

Acoplamento não-mínimo, potências exponenciais e o regime $w < -1$ de energia escura

Fábio Cabral^{*} e Alberto Saa[§]

^{*}fabio@fma.if.usp.br, [§]asaa@ime.unicamp.br

^{*}Instituto de Física, Universidade de São Paulo, CP 66318, 05315-970 São Paulo, SP, Brasil

[§]IMECC, Universidade Estadual de Campinas, CP 6065, 13083-859 Campinas, SP, Brasil



Modelos do tipo Escalar-Tensor

Modelos do tipo Escalar-Tensor

- Acoplamento não-mínimo

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{ F(\phi) R - Z(\phi) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - 2V(\phi) \}$$

Modelos do tipo Escalar-Tensor

- Acoplamento não-mínimo

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{F(\phi)R - Z(\phi)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - 2V(\phi)\}$$

- $F(\phi) = \phi$, $Z(\phi) = \frac{\omega}{\phi}$, $\omega = cte \rightarrow$ Brans-Dicke
- $F(\phi) = 1 - \xi\phi^2$, $Z(\phi) = 1 \rightarrow$ NMC

Modelos do tipo Escalar-Tensor

- Acoplamento não-mínimo

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{ F(\phi) R - Z(\phi) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - 2V(\phi) \}$$

- $F(\phi) = \phi$, $Z(\phi) = \frac{\omega}{\phi}$, $\omega = cte \rightarrow$ Brans-Dicke
- $F(\phi) = 1 - \xi \phi^2$, $Z(\phi) = 1 \rightarrow$ NMC
- Limite assintótico para a Relatividade Geral

$$F(\phi) \longrightarrow \frac{1}{8\pi G}$$



O Modelo



O modelo

- Ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{ F(\phi) R - \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - 2V(\phi) \},$$
$$F(\phi) = 1 - \xi \phi^2, \quad V(\phi) = A e^{-\sigma \phi}, \quad \xi < 0$$

O modelo

- Ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{ F(\phi) R - \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - 2V(\phi) \},$$
$$F(\phi) = 1 - \xi \phi^2, \quad V(\phi) = A e^{-\sigma \phi}, \quad \xi < 0$$

- Potencial limitado por baixo e com soluções “*trackers*”.

O modelo

- Ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{ F(\phi) R - \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - 2V(\phi) \},$$
$$F(\phi) = 1 - \xi \phi^2, \quad V(\phi) = A e^{-\sigma \phi}, \quad \xi < 0$$

- Potencial limitado por baixo e com soluções “*trackers*”.
- Universo homogêneo e isotrópico

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

$$\phi = \phi(t)$$

O modelo

- Torres [PRD66,043522(2002)] chamou a atenção para o fato que em modelos ET (Brans-Dicke) $\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) \neq 0 \Rightarrow p_\phi/\rho_\phi \neq \omega_\phi$.

O modelo

- Torres [PRD66,043522(2002)] chamou a atenção para o fato que em modelos ET (Brans-Dicke) $\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) \neq 0 \Rightarrow p_\phi/\rho_\phi \neq \omega_\phi$.
- Tensor Energia-Momento

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{g_{\mu\nu}}{2} (\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi + 2V - 2\Box F) + \nabla_\mu \nabla_\nu F + (1 - F)G_{\mu\nu}$$

O modelo

- Torres [PRD66,043522(2002)] chamou a atenção para o fato que em modelos ET (Brans-Dicke) $\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) \neq 0 \Rightarrow p_\phi/\rho_\phi \neq \omega_\phi$.
- Tensor Energia-Momento

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{g_{\mu\nu}}{2} (\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi + 2V - 2\Box F) + \nabla_\mu \nabla_\nu F + (1 - F)G_{\mu\nu}$$

- Equação de Estado

$$\left. \begin{array}{l} \rho_\phi = 3H^2 \\ p_\phi = -\left(2\dot{H} + 3H^2\right) \end{array} \right\} \longrightarrow p_\phi/\rho_\phi = \omega_\phi \quad \therefore$$

O modelo

- Torres [PRD66,043522(2002)] chamou a atenção para o fato que em modelos ET (Brans-Dicke) $\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) \neq 0 \Rightarrow p_\phi/\rho_\phi \neq \omega_\phi$.
- Tensor Energia-Momento

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{g_{\mu\nu}}{2} (\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi + 2V - 2\Box F) + \nabla_\mu \nabla_\nu F + (1 - F)G_{\mu\nu}$$

- Equação de Estado

$$\left. \begin{array}{l} \rho_\phi = 3H^2 \\ p_\phi = -\left(2\dot{H} + 3H^2\right) \end{array} \right\} \longrightarrow p_\phi/\rho_\phi = \omega_\phi \quad \therefore \quad w_\phi = -\left(1 + \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2}\right)$$

O modelo

- Equação de Estado

$$\left. \begin{array}{l} \rho_\phi = 3H^2 \\ p_\phi = -\left(2\dot{H} + 3H^2\right) \end{array} \right\} \longrightarrow p_\phi/\rho_\phi = \omega_\phi \quad \therefore \quad w_\phi = -\left(1 + \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2}\right)$$

- A equação de continuidade permanece válida.

