Johnson (Stoughton et al., 2002). Com esta escolha de limite de magnitude, resulta que as galáxias apresentam diâmetros típicos da ordem de  $\sim 50$  a  $100$  pixels, o que é importante, pois possibilita medidas confiáveis das imagens. Se o limite de magnitude fosse muito maior, haveria galáxias de diâmetro bastante reduzido, cujas medidas ficariam comprometidas. Em princípio, os objetos do SDSS são automaticamente separados em estrelas, galáxias, quasares, etc. Mas em alguns casos, estrelas saturadas podem ser erroneamente classificadas como galáxias devido ao brilho extenso, já que os critérios de separação se baseiam em parâmetros de brilho superficial. Para evitar esse tipo de

Tabela 2.1: Critérios de seleção da amostra de galáxias.

catálogo do SDSS	SpecPhotoAll
tipo	galáxias
magnitude	$g \leq 16$
redshift	$0,002 \leq z \leq 0,05$
número de objetos resultante	3787

problema, foi incluída na busca de galáxias um critério adicional que limita os redshifts ao intervalo  $0,002 \leq z \leq 0,05$  (Tabela 2.1). Isso tende a excluir os eventuais objetos próximos, como estrelas da Galáxia, já que são eliminados os objetos com velocidades radiais inferiores a cerca de 600 km/s.

Uma busca com esses parâmetros resultou em 3787 objetos, cujas imagens no filtro  $r$  foram adquiridas da base de dados do DR1 (*Data Release 1*). O filtro  $r$  foi escolhido porque, sendo centrado em 6166 Å, é próximo do filtro V de Johnson (na verdade, intermediário entre V e R). Apesar da seleção ter sido feita na banda  $g$ , para ser mais comparável com os catálogos tradicionais, é mais conveniente fazer o exame das imagens na banda mais próxima de V. Estas imagens consistem de campos de cerca de  $2048 \times 1489$  pixels, ou  $13,5' \times 9,8'$ , aproximadamente. Dos 3787 objetos, 1055 têm magnitude  $g$  inferior a 15 e os 2732 restantes estão no intervalo entre magnitudes 15 e 16.

## 2.2 Classificação morfológica

A amostra selecionada conforme os parâmetros da Seção 2.1 contém galáxias de todos os tipos. Portanto, foi necessário empreender uma classificação morfológica visual das 3787 galáxias, que foi feita aproximadamente segundo o esquema do *Hubble Atlas of Galaxies* (Sandage, 1961). A cada galáxia foi atribuída uma das seguinte morfologias: E, S0, S(B)(abc) ou Irr. Isto é, as galáxias foram separadas em elípticas, lenticulares, espirais ou irregulares. Dentre as espirais, a classificação foi refinada entre os tipos a, b, c e barrada ou não-barrada. Não se utilizaram as classes intermediárias (0/a, ab, etc) pois para os nossos propósitos, a separação em três tipos é mais do que suficiente e garante um número razoável de objetos em cada classe.

Esta classificação teve vários objetivos: o primeiro deles foi remover da amostra todas as galáxias elípticas e lenticulares, bem como as irregulares; dentre as espirais, foram excluídas as galáxias que apresentassem certas características que comprometeriam as medições. Objetos que incluem-se nesta categoria são galáxias em interação, ou com uma

Tabela 2.2: Morfologia da amostra completa.

tipo morfológico	E	S0	S	Irr	total
número de galáxias	943	531	1900	413	3787

companheira próxima. Galáxias sofrendo efeitos de maré poderiam apresentar distorções e assimetrias nos seus discos, mas por motivos que não estariam relacionados unicamente à estrutura dos seus halos individuais. Além disso, galáxias muito próximas das bordas dos campos ou aquelas aproximadamente alinhadas com estrelas da Galáxia, também poderiam ter suas medidas de razão axial seriamente afetadas, uma vez que o ajuste das isofotas elípticas geraria resultados espúrios. Por estes motivos, foram eliminadas 281 galáxias, cerca de 15% das 1900 espirais da amostra inicial.

Nesta amostra completa de 3787 galáxias (Tabela 2.2), tínhamos 50% de espirais, 25% de elípticas, 14% de lenticulares e 11% de irregulares, aproximadamente. Uma vez removidas todas as galáxias que não são espirais e, ainda, aquelas espirais inadequadas à medição, restam 1619 objetos. A amostra resultante de espirais efetivamente úteis é, assim, composta de um quarto de barradas e três quartos de não-barradas, aproximadamente, e cada subtipo (a, b, c) contribui grosseiramente com a mesma fração, como pode ser visto na Tabela 2.3 ou na Figura 2.1.

As imagens utilizadas no processo de classificação morfológica eram composições de filtros, disponíveis através da ferramenta *Image Lists* do *Skyserver*. Cada galáxia foi inspecionada individualmente e a classificação das espirais foi feita segundo os critérios da Seção 1.2. A Figura 2.2 apresenta exemplos de imagens de três galáxias de cada subtipo Sa, Sb e Sc, para ilustrar os tipos morfológicos. No caso das galáxias espirais, umas das dificuldades consistia em distinguir as Sa das S0. Evidentemente, o que as separa é a presença de braços espirais, mas nem sempre é fácil detectar visualmente a presença de braços que, nas Sa, são bastante fechados; em alguns casos, só é possível notar as extremidades dos braços. No caso das Sc, a classificação é bem mais simples, já que os braços bem abertos são facilmente discerníveis (exceto nas galáxias de muito baixo brilho superficial). Nas Sc, no entanto, a principal dificuldade consiste em decidir quando uma galáxia tem braços tão abertos, “resolvidos” e esparsos a ponto de poder ser classificada como irregular. Ainda nas espirais, a classificação do subtipo intermediário Sb é um ponto sensível, pois depende de critérios não-quantitativos de decisão. Por exemplo, uma galáxia Sc pode ser classificada erroneamente como Sb se ela estiver bastante inclinada, pois seus braços não parecerão tão abertos. De fato, a inclinação dos discos das espirais com relação à linha de visada dificulta a classificação de todos os subtipos. Nas galáxias que se apresentam de face (*face-on*), todas as características relevantes para a classificação estão claramente observáveis: o tamanho do bojo, a abertura dos braços e o grau de resolução dos braços. Já nas galáxias vistas de perfil, a situação se torna mais incerta. Uma galáxia Sa, por

Tabela 2.3: Morfologia da amostra de espirais.

tipo	Sa	Sb	Sc	SBa	SBb	SBc	total
número	352	425	434	151	124	133	1619

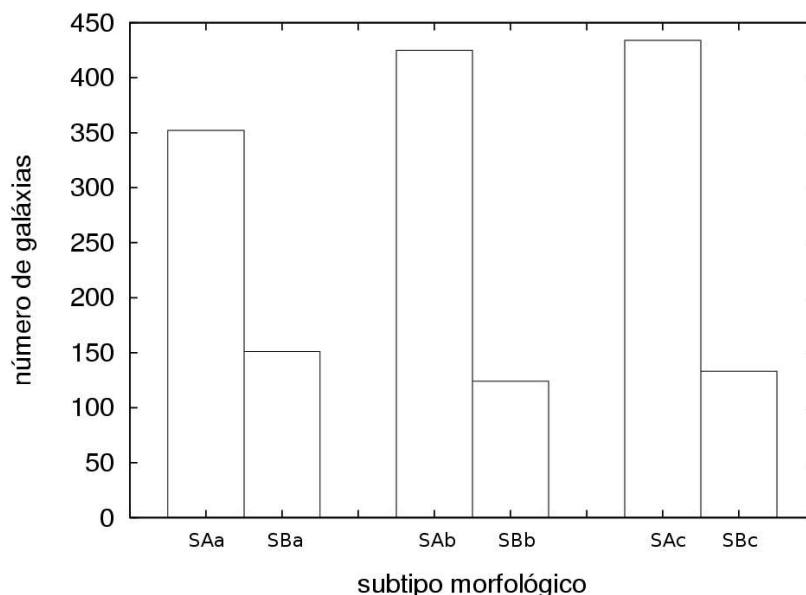


Figura 2.1: Distribuição dos subtipos morfológicos das galáxias espirais: as barradas correspondem a aproximadamente um quarto e cada subtipo a,b,c contribui com cerca de um terço.

exemplo, vista de perfil (*edge-on*), pode ser facilmente tomada por uma S0, já que os braços não são discerníveis. É muito difícil distinguir galáxias Sb de Sc, vistas de perfil. Já que não é possível avaliar a aparência dos braços, resta o critério do tamanho do bojo. Uma galáxia espiral vista de perfil é portanto classificada como Sc quando praticamente não há protuberância alguma na região central. Mas mesmo assim, esta avaliação do tamanho do bojo fica prejudicada, pois com a região central grandemente ocultada pelo disco, só é possível decidir entre casos extremos de bojo quase inexistente ou de bojo muito protuberante. Outro recurso de que se pode lançar mão nestes casos é avaliar a quantidade de poeira. Em galáxias vistas de perfil, uma fração importante do brilho das estrelas é absorvida, realçando assim a presença da poeira que, como se sabe, é mais importante nas galáxias mais “tardias”. Entretanto, a amostra não apresentava uma grande quantidade de galáxias de perfil e com muita poeira. É possível que algumas galáxias com tais características tenham deixado de ser incluídas na amostra, pois o critério de busca foi um limite de magnitude. Isto é, algumas galáxias com diâmetros angulares relativamente grandes (e que de face seriam muito brilhantes), podem ter tido seu fluxo substancialmente diminuído devido à absorção pela poeira, a ponto de caírem além do corte de magnitude



adotado.

As galáxias barradas são a classe cuja classificação fica mais prejudicada pela inclinação. Ainda que a presença de barra (pelo menos das barras fortes) seja uma característica bastante óbvia nas galáxias vistas de face, nas galáxias de perfil ela é praticamente indetectável. Isso certamente faz com que o número final de barradas de perfil se apresente menor do que o esperado: não porque as barradas não ocorram com essa inclinação, evidentemente, mas sim porque tais galáxias simplesmente foram classificadas como não-barradas. Existe um detalhe morfológico característico de galáxias barradas e que foi em alguns poucos casos utilizado como indicador da presença de barra: o formato de “amendoim” (*peanut*) que algumas barradas de perfil podem apresentar dependendo da orientação da barra. Este espessamento da região central do disco, na forma de duas protuberâncias verticais e simétricas é provocado pelas órbitas das estrelas na presença de um potencial de barra (Binney, 1994 e Combes et al., 1991). Aparentemente, essa característica ocorre se a barra da galáxia de perfil é ortogonal à linha de visada. Se a barra está alinhada com a linha de visada, tem-se o formato *boxy* (em oposição a *peanut*), que é mais dificilmente discernível. Estas características, no entanto, não configuram uma propriedade realmente sistemática e que possa ser utilizada seguramente como critério primário de classificação morfológica. A Figura 2.3 apresenta três exemplos de galáxias barradas de cada subtipo SBa, SBb e SBc, aproximadamente de face.

Uma dificuldade de menor importância na classificação morfológica era separar elípticas de lenticulares, já que uma S0 vista de face é muito similar a uma E. Mas como ambas as classes de galáxias seriam descartadas da amostra, não foram adotados critérios muito precisos para esta separação.

Outro tipo de objetos removidos da amostra foram as galáxias aproximadamente alinhadas com estrelas próximas. A Figura 2.4 mostra nove exemplos de galáxias cujas medidas de razão axial teriam sido dificultadas ou impossibilitadas pela presença de estrelas. Já na Figura 2.5 temos doze exemplos de galáxias irregulares, sofrendo interação ou com companheiras próximas. Algumas delas são galáxias isoladas e simplesmente irregulares; neste caso não faz sentido ajustar isofotas elípticas para calcular a não circularidade dos discos. Algumas são razoavelmente espirais mas estão realmente sofrendo interações e se distorcendo; estas também são descartadas pois a sua não-circularidade não é causada somente pelo potencial do halo. Outras galáxias, no entanto, podem ser espirais regulares e isoladas mas que estão apenas alinhadas com uma outra galáxia por um efeito de projeção; mesmo nestes casos, o brilho da galáxia próxima poderia interferir no ajuste das isofotas. A Tabela 2.4 contém as coordenadas e nomes dos objetos usados como exemplos nas Figuras 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5.

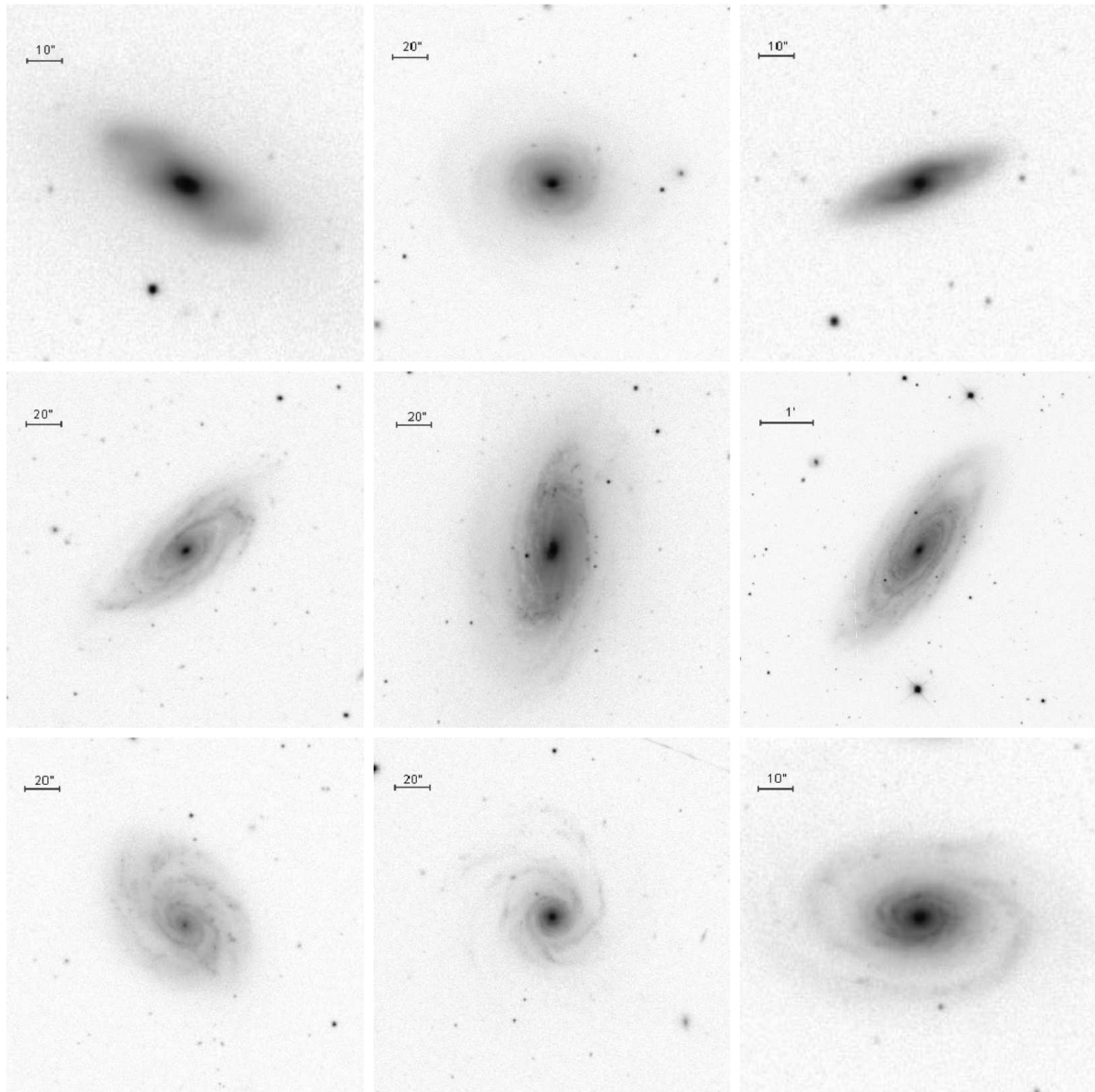


Figura 2.2: Exemplos de classificação morfológica: galáxias não-barradas. As três galáxias da primeira linha são Sa, as da segunda linha são Sb e as da terceira são Sc.

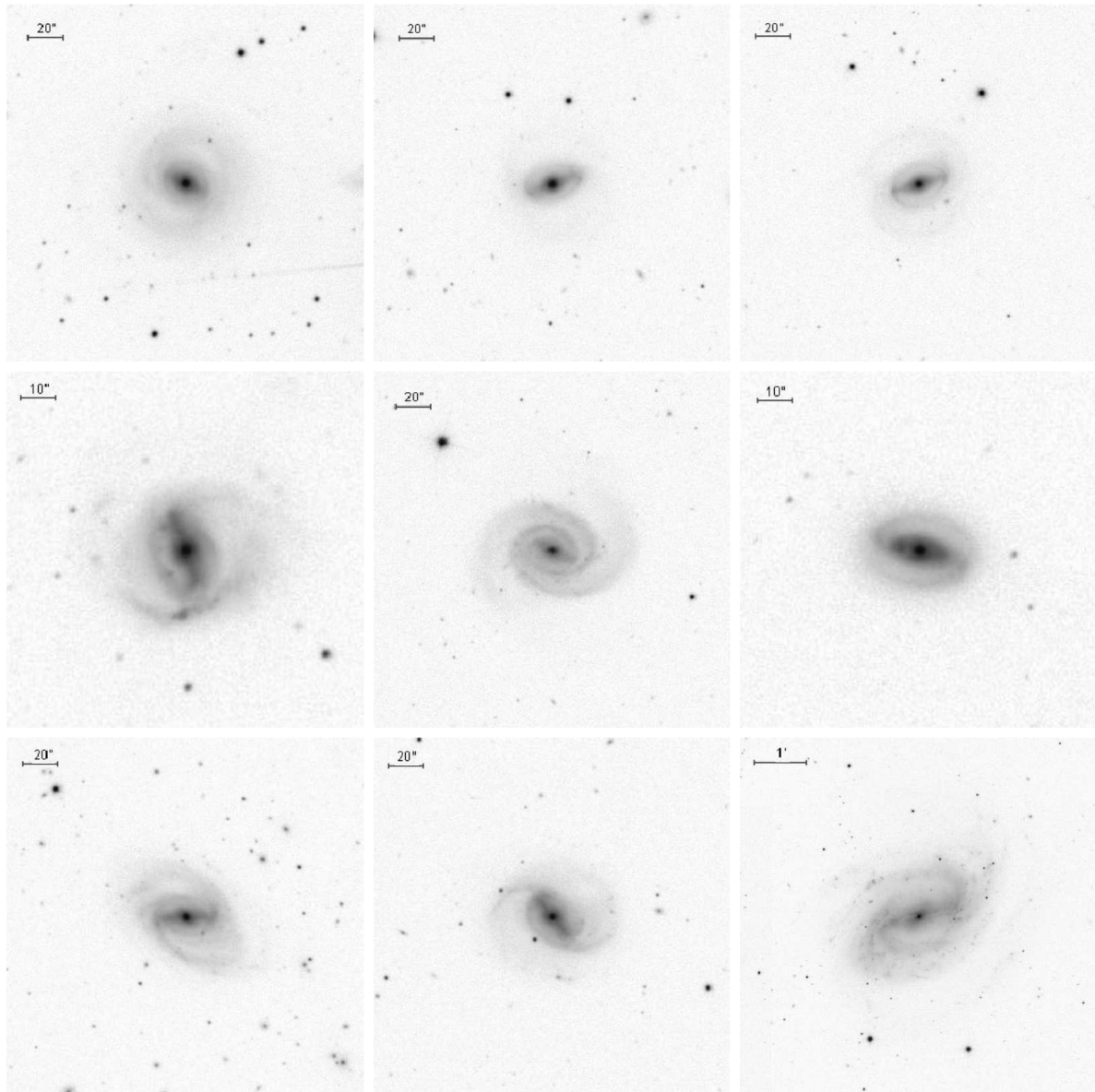


Figura 2.3: Exemplos de classificação morfológica: galáxias barradas. As três galáxias da primeira linha são SBa, as da segunda linha são SBb e as da terceira são SBc.

