



# ASTRONOMIA DO SISTEMA SOLAR

Enos Picazzio (IAGUSP 2006)

## DINÂMICA DO SISTEMA SOLAR



**NÃO HÁ PERMISSÃO DE USO PARCIAL OU TOTAL DESTE MATERIAL PARA OUTRAS FINALIDADES.**



**Até o final do século XVII eram conhecidos: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno.**

**Urano foi descoberto em 1781, Netuno em 1846 (baseados em previsões teóricas de Adams (1845) e Leverrier (1846) e Plutão em 1930 (também por previsões teóricas).**



## O que são planeta, planeta duplo e satélite?

### *União Astronômica Internacional (IAU)* (Proposta a ser votada)

**Planeta:** corpo celeste que (a) tenha massa suficiente para que sua autogravitação supere a rigidez de seu material e estabeleça o regime de equilíbrio hidrostático - responsável pela forma aproximadamente esférica -, e (b) que orbite uma estrela, sem ser estrela ou satélite.

Pela nova classificação, haveria 12 planetas: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Ceres, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno, Plutão-Caronte e Xena (2003UB313). Porém, há uma lista de quase uma dezena de candidatos a planetas.

Um corpo com massa superior a  $5 \times 10^{20}$  kg (1.400 vezes menor que a da Lua) e diâmetro mínimo de 800 km (4 vezes menor que o da Lua) satisfaz essa condição.

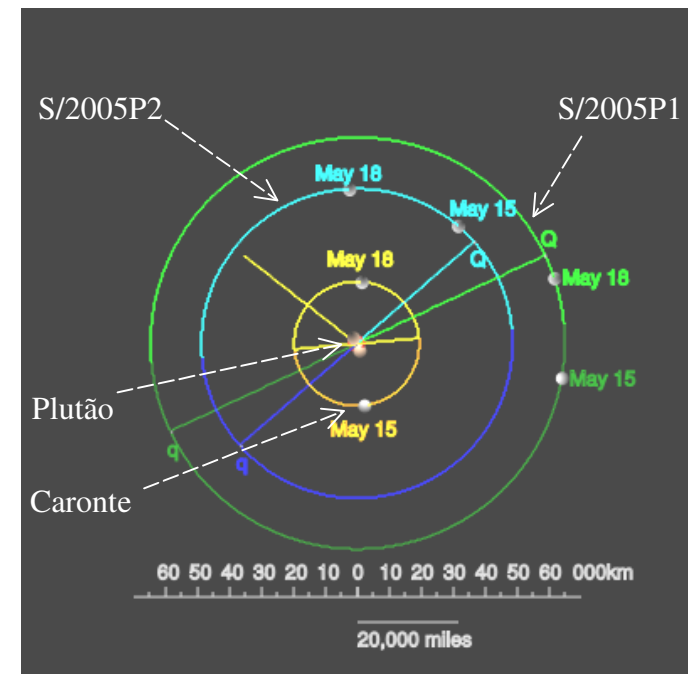
## O que são planeta, planeta duplo e satélite?

### *União Astronômica Internacional (IAU)* (Proposta a ser votada)

**Planeta duplo:** quando o baricentro (centro de massa) do sistema está fora do corpo maior.

O baricentro da dupla Plutão e Caronte está cerca de 1.200 km acima da superfície de Plutão.

Diâmetros aproximados em km:  
Plutão: 2.400, Caronte: 1.200, P1: 60 a 165, P2: 40 a 140





## O que são planeta, planeta duplo e satélite?

### *União Astronômica Internacional (IAU)* (Proposta a ser votada)

**Satélite:** corpo celeste girando em torno de um baricentro localizado no interior do planeta que órbita.

Esta condição vale independentemente de o corpo satisfazer a condição de planeta (massa e diâmetro mínimos).

No caso da dupla Terra e Lua, o baricentro do sistema está cerca de 1.400 km abaixo da superfície terrestre, apesar de a Lua satisfazer a condição de planeta.

Os baricentros dos satélites Ganimedes (Júpiter) e Titã (Saturno), que são maiores que Mercúrio, estão fora dos seus planetas.



## Parâmetros orbitais

**Inclinação ( $i$ )** - é o ângulo formado entre a órbita do planeta e o plano da eclíptica. Se  $i > 90^\circ$ , o corpo orbita o Sol em sentido contrário ao movimento da Terra (movimento retrógrado).

**Longitude do nodo ascendente ( $\Omega$ )** - é o ângulo entre o ponto Vernal ( $\gamma$ ) e o nodo ascendente do corpo. ( $0 \leq \Omega \leq 360^\circ$ )

**Argumento do periélio ( $\omega$ )** - é o ângulo, medido sobre o plano orbital do corpo, entre o periélio P e o nodo ascendente, contado no sentido do movimento do corpo. ( $0 \leq \omega \leq 360^\circ$ )

**Semi-eixo maior da órbita ( $a$ )** - distância média do astro ao Sol.

**Excentricidade da órbita ( $e$ )** - relação entre a semi-distância focal e o semi-eixo maior.

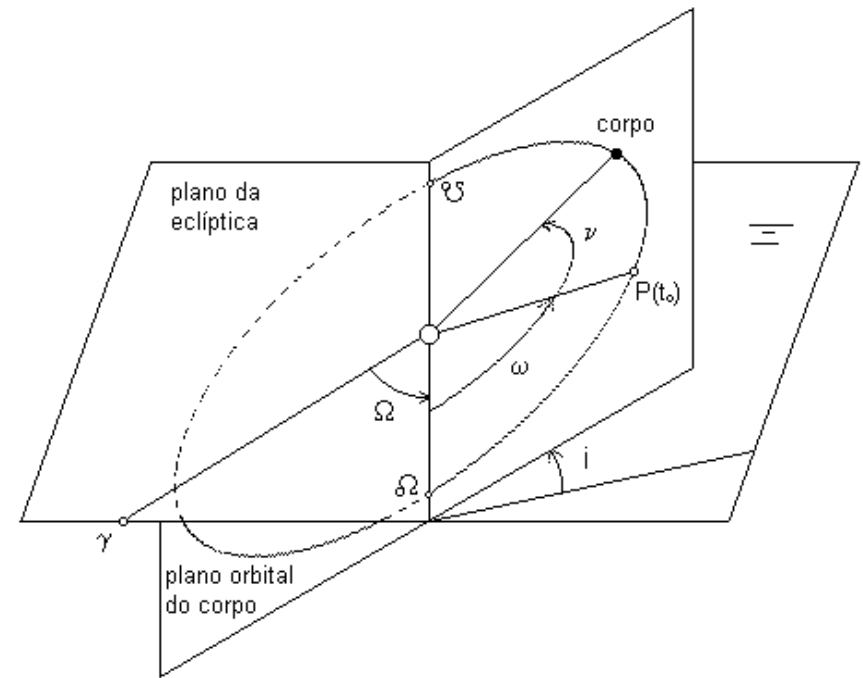
**Instante (época) de passagem pelo periélio ( $t_0$ )** - é a época de uma determinada passagem pelo periélio.

**Período sideral ( $P$ )** - é o tempo necessário para o objeto orbitar uma vez em torno do Sol.

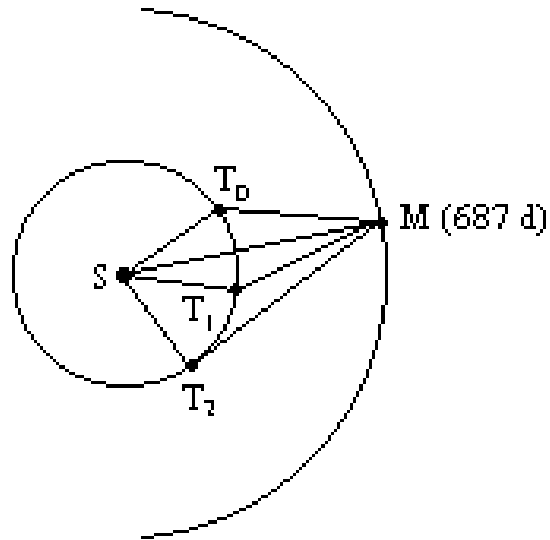
**Longitude do periélio ( $\varpi$ )** - é definido como a soma algébrica entre a longitude do nodo ascendente ( $\Omega$ ) e o argumento do periélio ( $\omega$ ):  $\varpi = \Omega + \omega$

**Movimento médio ( $n$ )** - é a velocidade angular média do corpo em torno do Sol:

$$n = \frac{2\pi}{P}$$



## Leis de Kepler



S: Sol; M: marte;  $T_0, T_1, T_2$  : posição Terra

Brahe: movimento solar bem determinado  
portanto,  $\angle T_0ST_1$ ;  $\angle T_0ST_2 \dots$  conhecidos

Kepler: mediu os ângulos  $\angle ST_1M$ ;  $\angle ST_2M \dots$   
Como  $\overline{SM}$  é segmento comum, Kepler  
determinou  $\overline{ST_1}$ ,  $\overline{ST_2} \dots$  em função de  $\overline{SM}$

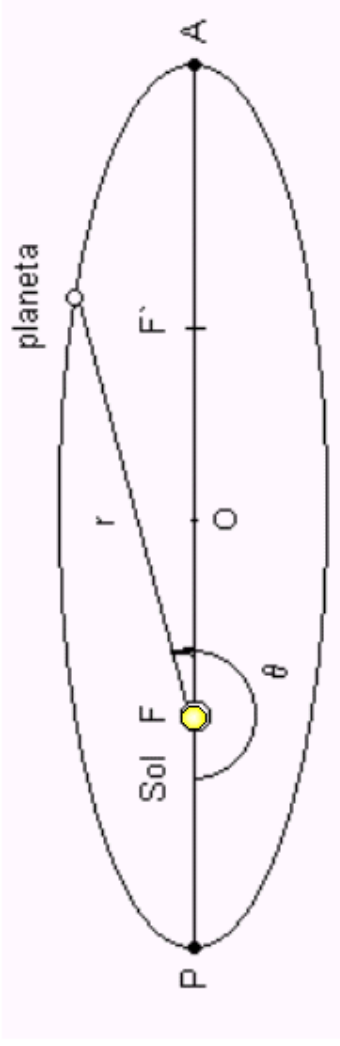
Obtidas empiricamente no século XVII, através da redução das observações de Tycho Brahe.

Resultados obtidos só foram ajustados a **órbitas elípticas**.



