

Correlações não-Gaussianas

Uma janela para a física do Universo primordial

Thiago S. Pereira

Instituto de Física Teórica
UNESP

IX Workshop Nova Física no Espaço - Campos de Jordão, 2010

Sumário

- 1 Correlações cosmológicas: aspectos gerais
 - Modelo estatístico de concordância cósmica
 - Correlações não-Gaussianas
- 2 Inflação
 - Dinâmica inflacionária
 - Correlações gaussianas
- 3 Inflação e não-gaussianidade
 - Não-gaussianidade primordial
 - Bispectro de potências
- 4 Considerações finais

Sumário

- 1 Correlações cosmológicas: aspectos gerais
 - Modelo estatístico de concordância cósmica
 - Correlações não-Gaussianas
- 2 Inflação
 - Dinâmica inflacionária
 - Correlações gaussianas
- 3 Inflação e não-gaussianidade
 - Não-gaussianidade primordial
 - Bispectro de potências
- 4 Considerações finais

Modelo estatístico de concordância cósmica

Em primeira aproximação, o Universo é **gaussiano** e **estatisticamente isotrópico**.

- Perturbações de densidade

$$\delta(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \delta(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad \langle \delta(\vec{k}) \delta^*(\vec{q}) \rangle = P(k) \delta_D(\vec{k} - \vec{q})$$

- Perturbações de temperatura

$$\Delta T(\hat{n}) = \sum_{\ell, m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{n}), \quad \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = C_{\ell} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

A isotropia estatística (IE) pode ser estabelecida para qualquer função harmônica de N -pontos (Abramo & Pereira, 2010)

$$\langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} \dots a_{\ell_N m_N} \rangle$$

e a questão da **NG** pode ser separada da questão de **IE**.

Sumário

- 1 Correlações cosmológicas: aspectos gerais
 - Modelo estatístico de concordância cósmica
 - Correlações não-Gaussianas
- 2 Inflação
 - Dinâmica inflacionária
 - Correlações gaussianas
- 3 Inflação e não-gaussianidade
 - Não-gaussianidade primordial
 - Bispectro de potências
- 4 Considerações finais

Além do modelo padrão

Correlações NG são observáveis importantes do paradigma cosmológico padrão. Mas o que elas significam?

- Regime linear \rightarrow Independência estatística \rightarrow Correlações Gaussianas \rightarrow CMB!
- Regime não-linear \rightarrow Dependência estatística \rightarrow Correlações não-Gaussianas \rightarrow Catálogo de estruturas.

De modo geral

$$\text{NG} = \text{NG-primordial} + \text{NG-astrofísica}$$

Neste seminário, estarei interessado em **sinais primordiais** de não-Gaussianidade.

O universo real é “quase-Gaussiano”. Sua distribuição de probabilidade pode ser expandida numa série de Edgeworth

$$P(x)dx = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left[1 + \sigma \frac{S_3}{6} H_3(x) + \sigma^2 \left(\frac{S_4}{24} H_4(x) + \frac{S_3^2}{72} H_6(x) \right) + \dots \right]$$

onde os S_n são os cumulantes da distribuição e $H_n(x)$ são polinômios de Hermite.

Problema!

É impossível reconstruir $P(x)$ a partir de $\sigma\dots$

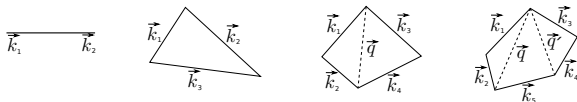
Problema similar acontece com a energia escura:

$$\omega(z) = \omega_0 + \omega'(0)z + \omega''(0)\frac{z^2}{2!} + \dots$$

Funções de N -pontos

Em geral

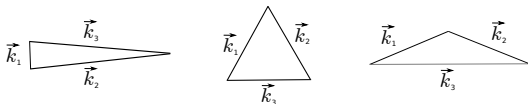
$$\langle \delta(\vec{k}_1) \delta(\vec{k}_2) \dots \delta(\vec{k}_N) \rangle = (2\pi)^3 F(k_1, k_2, \dots, k_N) \delta_D(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \dots + \vec{k}_N)$$