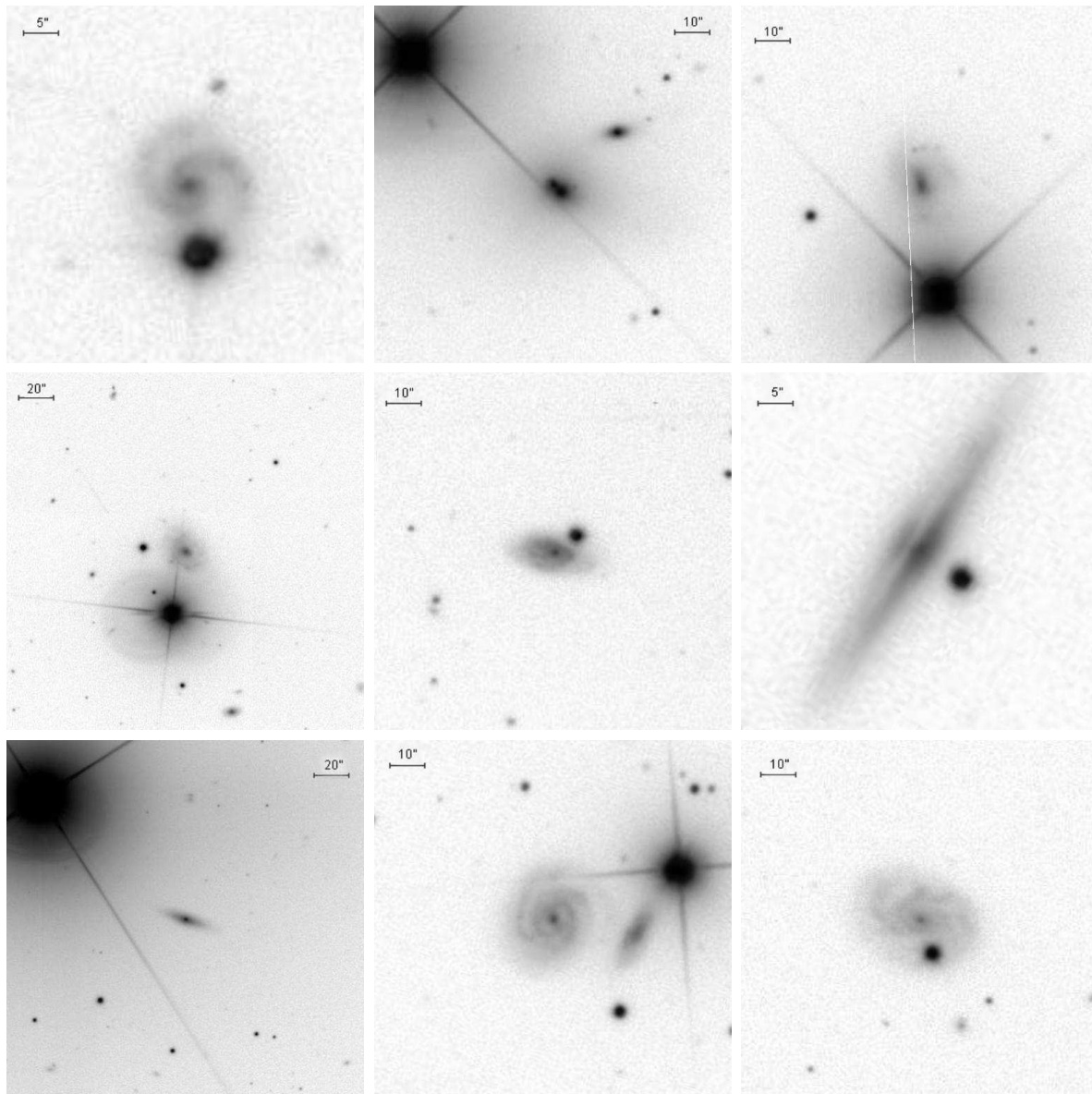


Figura 2.4: Exemplos de imagens excluídas da amostra: galáxias aproximadamente alinhadas com estrelas próximas. Nestes casos, a presença de estrelas muito brilhantes comprometeria ou impossibilitaria a medida da razão axial do disco.

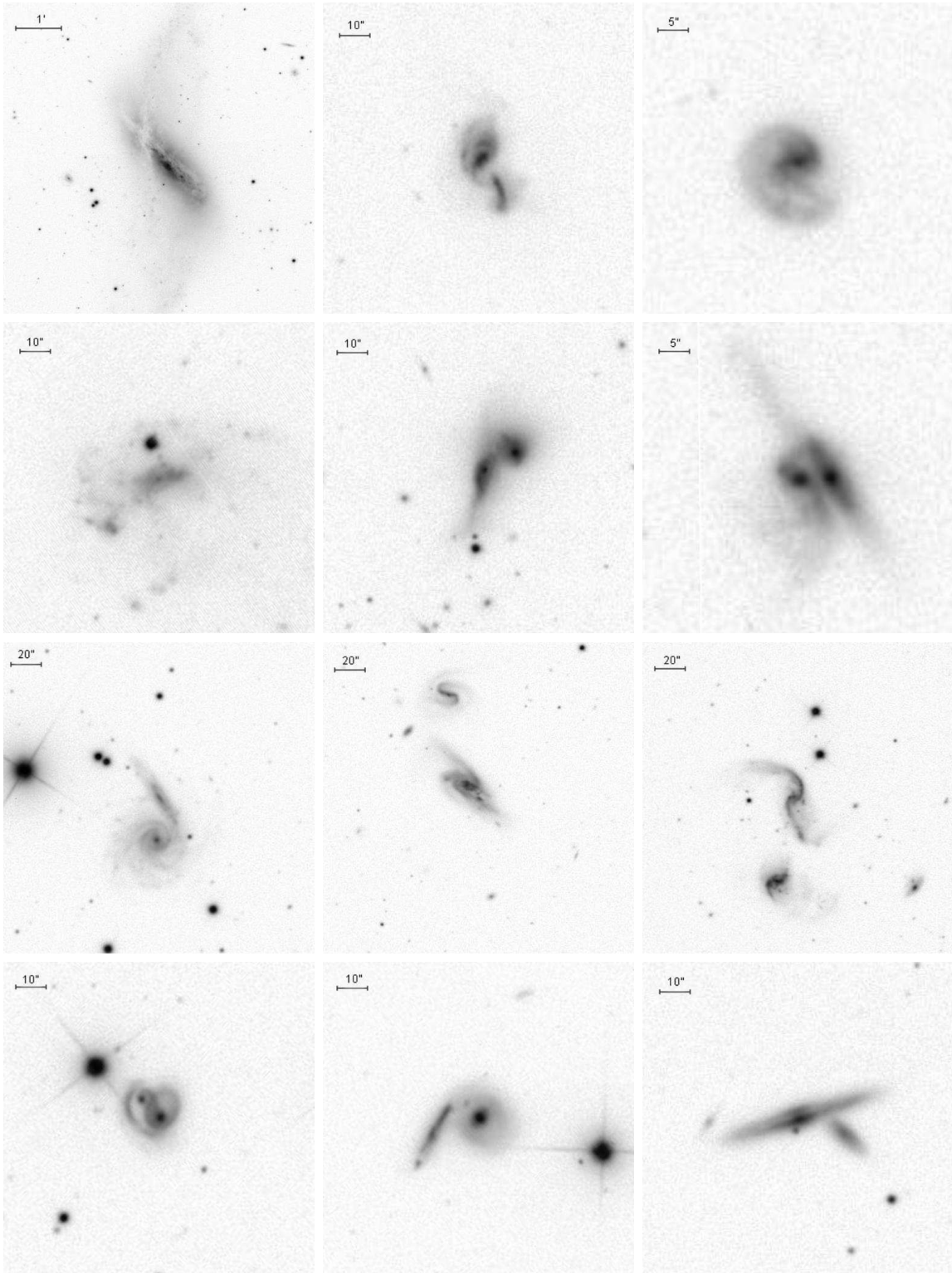


Figura 2.5: Exemplos de imagens excluídas da amostra: galáxias irregulares, sofrendo interação ou com companheiras próximas.

Tabela 2.4: Coordenadas dos objetos das figuras de exemplo.

Figura	tipo	RA (°)	DEC (°)	nome no SDSS	
2.2	Sa	22.2482	-0.5619	J012859.56-003342.8	
	Sa	30.2026	-9.0026	J020048.62-090009.3	
	Sa	220.6071	3.2319	J144225.7+031354.8	
	Sb	20.5991	-0.8752	J012223.78-005230.7	
	Sb	225.0017	1.8913	J150000.4+015328.6	
	Sb	349.7699	-8.4851	J231904.77-082906.3	
	Sc	162.6660	65.7272	J105039.83+654337.9	
	Sc	359.0295	-0.9165	J235607.07-005459.4	
2.3	SBa	41.8660	-0.2851	J024727.83-001706.3	
	SBa	262.0059	57.5218	J172801.41+573118.4	
	SBa	9.3992	0.2807	J003735.8+001650.5	
	SBa	33.0820	-0.8115	J021219.68-004841.3	
	SBb	200.6089	-2.4183	J132226.13-022505.8	
	SBb	9.1205	-10.1062	J003628.91-100622.3	
	SBb	15.3312	-9.8453	J010119.48-095043	
	SBc	24.0007	0.6635	J013600.16+003948.6	
2.4	SBc	42.3665	-0.8730	J024927.96-005222.8	
	SBc	182.0463	2.8783	J120811.11+025241.8	
	com estrelas próximas		29.2920	14.9169	J015710.07+145500.9
			222.7493	-0.0370	J145059.84-000213.2
			215.1970	4.2983	J142047.28+041753.7
			21.7321	-0.0147	J012655.69-000053
			163.1192	1.0614	J105228.6+010341.1
			254.6863	38.8090	J165844.7+384832.3
		40.2857	-0.7150	J024108.56-004253.8	
		260.7188	60.1296	J172252.5+600746.4	
2.5	irregulares ou em interação		350.0310	-0.3499	J232007.43-002059.5
			25.7631	13.6480	J014303.13+133852.8
			26.2021	-10.4575	J014448.49-102726.8
			44.1695	-0.2456	J025640.68-001444.1
			122.7865	46.4654	J081108.75+462755.4
			15.8507	-10.8559	J010324.16-105121.1
			195.4322	3.2685	J130143.71+031606.4
			260.6814	62.1737	J172243.52+621025.4
			199.4927	-0.3142	J131758.24-001850.9
			4.7080	-10.3619	J001849.91-102142.8
	238.2861	54.1473	J155308.66+540850.1		
	227.5661	58.1785	J151015.86+581042.6		
	218.6945	3.3416	J143446.68+032029.7		

## 2.3 Verificação da classificação morfológica

Para verificar a qualidade da classificação morfológica, foi separada uma sub-amostra de cerca de 200 galáxias brilhantes (magnitude por volta de 12 a 12,5), cuja morfologia foi consultada no NED (*NASA Extragalactic Database*). Foi feita uma comparação da classificação proveniente do NED com a minha classificação para estes objetos. Atribuindo tipos morfológicos numéricos (T) de E até Irr, calculamos as diferenças entre as duas classificações. O resultado foi que para a vasta maioria dos casos o tipo morfológico coincide, sendo que a média da diferença quadrática foi de  $\langle \Delta T^2 \rangle = 0,04 \pm 0,53$  (Figura 2.6). Isto significa que a incerteza quadrática média é bastante compatível com as incertezas esperadas de um processo de classificação morfológica. Isto é um bom indicador de que a classificação, ainda que visual, é confiável, na medida em que não difere significativamente da classificação encontrada no NED. Por outro lado, esta sub-amostra de teste não é realmente representativa, pois contém apenas objetos brilhantes, que são mais fáceis de se classificar corretamente. Mas como não é viável verificar toda a classificação com base em outra fonte, é razoável acreditar que os critérios utilizados tenham se mantido uniformes ao longo do processo de classificação e que esta seja, portanto, suficientemente acurada.

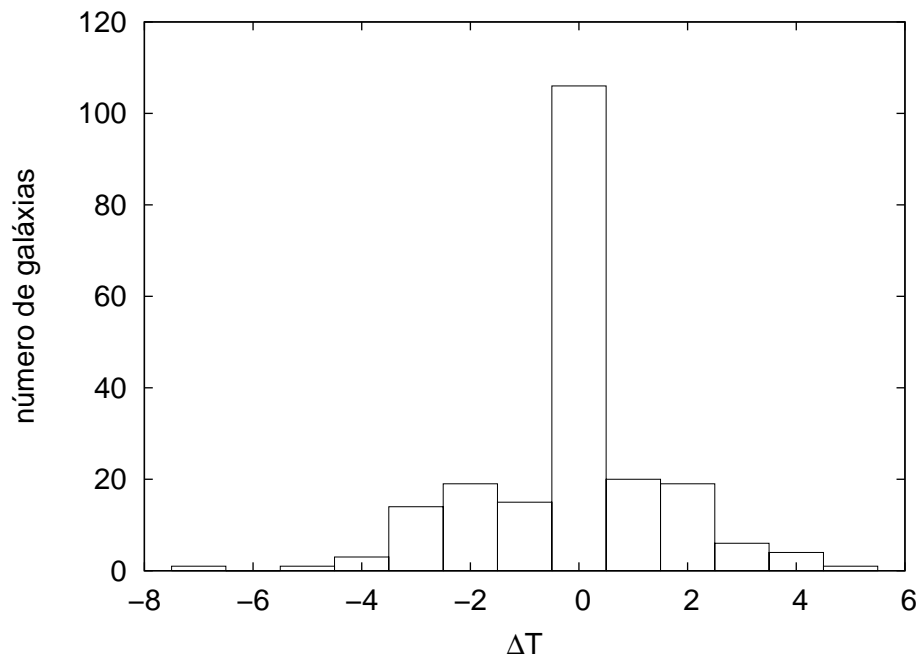


Figura 2.6: Verificação da classificação morfológica: nossa classificação e a do NED não diferem significativamente para uma sub-amostra de  $\sim 200$  galáxias brilhantes.

Uma análise análoga, quanto ao critério de barras, indicou uma leve tendência à sub-classificação das barras. Isto é, a quase totalidade das galáxias classificadas como barradas eram de fato barradas de acordo com o NED. Mas dentre aquelas classificadas como não-

barradas, algumas apareciam como sendo barradas B ou AB. Isto é compreensível, uma vez que a presente classificação é truncada em barrada (SB) ou não-barrada (SA), não apresentando a classe intermediária AB. Além disso, uma galáxia fortemente barrada é de mais fácil identificação: ou seja, a presença de barra é mais evidente (menos controversa) que a ausência de barra. Contribui para esta sub-classificação o fato de que as galáxias barradas que se apresentam muito inclinadas com relação à linha de visada, são de difícil classificação. Assim, nossa amostra de espirais barradas deve composta apenas das galáxias mais fortemente barradas; os subtipos de transição (SAB) devem estar incluídos na classe das não-barradas.

## 2.4 Características da amostra

A Figura 2.7 mostra a distribuição de magnitudes aparentes da amostra de espirais. Supondo um Universo plano, o número  $N$  de galáxias em um volume comóvel é proporcional a  $r^3$ ; e o fluxo de cada galáxia é proporcional a  $r^{-2}$ . Então, o número de galáxias com fluxo menor que  $F$  é proporcional a  $F^{-3/2}$ , ou, em termos de magnitude,  $\log N \propto 0,6\Delta m$ . Com um ajuste linear de  $\log N$  por magnitude, obtivemos o coeficiente  $0,56 \pm 0,02$  que é compatível com 0,6 dentro de menos de dois desvios e é um indicador de completeza da amostra. Isto é, não estamos sistematicamente ignorando os objetos menos brilhantes e, portanto, a amostra não deve sofrer de efeitos de seleção importantes. Convém ressaltar que esta relação entre número de objetos e magnitude supõe um Universo estático, com as galáxias distribuídas uniformemente e sem evolução da luminosidade. Embora todas essas suposições sejam evidentemente criticáveis, a aproximação é razoável para esta amostra de galáxias relativamente brilhantes e próximas; afinal, o redshift máximo é  $z=0,05$  e, como se nota na Figura 2.8, quase metade das galáxias têm  $z < 0,03$ .

A Figura 2.9 mostra a função de luminosidade da amostra de galáxias espirais. Esta função de luminosidade foi construída supondo densidade numérica de galáxias constante. As magnitudes absolutas ( $M_g$ ) foram calculadas simplesmente com o módulo de distância  $m - M = 5 \log d - 5$ ,  $d$  tendo sido determinado com a lei de Hubble na aproximação  $cz = H_o d$ , já que os redshifts são pequenos. Para todas as espirais (incluindo barradas e não-barradas), um ajuste de função de Schechter resultou em  $\alpha = -0,957 \pm 0,026$  e  $M^* = -20,62 \pm 0,07$ , que é consistente com os valores usuais de  $M^* \sim -19,5$  e  $\alpha \sim -0,86$  a  $-1,27$  para as espirais de campo (Folkes et al., 1999).

A Figura 2.10 exhibe os diagramas  $(g - r) \times (g - i)$  que foram utilizados para suprimir alguma galáxias adicionais que apresentavam cores espúrias. Um ajuste linear destas relações cor-cor mostra que as inclinações das retas  $(g - r) = c_1 + c_2(g - i)$  diminuem sistematicamente em direção aos tipos mais tardios. Esta variação é pequena, mas esta-



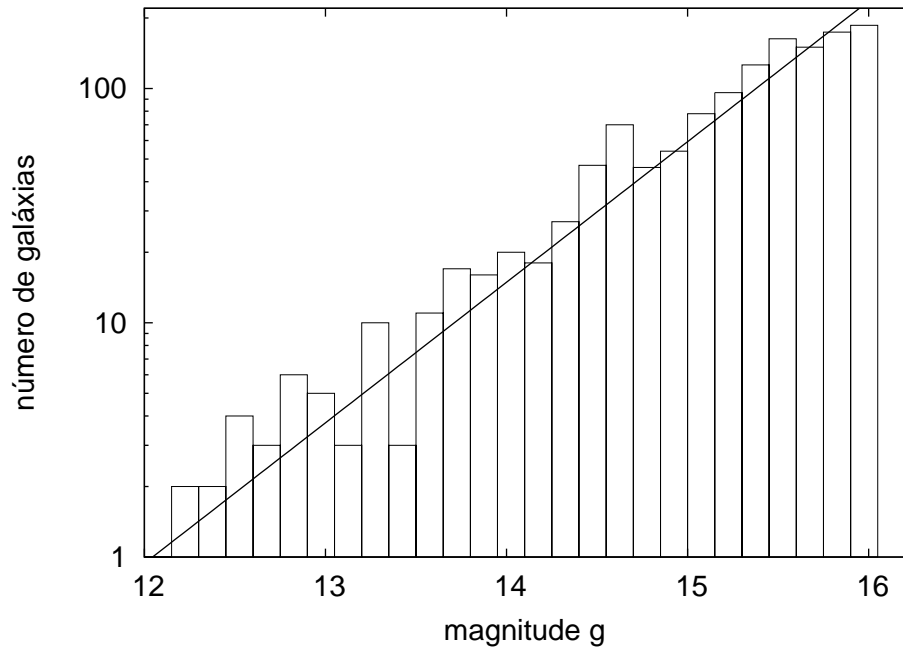


Figura 2.7: A distribuição das magnitudes  $g$  da amostra de espirais (histograma) mostra que o corte em magnitude está bem abaixo do limite de completiza. A reta corresponde a  $\log N \propto 0,6\Delta m$ .

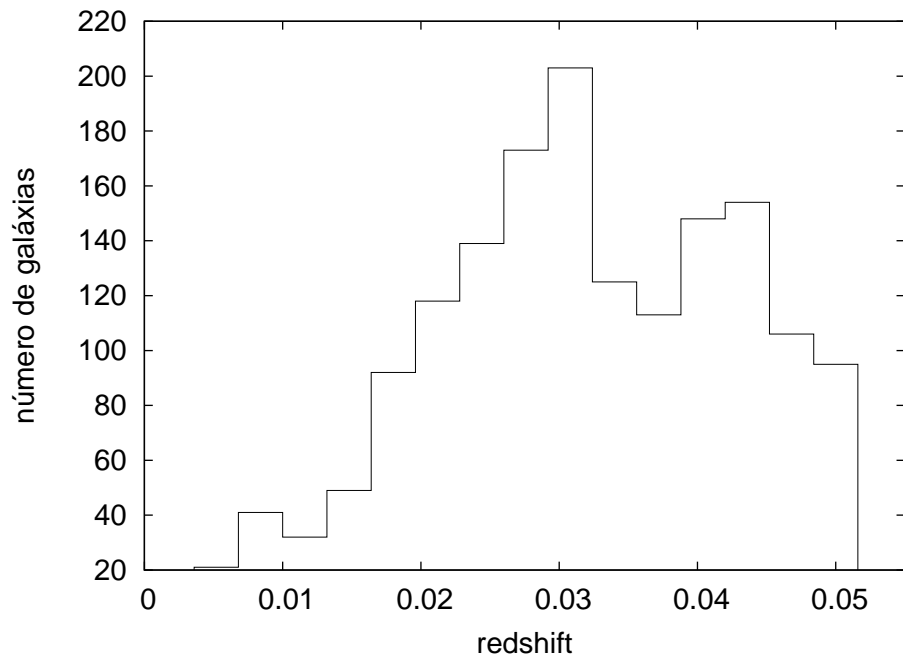


Figura 2.8: Distribuição de redshifts para a amostra completa. Cerca de metade das galáxias têm redshift menor que 0,03.

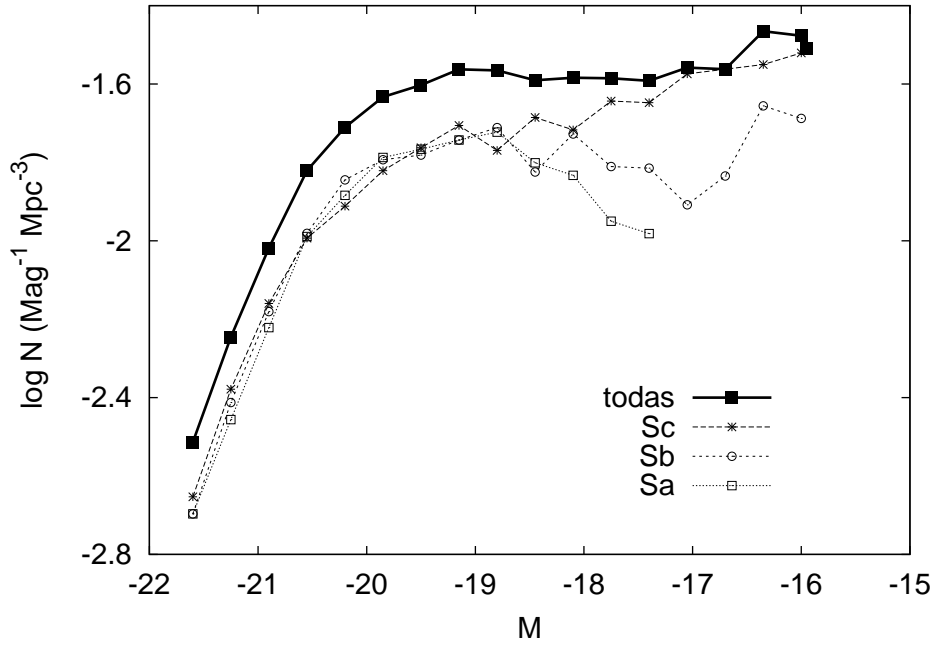


Figura 2.9: A função de luminosidade da amostra de espirais é consistente com estimativas recentes para galáxias de campo.

tisticamente significativa, como se vê na Tabela 2.5. Este efeito deve estar relacionado às diferentes histórias de formação estelar destes objetos (por exemplo, Bruzual & Charlot, 1993 e Maraston, 1998). Além disso, nota-se que a dispersão é maior para as espirais mais tardias, sugerindo a maior importância de recentes surtos de formação estelar nestas galáxias.