## Leis de Kepler

**1ª Lei:** A órbita de cada planeta, relativa ao Sol, é uma elipse com o Sol em um dos focos:



PF = distância periélica

AF = distância afélica

e = excentricidade = OF/OP

r = distância heliocêntrica

a = semi - eixo maior (OA = OP)

$\theta$  = ângulo de anomalia

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

1.1.1

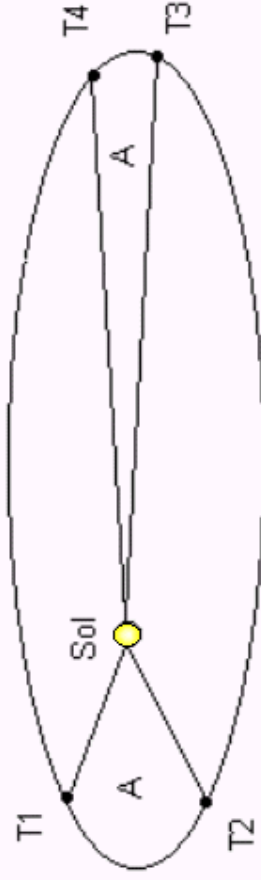


## Leis de Kepler

s

**2ª Lei:** O raio vetor que une o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{h}{2} \quad (1.1.2)$$



**3ª Lei:** O quadrado do período orbital ( $P$ ) é proporcional ao cubo do semi-eixo maior ( $A$ ):

$$a^3 = \text{const.} \cdot P^2 \quad \text{ou} \quad n^2 a^3 = \text{const.} \quad \text{com} \quad n = \frac{2\pi}{P}$$

SO intervalo de tempo decorrido entre “T1 e T2” e “T3 e T4” são iguais, logo a área varrida pelo raio vetor entre “T1 e T2” e “T3 e T4” também são iguais.

Lembre-se que a área do triângulo S-T3-T4 é obtida por:

$$\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{rd\theta \times r}{2}$$



## Lei de Gravitação Universal

---

**Galileu Galilei:** estudando as leis do movimento procurava a resposta à pergunta básica: Por que os planetas estão em movimento?

**Princípio da Inércia:** Se um corpo não for perturbado, permanecerá em MRU.

**Newton:** Interpretou esse “Princípio” da seguinte maneira:  
A única maneira de modificar o movimento de um corpo é utilizar o conceito de força. Como?

Direção do movimento  $\equiv$  Direção da força

Então: deve existir uma “força lateral”, aplicada ao planeta, para mantê-lo em órbita fechada.



## Lei de Gravitação Universal

Energia total de um sistema gravitacional:

$$E = T(r) + V(r) = \frac{mv^2}{2} + \left( -\frac{mMG}{r} \right) \quad (1.1.14)$$

com :

$$T(r) = \text{energia cinética em } r; \quad V(r) = \text{energia potencial gravitacional em } r; \quad \frac{dE}{dt} = 0 \quad (\text{conservação da energia})$$

Possibilidades:  $0 < e < 1$  (elipse)  $\Rightarrow E < 0$  (corpo gravitacionalmente preso)

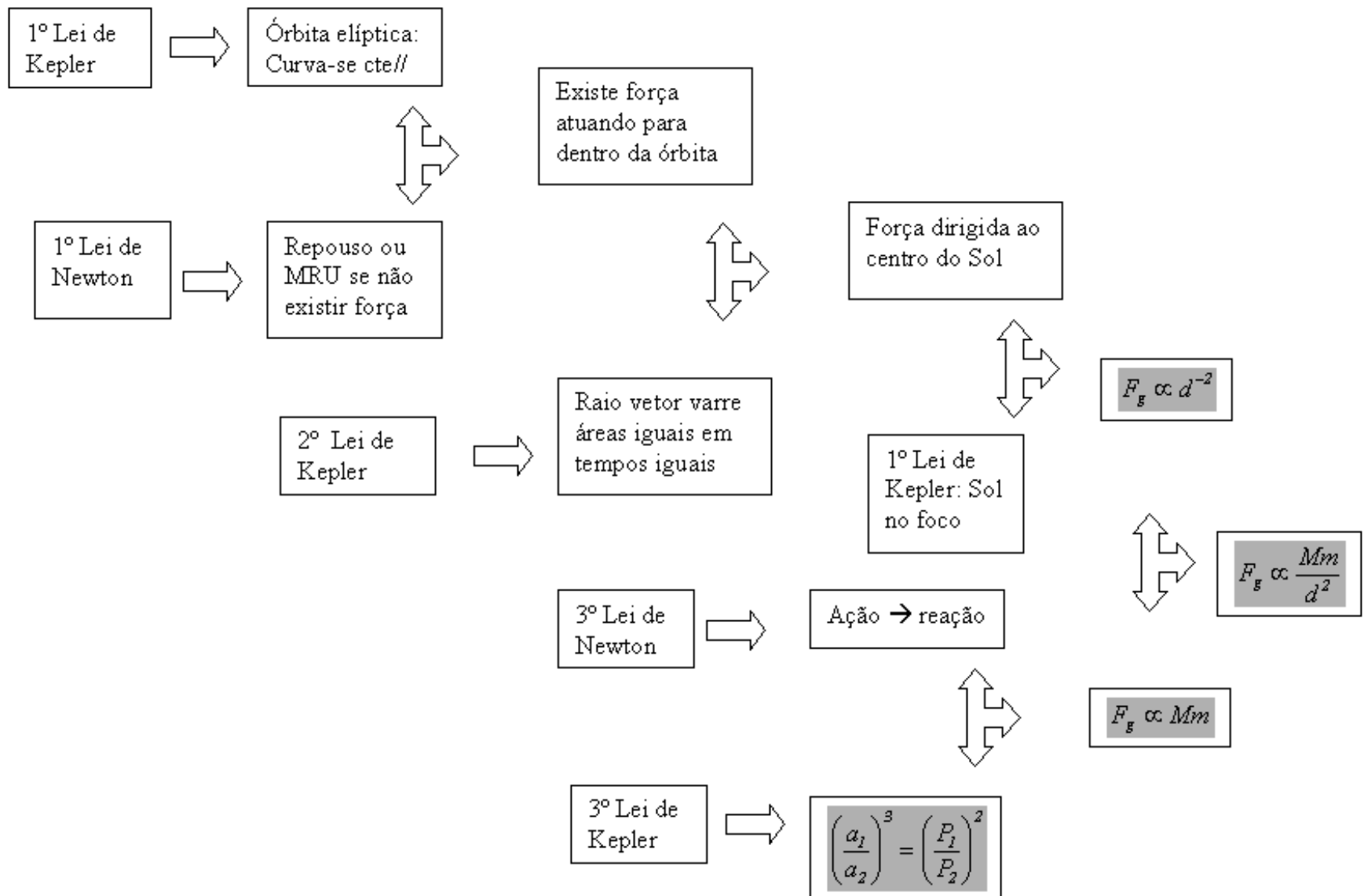
$e = 1$  (parábola)  $\Rightarrow E = 0$  (corpo gravitacionalmente solto)

$e > 1$  (hipérbole)  $\Rightarrow E > 0$  (corpo gravitacionalmente ejetado)

para o caso de  $E = 0$ , as energias cinética e potencial são iguais em módulo, por isso o corpo está solto. Isto define uma velocidade crítica, a de escape:

$$0 = \frac{mv^2}{2} + \left( -\frac{mMG}{r} \right) \rightarrow \frac{v^2}{2} = \left( \frac{MG}{r} \right) \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2MG}{r}}$$

# Lei de Gravitação Universal





## **Problema de 1 corpo (corpo de massa desprezível movimentando-se ao redor de outro com massa, supostamente, puntual)**

Sistema Rerencial em rotação :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad r\dot{\theta}^2 \equiv \text{ac. centrífuga}$$

$$\text{como } F(r) = m.a_r : \quad F(r) = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2$$

$$\text{como } r^2\dot{\theta} = h \rightarrow \dot{\theta}^2 = h^2 / r^4$$

$$\text{logo: } F(r) = m\ddot{r} - mh^2 / r^3 \quad 1.2.1$$



## Problema de 1 corpo (corpo de massa desprezível movimentando-se ao redor de outro com massa, supostamente, puntual)

Sistema Rerencial em rotação :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad r\dot{\theta}^2 \equiv \text{ac. centrífuga}$$

$$\text{como } F(r) = m \cdot a_r : \quad F(r) = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2$$

$$\text{como } r^2\dot{\theta} = h \rightarrow \dot{\theta}^2 = h^2 / r^4$$

$$\text{logo: } F(r) = m\ddot{r} - mh^2 / r^3 \quad 1.2.1$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

$$F(r) = \frac{mh^2}{a(1-e^2)r^2} \quad 1.2.2$$



## Problema de 1 corpo (corpo de massa desprezível movimentando-se ao redor de outro com massa, supostamente, puntual)

Sistema Rererencial em rotação :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad r\dot{\theta}^2 \equiv \text{ac. centrífuga}$$

$$\text{como } F(r) = m.a_r : \quad F(r) = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2$$

$$\text{como } r^2\dot{\theta} = h \rightarrow \dot{\theta}^2 = h^2 / r^4$$

$$\text{logo: } F(r) = m\ddot{r} - mh^2 / r^3$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

$$F(r) = \frac{mh^2}{a(1-e^2)r^2}$$

1.2.1

igualando

1.2.2

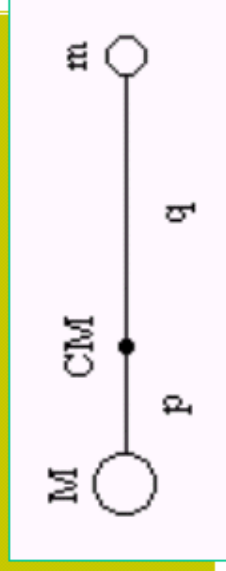
$$\cancel{m\ddot{r}} - \cancel{mh^2} / r^3 = \cancel{mh^2} / a(1-e^2)r^2 \quad 1.2.3$$

Esta é a equação diferencial do movimento.

A solução ?



## Problema de 2 corpos (movimento relativo ao centro de massa)



$$p + q = r$$

$$Mp = mq \quad 1.3.1$$

ac. em M é imposta por m. Logo :

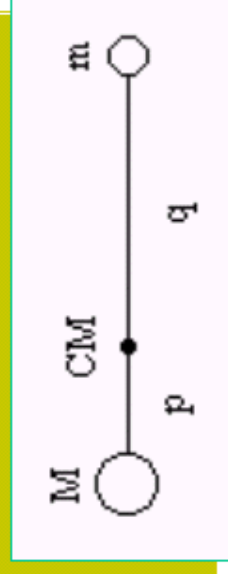
$$\ddot{p} - p\dot{\theta}^2 = -\frac{mG}{r^2} \quad 1.3.2$$

analogamente :

$$\ddot{q} - q\dot{\theta}^2 = -\frac{MG}{r^2} \quad 1.3.3$$



## Problema de 2 corpos (movimento relativo ao centro de massa)



$$p + q = r$$

$$Mp = mq \quad 1.3.1$$

ac. em M é imposta por m. Logo :

$$\ddot{p} - p\dot{\theta}^2 = -\frac{mG}{r^2}$$

analogamente :

$$\ddot{q} - q\dot{\theta}^2 = -\frac{MG}{r^2}$$

$$1.3.2$$

somando

$$1.3.3$$

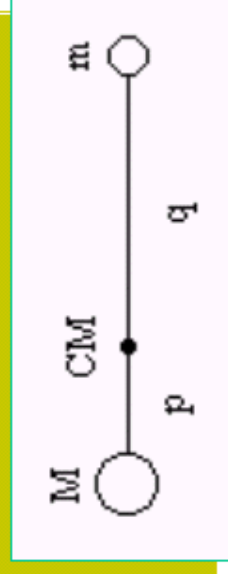
$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{G}{r^2}(m+M) \quad 1.3.4$$

$$\text{como } \dot{\theta}^2 = \frac{h^2}{r^4} \Rightarrow \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -G(m+M)/r^2 \quad 1.3.5$$

cujas solução é :

$$r = \frac{h^2}{G(m+M)} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)} \quad 1.3.7$$