Fora do quadro “Gaussiano”, o **bispectro** é a estatística mais simples de todas

$$\langle \delta(\vec{k}_1) \delta(\vec{k}_2) \delta(\vec{k}_3) \rangle = (2\pi)^3 F(k_1, k_2, k_3) \delta_D(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3)$$

Em particular, diferentes modelos de inflação “preferem” diferentes tipos de triângulos



Sumário

- 1 Correlações cosmológicas: aspectos gerais
 - Modelo estatístico de concordância cósmica
 - Correlações não-Gaussianas
- 2 Inflação
 - Dinâmica inflacionária
 - Correlações gaussianas
- 3 Inflação e não-gaussianidade
 - Não-gaussianidade primordial
 - Bispectro de potências
- 4 Considerações finais

Inflação: idéia básica

A teoria da inflação foi inicialmente proposta como uma solução para alguns problemas do modelo do Big Bang (Guth, 1980)

- Problema da planura do universo:

$$\frac{\Omega - 1}{a^2} = \text{cte} \quad \rightarrow \quad \frac{|\Omega_{\text{bb}} - 1|}{|\Omega_0 - 1|} = \left(\frac{a_{\text{bb}}}{a_0} \right)^2 \simeq 10^{-20}$$

Levando em conta que hoje $\Omega_0 \simeq 10^{-2}$, então $\Omega_{\text{bb}} \simeq 1 + 10^{-22}$.

- Problema do horizonte: regiões causalmente desconexas do universo têm hoje a mesma temperatura de 2.725K.

Tais ajustes decorrem do **caráter atrativo** da gravitação

$$\frac{H^{-1}(t_{\text{bb}})}{H^{-1}(t_0)} = \frac{a_0}{a_{\text{bb}}} \frac{\dot{a}_{\text{bb}}}{\dot{a}_0} \ll 1$$

Expansão exponencial

Um período de **expansão acelerada** por resolver estes problemas. Em particular

$$a \approx e^{H_0 t} \quad \rightarrow \quad H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \approx H_0 = \text{cte}$$

Como implementar a inflação? Supondo que um campo escalar primordial permeia o universo

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(M_{\text{p}}^2 R - \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - 2V(\phi) \right)$$

uma “escolha adequada” de $V(\phi)$ resulta em

$$\epsilon = \frac{M_{\text{p}}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right) \ll 1, \quad \eta = M_{\text{p}}^2 \left(\frac{V''}{V} \right) \ll 1$$

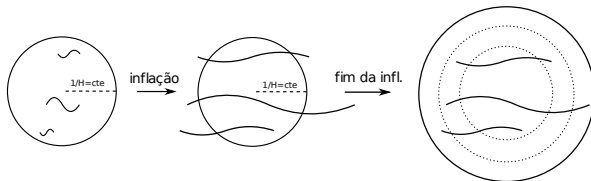
que são **condições necessárias** para a inflação.

Sumário

- 1 Correlações cosmológicas: aspectos gerais
 - Modelo estatístico de concordância cósmica
 - Correlações não-Gaussianas
- 2 Inflação
 - Dinâmica inflacionária
 - Correlações gaussianas
- 3 Inflação e não-gaussianidade
 - Não-gaussianidade primordial
 - Bispectro de potências
- 4 Considerações finais

Geração do espectro primordial de matéria

Uma importante descoberta da década de 80 (Mukhanov, Hawking, Guth, Starobinsky) foi que as flutuações quânticas do inflaton podem explicar a **origem microscópica** das estruturas de grandes escalas que observamos hoje



O acoplamento entre as **perturbações do inflaton**, $\delta\phi$, e da **métrica**, Ψ , resulta no grau de liberdade efetivo das perturbações (Mukhanov, Sasaki)