De fato, a variação sistemática deste índice deve estar relacionada com a *idade* do último surto de formação estelar. A idéia básica dos modelos mais simples de evolução de galáxias espirais consiste em estimar os índices de cor de uma população estelar formada em um surto. Estes modelos requerem o conhecimento da função de massa inicial e da taxa de

Tabela 2.5: Dependência morfológica das relações cor-cor.

tipo	$c_2$
Sa	$0,680 \pm 0,007$
Sb	$0,656 \pm 0,006$
Sc	$0,581 \pm 0,011$
SBa	$0,701 \pm 0,018$
SBb	$0,670 \pm 0,014$
SBc	$0,638 \pm 0,018$

formação estelar e fornecem os índices de cor como função do tempo. Através destes métodos, obtém-se o resultado de que quanto mais recente tenha sido o último surto de formação estelar, menores são os índices de cor; o que equivale a dizer que depois de um surto, os índices de cor aumentam com o tempo.

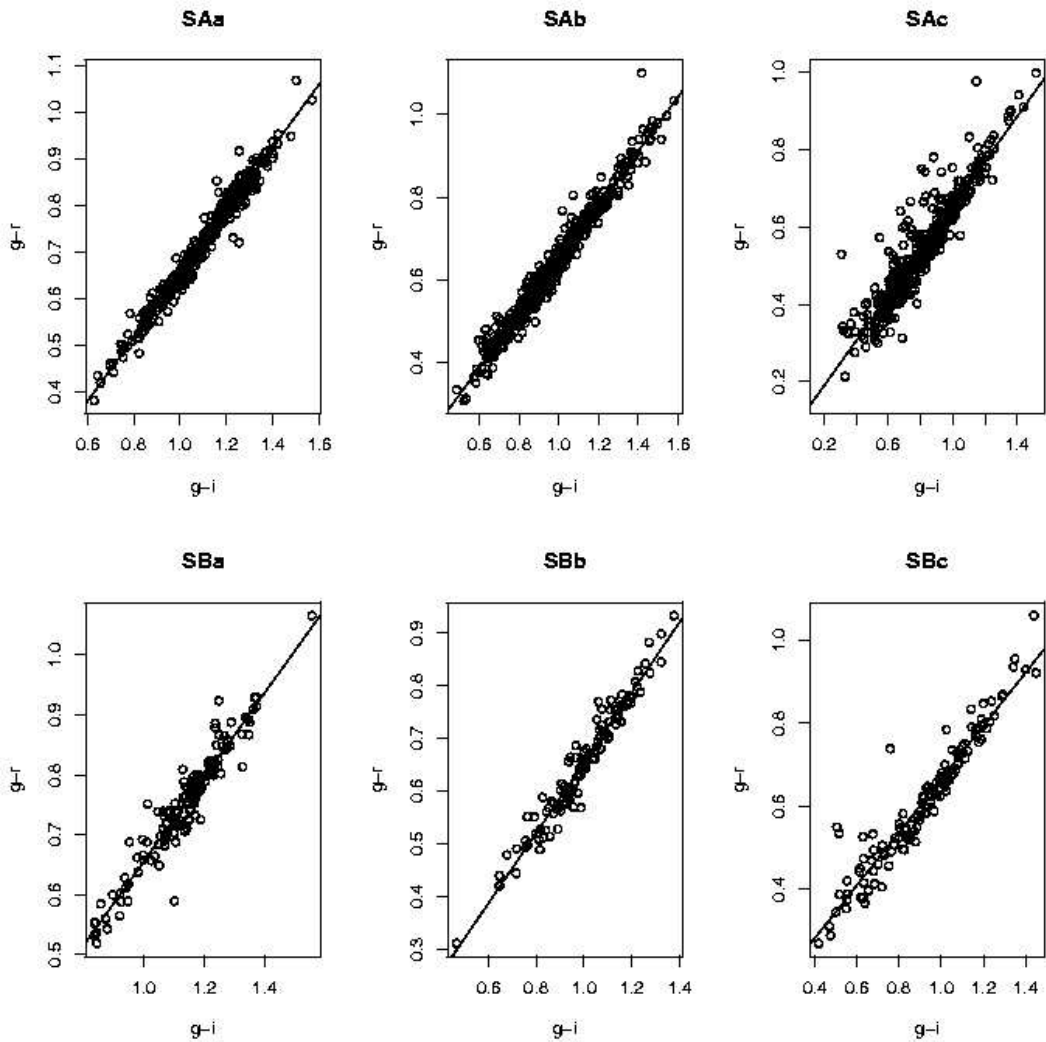


Figura 2.10: Diagramas cor-cor para as galáxias espirais separadas em subtipos morfológicos. O coeficiente angular aumenta para as galáxias mais tardias.



# Capítulo 3

## Medidas das Razões Axiais

Este capítulo descreve a medição das razões axiais das galáxias da amostra. A Seção 3.1 apresenta os métodos e critérios empregados nas medições, com alguns exemplos. Na Seção 3.2, são apresentadas comparações das nossas medidas com os dados provenientes do SDSS; são também avaliados os raios nos quais as medidas foram feitas.

### 3.1 Procedimento e critérios de medição

A partir da base de dados do SDSS, foram adquiridas as imagens no formato FITS de cada uma das 1619 galáxias espirais, que foram identificadas individualmente. Já que cada campo tem cerca de  $13,52 \times 8,98$  arcmin, é comum haver mais de uma galáxia no mesmo campo, visto que as galáxias típicas têm menos de 1 arcmin de diâmetro. Além disso, a galáxia mais brilhante de um campo nem sempre é necessariamente a galáxia espiral em questão. Por isso, cada galáxia foi isolada em novos campos de cerca de  $3 \times 3$  arcmin, centrados na galáxia, para facilitar as medições subseqüentes.

O passo seguinte foi a efetiva medição das razões axiais de cada uma das 1619 galáxias. Para isso, utilizou-se a ferramenta ELLIPSE do pacote STSDAS do IRAF, que ajusta isofotas elípticas às imagens. O algoritmo requer um valor aproximado das coordenadas (X,Y em pixels) do centro da galáxia, além de uma estimativa inicial da elipticidade e do ângulo de posição do semi-eixo maior. Depois de cada ajuste de elipse, o raio é incrementado até um certo limite que é dado por vários critérios, que incluem a razão sinal-ruído e o gradiente das regiões externas (ver Jedrzejewski, 1987 e documentação do IRAF). Esta

ferramenta então retorna os diversos parâmetros geométricos e fotométricos das isofotas, incluindo a elipticidade  $\epsilon$  em função do semi-eixo maior. A razão axial aparente  $b = 1 - \epsilon$  pode então ser obtida diretamente a partir do ajuste.

Com estes dados, foi possível construir gráficos de razão axial  $b$  em função do raio (isto é, do semi-eixo maior), para cada galáxia. A razão axial varia entre 0 (mais achatada) e 1 (mais circular); e o raio é medido em pixels ou em arcsec, sabendo que a escala de placa destas imagens é de 0,396 arcsec/pixel. O critério de escolha do valor representativo da razão axial aparente para uma dada galáxia consistiu em determinar visualmente a região onde  $b$  em função do raio já tivesse se estabilizado em um patamar constante. Depois de alguma experimentação constatou-se que as elipses se apresentavam tipicamente mais circulares nas regiões centrais e, depois de alguma flutuação,  $b$  acabava por se estabilizar num valor suficientemente constante, nas regiões mais externas. Convém ressaltar que nós estamos interessados em determinar o valor da razão axial que seja representativo do formato do disco como um todo. Por isso, é importante tomar os valores mais externos. Por outro lado, essa é a região da galáxia onde o brilho (número de contagens por pixel) é menor e conseqüentemente os ajustes são menos confiáveis. Assim sendo, é mais seguro tomar um valor que leve em conta a média de um intervalo de raios e não apenas estritamente a última isofota.

Portanto, uma vez determinado um intervalo de raios onde a razão axial já tivesse se estabilizado, estima-se um valor médio representativo de  $b$ , anotando-se ainda a incerteza atribuída a esse valor, associada à flutuação dos pontos ao redor do valor estimado. Para cada galáxia foram medidos/estimados quatro parâmetros: razão axial  $b$ , sua incerteza, intervalo de raios, e um parâmetro de qualidade  $Q$ . Este último parâmetro guarda informação a respeito da qualidade visual do ajuste e do nível de flutuação dos valores de  $b$ . Ainda que não seja realmente quantitativo, ele permite distingüir entre o conjunto das galáxias cujo ajuste é mais confiável daquele onde o ajuste é mais duvidoso e analisá-los separadamente. Foram atribuídos, assim, três níveis de qualidade (do tipo ótimo/bom/regular) associados aos parâmetros  $Q=0/1/2$  respectivamente; além de  $Q=9$  para as galáxias cujo ajuste falhou por completo e foram ignoradas (por estarem muito próximas da borda do campo, por exemplo). Na Tabela 3.1 nota-se que as galáxias com parâmetro  $Q=0$  são as que apresentam a menor incerteza média  $\bar{\sigma}_b$ . Nota-se também que o ajuste falhou para 16 galáxias.

O objetivo de medir as razões axiais aparentes  $b$  é utilizar a sua função de distribuição  $\varphi(b)$  na análise posterior. Por isso, as incertezas  $\sigma_b$  não afetam diretamente o resultado da análise. Na função de distribuição, o que importa é o **número** de galáxias com razão axial entre  $b$  e  $b + \Delta b$ , independentemente da incerteza associada a cada medida. Contudo, é desejável que a incerteza média das razões axiais  $\bar{\sigma}_b$  seja menor do que o tamanho do intervalo  $\Delta b$ . Se a incerteza média em  $b$  fosse maior que as larguras dos intervalos, então seria alta a probabilidade de que uma dada medida pertencesse na realidade a um dos

intervalos adjacentes e a forma da função de distribuição não seria confiável.

A função de distribuição  $\varphi(b)$  adotada tem 20 intervalos entre 0 e 1 (Figura 3.4). Este mostrou-se um número adequado de divisões, resultando em um histograma que exhibe a subestrutura necessária à análise, mas sem se tornar excessivamente irregular. Com 10 ou 15 intervalos, as características importantes da região de  $b \sim 1$  ficam camufladas; e com 25 ou mais intervalos, a barra de erro (poissoniana) fica comparativamente grande, pois o número de objetos em cada intervalo reduz-se muito. Ou seja, o tamanho do intervalo do histograma adotado é  $\Delta b = 0,05$ . Vemos, portanto, que as incertezas médias  $\bar{\sigma}_b$  são menores que o tamanho do intervalo. De fato, para o subconjunto de galáxias com o melhor parâmetro de qualidade ( $Q=0$ ), a incerteza média é quase a metade do tamanho do intervalo. Isso mostra que a precisão dos valores estimados de  $b$  é suficiente para os propósitos da análise.

Tabela 3.1: Incertezas médias nas razões axiais aparentes  $b$  conforme o parâmetro de qualidade  $Q$ .

Q	0	1	2	9	todas medidas	apenas 0 e 1
$n^2$ de gal.	1157	289	157	16	1603	1446
$\bar{\sigma}_b$	0,026	0,038	0,032	-	0,028	0,028

As Figuras 3.1, 3.2 e 3.3 ilustram o processo de medição. A galáxia utilizada como exemplo é uma galáxia Sb não-barrada de magnitude  $r=12,80$  e coordenadas  $RA=221,1019^\circ$  e  $DEC=1,6798^\circ$ . Esta galáxia recebeu um parâmetro  $Q=0$  e a região utilizada para a medição foi entre os raios 53 e 78 arcsec, resultando em uma razão axial estimada de  $b=0,521 \pm 0,016$ . A Figura 3.1 apresenta as isofotas superpostas à imagem da galáxia. Note que as isofotas do centro são mais circulares, o que se reflete nos primeiros pontos da Figura 3.2: a razão axial é maior no centro e depois de algumas flutuações, se estabiliza em um valor aproximadamente constante. A linha horizontal representa o valor de  $b$  adotado para esta galáxia. Na Figura 3.3, temos a variação do brilho superficial em função da distância ao centro. Nota-se que, na região utilizada para se determinar  $b$  o brilho superficial também já se estabilizou num valor próximo de  $24,5 \text{ mag/arcsec}^2$ , que é similar ao usualmente adotado como critério de onde termina o disco luminoso. Convém ressaltar no entanto que essa magnitude não é a magnitude B de Johnson, mas sim a magnitude do filtro  $r$  do SDSS. De qualquer modo, o brilho superficial não foi o critério escolhido para determinar o raio máximo utilizado para a medição. Valores típicos por volta de 25 magnitudes só confirmam que estamos adotando regiões plausíveis; nem excessivamente internas nem externas.

No caso das galáxias barradas, o processo de medição é um pouco dificultado, já que é importante notar a distinção entre a razão axial da barra e a do disco. Como a barra

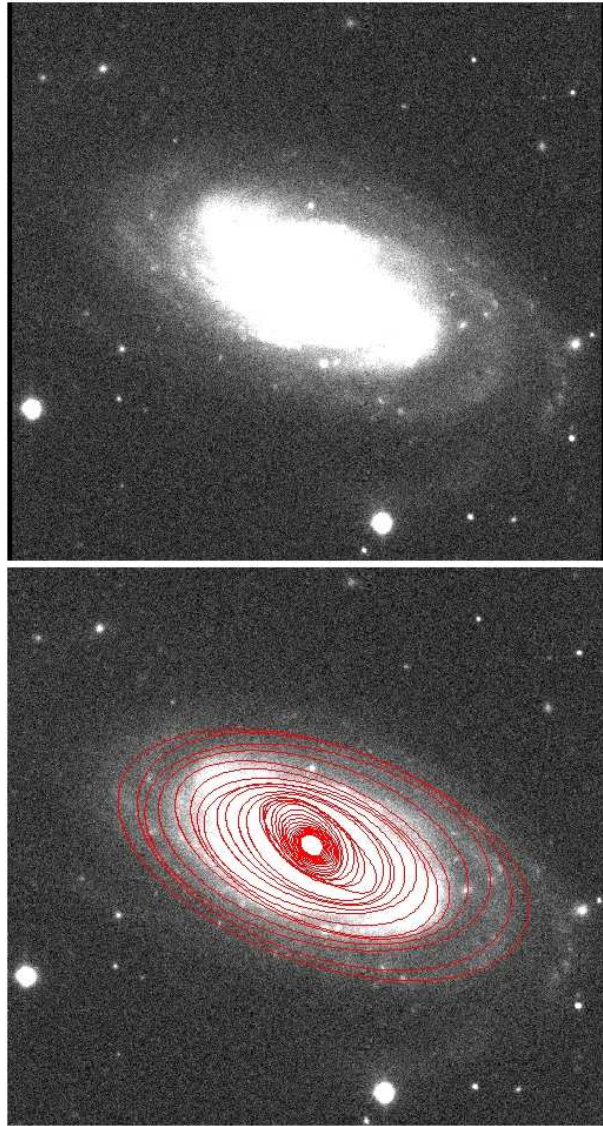


Figura 3.1: Exemplo ilustrativo de isofotas elípticas superpostas à imagem de uma galáxia Sb. O campo tem 198 arcsec de lado.



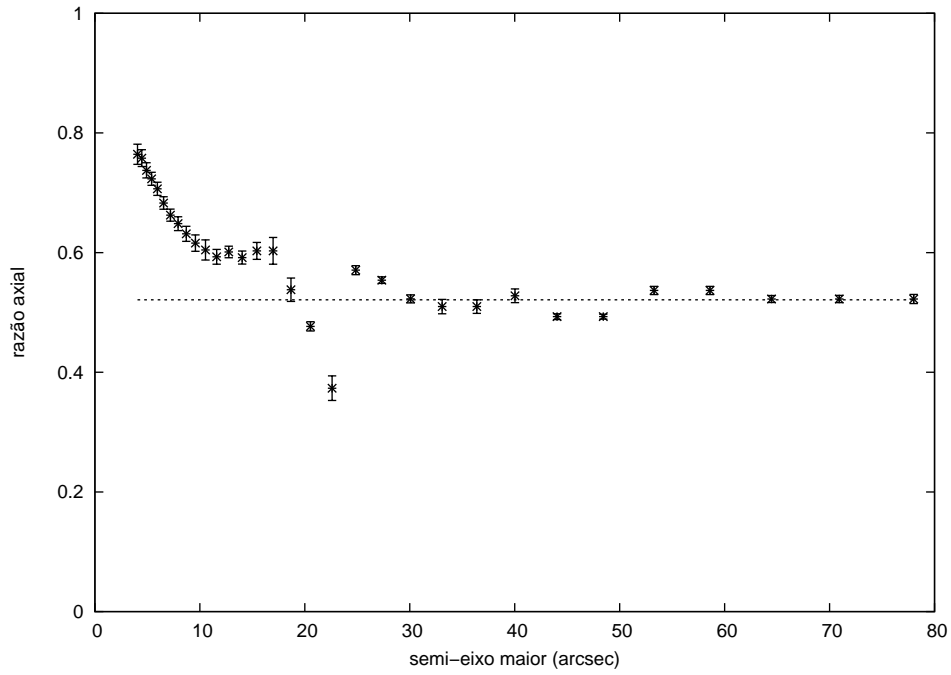


Figura 3.2: Exemplo de razão axial em função do semi-eixo maior. A linha horizontal corresponde ao valor de  $b$  adotado para esta galáxia.

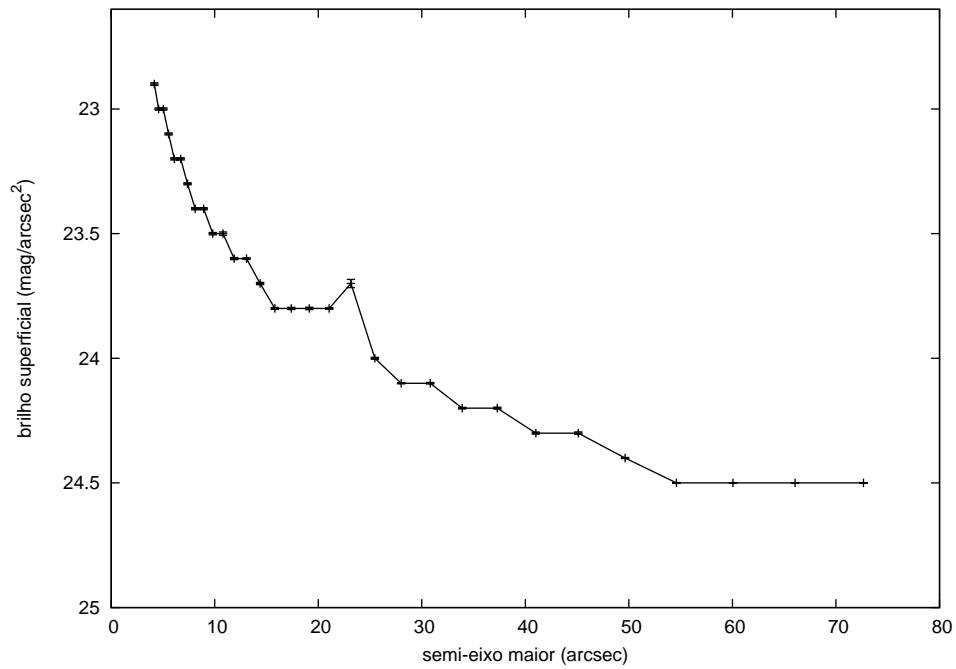


Figura 3.3: Exemplo de brilho superficial em função do semi-eixo maior.

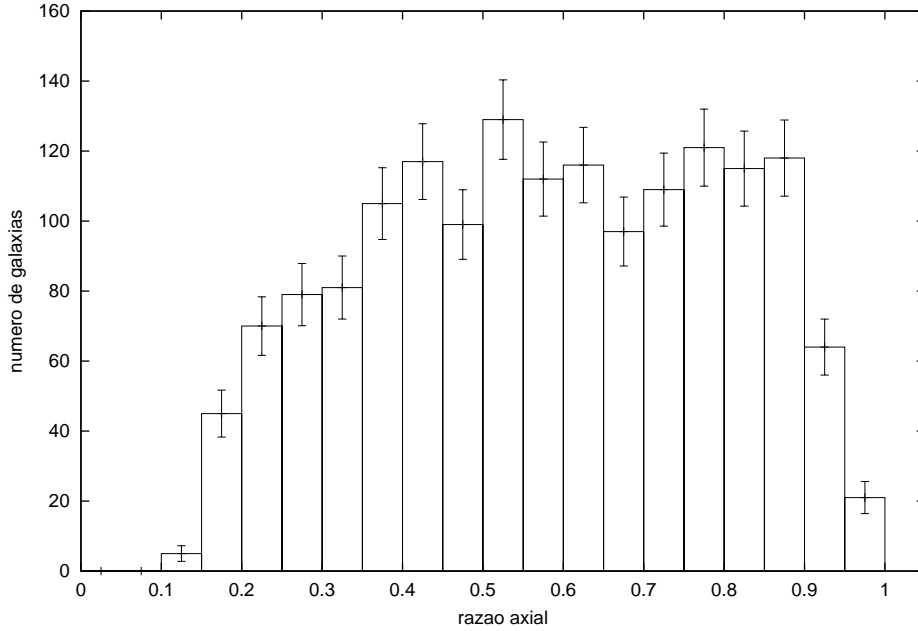


Figura 3.4: Distribuição das razões axiais aparentes para todas as 1603 galáxias medidas.