## Problema de 2 corpos (movimento relativo ao centro de massa)



$$p + q = r$$

$$Mp = mq \quad 1.3.1$$

ac. em M é imposta por m. Logo :

$$\ddot{p} - p\dot{\theta}^2 = -\frac{mG}{r^2}$$

analogamente :

$$\ddot{q} - q\dot{\theta}^2 = -\frac{MG}{r^2}$$

somando

1.3.2

1.3.3

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{G}{r^2}(m+M) \quad 1.3.4$$

Retomando a 1.1.2:

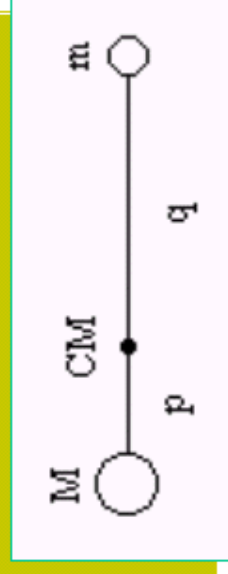
$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{h}{2}$$

momento angular

$$h = r^2 \dot{\theta}; \dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{h^2}{r^4}$$



## Problema de 2 corpos (movimento relativo ao centro de massa)



$$p + q = r$$

$$Mp = mq \quad 1.3.1$$

ac. em M é imposta por m. Logo :

$$\ddot{p} - p\dot{\theta}^2 = -\frac{mG}{r^2}$$

analogamente :

$$\ddot{q} - q\dot{\theta}^2 = -\frac{MG}{r^2}$$

$$1.3.2$$

somando

$$1.3.3$$

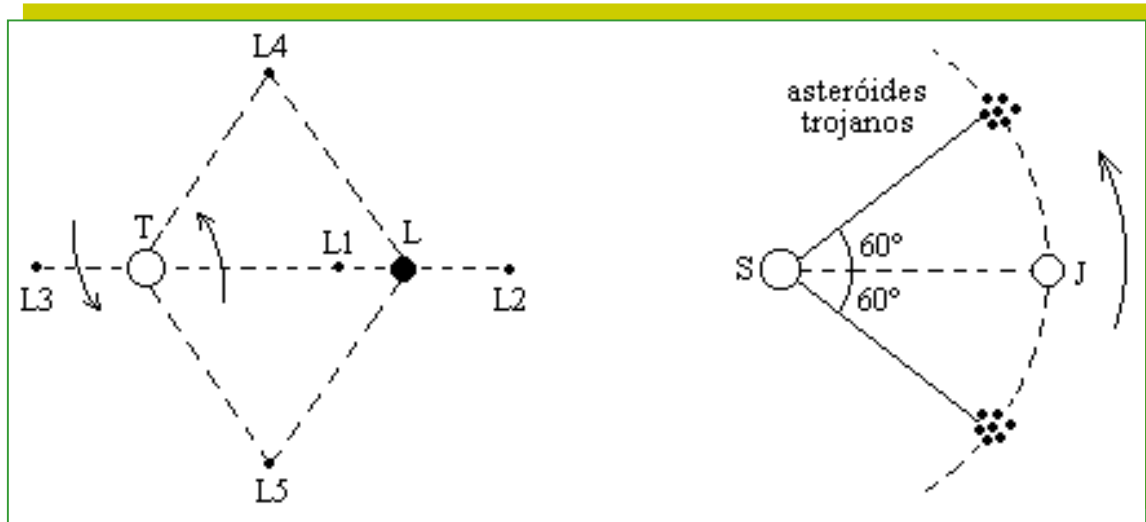
$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{G}{r^2}(m+M) \quad 1.3.4$$

$$\text{como } \dot{\theta}^2 = \frac{h^2}{r^4} \Rightarrow \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -G(m+M)/r^2 \quad 1.3.5$$

cujas solução é :

$$r = \frac{h^2}{G(m+M)} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)} \quad 1.3.7$$

## Problema de 3 corpos



Neste caso existem 5 soluções estacionárias → 5 pontos Lagrangianos.

Soluções estáveis: L4 e L5.

Havendo perturbação, o corpo pode voltar à posição de equilíbrio dependendo da relação entre as massas envolvidas.

Exemplo típico: asteróides Troianos de Júpiter.

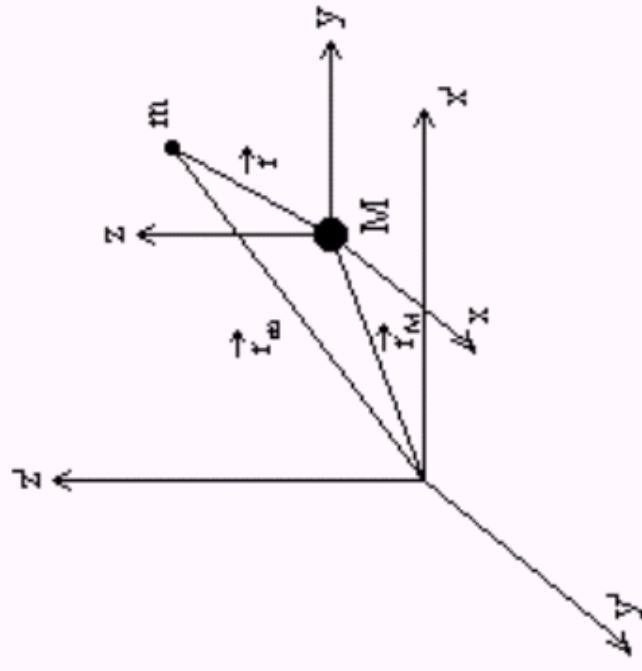
## Problema de 3 corpos

$M, m \equiv$  massas

$x', y', z' \equiv$  sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$  sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

A - equação do movimento relativo



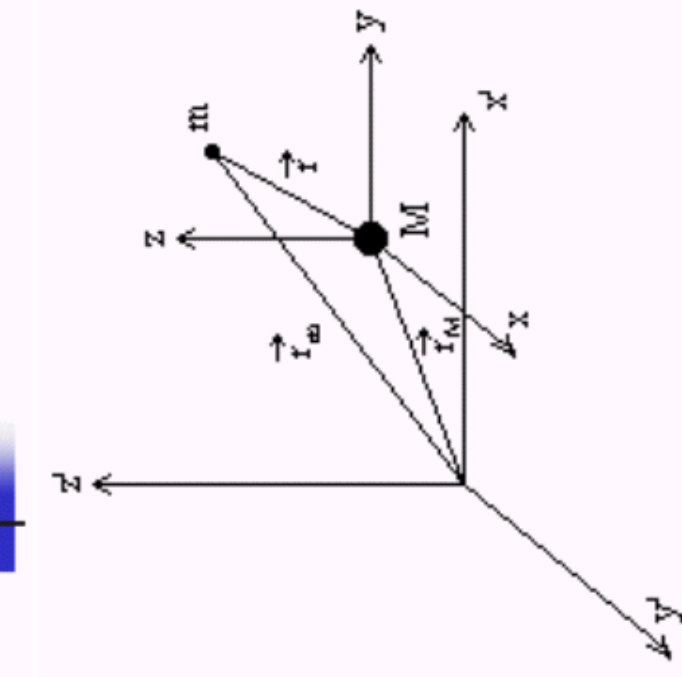
Temos :  $\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$

$$\vec{F} = G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$m \ddot{\vec{r}}_m = - \frac{GMm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_m = - \frac{GM}{r^3} \vec{r}$$

$$M \ddot{\vec{r}}_M = \frac{GMm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_M = \frac{Gm}{r^3} \vec{r}$$

## Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$  massas

$x', y', z' \equiv$  sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$  sistema inercial com origem no centro de massa de  $M$  e não girante em relação ao primeiro.

A - equação do movimento relativo

$$\text{como} \quad \vec{r} = \vec{r}_m - \vec{r}_M \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_m - \ddot{\vec{r}}_M = \frac{-GM\vec{r}}{r^3} - \frac{Gm\vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{r}}{r^3}G(M+m) = -\frac{\vec{r}}{r^3}\mu$$

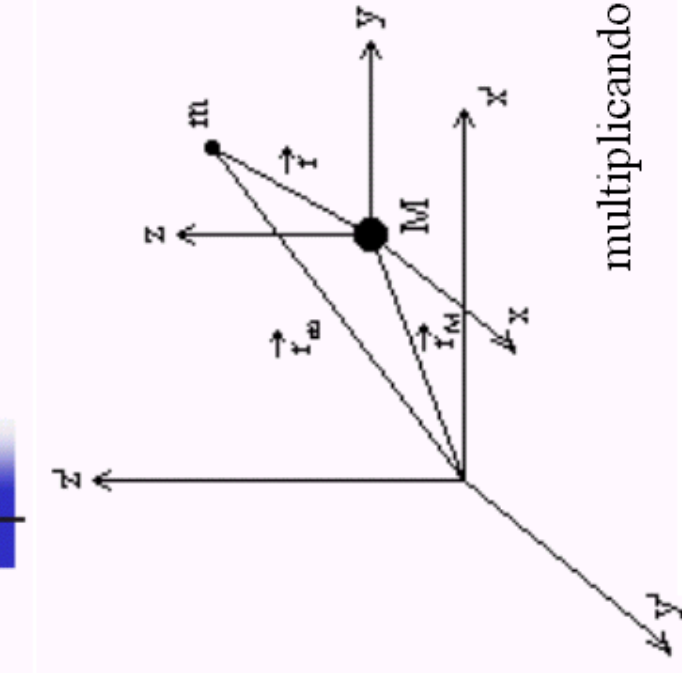
$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}$$

$\Rightarrow$

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0 \quad (\text{I})$$

$$\text{com } \mu = G(M+m) \quad [\text{ML}^3\text{T}^{-2}]$$

## Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$  massas

$x', y', z' \equiv$  sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$  sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

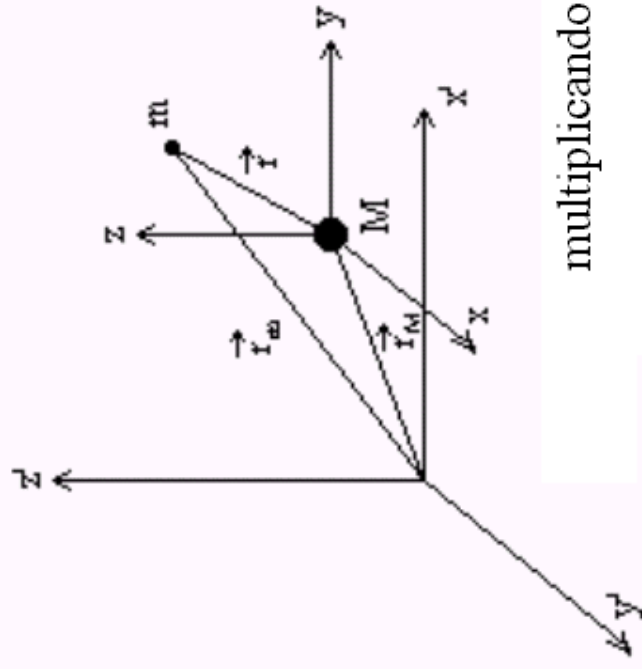
B – conservação da energia

multiplicando  $\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0$  (I) escalarmente por  $\dot{\vec{r}}$  :

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \frac{\mu}{r^3} = 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{r} = 0 \Rightarrow v \cdot \dot{v} + \frac{\mu}{r^3} r \cdot \dot{r} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0$$

$$\Rightarrow E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = cte \quad (\text{II})$$

## Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$  massas

$x', y', z' \equiv$  sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$  sistema inercial com origem no centro de massa de  $M$  e não girante em relação ao primeiro.