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x a\epsilon \left[a^2 \dot{\zeta}^2 - (\partial^i \zeta)^2 \right], \quad \zeta_k = \left(\Psi + \frac{H}{\dot{\phi}} \delta\phi \right)$$

Quantização canônica

A quantização canônica do sistema é feita da maneira usual

$$\zeta_{\vec{k}}(t) \rightarrow \hat{\zeta}_{\vec{k}}(t) = \zeta_k(t) a_{\vec{k}} + \zeta_k^*(t) a_{\vec{k}}^\dagger$$

$$a_{\vec{k}}|0\rangle = 0, \quad [a_{\vec{k}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = \delta_D(\vec{k} - \vec{q})$$

onde $|0\rangle$ é o vácuo de **Bunch-Davies**. O espectro de potência das perturbações fica determinado por

$$\langle \zeta_{\vec{k}}(t) \zeta_{\vec{q}}(t) \rangle = P_\zeta(k) \delta_D(\vec{k} - \vec{q}), \quad P_\zeta(k) = \frac{1}{2M_{\text{pl}}^2 \epsilon} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{n_s-1}$$

ou seja

$$P_\zeta(k) = A k^{n_s-1}$$

Como consequência da expansão quase-exponencial, as perturbações são aproximadamente invariante de escala

$$n_s - 1 = 2\eta - 6\epsilon \simeq 0$$

Resultados do WMAP 7

TABLE 1
 SUMMARY OF THE COSMOLOGICAL PARAMETERS OF Λ CDM MODEL

Class	Parameter	WMAP 7-year ML ^a	WMAP+BAO+ H_0 ML	WMAP 7-year Mean ^b	WMAP+BAO+ H_0 Mean
Primary	$100\Omega_b h^2$	2.270	2.246	$2.258^{+0.057}_{-0.056}$	2.260 ± 0.053
	$\Omega_c h^2$	0.1107	0.1120	0.1109 ± 0.0056	0.1123 ± 0.0035
	Ω_Λ	0.738	0.728	0.734 ± 0.029	$0.728^{+0.015}_{-0.016}$
	n_s	0.969	0.961	0.963 ± 0.014	0.963 ± 0.012
	τ	0.086	0.087	0.088 ± 0.015	0.087 ± 0.014
	$\Delta_N^2(k_0)^c$	2.38×10^{-9}	2.45×10^{-9}	$(2.43 \pm 0.11) \times 10^{-9}$	$(2.441^{+0.088}_{-0.092}) \times 10^{-9}$
Derived	σ_8	0.803	0.807	0.801 ± 0.030	0.809 ± 0.024
	H_0	71.4 km/s/Mpc	70.2 km/s/Mpc	71.0 ± 2.5 km/s/Mpc	$70.4^{+1.3}_{-1.4}$ km/s/Mpc
	Ω_b	0.0445	0.0455	0.0449 ± 0.0028	0.0456 ± 0.0016
	Ω_c	0.217	0.227	0.222 ± 0.026	0.227 ± 0.014
	$\Omega_m h^2$	0.1334	0.1344	$0.1334^{+0.0056}_{-0.0055}$	0.1349 ± 0.0036
	z_{reion}^d	10.3	10.5	10.5 ± 1.2	10.4 ± 1.2
	t_0^e	13.71 Gyr	13.78 Gyr	13.75 ± 0.13 Gyr	13.75 ± 0.11 Gyr

Em particular

$$A = \frac{1}{2M_{\text{pl}}^2 \epsilon} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \rightarrow H \simeq (0.9 - 1.2) \times 10^{15} \epsilon^{1/2} \text{GeV}$$

Em termos das equações de Friedmann, $H^2 = V(\phi)/(3M_{\text{pl}}^2)$, temos

$$V^{1/4} \simeq (6.3 - 7.1) \times 10^{16} \epsilon^{1/4} \text{GeV}$$

Dados melhores nos permitirão reconstruir $V(\phi)$. **Porém...**

Sumário

- 1 Correlações cosmológicas: aspectos gerais
 - Modelo estatístico de concordância cósmica
 - Correlações não-Gaussianas
- 2 Inflação
 - Dinâmica inflacionária
 - Correlações gaussianas
- 3 Inflação e não-gaussianidade
 - Não-gaussianidade primordial
 - Bispectro de potências
- 4 Considerações finais

Um modelo completo?