é uma estrutura bastante alongada, a razão axial dessa região é bem menor. Quando a barra termina, as isofotas passam a seguir mais nitidamente o formato do disco e a razão axial aumenta abruptamente. Também abrupta é a variação do ângulo de posição do semi-eixo maior, quando a barra termina.

O procedimento de medição foi repetido, naturalmente, para as outras  $\sim 1600$  galáxias, resultando na função de distribuição de razões axiais aparentes da Figura 3.4, onde as barras de erro são a raiz do número de objetos em cada intervalo.

## 3.2 Comparação com as medidas provenientes do SDSS

Uma vez que medidas automáticas de razão axial estão disponíveis nos dados do SDSS, é bastante pertinente compará-las com as nossas medições. As razões axiais foram medidas automaticamente pelo SDSS na isofota de  $25 \text{ mag/arcsec}^2$  em cada filtro. A Figura 3.5 mostra que a concordância geral é bastante evidente, já que os pontos se encontram densamente concentrados ao redor da reta  $y = x$ . Na verdade, um ajuste linear resulta em:

$$b = (0,932 \pm 0,009) \times b_{SDSS} + (0,051 \pm 0,006)$$

Já que o coeficiente angular é menor que 1, isso indicaria que medimos as galáxias como sendo levemente “menos circulares” do que as correspondentes medidas do SDSS. Se

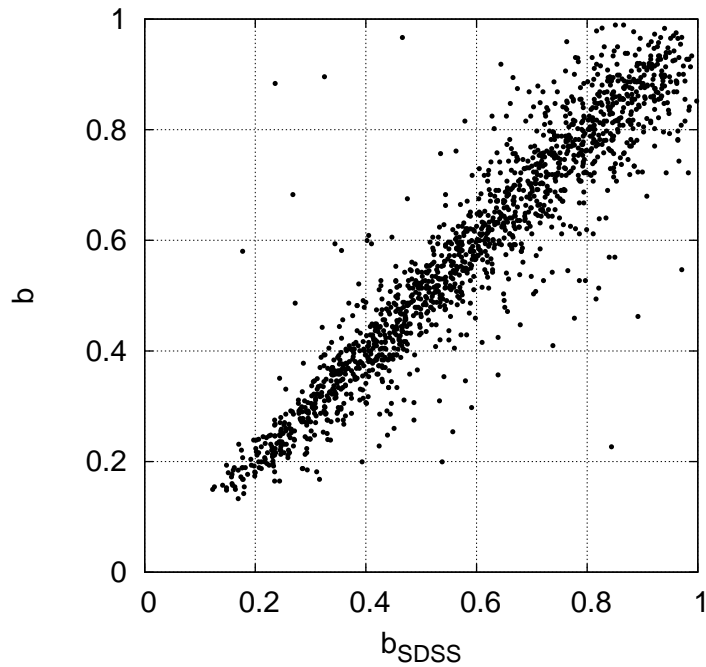


Figura 3.5: Comparação entre nossas medidas e dados do SDSS. Ambos correspondem a razões axiais medidas em imagens no filtro  $r$ .

forçamos o coeficiente linear a ser nulo, no entanto, o coeficiente angular resulta em  $1,0098 \pm 0,0031$ . Na Figura 3.5, notamos que galáxias mais achatadas que  $b \sim 0,2$  são extremamente raras. Além disso, percebe-se que a dispersão dos pontos é mais estreita nesta região (de pequeno  $b$ ) e se alarga para as galáxias mais circulares ( $b \sim 1$ ). Isso é esperado, já que as razões axiais das galáxias de perfil são, em geral, mais bem determinadas do que as das galáxias de face, pois o brilho está mais concentrado e em uma região mais regularmente elíptica, o que facilita os ajustes. Isso, no entanto, pode não ser verdade em galáxias com bojos muito proeminentes. Observe que este limite inferior de razão axial é bastante superior à razão axial esperada para discos típicos de 10 kpc de raio e 200pc de altura, por exemplo, que teria uma razão intrínseca da ordem de 0,01. Uma das causas desta discrepância é a presença do bojo, que por ser uma estrutura esferoidal, torna as razões axiais medidas um pouco maiores.

Na Figura 3.6 temos a relação entre as incertezas das medidas  $\sigma_b$  em função das razões axiais  $b$ . Um ajuste de reta grosseiro nestes pontos resulta em um coeficiente angular positivo de  $0,028 \pm 0,002$ , indicando que as incertezas das medidas de fato aumenta levemente para os objetos mais circulares. Por este motivo, é natural que a concordância entre nossas medidas e as do SDSS seja menos estreita para  $b \sim 1$ .

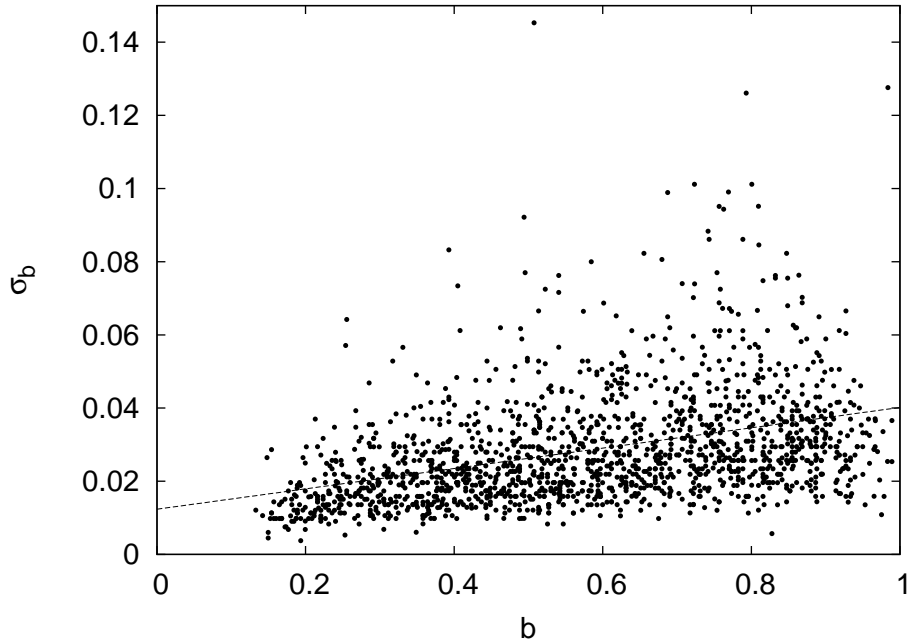


Figura 3.6: Incerteza das medidas em função da razão axial, para as nossas medições. As incertezas aumentam levemente para os objetos mais circulares, conforme se nota pelo ajuste linear.

Ainda na Figura 3.5 nota-se que há alguns pontos bastante discordantes, mas que são apenas alguns casos individuais ( $\sim 10$ ) dentre  $\sim 1600$ , possivelmente associados a galáxias barradas. Uma verificação de alguns destes casos revelou que mesmo nas não-barradas a nossa medida tende a ser mais plausível. A Figura 3.7 mostra um exemplo de galáxia com medidas discordantes. A galáxia em questão é uma SBc especialmente extensa e fortemente barrada, de magnitude  $r=12,37$  e coordenadas  $RA=182,0463^\circ$  e  $DEC=2,8783^\circ$ . A nossa medida,  $b = 0,683 \pm 0,020$  é certamente incompatível com a medida proveniente do SDSS,  $b_{SDSS} = 0,268$  e este é um dos casos mais extremos de discordância. É muito provável, como se vê na imagem da galáxia, que a medida automática do SDSS tenha, por algum motivo, se limitado à barra da galáxia, gerando um valor muito baixo de razão axial. E este valor é inconsistente com o formato do disco, que claramente não é tão achatado. Na Figura 3.8 nota-se que o valor de  $b_{SDSS} = 0,268$  diz respeito à região mais interna da galáxia.

A comparação entre nossas medidas e as do SDSS, separada por tipo morfológico, é mostrada na Figura 3.9. Aparentemente a concordância é pior para as SBc. Na Tabela 3.2, apresentam-se os resultados de ajustes lineares do tipo  $b = \alpha_1 b_{SDSS} + \alpha_2$ . Os coeficientes angulares decrescem sistematicamente de Sa para Sc, mas dadas as incertezas, este comportamento não é realmente significativo. A diferença de comportamento entre barradas e não-barradas, no entanto, é significativa. Pode-se afirmar que a inclinação das retas é

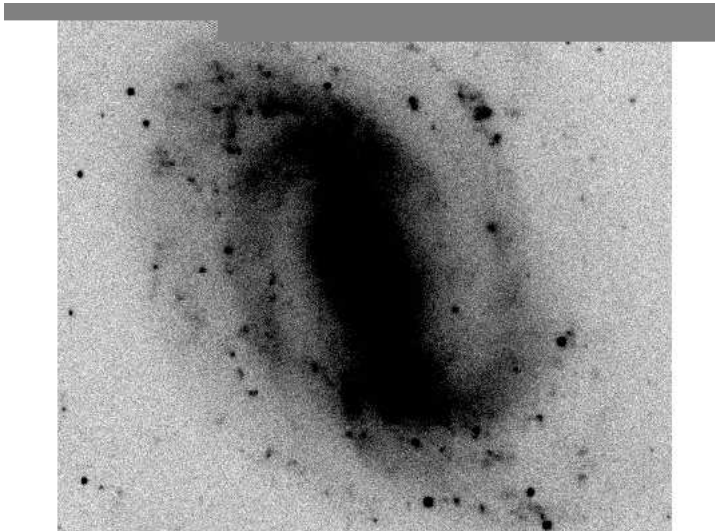


Figura 3.7: Exemplo de galáxia (SBc) com medidas discordantes de razão axial (o campo tem cerca de 277 arcsec de lado).

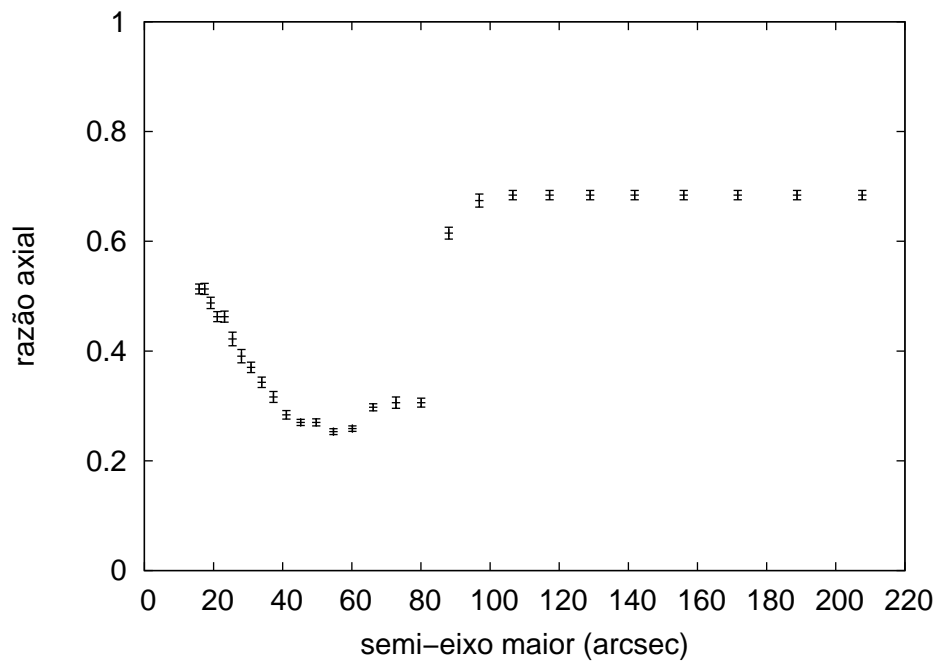


Figura 3.8: Este é um exemplo extremo em que a nossa medida ( $b \simeq 0,7$ ) discorda da medida do SDSS ( $b_{SDSS} \simeq 0,3$ ), que provavelmente se limitou à região da barra. O nosso valor é mais consistente com a forma do disco.

Tabela 3.2: Ajustes das relações entre nossas medidas de razão axial e as do SDSS, separadas por tipo morfológico.

tipo	$\alpha_1$	$\alpha_2$
Sa	$0,972 \pm 0,018$	$-0,003 \pm 0,010$
Sb	$0,967 \pm 0,014$	$0,002 \pm 0,008$
Sc	$0,948 \pm 0,014$	$0,017 \pm 0,008$
SBa	$0,895 \pm 0,036$	$0,064 \pm 0,025$
SBb	$0,888 \pm 0,032$	$0,062 \pm 0,022$
SBc	$0,793 \pm 0,045$	$0,144 \pm 0,032$

menor para as barradas, especialmente para as SBc. Isto significa que as galáxias barradas do SDSS tendem a ser ligeiramente mais “circulares” que as nossas medidas. Por outro lado, é importante ressaltar que a dispersão dos pontos nas barradas (e em especial nas SBc) é maior que nas não-barradas.

Outra grandeza que pode ser comparada com dados do SDSS é o raio no qual as razões axiais foram medidas. Conforme mencionado, as razões axiais do SDSS são isofotais, isto é, foram medidas todas no raio onde o brilho superficial é  $25 \text{ mag/arcsec}^2$ . Para verificar se estes raios coincidiam com os raios nos quais nossas medidas foram feitas, a Figura 3.10 apresenta um histograma de  $r/r_{SDSS}$ . O raio  $r_{SDSS}$  foi consultado da base de dados do SDSS e o nosso  $r$ , neste histograma, corresponde ao raio médio  $r_m$ : nossas razões axiais foram avaliadas em regiões da galáxias entre um raio interno  $r_i$  e um limite externo  $r_e$ . Se comparamos os raios médios  $r_m = (r_i + r_e)/2$  com  $r_{SDSS}$ , obtemos a razão média de  $1,82 \pm 0,07$ . Se, ao invés disso, utilizarmos apenas o raio interno, obtemos  $1,42 \pm 0,05$ . Isto significa que nossas medidas foram feitas, em média, em regiões um pouco mais externas do que as do SDSS, ou seja, em raios um pouco além da isofota de  $25 \text{ mag/arcsec}^2$ . Se avaliássemos apenas a razão axial da última isofota, em regiões de baixo brilho superficial, a medida não seria muito confiável, mas já que tomamos um valor médio de uma região extensa de isofotas, isso indica que devemos estar utilizando valores que representam fielmente o formato do disco como um todo.

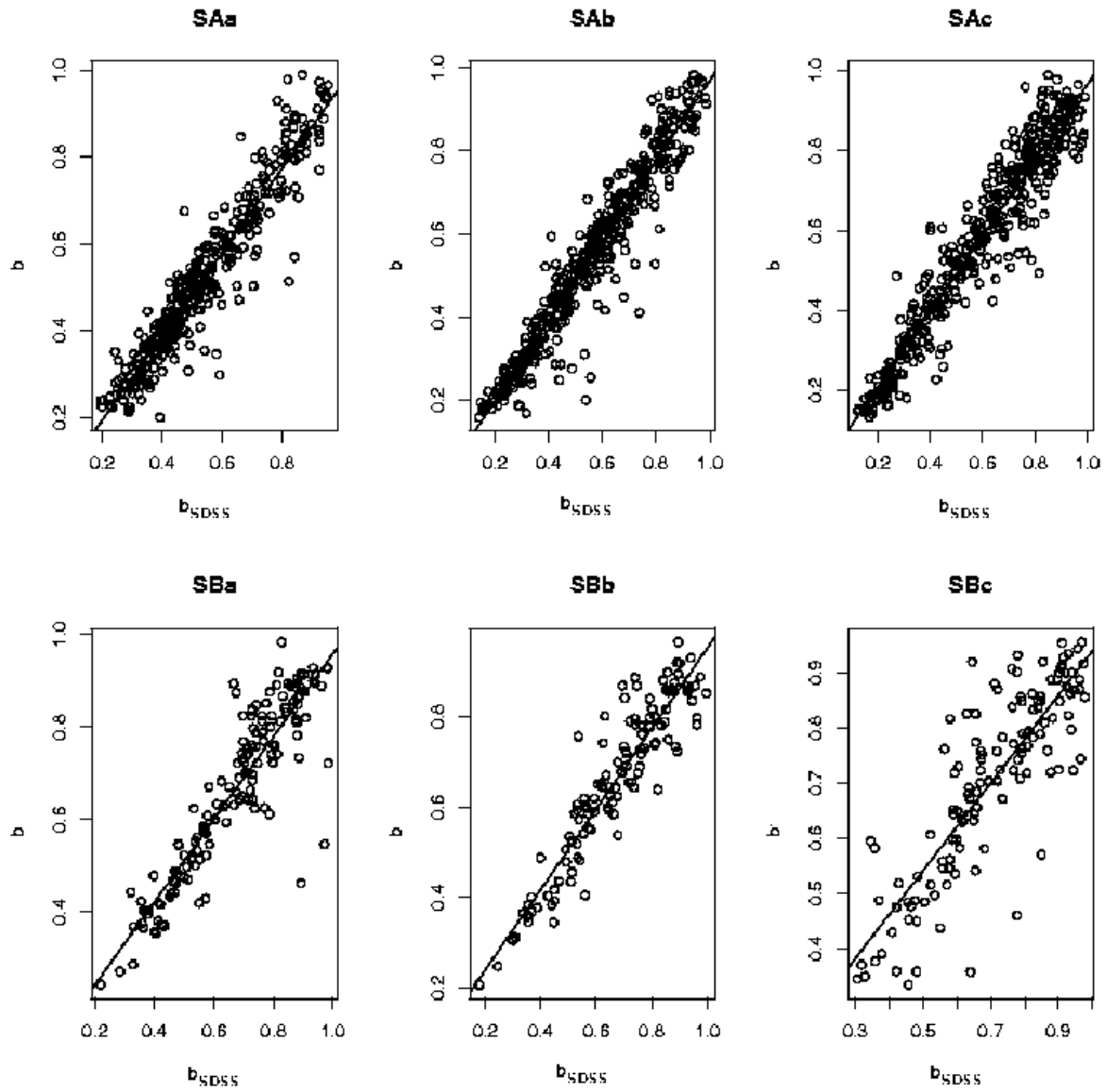


Figura 3.9: Comparação entre nossas medidas e dados do SDSS separados em tipos morfológicos.

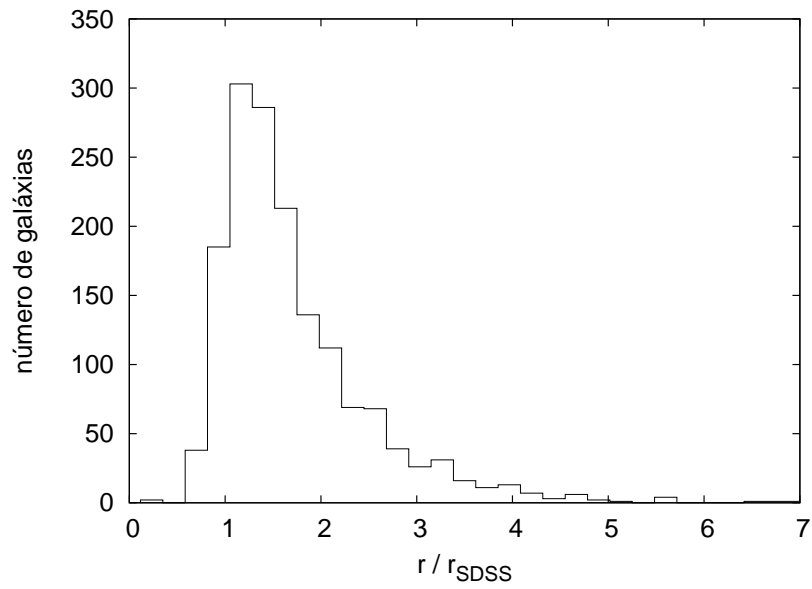


Figura 3.10: Comparação entre nossas medidas e dados do SDSS mostra que nós medimos as razões axiais em raios  $r$  ligeiramente maiores.



# Capítulo 4

## Análise das Funções de Distribuição de Razões Axiais

Este capítulo contém os resultados principais desta Dissertação, que são as análises das funções de distribuição de razões axiais. A Seção 4.1 expõe o problema de inverter a distribuição observada e descreve o algoritmo empregado, bem como as suposições adotadas. Na Seção 4.2 apresenta-se o resultado desta análise para a amostra completa de galáxias, de onde obtemos os valores das razões axiais intrínsecas médias. A Seção 4.3 explora a possível relação entre a triaxialidade e a morfologia, mas concluímos que os resultados para as barradas e não-barradas, bem como para os sub-tipos Sa, Sb e Sc não diferem significativamente dos da amostra completa.

### 4.1 Deconvolução das distribuições

O único parâmetro efetivamente mensurável nas imagens das galáxias é a razão axial aparente  $b$ , ou seja, a razão entre o eixo menor e o eixo maior da galáxia projetada no plano do céu. O problema consiste em inferir, a partir destes dados, os parâmetros intrínsecos, isto é, as razões axiais  $p$  e  $q$ . Não é possível determinar o ângulo de inclinação de cada galáxia em relação à linha de visada já que as formas intrínsecas das galáxias não são conhecidas. É possível contudo, inferir estatisticamente qual é a média das razões intrínsecas para uma população de galáxias, assumindo que elas estejam orientadas aleatoriamente no espaço.

Foi implementado um algoritmo que utiliza um método Monte Carlo de busca aleatória de

parâmetros para calcular as médias das razões axiais intrínsecas da amostra. O objetivo do programa consiste essencialmente no seguinte: dada uma distribuição de razões axiais aparentes  $\varphi(b)$ , calculam-se as distribuições de razões axiais  $f(p)$  e  $f(q)$ . A distribuição  $\varphi(b)$  é um histograma de número de galáxias com razão axial  $b$  entre  $b$  e  $b + \Delta b$ . Já as funções de distribuição  $f(p)$  e  $f(q)$  foram supostas gaussianas. Na ausência de um modelo físico que nos permita inferir as distribuições intrínsecas a partir de primeiros princípios, adotamos a concepção mais simples possível de que tais distribuições seriam aproximadamente gaussianas com médias  $\bar{p}$  e  $\bar{q}$  e desvios-padrão  $\sigma_p$  e  $\sigma_q$ , respectivamente, que devem ser determinados empiricamente pelos nossos dados. Dessa maneira, o problema consiste em determinar os valores destes quatro parâmetros.