C – conservação do momento angular

multiplicando  $\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0$  (I) vetorialmente por  $\vec{r}$  :

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{r} = 0 \quad \therefore \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0 \quad (\text{pois } \vec{r} \times \vec{r} = 0)$$

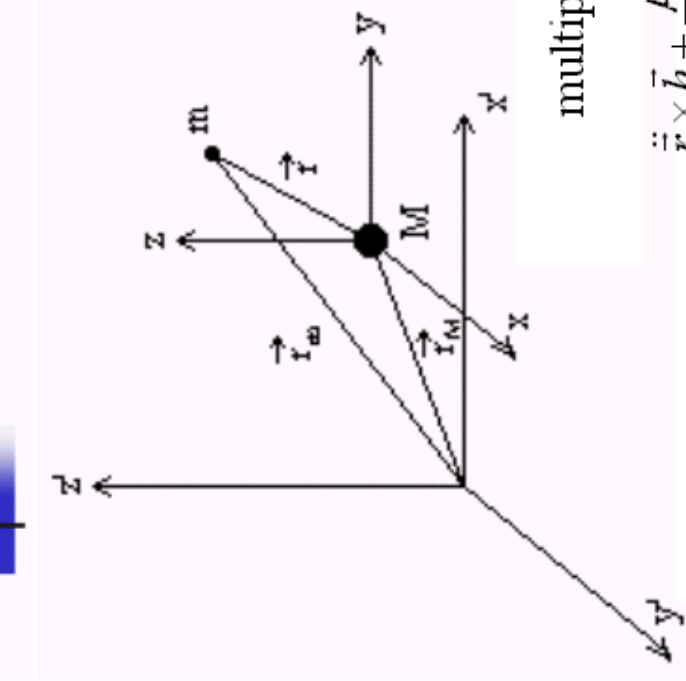
$$\text{como } \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{cte} \quad (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0)$$

Momento angular :

$$\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{cte} \quad (\text{III})$$

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = \text{cte}$$

## Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$  massas

$x', y', z' \equiv$  sistema inercial do conjunto

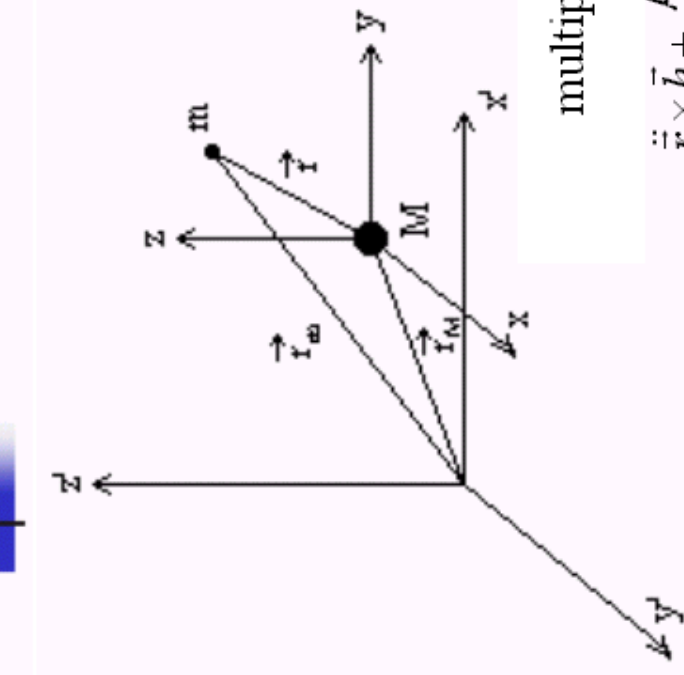
$x, y, z \equiv$  sistema inercial com origem no centro de massa de  $M$  e não girante em relação ao primeiro.

D – equação da trajetória (1º lei de Kepler)

multiplicando  $\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0$  (I) vetorialmente por  $\vec{h}$  :

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{h}) = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} (\vec{h} \times \vec{r})$$

## Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$  massas

$x', y', z' \equiv$  sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$  sistema inercial com origem no centro de massa de  $M$  e não girante em relação ao primeiro.

D – equação da trajetória (1º lei de Kepler)

multiplicando  $\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0$  (I) vetorialmente por  $\vec{h}$  :

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{h}) = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} (\vec{h} \times \vec{r})$$

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} ([\vec{r} \times \vec{v}] \times \vec{r})$$

lembrando que  
 $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$  (III)

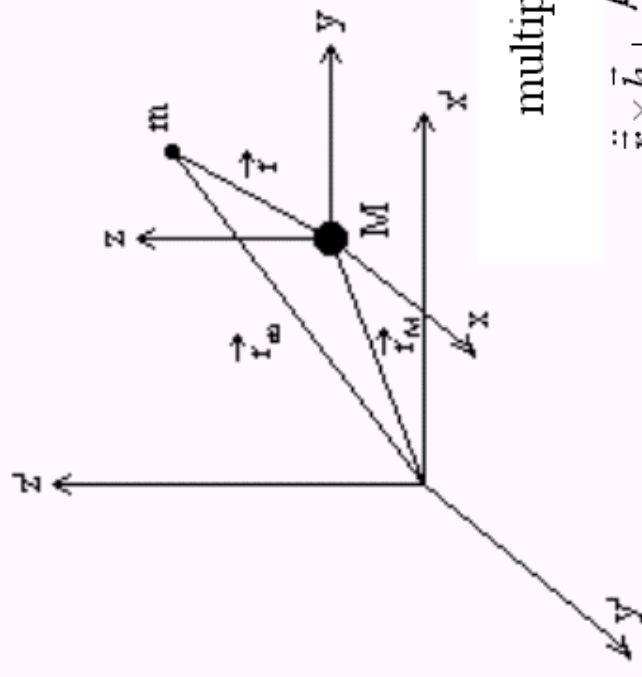
## Problema de 3 corpos

$M, m \equiv$  massas

$x', y', z' \equiv$  sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$  sistema inercial com origem no centro de massa de  $M$  e não girante em relação ao primeiro.

D – equação da trajetória (1º lei de Kepler)



multiplicando  $\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0$

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{h}) = 0 \Rightarrow \dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{r})$$

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} (\boxed{\vec{r} \times \vec{v}} \times \vec{r})$$

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{v} - \vec{r} (\vec{v} \cdot \vec{r})$$

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = r^2 \vec{v} - (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{r}$$

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = r^2 \frac{d\vec{r}}{dt} - r \frac{dr}{dt} \vec{r}$$

$$\times \left( \frac{-\mu}{r^3} \right)$$

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = -\mu \left( r^2 \frac{d\vec{r}}{r^3 dt} - \frac{r}{r^3} \frac{dr}{dt} \vec{r} \right)$$

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = -\mu \left( \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \vec{r} - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \vec{r} \right)$$

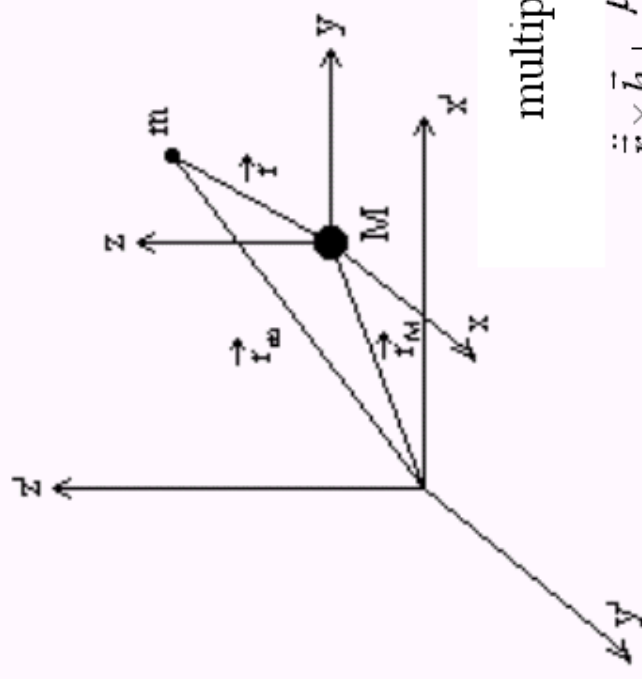
## Problema de 3 corpos

$M, m \equiv$  massas

$x', y', z' \equiv$  sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$  sistema inercial com origem no centro de massa de  $M$  e não girante em relação ao primeiro.

D – equação da trajetória (1º lei de Kepler)



multiplicando  $\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0$

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{h}) = 0 \Rightarrow \dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{h})$$

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{h})$$

$$\text{então: } \ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = -\mu \left( \frac{1}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \vec{r} \right)$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{v} - \vec{r} (\vec{v} \cdot \vec{r})$$

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = r^2 \vec{v} - (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{r}$$

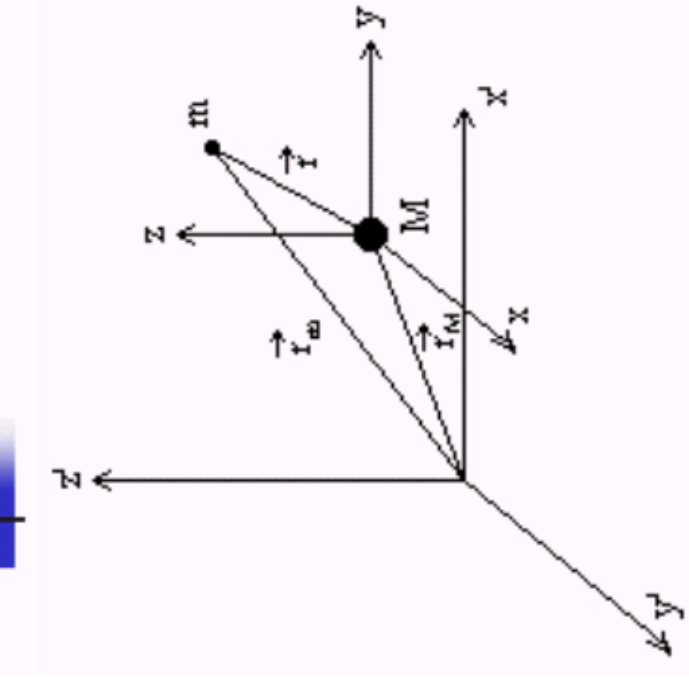
$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = r^2 \frac{d\vec{r}}{dt} - r \frac{dr}{dt} \vec{r}$$

$$\times \left( \frac{-\mu}{r^3} \right)$$

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = -\mu \left( \frac{r^2}{r^3} \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{r}{r^3} \frac{dr}{dt} \vec{r} \right)$$

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r} = -\mu \left( \frac{1}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \vec{r} \right)$$

## Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$  massas

$x', y', z' \equiv$  sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$  sistema inercial com origem no centro de massa de  $M$  e não girante em relação ao primeiro.