...e se a natureza escolheu outros mecanismos para a geração das estruturas cosmológicas? Modelos alternativos incluem:

- Inflação com 2 ou mais campo escalares: curvaton, multi-field inflation...
- Inflação com termos cinéticos não triviais: DBI inflation, K-inflation...
- Quantização em estados excitados.
- Modelos de Bounce.

A **amplitude** ($V^{1/4}$) e a **escala** (n_s) do espectro Gaussiano são propriedades locais da inflação... propriedades estruturais e auto-interagentes são intrinsecamente **não-Gaussianas**.

Ação efetiva

Do ponto de vista inflacionário, correções não-Gaussianas surgem das **interações não-lineares** entre o inflaton e a geometria do espaço-tempo

$$\delta\phi \longleftrightarrow \delta g_{\mu\nu}$$

- Em primeira ordem

$$S_2 = \frac{1}{2} \int d^4x a\epsilon \left[a^2 \dot{\zeta}^2 - (\partial^i \zeta)^2 \right] \rightarrow \langle \zeta_{\vec{k}}(t) \zeta_{\vec{q}}(t) \rangle \Big|_{t=t_*} = P_\zeta(k) \delta_D(\vec{k} - \vec{q})$$

- Em segunda ordem

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x a\epsilon \left[a^2 \dot{\zeta}^2 - (\partial^i \zeta)^2 \right] + \mathcal{O}(\delta\phi^2, \delta g_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(\delta\phi, \delta g_{\mu\nu}^2)$$

As correções cúbicas na ação efetiva dão origem ao bispectro

$$\langle \zeta_{\vec{k}_1}(t) \zeta_{\vec{k}_2}(t) \zeta_{\vec{k}_3}(t) \rangle \Big|_{t=t_*} = (2\pi)^3 F_\zeta(k_1, k_2, k_3) \delta_D(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3)$$

Sumário

- 1 Correlações cosmológicas: aspectos gerais
 - Modelo estatístico de concordância cósmica
 - Correlações não-Gaussianas
- 2 Inflação
 - Dinâmica inflacionária
 - Correlações gaussianas
- 3 Inflação e não-gaussianidade
 - Não-gaussianidade primordial
 - Bispectro de potências
- 4 Considerações finais

Inflação canônica (Maldacena, 2003)

Neste modelo os termos cúbicos resultam da lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{m^2 \phi^2}{2}$$

O bispectro nesse caso é:

$$F_\zeta(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{8} \frac{(2\pi)^4}{M_{\text{P}}^4} \frac{f_{\text{NL}}^{\text{local}}}{(k_1 k_2 k_3)^3} \left[(3\epsilon - 2\eta) \sum_i k_i^3 + \right. \\ \left. + \epsilon \sum_{i \neq j} k_i k_j^2 + 8\epsilon \frac{\sum_{i>j} k_i^2 k_j^2}{K^2} \right], \quad K = \sum_i k_i$$

Inflação com derivadas superiores (Creminelli, 2003)

Lagrangiana efetiva

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{m^2 \phi^2}{2} + \frac{1}{8M_{\text{p}}^4} (\nabla \phi)^2 (\nabla \phi)^2$$