Embora não seja possível obter diretamente as razões intrínsecas a partir das aparentes (para cada objeto), já que teríamos um único observável ( $b$ ) e quatro variáveis intrínsecas ( $p$ ,  $q$ ,  $\theta$  e  $\phi$ ) o inverso é perfeitamente possível. Isto é, se soubéssemos o formato intrínseco de uma galáxia e ainda a sua orientação espacial, poderíamos calcular imediatamente qual seria o seu formato projetado no plano do céu. Ou seja, dados os parâmetros intrínsecos que caracterizam o elipsóide ( $p$  e  $q$ ) e dados dois ângulos ( $\theta$ ,  $\phi$ ) que são suficientes<sup>1</sup> para determinar a orientação deste elipsóide com relação à linha de visada, a projeção desta figura é um problema meramente geométrico, que se encontra resolvido no Apêndice A (Binggeli, 1980 e Stark, 1977). Portanto, é possível expressar a razão axial aparente  $b$  de um elipsóide como:

$$b = b(p, q, \theta, \phi)$$

Consideremos um elipsóide triaxial com eixos na razão  $1 : p : q$  (com  $1 \geq p \geq q$ ). Suponhamos que este elipsóide esteja orientado com relação ao sistema de eixos do observador segundo os dois primeiros ângulos de Euler,  $\theta$  e  $\phi$ . Mostra-se que, sob projeção, a razão axial aparente  $b$  da elipse resultante é dada por:

$$b = \sqrt{\frac{(j+l) \mp [(j-l)^2 + 4k^2]^{1/2}}{(j+l) \pm [(j-l)^2 + 4k^2]^{1/2}}} \quad (4.1)$$

onde  $j$ ,  $k$  e  $l$  são funções de  $p$ ,  $q$ ,  $\theta$  e  $\phi$  :

---

<sup>1</sup>Notemos que se estivéssemos tratando de um elipsóide oblato achatado, como um disco, a orientação espacial estaria suficientemente caracterizada por um único ângulo. No caso geral de elipsóides triaxiais, são necessários dois ângulos, mas não três, pois o terceiro ângulo corresponderia a um ângulo de posição: este terceiro ângulo determina em que direção está o semi-eixo maior da elipse no plano do céu, mas sem causar nenhuma deformação à figura, causada por uma projeção adicional.

$$\begin{aligned}
j &\equiv \frac{1}{p^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{q^2} \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{1}{p^2 q^2} \cos^2 \theta \sin^2 \phi \\
k &\equiv \left( \frac{1}{p^2 q^2} - \frac{1}{q^2} \right) \cos \theta \sin \phi \cos \phi \\
l &\equiv \frac{1}{q^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{p^2 q^2} \cos^2 \theta
\end{aligned}$$

Então, conhecendo a forma de um elipsóide individual e sua orientação, sabemos calcular com que aparência ele se apresenta ao observador. Mais do que isso, podemos fazer o mesmo para um conjunto de objetos e efetivamente simular uma distribuição  $\varphi(b)$ . Mas para isso, precisamos adotar alguma função para as distribuições  $f(p)$  e  $f(q)$  e admitir que os elipsóides estejam aleatoriamente orientados. É através da comparação da distribuição  $\varphi(b)$  simulada com a observada que podemos determinar o conjunto de parâmetros  $(\bar{p}, \sigma_p, \bar{q}, \sigma_q)$  mais representativo estatisticamente.

O nosso algoritmo baseia-se em um processo Monte Carlo no qual são sorteadas aleatoriamente as variáveis de orientação espacial ( $\theta$  e  $\phi$ ) bem como as variáveis normalizadas que descrevem as distribuições de razões intrínsecas. O programa requer então uma estimativa inicial dos valores de  $(\bar{p}, \sigma_p, \bar{q}, \sigma_q)$  para iniciar a iteração. Valores típicos de estimativas iniciais utilizadas foram:

$$\begin{array}{ll}
\bar{p} = 0,90 & \bar{q} = 0,30 \\
\sigma_p = 0,10 & \sigma_q = 0,10
\end{array}$$

Simulando da ordem de  $10^4$  ou  $10^5$  galáxias com orientações  $\theta$  e  $\phi$  aleatórias, o algoritmo calcula  $b$  para cada galáxia simulada e constrói uma função de distribuição discretizada com os mesmos tamanhos de intervalo da distribuição observada. Em seguida, comparam-se as duas distribuições e calcula-se um  $\chi^2$  para avaliar quão bem a função simulada se ajusta à observada. Este procedimento é repetido diversas vezes variando-se os valores de  $(\bar{p}, \sigma_p, \bar{q}, \sigma_q)$ . Cada um destes parâmetros é sucessivamente incrementado e a distribuição é recalculada para todas as combinações dos parâmetros. Se o  $\chi^2$  for menor que o da simulação anterior, os novos valores são adotados. Conforme o  $\chi^2$  diminui, vão sendo empregados passos cada vez menores nas variações dos quatro parâmetros; inicialmente, os passos são da ordem de 0,1 mas eventualmente empregam-se passos de 0,001 nas última iterações. O procedimento chega ao fim quando o  $\chi^2$  pára de diminuir significativamente. Temos assim bem caracterizadas as funções  $f(p)$  e  $f(q)$  que geram  $\varphi(b)$  que melhor se aproxima do histograma observado.

Efetivamente, o programa foi executado em dois modos: o caso genérico de elipsóide triaxial e também o caso particular de elipsóide oblato, para avaliar qual destes modelos

melhor se ajustaria aos dados. O caso oblato resulta simplesmente de tomar  $p \equiv 1$  e suprimir as variações deste parâmetro. Se todas as galáxias simuladas têm a mesma razão axial  $p$ , não há desvio  $\sigma_p$ , já que, afinal, a distribuição não é gaussiana. Então, basta empregar o mesmo algoritmo variando apenas  $\bar{q}$  e  $\sigma_q$ .

## 4.2 Resultados da amostra completa

O programa descrito na Seção 4.1 foi executado para os dados medidos. Na Figura 4.1, apresentam-se os resultados para todas as (1446) galáxias, excluídas aquelas com o pior parâmetros de qualidade ( $Q=2$ ). Temos o histograma observado e, sobreposto a ele, as funções de distribuição simuladas tanto para o modelo triaxial quanto para o oblato.

O modelo triaxial descreve melhor os dados por dois motivos: ele é estatisticamente mais significativo, uma vez que o  $\chi^2$  por grau de liberdade desse ajuste é bem menor (conforme se vê na Tabela 4.1); além disso, nota-se que nos últimos intervalos do histograma o modelo oblato é incapaz de reproduzir a observada falta de objetos aparentemente circulares. Como se observa na Figura 4.1, o modelo oblato claramente falha ao tentar reproduzir esta característica, já que a curva se encontra a várias barras de erros de distância dos dados no último intervalo, enquanto que o modelo triaxial segue naturalmete esta queda.

Tabela 4.1: Parâmetros das funções de distribuição (gaussianas) das razões axiais intrínsecas para todas as espirais. O modelo triaxial é estatisticamente mais significativo.

	triaxial	oblato
$\bar{p} =$	$0,849 \pm 0,063$	1
$\bar{q} =$	$0,27 \pm 0,12$	$0,32 \pm 0,11$
$\chi^2 =$	$4,58 \pm 0,22$	$21,9 \pm 0,9$

Isso ocorre porque no caso do modelo oblato, supõe-se que o disco, quando visto de face, seja exatamente circular; portanto várias galáxias teriam razão axial aparente  $b = 1$ . No caso do modelo triaxial, por outro lado, mesmo as galáxias que são vistas de face têm  $b < 1$ , pois são intrinsecamente não-circulares. Esta assinatura de triaxialidade é exatamente o que se observa no fim do histograma. A Tabela 4.1 e a Figura 4.2 apresentam os resultados das distribuições intrínsecas de  $p$  e de  $q$ . A distribuição de  $q$  não é muito diferente nos dois modelos. De qualquer modo, é importante lembrar que este parâmetro não representa fielmente o achatamento dos discos que, como se sabe, são bem menos espessos que 0,2 ou 0,3. Ocorre que nestes modelos, as galáxias são aproximadas por elipsóides e a razão  $q$  engloba toda a contribuição dos bojos. Já o parâmetro  $p$  diz respeito à não circularidade

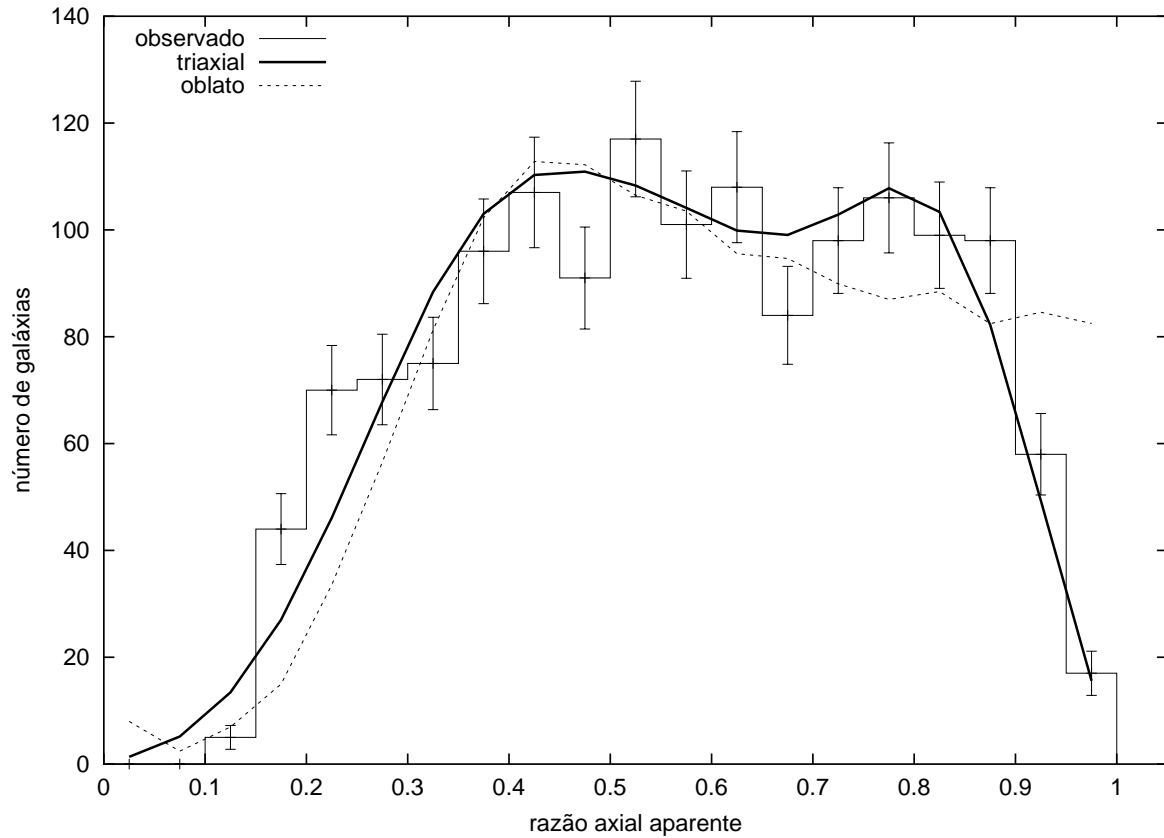


Figura 4.1: Distribuição de razões axiais aparentes para 1446 galáxias espirais. Note que o modelo triaxial (curva espessa) reproduz a observada falta de galáxias aparentemente circulares (dois últimos intervalos), enquanto que o modelo oblato (curva tracejada) prevê um número maior de objetos.

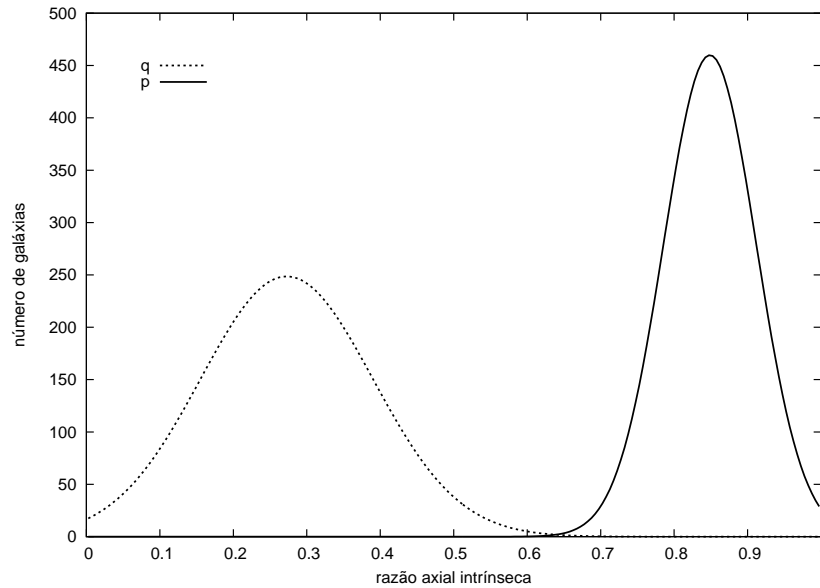


Figura 4.2: Funções de distribuição intrínsecas de  $p$  e de  $q$ , para o modelo triaxial, conforme os parâmetros da Tabela 4.1.

do plano do disco e nota-se que ele apresenta uma distribuição em que poucos objetos seriam realmente circulares.

### 4.3 Resultados separados em tipos morfológicos

Já que as galáxias da amostra estão classificadas morfológicamente, é interessante executar a análise das funções de distribuição separadamente para cada tipo e avaliar se existe alguma dependência significativa da triaxialidade com a morfologia. A primeira tentativa de verificar uma tal dependência consistiu em separar as galáxias em barradas e não-barradas. Entretanto, não foram constatadas diferenças significativas entre estas duas sub-amostras e a amostra completa, na medida em que ambas mostraram a mesma tendência de ausência de galáxias aproximadamente circulares, gerando parâmetros muito similares. Na Figura 4.3, apresentam-se os histogramas das duas distribuições observadas, bem como os respectivos ajustes oblato e triaxial superpostos. Nota-se nestes histogramas que, novamente, existe uma queda abrupta e significativa nos últimos intervalos, indicando a falta de objetos aparentemente circulares, que também se via na amostra completa; e esta queda apresenta-se tanto nas barradas quanto nas não-barradas. De fato, observamos também que o modelo triaxial novamente tem mais sucesso ao descrever corretamente esta característica. Isto indica, qualitativamente, que a triaxialidade da amostra completa não provém exclusivamente de nenhuma das duas sub-classes, mas sim de ambas.

Contudo, não se pode afirmar, com base nestes resultados, que as galáxias barradas tenham discos menos circulares que as não-barradas, ou vice versa. Como se vê na Tabela 4.2, os parâmetros das funções de distribuição são bastante similares; em particular, a distribuição de  $p$  das não-barradas é quase a mesma da amostra completa. De fato, os histogramas observados de ambas apresentam a mesma forma geral. Isto pode ser consequência do fato de que, no histograma da amostra toda, as não-barradas contribuem com 1096 das 1446 galáxias, tendo assim bastante peso na definição da forma da distribuição.

Já os resultados da amostra de galáxias barradas requerem atenção. Primeiramente, convém ressaltar que esta amostra apresenta um número reduzido de objetos (350). Mas, mais relevante que isso, é um efeito que deve ter afetado importantemente os resultados das barradas: note que o formato geral do histograma das barradas na Figura 4.3 difere sensivelmente dos formatos dos outros histogramas (de não-barradas e da amostra toda) na medida em que existem bem menos objetos na região inicial, por volta de  $b \sim 0,3$ . Este efeito não diz respeito a uma característica física da estrutura das galáxias barradas: esta falta de objetos em  $b \sim 0,3$  decorre simplesmente do fato de que as galáxias barradas mais achatadas (isto é, vistas de perfil) não foram classificadas como barradas, já que as barras não são visíveis, conforme discutido na Seção 2.2. No histograma das galáxias não-barradas, notamos que praticamente não ocorrem galáxias mais achatadas que  $b \sim 0,15$ . Já no histograma das barradas, quase inexitem galáxias mais achatadas que  $b \sim 0,30 - 0,35$ . Esta deformação artificial da distribuição certamente compromete os resultados das barradas, principalmente a distribuição de  $q$ , que é mais determinada pelas regiões iniciais de  $\varphi(b)$ . Como consequência disso, o programa calcula uma distribuição  $f(q)$  centrada em  $\bar{q} \sim 0,4$ , que é evidentemente irreal, mas resulta de um efeito compreensível. Além disso, nota-se que as distribuições de  $f(q)$  não diferem muito entre o modelo oblato e o triaxial, para cada sub-amostra e que os  $\chi^2$  do modelo oblato são sempre muito maiores.

A distribuição  $f(p)$  das não-barradas é quase idêntica à da amostra completa: são aproximadamente centradas em 0,87 e 0,85, respectivamente, e com desvios-padrão de 0,06. Já a  $f(p)$  das barradas, é centrada em 0,84 mas é bem mais estreita, com  $\sigma_p = 0,004$ , o que deve ser consequência do leve excesso de galáxias que se observa no histograma, por volta de  $b \sim 0,85 - 0,90$ . É possível que este excesso decorra de mera flutuação estatística, já que o número de objetos em questão neste pico é da ordem de metade dos objetos da mesma região de  $b$  no histograma da amostra toda. De qualquer modo, não se pode afirmar que esta distribuição seja significativamente diferente das outras.

A separação da amostra nos subtipos Sa, Sb, Sc também não nos permite concluir que exista uma dependência da triaxialidade com a morfologia. A Figura 4.4 apresenta as distribuições de razões axiais aparentes e os respectivos ajustes oblato e triaxial para cada sub-tipo (incluídas tanto barradas quanto não-barradas). É notável nesta figura a maior irregularidade dos histogramas com relação à amostra completa, devido ao número

Tabela 4.2: Parâmetros das funções de distribuição (gaussianas) das razões axiais intrínsecas para as espirais separadas em barradas e não-barradas.

		triaxial	oblato
barradas (350)	$\bar{p} =$	$0,841 \pm 0,004$	1
	$\bar{q} =$	$0,43 \pm 0,12$	$0,44 \pm 0,10$
	$\chi^2 =$	$1,92 \pm 0,18$	$13,0 \pm 2,4$
não-barradas (1096)	$\bar{p} =$	$0,868 \pm 0,062$	1
	$\bar{q} =$	$0,25 \pm 0,07$	$0,27 \pm 0,07$
	$\chi^2 =$	$3,08 \pm 0,26$	$13,4 \pm 2,6$

Tabela 4.3: Parâmetros das funções de distribuição (gaussianas) das razões axiais intrínsecas para as espirais separadas em tipos morfológicos.

		triaxial	oblato
Sa+SBa (427)	$\bar{p} =$	$0,876 \pm 0,052$	1
	$\bar{q} =$	$0,32 \pm 0,06$	$0,30 \pm 0,07$
	$\chi^2 =$	$2,05 \pm 0,05$	$4,1 \pm 1,1$
Sb+SBb (502)	$\bar{p} =$	$0,869 \pm 0,068$	1
	$\bar{q} =$	$0,30 \pm 0,11$	$0,34 \pm 0,10$
	$\chi^2 =$	$3,11 \pm 0,45$	$9,9 \pm 5,4$
Sc+SBc (517)	$\bar{p} =$	$0,854 \pm 0,005$	1
	$\bar{q} =$	$0,29 \pm 0,23$	$0,27 \pm 0,13$
	$\chi^2 =$	$3,31 \pm 0,69$	$12,5 \pm 0,4$



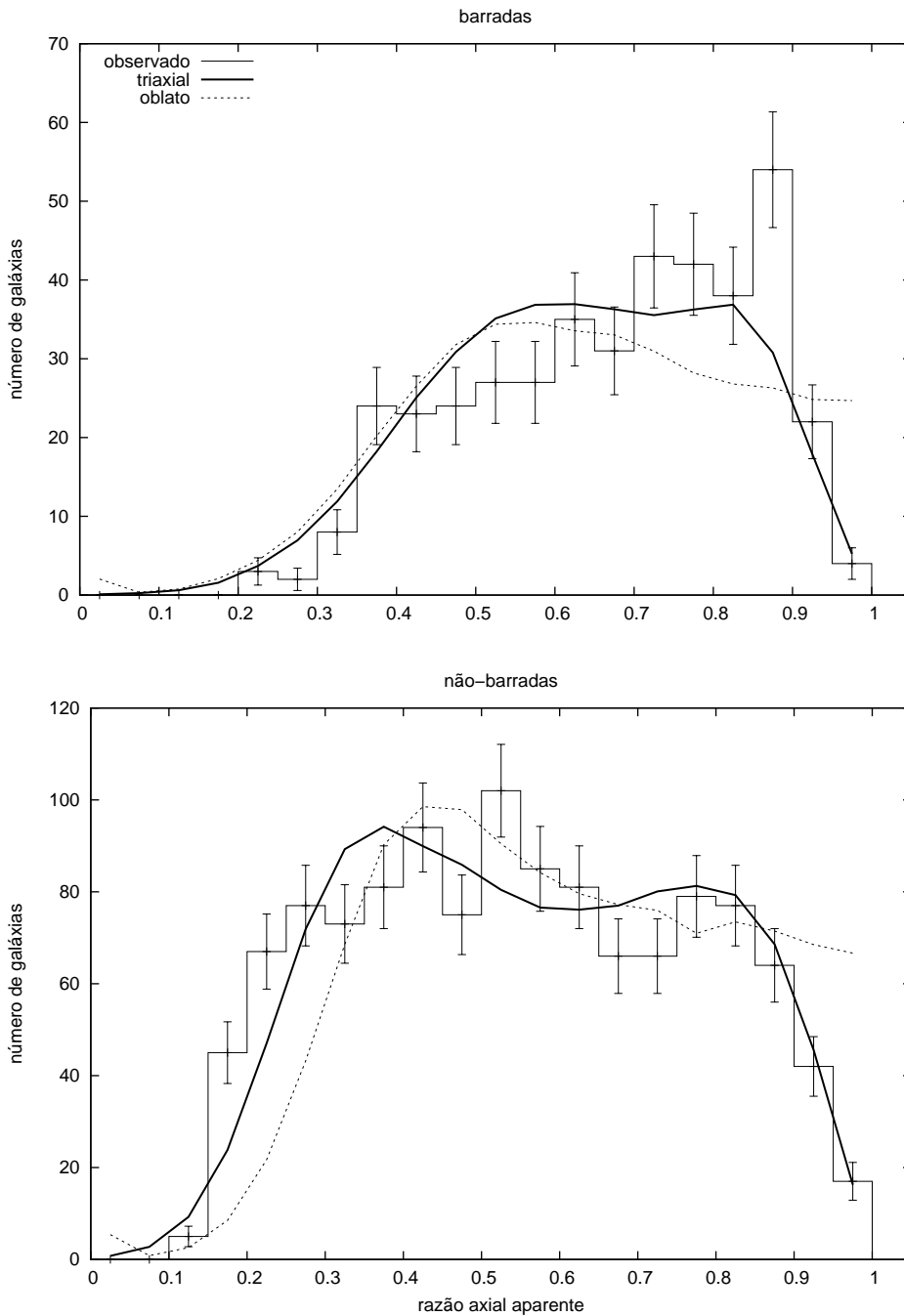


Figura 4.3: Distribuições de razões axiais aparentes com os ajustes oblato e triaxial, separadas em barradas e não-barradas. Observe que a distribuição das galáxias barradas não contém tantos objetos de baixa razão axial quanto a das galáxias não-barradas (devido à dificuldade de observar barras em galáxias de perfil). No entanto, as distribuições na região das galáxias aproximadamente de face são semelhantes, indicando que tanto galáxias barradas quanto não-barradas apresentam discos não-circulares.

reduzido de objetos em cada classe. Mais uma vez, constatamos que ocorre uma diminuição abrupta do número de galáxias por volta de  $b \sim 0,9$ , bastante pronunciada, em particular, no histograma das Sc. Este comportamento se mostrou sistemático, portanto, na amostra completa e em cada um dos subtipos. Novamente, o modelo oblato falha em reproduzir esta queda nos últimos intervalos e como resultado, o modelo triaxial têm  $\chi^2$  menores, já que ajusta bem essa região e não difere muito do oblato nas outras.