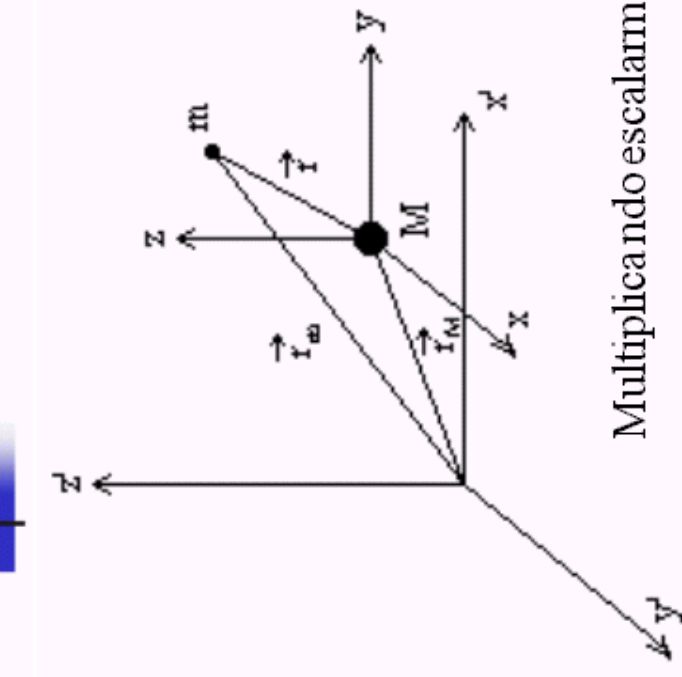
D – equação da trajetória (1º lei de Kepler)

integrando: 
$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} + \vec{\beta}$$

com  $\vec{\beta} \equiv$  cte de integração

## Problema de 3 corpos



$M, m \equiv$  massas

$x', y', z' \equiv$  sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$  sistema inercial com origem no centro de massa de M e não girante em relação ao primeiro.

D – equação da trajetória (1º lei de Kepler)

integrando: 
$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} + \vec{\beta}$$

com  $\vec{\beta} \equiv$  cte de integração

Multiplicando escalarmente por  $\vec{r}$  :

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{\beta}$$

como  $\vec{x} \cdot \vec{y} \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{y} \cdot \vec{z}$  :

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \cdot \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{\beta}$$

$$\Rightarrow h^2 = \mu r + r \beta \cos \gamma$$

com  $\gamma \equiv$  ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\vec{\beta}$

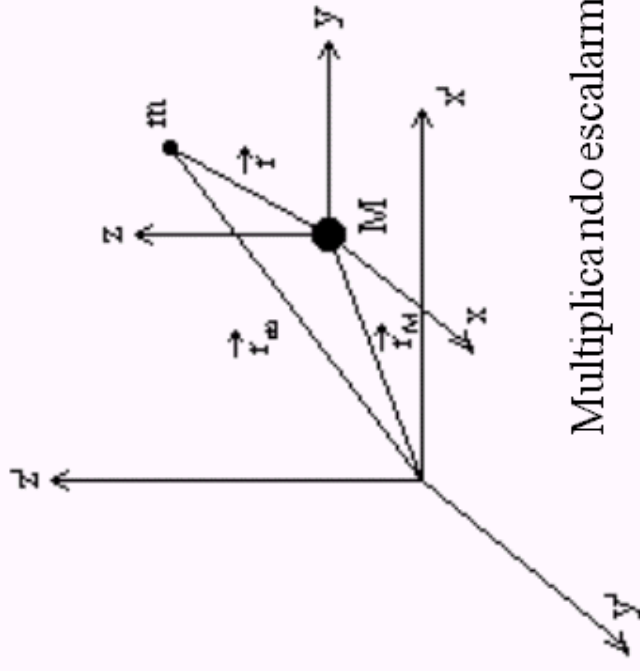
## Problema de 3 corpos

$M, m \equiv$  massas

$x', y', z' \equiv$  sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$  sistema inercial com origem no centro de massa de  $M$  e não girante em relação ao primeiro.

D – equação da trajetória (1º lei de Kepler)



Multiplicando escalarmente por  $\vec{r}$  :

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{\beta}$$

como  $\vec{x} \cdot \vec{y} \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{y} \cdot \vec{z}$  :

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \cdot \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{\beta}$$

$$\Rightarrow h^2 = \mu r + r \beta \cos \gamma$$

com  $\gamma \equiv$  ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\vec{\beta}$

integrando: 
$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} + \vec{\beta}$$

com  $\vec{\beta} \equiv$  cte de integração

Logo : 
$$r = \frac{h^2 / \mu}{1 + (\beta / \mu) \cos \gamma} \quad (\text{VI})$$

1º Lei de Kepler (Eq. geral das cônicas)

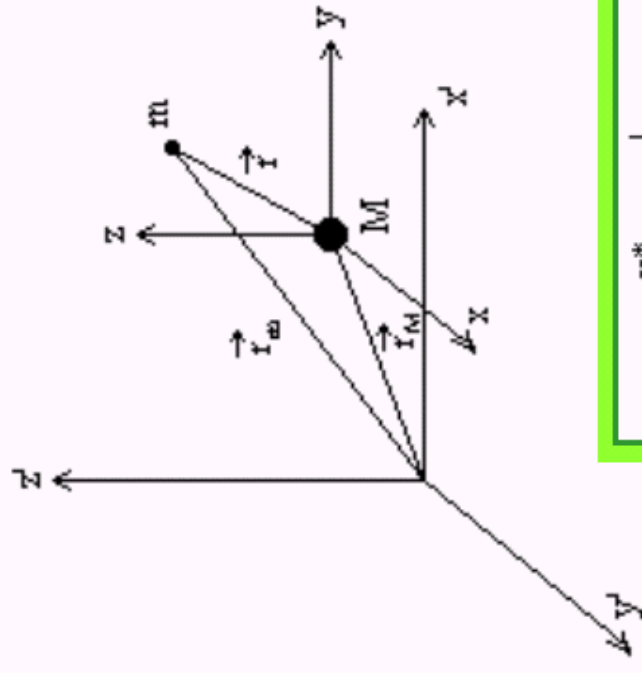
## Problema de 3 corpos

$M, m \equiv$  massas

$x', y', z' \equiv$  sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$  sistema inercial com origem no centro de massa de  $M$  e não girante em relação ao primeiro.

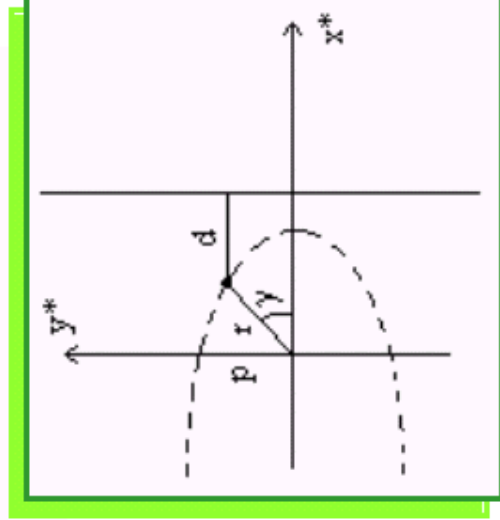
D – equação da trajetória (1º lei de Kepler)



integrando: 
$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

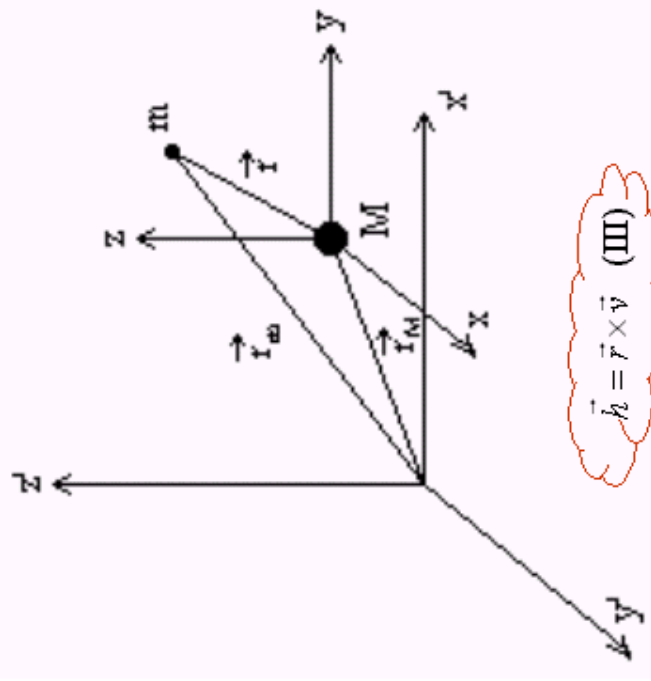
$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r} \vec{r} + \vec{\beta}$$

com  $\vec{\beta} \equiv$  cte de integração



Em coord. polares: 
$$r = \frac{p}{1 + e \cos \gamma}$$
  
com  $p = h^2 / \mu$      $e = \beta / \mu$

## Problema de 3 corpos



$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} \quad (\text{III})$$



$M, m \equiv$  massas

$x', y', z' \equiv$  sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$  sistema inercial com origem no centro de massa de  $M$  e não girante em relação ao primeiro.