Bispectro

$$F_\zeta(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{8} \frac{(2\pi)^4}{M_{\text{p}}^4} \frac{f_{\text{NL}}^{\text{equil}}}{(k_1 k_2 k_3)^3} \left[\frac{1}{K^2} \left(\sum_i k_i^5 + \sum_{i \neq j} (2k_i^4 k_j - 3k_i^3 k_j^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i \neq j \neq l} (k_i^3 k_j k_l - 4k_i^2 k_j^2 k_l) \right) \right], \quad K = \sum_i k_i$$

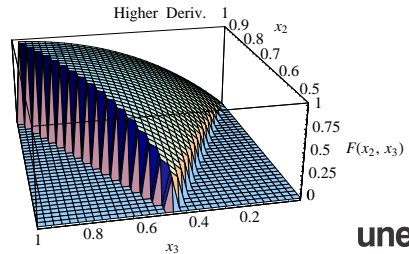
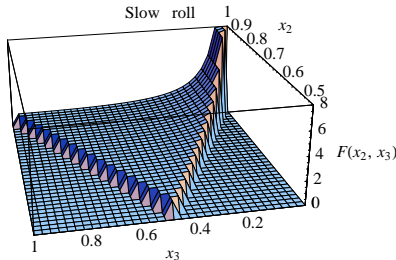
Formas do bispectro

- Modelo canônico: o bispectro é dominado por modos com $k_3 \ll k_1 \simeq k_2$. Em particular

$$f_{NL}^{\text{local}} \simeq 10^{-2}$$

- Derivadas superiores: correlações entre modos com mesmo comprimento de onda, $k_1 \simeq k_2 \simeq k_3$. Para esse caso

$$f_{NL}^{\text{equil}} \simeq 1$$



Resultados do WMAP 7

TABLE 11
 ESTIMATES^a AND THE CORRESPONDING 68% INTERVALS OF THE PRIMORDIAL
 NON-GAUSSIANITY PARAMETERS (f_{NL}^{local} , f_{NL}^{equil} , f_{NL}^{orthog}) AND THE POINT
 SOURCE BISPECTRUM AMPLITUDE, b_{src} (IN UNITS OF $10^{-5} \mu K^3 sr^2$), FROM
 THE WMAP 7-YEAR TEMPERATURE MAPS




Band	Foreground ^b	f_{NL}^{local}	f_{NL}^{equil}	f_{NL}^{orthog}	b_{src}
V+W	Raw	59 ± 21	33 ± 140	-199 ± 104	N/A
V+W	Clean	42 ± 21	29 ± 140	-198 ± 104	N/A
V+W	Marg. ^c	32 ± 21	26 ± 140	-202 ± 104	-0.08 ± 0.12
V	Marg.	43 ± 24	64 ± 150	-98 ± 115	0.32 ± 0.23
W	Marg.	39 ± 24	36 ± 154	-257 ± 117	-0.13 ± 0.19

Os resultados do WMAP 7 são **consistentes com flutuações Gaussianas** com **95%CL**. Maiores detalhes no talk do Armando Bernui!

Considerações finais

- As correlações não-Gaussianas são **parâmetros** do Modelo Cosmológico Padrão.
- Diferentemente da amplitude e escala do espectro, **a previsão do bispectro não é degenerada entre os modelos**. Sua detecção revelará detalhes estruturais do modelo inflacionário.
- Atual nível de precisão do WMAP não permite distinguir entre modelos... Porém, o satélite Planck foi projetado para detectar $|f_{NL}| \lesssim 3$.
- A evolução temporal das correlações não-Gaussianas parecem ser pequenas (Weinberg, 2005). Porém, o efeito das **correções quânticas radiativas** ainda é incerto (gravitação quântica?).

Referências I

-  E. Komatsu.
The pursuit of non-gaussianity.
Tese de doutorado, 2002.
-  A. Riotto.
The quest for non-gaussianity .
Inflationary Cosmology. Lectures notes in Physics 738. Springer, 2007.
-  D. Babich.
The shape of non-gaussianity.
JCAP, 2004.