As diferenças de comportamento para  $b \lesssim 0,4 - 0,3$  poderiam ser reais, apesar de não resultarem em diferenças estatisticamente significativas nos parâmetros da Tabela 4.3. As galáxias Sc têm bojos relativamente pequenos e portanto, quando vistas de perfil, deveriam apresentar razões axiais menores. Por este motivo, teríamos na Figura 4.4 um excesso de galáxias Sc com  $b \lesssim 0,2$ . Ao contrário, as galáxias Sa têm bojos relativamente maiores e, portanto, as razões axiais dos objetos vistos de perfil seriam naturalmente maiores, causando um decréscimo da distribuição em  $b \lesssim 0,2$ . Isso ajudaria a entender a ligeira tendência de queda sistemática de  $q = 0,32 - 0,29$  de Sa para Sc. Contudo, esta tendência não chega a ser estatisticamente significativa, talvez porque a amostra, separada em 3 tipos, não seja tão abundante.

A Tabela 4.3 apresenta os parâmetros das distribuições intrínsecas calculadas para cada sub-tipo morfológico. Vemos que as distribuições  $f(q)$  não diferem grandemente entre os dois modelos e que as distribuições  $f(p)$  são bastante similares, ainda que a das Sc seja particularmente mais estreita. Não podemos afirmar que tenha sido observada uma diferença significativa das distribuições conforme a morfologia.

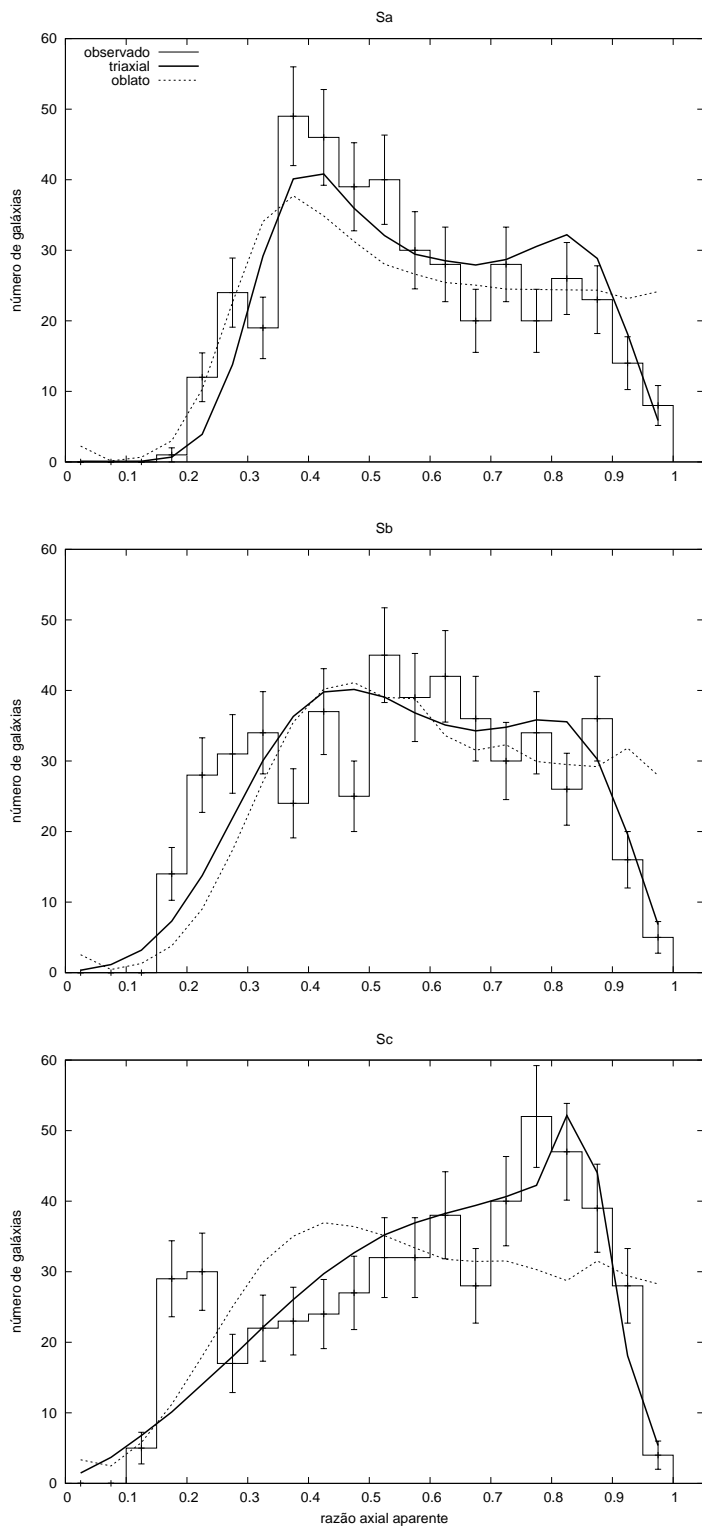


Figura 4.4: Distribuições de razões axiais aparentes com os ajustes oblato e triaxial, separadas em tipos morfológicos Sa, Sb e Sc; barradas e não-barradas incluídas.



# Capítulo 5

## Fusões de Elipsóides Homogêneos

A não-circularidade dos discos luminosos das galáxias espirais é uma forte indicação de que os seus halos de matéria escura não devem apresentar uma distribuição esférica de massa. A questão que se coloca é a de como estes halos viriam a adquirir uma estrutura triaxial. A hipótese que exploramos aqui, certamente supersimplificada e exploratória, é a de que tal estrutura triaxial resultaria do processo de fusão de duas estruturas que de início são aproximadamente esféricas. Neste halo escuro triaxial se instalaria o disco que, seguindo o potencial do halo, assumiria uma forma elíptica, compatível com as distribuições observadas dos capítulos anteriores.

A forma mais precisa de encaminhar uma resposta sobre o grau de triaxialidade resultante do processo de fusão seria através de simulações numéricas cosmológicas que contemplassem os diversos processos envolvidos. A interação entre duas protogaláxias implica em uma acomodação da estrutura dinâmica que pode ser bastante complexa, dependendo das respectivas estruturas internas de cada objeto envolvido na fusão e dos correspondentes parâmetros orbitais. O próprio processo de fusão deve resultar em uma acentuação da taxa de formação estelar que, por sua vez, é capaz de alterar a distribuição de estrelas e, por conseqüência, o brilho superficial do objeto resultante. A alternativa a este enfoque numérico detalhista consiste em adotar uma abordagem analítica e, portanto, necessariamente mais simplificada, na qual apenas as características globais mais importantes são consideradas. O objetivo global consiste em adotar uma abordagem suficientemente simples para comportar uma estimativa analítica tratável, mas que ao mesmo tempo preserve as principais características globais que desejamos examinar. O ponto de partida consiste em supor que a estrutura das protogaláxias seja razoavelmente próxima daquela descrita por um elipsóide homogêneo composto por um gás de partículas não colisionais. Antes e depois do processo de fusão, o sistema obedece ao Teorema do Virial na sua forma tensorial (Chandrasekhar, 1969). Igualando-se as condições iniciais de massa, energia e

momento às condições finais, podemos examinar as conseqüências que o processo de fusão acarreta para a estrutura do objeto final formado, supondo naturalmente que este seja também um elipsóide homogêneo que obedeça ao Teorema do Virial.

O Teorema do Virial na forma tensorial, em um referencial em rotação com velocidade  $\Omega$  na direção  $i=3$  é:

$$W_{ij} + \Omega^2 (I_{ij} - \delta_{i3}I_{3j}) + P_{ij} = 0 \quad (5.1)$$

onde as quantidades  $W_{ij}$ ,  $I_{ij}$  e  $P_{ij}$  representam respectivamente os tensores de energia potencial, momento de inércia e pressão, os quais são dados por:

$$I_{ij} = \int \rho x_i x_j d^3 \vec{x} \quad (5.2)$$

$$W_{ij} = -\frac{1}{2} \int \rho \Phi_{ij} d^3 \vec{x} \quad (5.3)$$

$$P_{ij} = \int \sigma_{ij}^2 \rho d^3 \vec{x} = M \sigma_{ij}^2 \quad (5.4)$$

sendo  $\rho$  a distribuição de massa,  $\sigma_{ij}$  a dispersão interna de velocidades e  $M$  a massa total. O campo gravitacional  $\Phi_{ij}$  gerado pela distribuição de massa descrita acima é:

$$\Phi_{ij} = G \int \rho(x') \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3 \vec{x}' \quad (5.5)$$

Uma vez que os tensores são todos simétricos, resulta que as únicas equações independentes são:

$$W_{11} + \Omega^2 I_{11} + P_{11} = 0 \quad (5.6)$$

$$W_{22} + \Omega^2 I_{22} + P_{22} = 0 \quad (5.7)$$

$$W_{33} + P_{33} = 0 \quad (5.8)$$

Portanto, a nossa hipótese básica é a de que tanto as duas estruturas iniciais, como a estrutura final gerada no processo de fusão obedecem a estas equações.

## 5.1 Elipsóides de Jacobi

O caso de interesse são os elipsóides de Jacobi que têm os três eixos diferentes ( $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ ). Neste caso, as equações do Virial devem ser satisfeitas com as seguintes condições suplementares, onde os coeficientes  $A_i$  são funções da elipticidade do sistema:

$$\overline{W}_{ij} = -2\pi G\rho A_i I_{ij} \quad (5.9)$$

$$I_{ij} = \frac{1}{5} M a_i^2 \delta_{ij} \quad (5.10)$$

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho a_1 a_2 a_3 \quad (5.11)$$

Os  $a_i$  dependem das funções elípticas incompletas:

$$E(\zeta, \xi) = \int_0^\xi (1 - \sin^2 \zeta \sin^2 \xi)^{1/2} d\xi \quad (5.12)$$

$$F(\zeta, \xi) = \int_0^\xi (1 - \sin^2 \zeta \sin^2 \xi)^{-1/2} d\xi \quad (5.13)$$

com as definições

$$\sin \zeta = \left( \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 - a_3^2} \right) \quad \text{e} \quad \cos \xi = \frac{a_3}{a_1} \quad (5.14)$$

Uma vez que

$$A_i = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta(a_i^2 + u)} \quad (5.15)$$

onde

$$\Delta^2 = (a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u) \quad (5.16)$$

temos as constantes de estrutura:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{2a_2a_3}{a_1^2 \sin^3 \xi \cos^2 \zeta} [F(\zeta, \xi) - E(\zeta, \xi)] \\
A_2 &= \frac{2a_2a_3}{a_1^2 \sin^3 \xi \cos^2 \zeta} \left[ E(\zeta, \xi) - F(\zeta, \xi) \cos^2 \zeta - \frac{a_3}{a_2} \sin^2 \zeta \sin \xi \right] \\
A_3 &= \frac{2a_2a_3}{a_1^2 \sin^3 \xi \cos^2 \zeta} \left[ \frac{a_2}{a_3} \sin \xi - E(\zeta, \xi) \right]
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Utilizando-se estas definições, as equações do Virial para este sistema podem ser expressas na forma:

$$\frac{2\pi}{5} G\rho A_1 a_1^2 = \frac{1}{5} \Omega^2 a_1^2 + \sigma_{11}^2 \tag{5.18}$$

$$\frac{2\pi}{5} G\rho A_2 a_2^2 = \frac{1}{5} \Omega^2 a_2^2 + \sigma_{22}^2 \tag{5.19}$$

$$\frac{2\pi}{5} G\rho A_3 a_3^2 = \sigma_{33}^2 \tag{5.20}$$

ou ainda, usando  $M = \frac{4}{3}\rho a_1 a_2 a_3$  :

$$\frac{3}{10} GMA_1 \frac{a_1}{a_2 a_3} = \frac{1}{5} \Omega^2 a_1^2 + \sigma_{11}^2 \tag{5.21}$$

$$\frac{3}{10} GMA_2 \frac{a_2}{a_1 a_3} = \frac{1}{5} \Omega^2 a_2^2 + \sigma_{22}^2 \tag{5.22}$$

$$\frac{3}{10} GMA_3 \frac{a_3}{a_1 a_2} = \sigma_{33}^2 \tag{5.23}$$

Além disso, podemos escrever que o momento angular intrínseco  $L$  do elipsóide é dado por:

$$L = \frac{1}{5} M\Omega(a_1^2 + a_2^2) \tag{5.24}$$



## 5.2 O caso da esfera

O caso mais simples de um elipsóide de Jacobi é o de uma esfera homogênea em rotação em que  $a_1 = a_2 = a_3 = a$ . E pela equação (5.15), temos que  $A_1 = A_2 = A_3 = \frac{2}{3}$ . Neste caso as equações do Virial se reduzem a:

$$\frac{GM}{a} = \Omega^2 a + 5\sigma_{\perp}^2 \quad (5.25)$$

$$\frac{GM}{a} = 5\sigma_{\parallel}^2 \quad (5.26)$$

Podemos observar que esta esfera em rotação só pode se manter estável se a dispersão de velocidades ao longo do eixo de rotação ( $\sigma_{\parallel}$ ) se mantiver diferente da dispersão  $\sigma_{\perp} = \sigma_{11} = \sigma_{22}$ , conforme:

$$\sigma_{\parallel}^2 = \sigma_{\perp}^2 + \frac{1}{5}\Omega^2 a \quad (5.27)$$

Portanto, a rotação desta esfera homogênea causa um aumento na dispersão ao longo do eixo de rotação. Naturalmente, na ausência de rotação, teríamos simplesmente  $\sigma_{\parallel} = \sigma_{\perp}$ .

## 5.3 Fusão frontal de duas esferas sem rotação

O caso mais simples de fusão que podemos imaginar é o de duas esferas homogêneas de mesma massa, sem rotação e que colidem frontalmente.

Suponhamos que as duas esferas tenham massa  $M$  e que a energia interna total antes da colisão seja  $2M\sigma_o^2$  (adicionando-se as energias internas das duas esferas). Após a colisão, a energia térmica no plano transversal (ortogonal ao plano orbital da colisão) deve ser  $2M\sigma_{\perp}^2$  e como estas energias são iguais,  $\sigma_o = \sigma_{\perp}$ . Já na direção da colisão, a energia térmica inicial é  $2M\sigma_o^2$ . Mas se as duas esferas se aproximam com velocidade relativa  $V$ , temos que

$$2M\sigma_o^2 + \frac{1}{2}MV^2 = 2M\sigma_{\parallel}^2 \quad (5.28)$$

e a dispersão final de velocidades nessa direção será:

$$\sigma_{\parallel}^2 = \sigma_o^2 + \frac{1}{4}V^2 \quad (5.29)$$

Assim, a dispersão de velocidades final é maior na direção da colisão . O resultado final é um esferóide prolato, portanto. Como o sistema final não tem rotação e a colisão é frontal, obedecem-se as equações do Virial:

$$\frac{3}{10} \frac{GM}{a_{\parallel}} A_{\perp} = \sigma_{\perp}^2 \quad (5.30)$$

$$\frac{3}{10} \frac{GM}{a_{\parallel}} A_{\parallel} \frac{a_{\parallel}^2}{a_{\perp}^2} = \sigma_{\parallel}^2 \quad (5.31)$$

A elipticidade  $e$  pode ser escrita como:

$$e^2 = 1 - \left( \frac{a_{\perp}}{a_{\parallel}} \right)^2 \quad (5.32)$$

e relacionada com as constantes  $A_{\perp}$  e  $A_{\parallel}$  através das equações (5.30) e (5.31) (e usando (5.29)). Obtemos então a condição:

$$\frac{A_{\parallel}}{A_{\perp}} \frac{1}{1 - e^2} = 1 + \frac{1}{4} \frac{V^2}{\sigma_o^2} \quad (5.33)$$

Quando  $e$  é pequeno, as constantes podem ser aproximadas por:

$$A_{\parallel} = \frac{1 - e^2}{e^3} \log \frac{1 + e}{1 - e} - 2 \frac{1 - e^2}{e^2} \simeq \frac{2}{15} (1 - e^2)(5 + 3e^2) \quad (5.34)$$

$$A_{\perp} = \frac{1}{e^2} - \frac{1 - e^2}{2e^3} \log \frac{1 + e}{1 - e} \simeq \frac{2}{15} (5 + e^2) \quad (5.35)$$

Com estas aproximações, podemos substituir  $\frac{A_{\parallel}}{A_{\perp}}$  em (5.33) e obter uma relação simples entre a elipticidade  $e$  do objeto final e a razão  $\frac{V}{\sigma_o}$  entre a velocidade de colisão e a dispersão inicial:

$$\frac{5 + 3e^2}{5 + e^2} \simeq 1 + \frac{1}{4} \frac{V^2}{\sigma_o^2} \quad (5.36)$$

Definindo a razão  $\gamma \equiv \frac{V}{\sigma_o}$  obtemos a solução:

$$e^2 \simeq \frac{5\gamma^2}{8 - \gamma^2} \quad (5.37)$$

Ou ainda, em termos da razão axial  $p$ :

$$p = \frac{a_{\perp}}{a_{\parallel}} \simeq \sqrt{\frac{8 - 6\gamma^2}{8 - \gamma^2}} \quad (5.38)$$

ou

$$\gamma^2 = 8 \left( \frac{1 - p^2}{6 - p^2} \right) \quad (5.39)$$

Assim, se a fusão ocorrer numa situação em que a velocidade de colisão é comparável à dispersão interna ( $\gamma \approx 1$ ) a razão axial do objeto resultante é  $p \simeq 0,53$ . Para gerar elipsóides com  $p \simeq 0,85$ , semelhantes aos valores obtidos na análise, a colisão deve ter se dado com  $\gamma \simeq 0,65$ . Portanto, uma fusão rápida resultaria em elipsóides muito prolatos. Para reproduzir a elipticidade inferida a partir dos discos devemos ter uma fusão relativamente lenta, com velocidade de aproximação de cerca de 65% da dispersão interna de

velocidades. Como veremos mais adiante, este será um ponto importante para fixarmos a época em que devem ter ocorrido tais fusões.

No caso de um elipsóide triaxial,  $p$  seria a razão entre o eixo intermediário e o eixo maior. Note que neste sistema final prolato a razão axial  $p$  corresponde à razão entre um dos eixos menores e o eixo maior.

## 5.4 Fusão não frontal de duas esferas

Neste tipo de colisão, o objeto resultante é triaxial e as razões axiais dependem dos parâmetros do encontro. Consideremos duas esferas de massa  $M$  que colidem ao longo da direção X com parâmetro de impacto  $\beta$  e velocidade relativa  $V$ . A conservação da energia em Y e Z implica  $2M\sigma_o^2 = 2M\sigma_F^2$  nessas duas direções e, portanto,  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_o$ . Logo, se o encontro resulta em fusão a dispersão de velocidades na direção X deve ser:

$$\sigma_x^2 = \sigma_o^2 \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{V^2}{\sigma_o^2} \right) \quad (5.40)$$

Além disso, para conservar o momento angular, o objeto final deve ter rotação  $\Omega$ :

$$L = \frac{2}{5} M \Omega (a_x^2 + a_y^2) = MV\beta \quad (5.41)$$

de onde

$$\Omega = \frac{5}{2} \frac{V\beta}{(a_x^2 + a_y^2)} \quad (5.42)$$

Com isso, podemos escrever as equações de estrutura do elipsóide final como:

$$3A_x \frac{a_x}{a_y a_z} = \frac{5}{4} \frac{a_x^2 \beta^2 \gamma^2}{(a_x^2 + a_y^2)^2} + 1 + \frac{\gamma^2}{4} \quad (5.43)$$

$$3A_y \frac{a_y}{a_x a_z} = \frac{5}{4} \frac{a_y^2 \beta^2 \gamma^2}{(a_x^2 + a_y^2)^2} + 1 \quad (5.44)$$

$$3A_z \frac{a_z}{a_x a_y} = 1 \quad (5.45)$$

onde  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  e  $\beta$  estão expressos em termos da dimensão inicial da esfera  $a_o$ .