E – 2ª lei de Kepler)

Retomando a eq. III :

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$$

Em coord. polares :

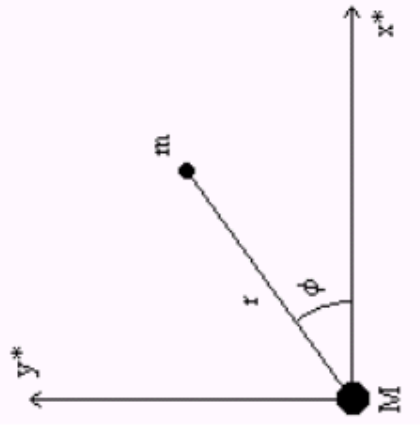
$$\vec{r} = x^* \vec{i} + y^* \vec{j}$$

$$x^* = r \cos \varphi$$

$$y^* = r \sin \varphi$$

$$\dot{x}^* = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}$$

$$\dot{y}^* = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi}$$



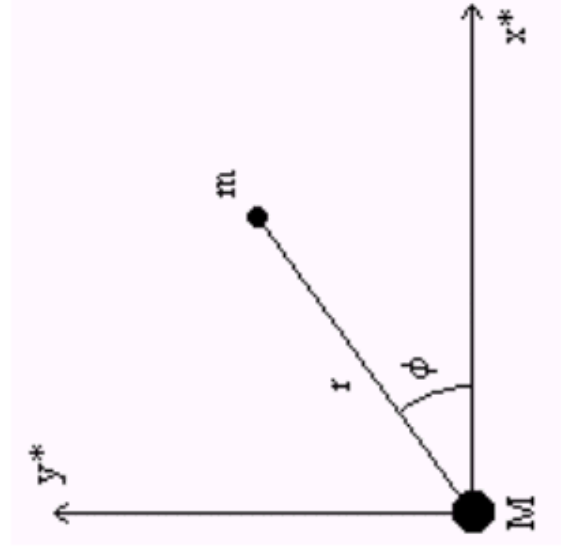
## Problema de 3 corpos

$M, m \equiv$  massas

$x', y', z' \equiv$  sistema inercial do conjunto

$x, y, z \equiv$  sistema inercial com origem no centro de massa de  $M$  e não girante em relação ao primeiro.

E – 2ª lei de Kepler)



Retomando a eq. III :

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$$

Em coord. polares :

$$\vec{r} = x^* \vec{i} + y^* \vec{j}$$

$$x^* = r \cos \varphi \quad \dot{x}^* = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}$$

$$y^* = r \sin \varphi \quad \dot{y}^* = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi}$$

Logo :

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x^* & y^* & 0 \\ \dot{x}^* & \dot{y}^* & 0 \end{vmatrix} = x^* \dot{y}^* \vec{k} - \dot{x}^* y^* \vec{k} = r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi}) - r \sin \varphi (\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}) = \\ &= r \dot{r} \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi \dot{\varphi} - r \dot{r} \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi} = \\ &= r^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \dot{\varphi} = r^2 \dot{\varphi} \quad \therefore h = r^2 \dot{\varphi} \end{aligned}$$



## Problema de 3 corpos

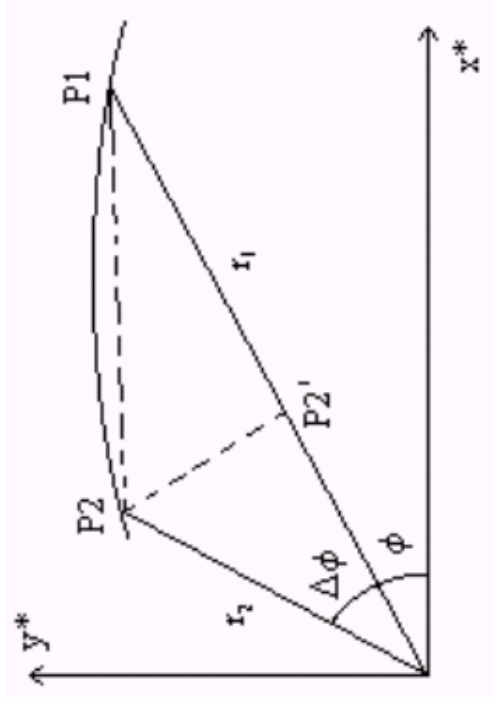
### E – 2ª lei de Kepler

Sendo P1 e P2 posições próximas e sucessivas no intervalo  $\Delta t$ , a área será:

$$\Delta A = \frac{r_1 r_2 \sin \Delta \phi}{2} = \frac{r_1 r_2}{2} \frac{\sin \Delta \phi}{\Delta \phi} \Delta \phi$$

fazendo  $\Delta t \rightarrow 0$ :

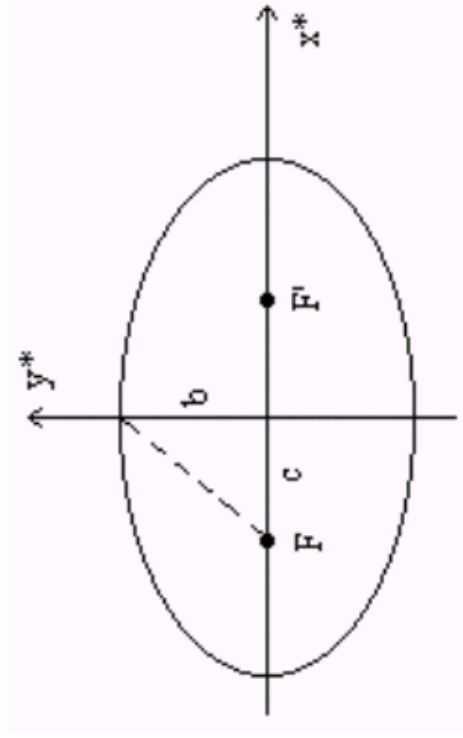
$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\phi}}{2} = \frac{h}{2} \quad (\text{VII})$$





## Problema de 3 corpos

### E – 3ª lei de Kepler



Das relações triviais da elipse :

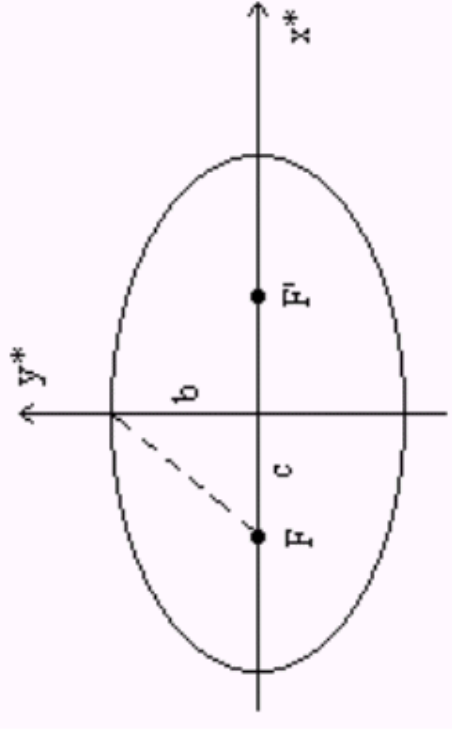
$$e = \frac{c}{a} \quad p = a(1 - e^2) \quad A = \pi ab \quad b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$\therefore b = \sqrt{a \cdot p} = h \sqrt{\frac{a}{\mu}} \quad \text{pois } p = \frac{h^2}{\mu}$$



## Problema de 3 corpos

### E – 3ª lei de Kepler



Das relações triviais da elipse :

$$e = \frac{c}{a} \quad p = a(1 - e^2) \quad A = \pi ab \quad b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$\therefore b = \sqrt{a \cdot p} = h \sqrt{\frac{a}{\mu}} \quad \text{pois} \quad p = \frac{h^2}{\mu}$$

Da eq. VII :

$$dA = \frac{h}{2} dt$$

$$\text{integrando : } \pi ab = \frac{h}{2} T \Rightarrow \frac{4\pi^2 (ab)^2}{h^2} = T^2$$

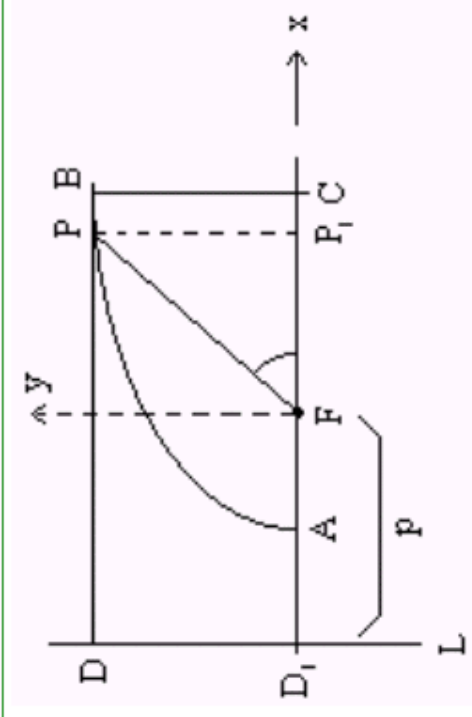
$$\text{como } ab = \frac{a^{3/2} h}{\mu^{1/2}} \quad \text{temos :}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \quad (\text{VIII})$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\phi}}{2} = \frac{h}{2}$$



## Problema de 3 corpos



$F = \text{foco}$        $FP = r$        $FC = ae$   
 $L = \text{diretriz}$        $AC = a$        $O = \text{origem}$   
 $p = \text{parâmetro}$        $BC = b$        $C = \text{centro}$

### F – 1ª lei de Kepler

Definição :

secção cônica é o lugar geométrico dos pontos P,

tal que :

$$\frac{|PF|}{|PD|} = e \quad (\text{excentricidade}) \quad (1)$$

$$|PD| = |P_1D_1|$$

$$= D_1F + FP_1 = p + r \cos \theta \quad (2)$$

$$|PF| = r \quad (3)$$

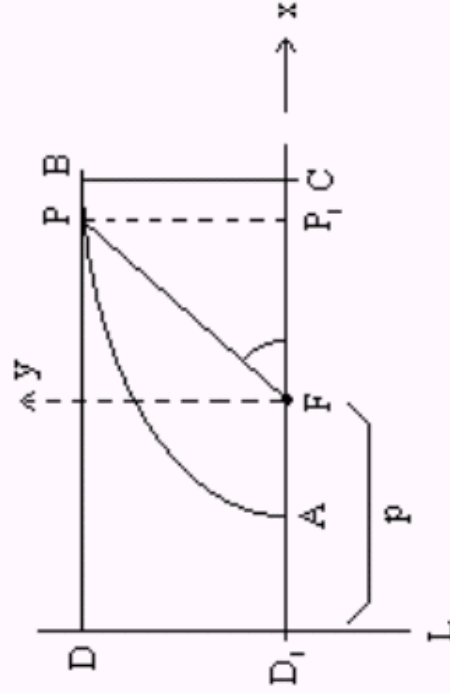
substituindo (3) e (2) em (1) :

$$\frac{r}{p + r \cos \theta} = e \Rightarrow r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta} \quad (4)$$

$$\text{Quando } \theta = 180^\circ: \quad r = |AF| = |AC| - |FC| = a - ae = a(1 - e) \quad (5)$$

$$r = \frac{ep}{1 - e \cos 180} = \frac{ep}{1 + e} \quad (6)$$

## Problema de 3 corpos



$F = \text{foco}$        $FP = r$        $FC = ae$   
 $L = \text{diretriz}$        $AC = a$        $O = \text{origem}$   
 $p = \text{parâmetro}$        $BC = b$        $C = \text{centro}$

F – 1ª lei de Kepler

$$(4) \quad r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$$

$$(5) \quad r = a(1 - e)$$

$$(6) \quad r = \frac{ep}{1 + e}$$

$$p = \frac{a(1 - e^2)}{e} \quad (7)$$

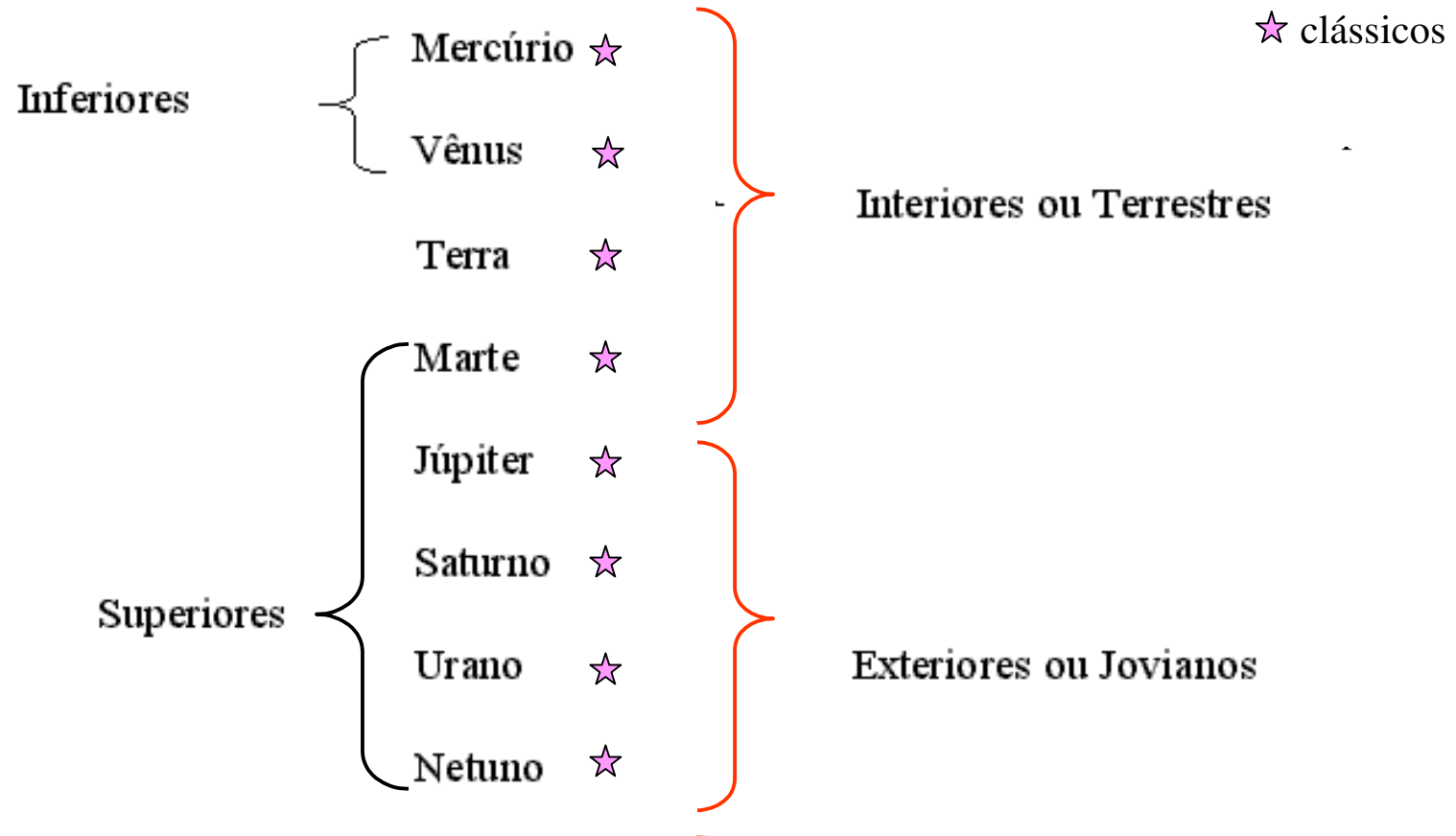
$$(8) \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}$$

Se  $\theta$  for contado em sentido contrário (i.e, a partir de A), então aparecerá nas expressões acima ( $180 - \theta$ ) no lugar de  $\theta$ . Então teremos:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (9)$$



## Planetas: Classificação e Configuração



## Planetas: Classificação e Configuração

Inferiores

{ Mercúrio ☆  
Vênus ☆

☆ clássicos

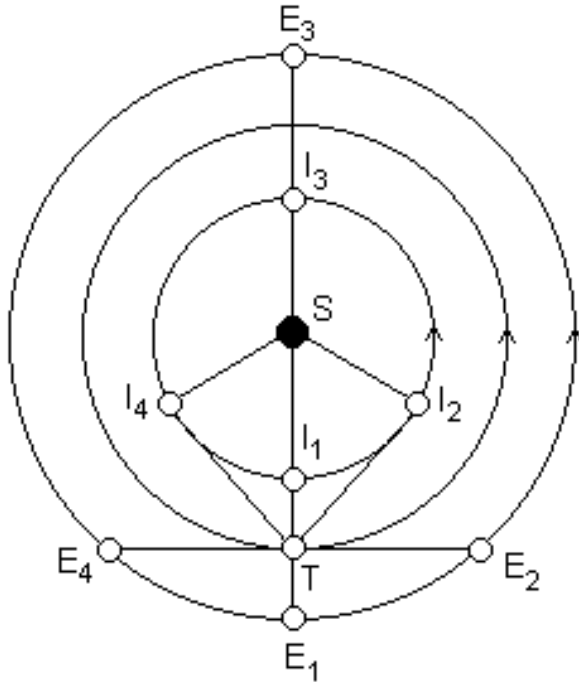
*Embora presentes na literatura, os termos inferiores, interiores, terrestres, superiores, exteriores, jovianos, anão, gigantes, sólidos, gasosos, gelados não são termos oficializados pela União Astronômica Internacional.*

Sup

{ Netuno ☆



## Planetas: Classificação e Configuração



S – Sol

T – Terra

I – planeta interno

E – planeta externo

### Configurações planetárias

#### Planetas internos:

I<sub>1</sub> - conjunção inferior

I<sub>2</sub> - máxima elongação ocidental (O)

I<sub>3</sub> - conjunção superior

I<sub>4</sub> - máxima elongação oriental (L)

#### Planetas exteriores:

E<sub>1</sub> - oposição

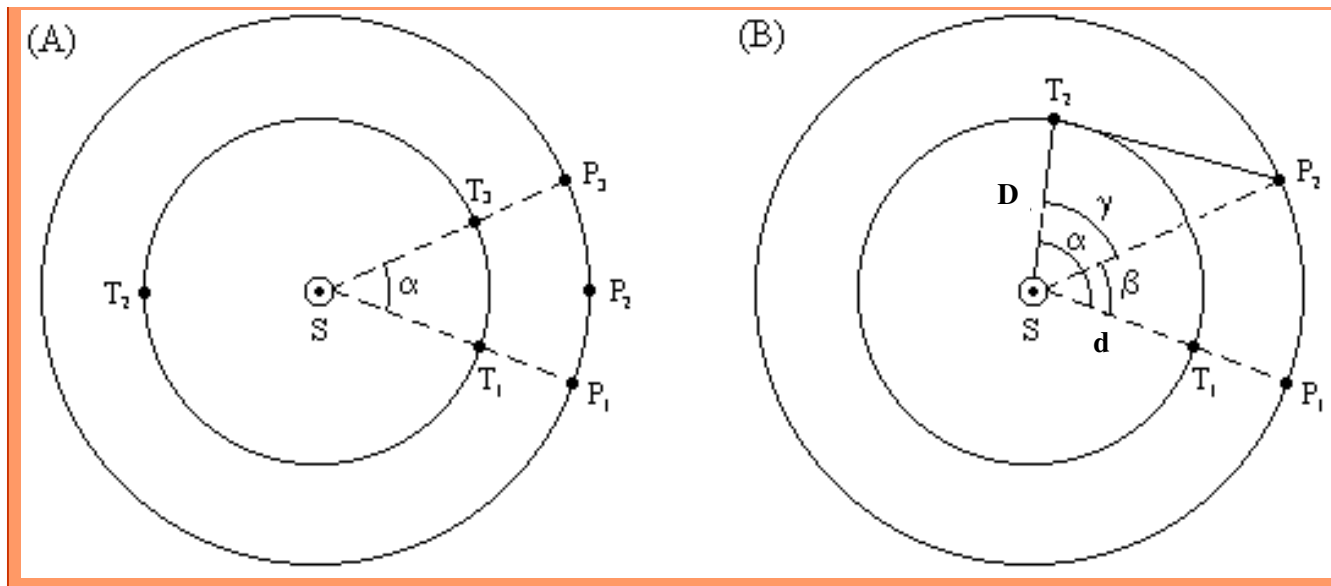
E<sub>2</sub> - quadratura ocidental (O)

E<sub>3</sub> - conjunção

E<sub>4</sub> - quadratura oriental (L)

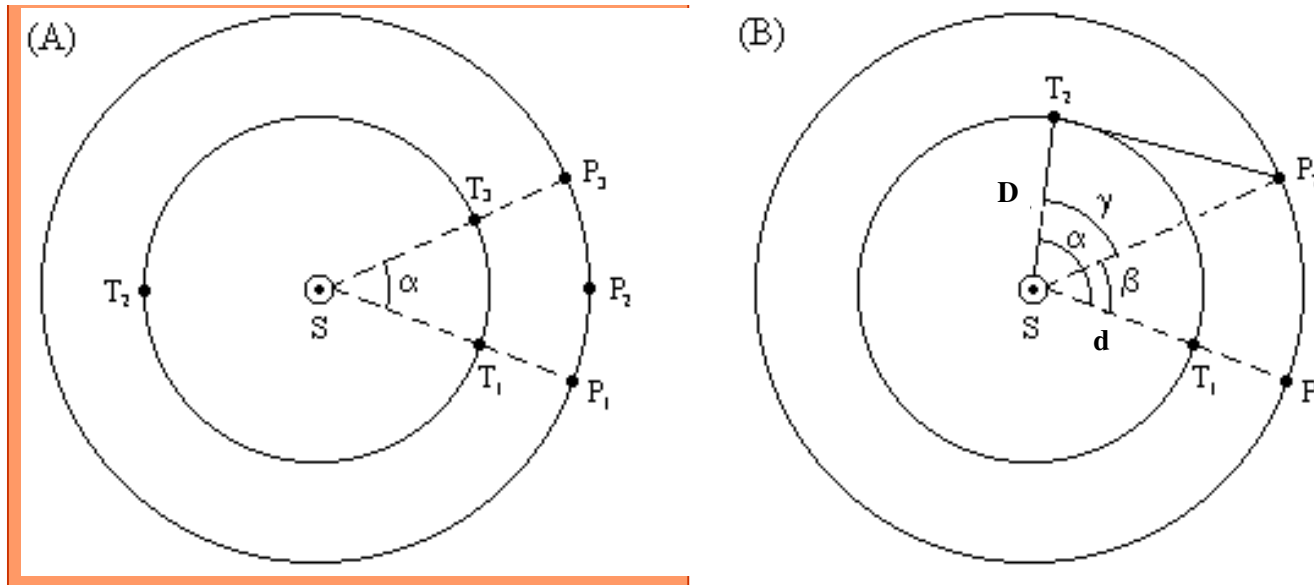


## Planeta Superior



A – duração do ano ; T – período sideral (orbital) ; S – período sinódico (aparente)