Os eixos do elipsóide resultante são tais que  $a_x > a_y > a_z$ , de modo que

$$q = \frac{a_z}{a_x} \quad \text{e} \quad p = \frac{a_y}{a_x} \quad (5.46)$$

Se utilizarmos as variáveis auxiliares  $\zeta$  e  $\xi$ , analogamente às equações (5.14), podemos escrever

$$\frac{a_y^2}{a_x^2} = p^2 = 1 - \sin^2 \zeta \sin^2 \xi \quad (5.47)$$

Dividindo as duas equações de estrutura pela última nos permite escrever

$$\frac{A_x}{A_z} \frac{1}{\cos^2 \xi} = \frac{5}{4} \frac{\beta^2 \gamma^2}{a_x^2 (2 - \sin^2 \zeta \sin^2 \xi)^2} + 1 + \frac{\gamma^2}{4} \quad (5.48)$$

$$\frac{A_y (1 - \sin^2 \zeta \sin^2 \xi)}{A_z \cos^2 \xi} = \frac{5}{4} \frac{\beta^2 \gamma^2 (1 - \sin^2 \zeta \sin^2 \xi)}{a_x^2 (2 - \sin^2 \zeta \sin^2 \xi)^2} + 1 \quad (5.49)$$

A terceira equação pode ser escrita como

$$a_x^2 = 9A_z^2 \frac{\cos^2 \xi}{1 - \sin^2 \zeta \sin^2 \xi} \quad (5.50)$$

que, substituída nas condições anteriores resulta em

$$\frac{A_x}{A_z} \frac{1}{\cos^2 \xi} = \frac{5\beta^2\gamma^2}{36A_z^2} \frac{1 - \sin^2 \zeta \sin^2 \xi}{(2 - \sin^2 \zeta \sin^2 \xi)^2 \cos^2 \xi} + 1 + \frac{\gamma^2}{4} \quad (5.51)$$

$$\frac{A_y}{A_z} \frac{1 - \sin^2 \zeta \sin^2 \xi}{\cos^2 \xi} = \frac{5\beta^2\gamma^2}{36A_z^2} \frac{(1 - \sin^2 \zeta \sin^2 \xi)^2}{(2 - \sin^2 \zeta \sin^2 \xi)^2 \cos^2 \xi} + 1 \quad (5.52)$$

Este é o sistema de equações que se deve resolver para obter os valores finais de  $p$  e  $q$ . Lembremos que as razões axiais também podem ser escritas como

$$e_p = \sqrt{1 - p^2} = \sin \zeta \sin \xi \quad (5.53)$$

$$e_q = \sqrt{1 - q^2} = \sin \xi \quad (5.54)$$

Desse modo, dados um parâmetro de impacto  $\beta$  e uma razão de velocidades  $\gamma$  podemos calcular as razões axiais  $p$  e  $q$ , com as equações (5.51) e (5.52), onde os  $A_i$  são dados por (5.17).

A Figura 5.1 apresenta a relação entre o parâmetro de impacto  $\beta$  e a razão de velocidades  $\gamma$  que geram um elipsóide triaxial com razão axial meridional  $p$ . As curvas correspondem a seis valores de  $p$ , na região de interesse ( $\sim 0,8$  a  $1$ ). Podemos observar nesta figura que a razão axial praticamente independe do parâmetro de impacto, sendo determinada quase que exclusivamente pela velocidade do impacto. Isto é, se desejamos saber quais as condições que geraram elipsóides com  $p \simeq 0,85$ , poderíamos supor, numa primeira aproximação, impacto frontal.

Esta aproximação seria muito boa para valores de  $p$  mais próximos de  $1$ . Para  $p \simeq 0,85$ , no entanto, a aproximação de fusão frontal resulta em  $\gamma \simeq 0,65$ , sendo que pela Figura 5.1 notamos que  $\gamma$  está mais provavelmente entre  $0,70$  e  $0,75$ . O que ocorre é que na aproximação de colisão frontal utilizada na Seção 5.3, consideramos que o elipsóide resultante é prolato. Além disso, a equação (5.39) resulta de uma aproximação para pequena elipticidade, isto é,  $p$  próximo de  $1$ .

Na Figura 5.2 temos a relação entre a razão de velocidades  $\gamma$  e a razão axial meridional  $p$ . As três curvas superiores (bastante próximas) são o resultado para os parâmetros de impacto  $\beta=0$ ,  $0,5$  e  $0,9$  (lembrando que  $\beta$  está expresso em unidades do raio inicial das

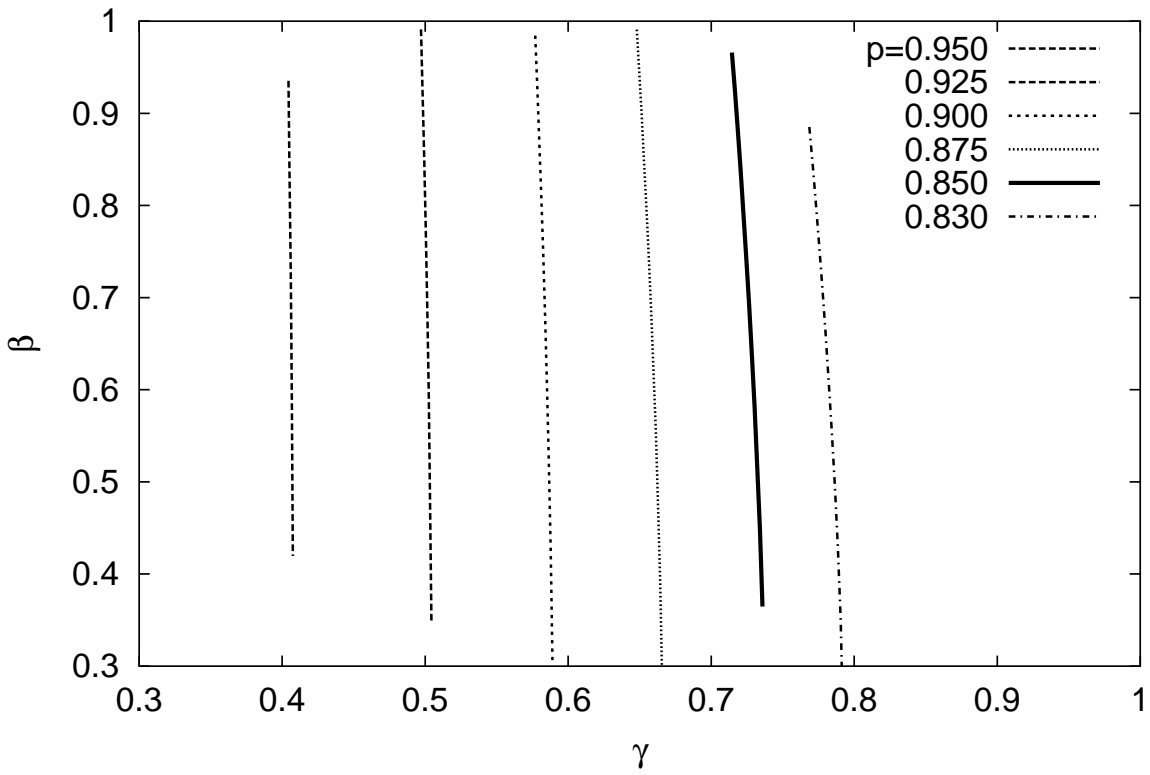


Figura 5.1: Relação entre o parâmetro de impacto  $\beta$  e a razão de velocidades  $\gamma$  que geram um elipsóide triaxial com razão axial meridional  $p$ . Note que para um dado  $p$ , a velocidade quase independe do parâmetro de impacto.

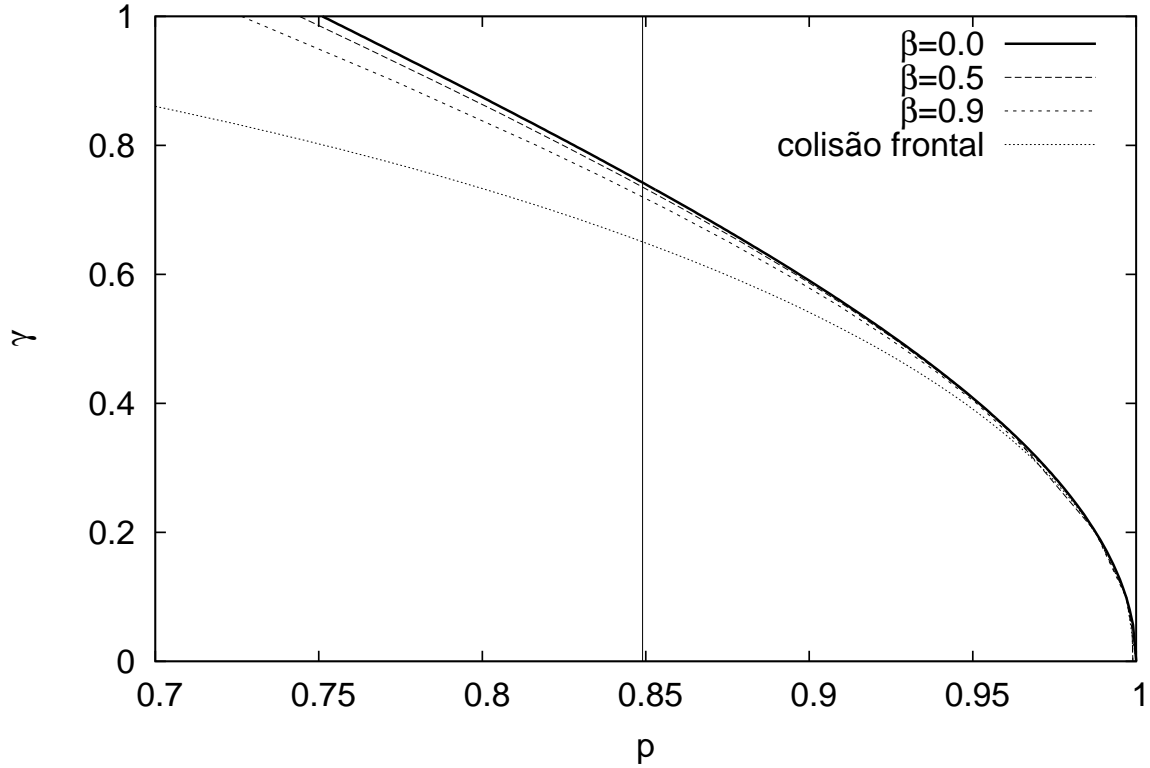


Figura 5.2: Relação entre a razão de velocidades  $\gamma$  e a razão axial  $p$  do objeto resultante do encontro, para três parâmetros de impacto (resultando em um objeto triaxial); e o resultado aproximado para uma colisão frontal que gera um elipsóide prolato. A linha vertical é a razão axial obtida através das medidas das galáxias do SDSS.

esferas  $a_o$ ). Os casos de maior interesse são aqueles com  $\beta < 1$ , já que devem resultar em uma fusão mais efetiva das esferas. Nota-se que para um dado valor de  $p$ ,  $\gamma$  não é muito sensível ao parâmetro de impacto. A curva inferior é o resultado (aproximado) da colisão frontal que gera um elipsóide prolato. Naturalmente, esse resultado só é válido para  $p$  muito próximo de 1. A linha vertical  $p = 0,849$  corresponde ao valor obtido através das medidas das razões axiais aparentes das galáxias do SDSS.

A um dado  $p$ , portanto, podemos associar um intervalo de  $\gamma$  que é aproximadamente independente do parâmetro de impacto. Levando em conta a incerteza  $\sigma_p$ , que é mais relevante que a dependência com  $\beta$ , podemos estimar que para

$$p = 0,849 \pm 0,063$$



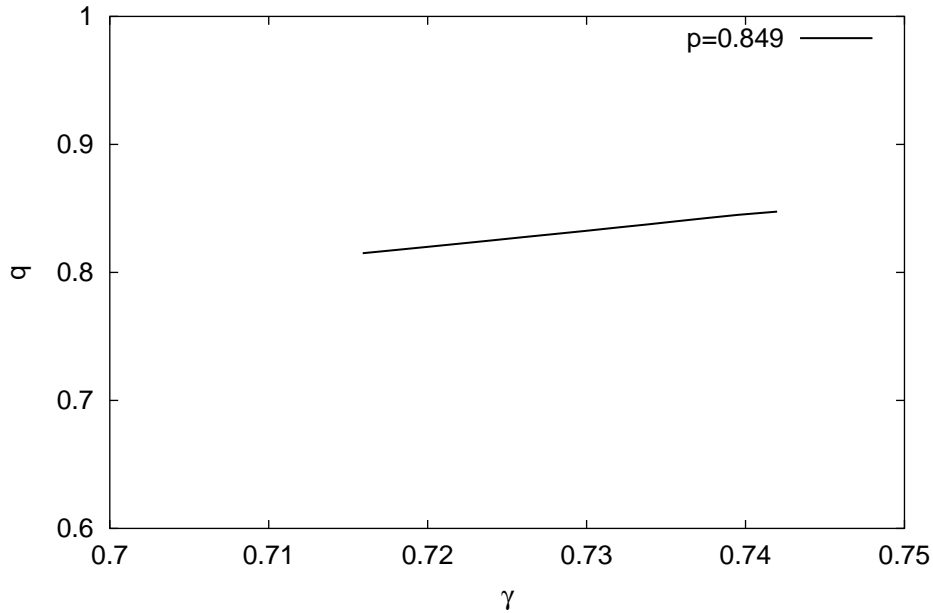


Figura 5.3: Relação entre a razão axial  $q$  e o parâmetro  $\gamma$

temos aproximadamente

$$\gamma = 0,74 \pm 0,20$$

Para um elipsóide triaxial, existe a outra razão axial  $q$  que é a razão entre o eixo menor e o eixo maior. Nestas análises, adotou-se  $q \sim 0,8$ . Ou seja, trata-se de elipsóides com os eixos na razão 1:0,8:0,85 aproximadamente. Convém ressaltar que nesta análise teórica, o parâmetro  $q$  não corresponde à espessura do disco estelar, mas sim ao formato do halo, não devendo ser comparado ao parâmetro que emerge da análise das imagens das galáxias. Os halos devem ter um potencial triaxial, mas que evidentemente não é tão achatado quanto os discos luminosos. Na Figura 5.3 mostra-se como  $q$  varia com  $\gamma$  no intervalo adotado.

## 5.5 Redshift de formação

Se assumirmos que as galáxias espirais têm potenciais gravitacionais cujas profundidades típicas são da ordem de  $\sigma_o \simeq 200$  km/s então, neste modelo, os encontros de protogaláxias

que produziram os halos triaxiais devem ter se dado com velocidades de colisão da ordem de

$$V = 148 \pm 40 \text{ km/s}$$

que é menor que os valores atuais de velocidades peculiares típicas ( $V_o \sim 300$  km/s para regiões menores que 1Mpc). De fato, podemos estimar em que época da evolução do Universo essas velocidades eram típicas. Na teoria linear de perturbações (Peebles, 1980), a velocidade peculiar na vizinhança de uma região sujeita a aceleração  $\vec{g}$  é:

$$\vec{V} = \frac{2f}{3H\Omega_M} \vec{g} \quad (5.55)$$

onde  $\vec{g}$  é a aceleração peculiar da região,  $\Omega_M = \Omega_M(z)$  é o parâmetro de densidade da matéria,  $H = H(z)$  é o parâmetro de Hubble e  $f$  é uma função de  $\Omega_M$  que pode ser aproximada por  $f = \Omega_M^{3/5}$ . Portanto, a evolução de  $\vec{V}$  é devida a  $H(z)$  e  $\Omega_M(z)$ , cujas dependências com o redshift são:

$$\frac{H(z)}{H_o} = [\Omega_{\Lambda o} + \Omega_{M o}(1+z)^3]^{1/2} \quad (5.56)$$

$$\frac{\Omega_M(z)}{\Omega_{M o}} = \frac{(1+z)^3}{[\Omega_{\Lambda o} + \Omega_{M o}(1+z)^3]} \quad (5.57)$$

onde o índice zero usual representa os valores atuais ( $z=0$ ) dos parâmetros. Podemos então utilizar as velocidades peculiares típicas atuais de  $V_o \sim 300$  km/s para determinar em qual redshift  $V \simeq 148$  km/s era uma velocidade típica:

$$\frac{V_o}{V} = \frac{H(z)}{H_o} \frac{\Omega_M^{2/5}(z)}{\Omega_{M o}^{2/5}} \quad (5.58)$$

$$\left(\frac{V_o}{V}\right)^{10} = \Omega_{\Lambda o}(1+z)^{12} + \Omega_{M o}(1+z)^{15} \quad (5.59)$$

cuja solução numérica é  $(1+z)=1,69$  se assumirmos uma cosmologia  $\Lambda$ CDM ( $\Omega_{\Lambda o} = 0,7$

e  $\Omega_{M_0} = 0,3$ ). Portanto, nós estimamos que as galáxias devem ter tido as velocidades necessárias para se fundir em elipsóides triaxiais por volta do redshift

$$z = 0,69 \pm 0,32$$

Convém notar que essa estimativa baseada em um modelo muito simplificado está em boa concordância com algumas simulações numéricas cosmológicas recentes, relacionadas com a forma e a época de formação dos halos de matéria escura. Gao et al. (2004) estimaram que quase 70% dos subhalos na escala de galáxias teriam se formado em redshift  $z < 0.5$  e apenas 10% destes subhalos foram formados em  $z > 1$ .

Observe-se que este redshift corresponde à época em que teriam ocorrido os últimos grandes episódios de fusão que formaram as atuais galáxias espirais. Não se trata da época de formação das primeiras estrelas que hoje habitam os esferóides. Esta pode ter ocorrido bem antes, provavelmente em  $z > 3$ . O ponto básico no entanto é que as atuais galáxias espirais, com os seus halos já formados, devem ter se fusionado pela última vez por volta de  $z = 0,70$ , gerando as condições para a formação dos discos elípticos que hoje observamos.



# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

### 6.1 Conclusões

Analisando as distribuições de razões axiais aparentes de  $\sim 1400$  galáxias espirais do SDSS nós concluímos que um modelo de esferóide triaxial se ajusta melhor às observações do que o modelo oblato.

Ambos os modelos geram distribuições simuladas de razões axiais aparentes que se comparam bem com o histograma observado e não diferem muito entre si, exceto nos últimos intervalos que correspondem às galáxias aproximadamente circulares. Nesta região, ocorre uma diminuição pronunciada e significativa do número de galáxias e as previsões dos dois modelos se afastam, já que o modelo oblato é incapaz de acompanhar essa queda abrupta.

O modelo triaxial além de ser estatisticamente mais significativo, tendo um  $\chi^2$  bem menor, também é capaz de reproduzir com naturalidade a notável falta de objetos aparentemente circulares. O modelo oblato falha sistematicamente em reproduzir esta característica, prevendo sempre um número maior de galáxias aparentemente circulares do que o que realmente se observa. Isto configura uma indicação muito forte de que os discos das galáxias espirais sejam de fato não-circulares, mas sim intrinsecamente elípticos, mesmo quando vistos de face.

O comportamento da função de distribuição gerada pelos dois modelos é compreensível na medida em que o modelo triaxial evidentemente não admite que muitas galáxias possam ser aparentemente circulares. Afinal, se os discos das galáxias são intrinsecamente

elípticos, mesmo quando vistos de face, eles não terão aparência circular. E um disco projetado nunca parece ser mais circular do que realmente é; ou seja, a razão axial de um dado disco sempre diminui em projeção. Entretanto, mesmo no modelo triaxial, o número de galáxias com razão axial aparente  $b$  entre 0,95 e 1,00, por exemplo, não é exatamente nulo pois, se a distribuição de razões intrínsecas é gaussiana, podem existir algumas poucas galáxias com razão intrínseca  $p$  arbitrariamente próxima de 1, de modo que algumas galáxias, dentre milhares, realmente tenham  $b = 1$ .

Já o modelo oblato supõe que todos os discos são exatamente circulares. Neste caso, não há razão pela qual devesse haver mais galáxias com  $b$  próximo de 0,75 do que de 0,95, por exemplo. Por isso, nas funções de distribuição de  $b$  previstas pelo modelo oblato não ocorre uma queda brusca do número de galáxias perto de 0,9. Afinal, se as galáxias circulares estão aleatoriamente orientadas, a fração delas que se mostra quase de face contribui com objetos quase circulares, de  $b \simeq 1$ .

Nós obtivemos o resultado de que os eixos do plano do disco estão na razão  $p = 0,849 \pm 0,063$ . É altamente improvável que a falta de objetos circulares seja um efeito de seleção, já que também está presente nas medidas provenientes do SDSS. Na nossa amostra, adotamos um procedimento criterioso para medir cada galáxia individualmente e as nossas medidas, que não diferem substancialmente das provenientes do SDSS, têm incertezas médias menores que o tamanho dos intervalos dos histogramas adotados.

A análise das galáxias barradas e não-barradas separadamente não nos permitiu concluir que uma destas sub-classes apresentasse triaxialidade significativamente diferente daquela da amostra completa de espirais. A separação da amostra em subtipos Sa, Sb e Sc mostrou-se igualmente inconclusiva, na medida em que, com estes dados, não é possível afirmar que exista uma dependência da triaxialidade com a morfologia.

Através de uma abordagem analítica simplificada, nós propusemos uma descrição da formação de halos escuros triaxiais no contexto de colisões de protogaláxias. Assumimos que a estrutura destas protogaláxias pudesse ser razoavelmente aproximada por elipsóides homogêneos, compostos de um gás de partículas não-colisionais. Notamos que a fusão de duas esferas idênticas, por conservação da energia e do momento, pode resultar em uma estrutura triaxial. Neste cenário, a forma do objeto resultante não é muito sensível ao parâmetro de impacto, mas depende principalmente da razão entre a dispersão interna de velocidades das partículas do elipsóide e a velocidade relativa de aproximação das duas esferas que se fundem. Para produzir galáxias com a triaxialidade que nós obtivemos das medidas de imagens do SDSS, estas fusões devem ter ocorrido com velocidades da ordem de  $\sim 150$  m/s. Utilizando este valor, nós concluímos que os discos das galáxias espirais devem ter se formado no redshift  $z \simeq 0,69 \pm 0,32$ .

## 6.2 Perspectivas

Uma decorrência deste trabalho é a perspectiva de abordar o estudo da dinâmica de galáxias barradas no contexto de halos triaxiais. O potencial gravitacional do halo, não sendo esférico, deve influenciar significativamente a dinâmica do disco estelar, no que diz respeito aos braços espirais e à barra, sobre a qual este halo assimétrico exerceria torques não nulos. A formação e evolução de barras deve estar intimamente ligada ao potencial do halo, embora este não seja evidentemente o único fator. Simulações numéricas de fato sugerem que halos triaxiais podem induzir a formação de barras (Gadotti & de Souza, 2003). Além disso, se a distribuição de massa do disco não tem simetria azimutal (Binney & Tremaine, 1994) a teoria de ondas de densidade de Lin & Shu (1964, 1966), sobre a formação de braços espirais, precisa ser adaptada e deve ter implicações relevantes para os critérios de instabilidade de Toomre (1963, 1964), no que diz respeito à formação de barras. Vale ressaltar que este assunto está começando a surgir na literatura (veja-se por exemplo as recentes revisões de Kormendy & Kennicutt, 2004 e Athanassoula, 2005) e portanto é um tema de bastante atualidade científica que promete evoluir rapidamente nos próximos anos.

Pretendemos analisar uma série de aspectos observacionais das galáxias barradas para determinar sua relação com a triaxialidade do halo de matéria escura, utilizando para isso ferramentas teóricas e simulações numéricas. Outro aspecto relevante a ser estudado é a velocidade de rotação da barra. Sua relação com o padrão espiral e com o momento angular do halo deve ser abordada do ponto de vista teórico, através da teoria de Lin & Shu de ondas de densidade, adaptada para discos não circulares. Observacionalmente, seriam necessários dados espectroscópicos para se determinar o campo de velocidades de algumas galáxias barradas. Com isso, pretende-se obter um quadro detalhado da origem e evolução dinâmica das barras e da sua relação com os braços espirais na presença de um potencial gravitacional triaxial.





# Referências

- ABAZAJIAN, K. et al. 2003. *AJ* **126**, 2081
- ABAZAJIAN, K. et al. 2004 *AJ* **128**, 502
- ABAZAJIAN, K. et al. 2005. *AJ* **129**, 1755
- ADELMAN-McCARTHY, J. K. et al. 2005. *ApJS*, *submetido*, astro-ph/0507711
- ANDERSEN, D. R., BERSHADY, M. A., SPARKE, L. S., GALLAGHER, J. S., WILCOTS, E. M. 2001. *ApJ* **551**, L131
- BABCOCK, H. W. 1939. *Lic. Obs. Bull.* **19**, 41
- BINGGELI, B. 1980. *A&A* **82**, 289
- BINNEY, J. 1978. *MNRAS* **183**, 779
- BINNEY, J., TREMAINE, S. 1994. *Galactic Dynamics* (Princeton University Press, Princeton)
- BINNEY, J., DE VAUCOULEURS, G. 1981. *MNRAS* **194**, 679
- BRUZUAL, G., CHARLOT, S. 1993. *ApJ* **405**, 538
- CHANDRASEKHAR, S. 1969. *Ellipsoidal Figures of Equilibrium* (Yale University Press, New Haven)
- COLE, S., LACEY, C. 1996. *MNRAS* **281**, 716
- COMBES, F., BOISSÉ, F., MAZURE, A., BLANCHARD, A. 1991. *Astronomie – Galaxies*

*et Cosmologie* (InterEditions/Editions du CNRS, Paris/Meudon)

COMBES, F. 2002. *New A. R.* **46**, 755

DE VAUCOULEURS, G. 1959. *HDF* **53**, 275

DE VAUCOULEURS, G., DE VAUCOULEURS, A. 1964. *Reference Catalogue of Bright Galaxies* (University of Texas Press, Austin)

DE VAUCOULEURS, G., DE VAUCOULEURS, A., CORWIN, H.G. 1976. *Second Reference Catalogue of Bright Galaxies* (University of Texas Press, Austin)

DE VAUCOULEURS G., DE VAUCOULEURS A., CORWIN H.G., BUTA R.J., PATUREL G., FOUQUE P. 1991. *Third Reference Catalogue of Bright Galaxies* (Springer-Verlag, New York)

DREYER, J. L. E. 1888. *MmRAS* **49**, 1

DUBINSKI, J. 1994. *ApJ* **431**, 617

DUBINSKI, J., CARLBERG, R. G. 1991. *ApJ* **378**, 496

EL-ZANT, A. A., SHLOSAN, I., BEGELMAN, M. C., FRANK, J. 2003. *ApJ* **590**, 641

FABER, S. M., GALLAGHER, J. S. 1979. *ARA&A*, **17**, 135

FASANO, G., AMICO, P., BERTOLA, F., VIO, R., ZEILINGER, W. W. 1993. *MNRAS* **262**, 109

FRANX, M., DE ZEEUW, T. 1992 *ApJ* **392** L47

FOLKES S., RONEN, S., PRICE I., LAHAV, O. et al. 1999. *MNRAS* **308**, 459

GADOTTI, D.A., DE SOUZA, R.E. 2003. *ApJ* **583**, L75

GAO, L., WHITE, S.D.M., JENKINS, A., SPRINGEL, V. 2004. *MNRAS* **355**, 819

GROSBØL, P.J. 1985 *A&AS* **60**, 261

HERSCHEL, J. F. W. 1864. *RSPT* **154**, 1

HUBBLE, E. 1917 *PhD thesis*, University of Chicago

HUBBLE, E. 1926. *ApJ* **64**, 321

HUBBLE, E. 1936. *Realm of the Nebulae*, Yale University Press, New Haven

- JEDRZEJEWSKI, R. I. 1987. *MNRAS* **226**, 747
- JING, Y. P., SUTO, Y. 2002. *ApJ* **574**, 538
- KORMENDY, J., KENNICUTT, R. C., 2004, *ARA&A*, **42**, 603.
- KUIJKEN, K., TREMAINE, S. 1994. *ApJ* **421**, 178
- LAMBAS, D.G., MADDOX, S.J., LOVEDAY, J. 1992. *MNRAS* **258**, 404
- LIN, C.C., SHU, F.H. 1964, *ApJ*, **140**, 646
- LIN, C.C., SHU, F.H. 1966, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **55**, 229
- LOVEDAY, J. 1989. *PhD thesis*, University of Cambridge
- LUCY, L.B. 1974. *AJ* **79**, 745
- MACHADO, R.E.G., DE SOUZA, R.E. 2005. *A&A*, *submetido*
- MARASTON, C. 1998. *MNRAS*, **300**, 872
- MIHALAS, D., BINNEY, J. 1981. *Galactic Astronomy* (Freeman, San Francisco)
- NOERDLINGER, P. D. 1979. *ApJ* **234**, 802
- OSTRIKER, J. P., PEEBLES, P. J. E. 1973. *ApJ*, **186**, 467
- OSTRIKER, J. P., PEEBLES, P. J. E., YAHIL, A. 1974. *ApJ*, **193**, 679
- PEEBLES, P.J.E. 1980. *The Large Scale Structure of the Universe* (Princeton University Press, Princeton)
- ROBERTS, M. S., HAYNES, M. P. 1994. *ARA&A* **32**, 115
- REYNOLDS, J. H. 1920. *MNRAS* **80**, 746
- RIX, H.-W., ZARITSKY, D. 1995. *ApJ* **447**, 82
- RYDEN, B.S. 2004. *ApJ* **601**, 214
- RUBIN, V. C., THONNARD, N., FORD, W. K., JR. 1978. *ApJ* **225**, 107
- SACKETT, P. D. 1999. *ASPC* **182**, 393
- SANDAGE, A. R. 2005. *ARA&A* **43**, 581

- SANDAGE A. 1961. *The Hubble Atlas of Galaxies* (Carnegie Institution, Washington)
- SANDAGE, A. R., FREEMAN, K.C., STOKES, N.R. 1970. *ApJ* **160**, 831
- SANDAGE A., TAMMANN G.A. 1981. *Revised Shapley-Ames Catalog of Bright Galaxies* (Carnegie Institution, Washington)
- SCHOENMAKERS, R. H. M., FRANX, M., DE ZEEUW, P. T. 1997. *MNRAS* **292**, 349
- STARK, A.A. 1977. *ApJ* **213**, 368
- STOUGHTON, C. et al. 2002. *AJ* **123**, 485
- STRAUSS, M.A., WEINBERG, D.H., LUPTON, R.H. et al. 2002. *AJ* **124**, 1810
- VAN DEN BERGH, S. 1977. *Observatory* **97**, 81
- WALSH, D., CARSWELL, R. F., WEYMANN, R. J. 1979. *Nature*, **279**, 381
- WOLF, M. 1908. *PAIKH* **3**, 109
- ZWICKY, F. 1937. *ApJ* **86**, 217

# Apêndice A

## Projeção de Elipsóides Triaxiais

A equação de um elipsóide triaxial, no seu sistema próprio de eixos ( $S$ ), pode ser dada na sua forma cartesiana:

$$x^2 + \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = a^2 \quad (\text{A-1})$$

O que precisamos determinar é qual seria a forma desta figura, projetada no plano do céu. Isto é, dado um elipsóide triaxial de parâmetros intrínsecos  $p$  e  $q$ , que forma ele apresentaria se visto sob um ângulo qualquer?

Para transformar esta equação ao sistema do observador, precisamos fazer duas rotações, ao longo dos primeiros dois ângulos de Euler ( $\phi$  e  $\theta$ ). Isso leva ao sistema  $S'$ , onde  $z'$  é a direção da linha de visada do observador e  $x'y'$  é o plano do céu. A terceira rotação (de  $\psi$  em torno de  $z'$ ) é irrelevante, uma vez que apenas altera a orientação da figura já projetada, sem modificar sua forma. A transformação de  $S$  para  $S'$  é então dada por:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{A-2})$$

E a transformação inversa é:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi \\ \sin \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (\text{A-3})$$

Substituindo  $x$ ,  $y$  e  $z$  dados por (A-3) em (A-1), temos:

$$(x' \cos \phi - y' \cos \theta \sin \phi + z' \sin \theta \sin \phi)^2 + \frac{1}{p^2} (x' \sin \phi + y' \cos \theta \cos \phi - z' \sin \theta \cos \phi)^2 + \frac{1}{q^2} (y' \sin \theta + z' \cos \theta)^2 = a^2 \quad (\text{A-4})$$

Desenvolvendo

$$\begin{aligned} & x'^2 \cos^2 \phi - 2x'y' \cos \theta \sin \phi \cos \phi + y'^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + z'^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \\ & + 2x'z' \sin \theta \sin \phi \cos \phi - 2y'z' \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi + \frac{1}{p^2} (x'^2 \sin^2 \phi + \\ & + y'^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + z'^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + 2x'y' \cos \theta \cos \phi \sin \phi + \\ & - 2x'z' \sin \theta \cos \phi \sin \phi - 2y'z' \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi) + \\ & + \frac{1}{q^2} (y'^2 \sin^2 \theta + z'^2 \cos^2 \theta + 2x'z' \sin \theta \cos \theta) = a^2 \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

e agrupando os termos em potências de  $z'$  podemos escrever A-5 como:

$$f z'^2 + g z' + h = a^2 \quad (\text{A-6})$$

definindo  $f$ ,  $g$  e  $h$ :

$$\begin{aligned} f & \equiv \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \frac{1}{p^2} \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{1}{q^2} \cos^2 \theta \\ g & \equiv \sin \theta \sin 2\phi \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) x' + \sin 2\theta \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2} \cos^2 \phi - \sin^2 \phi\right) y' \\ h & \equiv \left(\cos^2 \phi + \frac{1}{p^2} \sin^2 \phi\right) x'^2 + \left(\frac{1}{p^2} \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{1}{q^2} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \phi\right) y'^2 + \\ & + \sin 2\phi \cos \theta \left(\frac{1}{p^2} - 1\right) x'y' \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

No sistema  $x'y'z'$ , um observador veria a distribuição de brilho integrada ao longo da linha de visada  $z'$ :

$$\Sigma(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} I(a) dz' \quad (\text{A-8})$$

Mas a integral é simétrica em relação ao ponto onde a linha de visada intercepta o elipsóide mais interno ( $a_o$ ), tal que  $\frac{da}{dz'} = 0$ . E com a Equação A-6, temos:

$$\begin{aligned} 2a \frac{da}{dz} &= 2fz' + g \\ 2fz' + g &= 0 \end{aligned} \tag{A-9}$$

$$z_o = -\frac{g}{2f} \tag{A-10}$$

correspondendo a um ponto de mínimo ( $z_o$ ). E já que

$$a(z') = (fz'^2 + gz' + h)^{1/2} \tag{A-11}$$

então

$$\begin{aligned} a(z'_o) &= \left( f \frac{g^2}{4f^2} - \frac{g^2}{2f} + h \right)^{1/2} \\ a(z'_o) &= \left( h - \frac{g^2}{4f} \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{A-12}$$

A Equação A-6 pode ainda ser escrita como

$$\begin{aligned} z'^2 + \frac{g}{f}z' + \frac{h - a^2}{f} &= 0 \\ 2z' &= -\frac{g}{f} \pm \frac{2}{\sqrt{f}} \sqrt{\frac{g^2}{4f} - h^2 + a^2} \end{aligned} \tag{A-13}$$

o que nos permite mudar a variável de integração de A-8 para  $a$ :

$$dz' = \frac{1}{\sqrt{f}} (a^2 - a_o^2)^{-1/2} da \tag{A-14}$$

Temos então

$$\Sigma(x', y') = \frac{2}{\sqrt{f}} \int_{a_o}^{\infty} I(a)(a^2 - a_o^2) a da \tag{A-15}$$

Como a integral A-15 depende exclusivamente de  $a_o$ , resulta que as curvas de  $a_o$  constante têm o mesmo brilho e em consequência descrevem uma isofota. Por este motivo, as isofotas vistas pelo observador são descritas pela equação

$$\begin{aligned} a_o^2 &= h - \frac{g^2}{4f} = \frac{4fh - g^2}{4f} \\ 4fa_o^2 &= 4fh - g^2 \end{aligned} \tag{A-16}$$

Em seguida, substituímos as equações A-7 em A-16.

$$\begin{aligned} 4fa_o^2 &= 4 \left( \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \frac{1}{p^2} \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{1}{q^2} \cos^2 \theta \right) \left[ \left( \cos^2 \phi + \frac{1}{p^2} \sin^2 \theta \right) x'^2 + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{1}{p^2} \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{1}{q^2} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \phi \right) y'^2 + \sin 2\phi \cos \theta \left( \frac{1}{p^2} - 1 \right) x' y' \right] + \\ &- \left[ \sin \theta \sin 2\phi \left( 1 - \frac{1}{p^2} \right) x' + \sin 2\theta \left( \frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2} \cos^2 \phi - \sin^2 \phi \right) y' \right]^2 \end{aligned} \tag{A-17}$$



$$\begin{aligned}
fa_o^2 = & \left[ \sin^2 \theta \sin^2 \phi \cos^2 \phi + \frac{1}{p^2} \sin^2 \theta \sin^4 \phi + \frac{1}{p^2} \sin^2 \theta \cos^4 \phi + \frac{1}{p^4} \sin^2 \theta \sin^2 \phi \cos^2 \phi + \right. \\
& \left. + \frac{1}{q^2} \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{1}{p^2 q^2} \cos^2 \theta \sin^2 \phi \right] x'^2 + \left[ \frac{1}{p^2} \sin^2 \theta \sin^2 \phi \cos^2 \phi \cos^2 \theta + \right. \\
& \left. + \frac{1}{q^2} \sin^2 \phi \sin^4 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin^4 \phi + \frac{1}{p^4} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos^4 \phi + \frac{1}{p^2 q^2} \sin^4 \theta \cos^2 \phi + \right. \\
& \left. + \frac{1}{p^2} \sin^2 \theta \sin^2 \phi \cos^2 \phi \cos^2 \theta + \frac{1}{p^2 q^2} \cos^4 \theta \cos^2 \phi + \frac{1}{q^4} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{q^2} \cos^4 \theta \sin^2 \phi \right] y'^2 + \\
& + \left[ \sin 2\phi \cos \theta \left( \frac{1}{p^2} - 1 \right) \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \sin 2\phi \cos \theta \left( \frac{1}{p^2} - 1 \right) \frac{1}{p^2} \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \right. \\
& \left. + \sin 2\phi \cos \theta \left( \frac{1}{p^2} - 1 \right) \frac{1}{q^2} \cos^2 \theta \right] x' y' - \frac{1}{4} \left[ \sin^2 \theta \sin^2 \phi \left( 1 - \frac{1}{p^2} \right)^2 \right] x'^2 + \\
& - \frac{1}{4} \left[ \sin^2 2\theta \left( \frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2} \cos^2 \phi - \sin^2 \phi \right)^2 \right] y'^2 - \frac{1}{4} \left( 2 \sin \theta \sin 2\phi \left( 1 - \frac{1}{p^2} \right) \sin 2\theta \left( \frac{1}{q^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{p^2} \cos^2 \phi - \sin^2 \phi \right) \right] x' y'
\end{aligned} \tag{A-18}$$

E, agrupando os termos, ficamos com:

$$a_o^2 = \left( \frac{j}{f} \right) x'^2 + \left( \frac{2k}{f} \right) x' y'^2 + \left( \frac{l}{f} \right) y'^2 \tag{A-19}$$

onde  $j$ ,  $k$  e  $l$  são funções de  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $p$  e  $q$ :

$$\begin{aligned}
j & \equiv \frac{1}{p^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{q^2} \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{1}{p^2 q^2} \cos^2 \theta \sin^2 \phi \\
k & \equiv \left( \frac{1}{p^2 q^2} - \frac{1}{q^2} \right) \cos \theta \sin \phi \cos \phi \\
l & \equiv \frac{1}{q^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{p^2 q^2} \cos^2 \theta
\end{aligned} \tag{A-20}$$

Assim, a isofota da equação A-19 é uma elipse cujos semi-eixos estão alinhados com  $x'$  e  $y'$ . Se aplicarmos uma rotação  $\psi$  ao redor do eixo  $z'$ , poderemos fazer o semi-eixo maior

coincidir com o eixo  $x''$ . Neste sistema  $x''y''z''$ , uma elipse arbitrária de razão axial  $b$  terá a equação

$$x''^2 + \frac{y''^2}{b^2} = a^2 \quad (\text{A-21})$$

A transformação do sistema  $x'y'z'$  ao sistema  $x''y''z''$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} x'' &= x' \cos \psi + y' \sin \psi \\ y'' &= -x' \sin \psi + y' \cos \psi \\ z'' &= z' \end{aligned} \quad (\text{A-22})$$

Substituindo as equações A-22 em A-21 ficamos com

$$\left( \cos^2 \psi + \frac{1}{b^2} \sin^2 \psi \right) x'^2 + \left( 2 \sin \psi \cos \psi - \frac{2}{b^2} \sin \psi \cos \psi \right) x'y' + \left( \sin^2 \psi + \frac{1}{b^2} \cos^2 \psi \right) y'^2 = a^2 \quad (\text{A-23})$$

Comparando A-23 com A-19, identificamos os termos seguintes:

$$\begin{aligned} a^2 \frac{j}{f} &= \cos^2 \psi + \frac{1}{b^2} \sin^2 \psi \\ a^2 \frac{k}{f} &= \left( 1 - \frac{1}{b^2} \right) \sin \psi \cos \psi \\ a^2 \frac{l}{f} &= \sin^2 \psi + \frac{1}{b^2} \cos^2 \psi \end{aligned} \quad (\text{A-24})$$

Subtraindo a terceira das equações A-24 da primeira, adicionando a segunda ao quadrado e dividindo pela soma da primeira com a terceira, é possível eliminar  $\psi$ :

$$\frac{\frac{1}{b^2} - 1}{\frac{1}{b^2} + 1} = \frac{\pm \sqrt{(j-l)^2 + 4k^2}}{(j+l)} \quad (\text{A-25})$$

$$\frac{1}{b^2} \left[ \pm \sqrt{(j-l)^2 + 4k^2} - (j+l) \right] = -(j+l) \mp \sqrt{(j-l)^2 + 4k^2} \quad (\text{A-26})$$

E, finalmente, obtemos

$$b = \sqrt{\frac{(j+l) \mp [(j-l)^2 + 4k^2]^{1/2}}{(j+l) \pm [(j-l)^2 + 4k^2]^{1/2}}} \quad (\text{A-27})$$

que é a razão axial aparente  $b$  expressa em termos de  $j$ ,  $k$  e  $l$ , dados pelas equações A-20, que dependem exclusivamente das razões axiais intrínsecas  $p$  e  $q$  e dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$ .