## Planeta Superior



A – duração do ano ; T – período sideral (orbital) ; S – período sinódico (aparente)

$S \equiv$  período sinódico entre 2 oposições

$$S = t(T_3) - t(T_1) \Rightarrow \text{planeta percorreu } \alpha$$

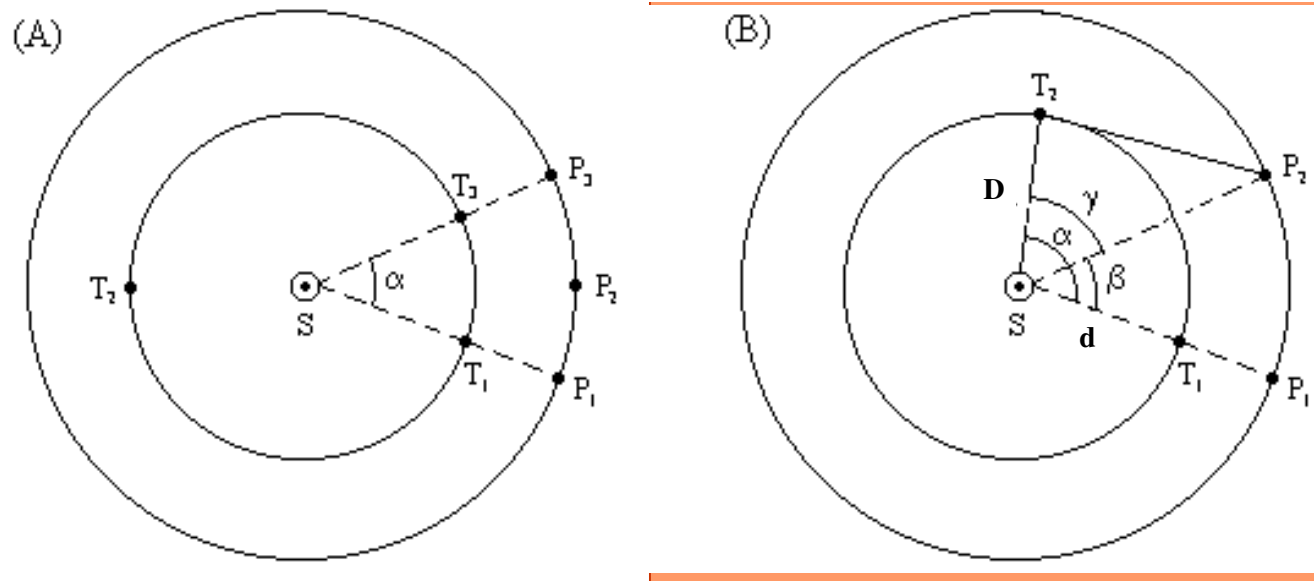
Terra percorreu  $360^\circ + \alpha$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para a Terra: } 360^\circ \rightarrow A \\ 360^\circ + \alpha \rightarrow S \end{array} \right\} \alpha = \frac{360S}{A} - 360$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para o planeta: } 360^\circ \rightarrow T \\ \alpha \rightarrow S \end{array} \right\} T = \frac{360S}{\alpha}$$

$$\boxed{\frac{1}{T} = \frac{1}{A} - \frac{1}{S}}$$

## Planeta Superior



A – duração do ano ; T – período sideral (orbital) ; S – período sinódico (aparente)

Seja  $t = t(T_2) - t(T_1)$

Intervalo entre uma oposição e quadratura mais próxima :

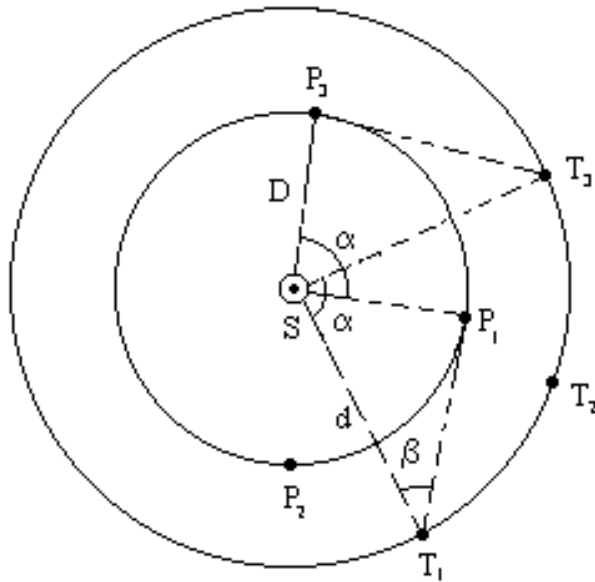
$$\left. \begin{array}{l} \text{Para a Terra : } 360^\circ \rightarrow A \\ \alpha \rightarrow t \end{array} \right\} \alpha = \frac{360t}{A}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para o planeta : } 360^\circ \rightarrow T \\ \beta \rightarrow t \end{array} \right\} \beta = \frac{360t}{T}$$

Da figura (B):

$$d = \frac{D}{\cos \gamma} \quad \text{onde } \gamma = \alpha - \beta$$

## Planeta Inferior



$$ST_1 = ST_2 = ST_3 = d$$

$$SP_1 = SP_2 = SP_3 = D$$

Distância heliocêntrica do planeta:

$$D = d \sin \beta$$

Período sinódico: tempo decorrido entre duas posições idênticas sucessivas

$$S = t(T_3) - t(T_1)$$

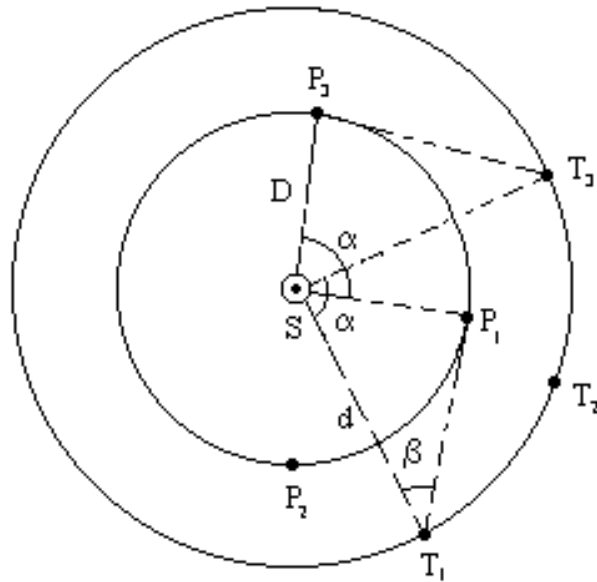
$t \equiv$  instantes de elongação máxima

A – duração do ano

T – período sideral (orbital)

S – período sinódico (aparente)

## Planeta Inferior



No intervalo de tempo  $S$  :

1. Terra deslocou - se de um ângulo " $\alpha$ "

$$\therefore 360^\circ \rightarrow A \quad (A \equiv 365,256 \text{ d})$$

$$\alpha \rightarrow S$$

$$\text{ou } \alpha = \frac{360S}{A}$$

2. Planeta foi de  $P_1 \rightarrow P_3$ , ou deslocou - se de  $360^\circ + \alpha$

$$\therefore S \rightarrow 360^\circ + \alpha \quad \text{ou} \quad T = \frac{360S}{360 + \alpha} = \frac{360S}{360 + (360S / A)}$$

$$T \rightarrow 360^\circ$$

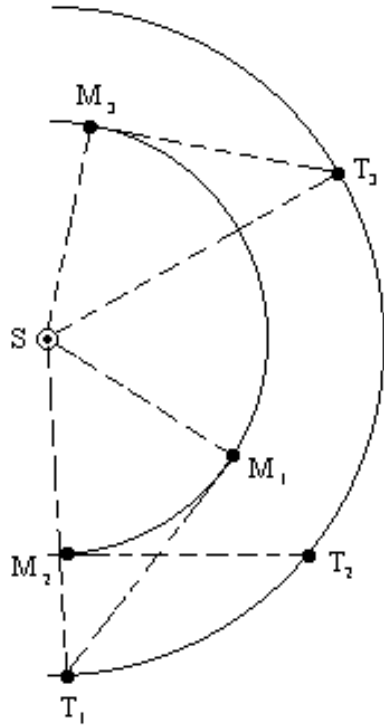
$$\text{logo: } \boxed{\frac{1}{T} = \frac{1}{A} + \frac{1}{S}}$$

$A$  – duração do ano

$T$  – período sideral (orbital)

$S$  – período sinódico (aparente)

## Mercúrio: período



A – duração do ano  
T – período sideral (orbital)  
S – período sinódico (aparente)

Período orbital em torno do Sol:

~ 116 d ( $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3$ );

portanto o intervalo entre elongações máximas é

~ 58 d

Terra : 365 d  $\rightarrow$  360°

58 d  $\rightarrow$  57° ( $T_1 \hat{S} T_2$ )

Mercúrio: 116 d  $\rightarrow$  mesma posição de elong. máx. ( $M_1, M_3$ )

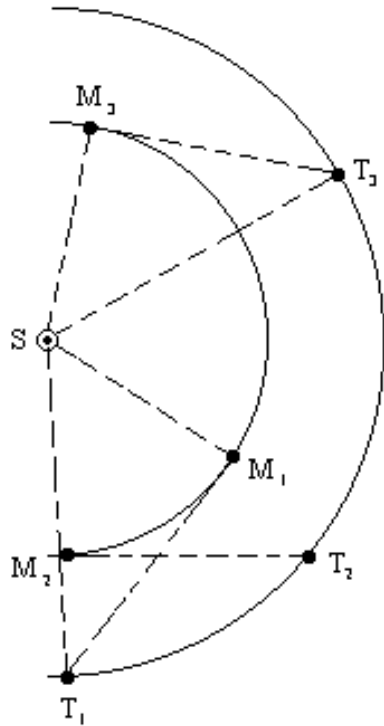
$\therefore$  em 116 d descreve  $360^\circ + 2 \times 57^\circ = 474^\circ$

então :  $474^\circ \rightarrow 116$  d

$360^\circ \rightarrow 88$  d \*

$$* \frac{1}{T} = \frac{1}{A} + \frac{1}{S} = \frac{1}{365,256} + \frac{1}{116} = 0.0113636 = \frac{1}{88} \Rightarrow T = 88d$$

## Mercúrio: distância relativa



Aproximando a órbita para circular:

a distância heliocêntrica da Terra :  $ST_1, ST_2, \dots$

da observação:  $S\hat{T}_1M_1 = S\hat{T}_2M_2 = S\hat{T}_3M_3 \cong 23^\circ$

da órbita circular:  $S\hat{M}_1T_1 = S\hat{M}_2T_2 = S\hat{M}_3T_3 = 90^\circ$

$\therefore SM_1 = ST_1 \text{ sen} 23^\circ \cong 0.39 ST_1$



*Que tal fazer as passagens das  
equações na mão?  
Será mais divertido que ir a uma  
balada!*