O modelo

- Equação de Estado

$$\left. \begin{array}{l} \rho_\phi = 3H^2 \\ p_\phi = -\left(2\dot{H} + 3H^2\right) \end{array} \right\} \longrightarrow p_\phi/\rho_\phi = \omega_\phi \quad \therefore \quad w_\phi = -\left(1 + \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2}\right)$$

- A equação de continuidade permanece válida.
- Não existe a restrição $\omega_\phi \geq -1$.



Análise de Estabilidade do Modelo

Equações de Movimento

$$3H \left(FH + F' \dot{\phi} \right) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad H = \dot{a}/a$$

$$-2F_1 \dot{H} = 3 \left(F + 2(F')^2 \right) H^2 + \frac{1 + 2F''}{2} \dot{\phi}^2 - V - \left(H\dot{\phi} + V' \right) F'$$

$$\ddot{\phi} + \frac{G(\phi, \dot{\phi}, H)}{F_1} \dot{\phi} + V'_{\text{eff}}(\phi) = 0$$

Equações de Movimento

$$3H \left(FH + F' \dot{\phi} \right) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad H = \dot{a}/a$$

$$-2F_1 \dot{H} = 3 \left(F + 2(F')^2 \right) H^2 + \frac{1 + 2F''}{2} \dot{\phi}^2 - V - \left(H\dot{\phi} + V' \right) F'$$

$$\ddot{\phi} + \frac{G(\phi, \dot{\phi}, H)}{F_1} \dot{\phi} + V'_{\text{eff}}(\phi) = 0$$

onde

$$G(\phi, \dot{\phi}, H) = 3F_1 H + \frac{1}{2}(1 + 3F'')F' \dot{\phi},$$

Equações de Movimento

$$3H \left(FH + F' \dot{\phi} \right) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad H = \dot{a}/a$$

$$-2F_1 \dot{H} = 3 \left(F + 2(F')^2 \right) H^2 + \frac{1 + 2F''}{2} \dot{\phi}^2 - V - \left(H \dot{\phi} + V' \right) F'$$

$$\ddot{\phi} + \frac{G(\phi, \dot{\phi}, H)}{F_1} \dot{\phi} + V'_{\text{eff}}(\phi) = 0$$

onde

$$G(\phi, \dot{\phi}, H) = 3F_1 H + \frac{1}{2}(1 + 3F'')F' \dot{\phi},$$

$$V'_{\text{eff}}(\phi) = \frac{1}{F_1} \left(FV' - 2F'V \right), \quad F_1(\phi) = F(\phi) + \frac{3}{2} \left(F'(\phi) \right)^2$$

Pontos Críticos

$$3H \left(FH + F' \dot{\phi} \right) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad H = \dot{a}/a$$

$$-2F_1 \dot{H} = 3 \left(F + 2(F')^2 \right) H^2 + \frac{1 + 2F''}{2} \dot{\phi}^2 - V - \left(H \dot{\phi} + V' \right) F',$$

$$\ddot{\phi} + \frac{G(\phi, \dot{\phi}, H)}{F_1} \dot{\phi} + V'_{\text{eff}}(\phi) = 0$$

- Os pontos críticos são obtidos pela condição $\dot{H} = \dot{\phi} = 0$

Pontos Críticos

$$3H \left(FH + F' \dot{\phi} \right) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad H = \dot{a}/a$$

$$-2F_1 \dot{H} = 3 \left(F + 2(F')^2 \right) H^2 + \frac{1 + 2F''}{2} \dot{\phi}^2 - V - \left(H \dot{\phi} + V' \right) F',$$

$$\ddot{\phi} + \frac{G(\phi, \dot{\phi}, H)}{F_1} \dot{\phi} + V'_{\text{eff}}(\phi) = 0$$

- Os pontos críticos são obtidos pela condição $\dot{H} = \dot{\phi} = 0$

$$\bar{\phi}_{\pm} = -\frac{2}{\sigma} \left(1 \mp \sqrt{1 + \sigma^2/4\xi} \right)$$

$$\bar{H}_{\pm}^2 = \frac{V(\bar{\phi}_{\pm})}{3F(\bar{\phi}_{\pm})}$$

Pontos Críticos

$$\bar{\phi}_{\pm} = -\frac{2}{\sigma} \left(1 \mp \sqrt{1 + \sigma^2/4\xi} \right)$$

$$\bar{H}_{\pm}^2 = \frac{V(\bar{\phi}_{\pm})}{3F(\bar{\phi}_{\pm})}$$

Comentários

Pontos Críticos

$$\bar{\phi}_{\pm} = -\frac{2}{\sigma} \left(1 \mp \sqrt{1 + \sigma^2/4\xi} \right)$$

$$\bar{H}_{\pm}^2 = \frac{V(\bar{\phi}_{\pm})}{3F(\bar{\phi}_{\pm})}$$

Comentários

- $\xi \leq -\sigma^2/4 \quad \therefore \quad Ae^{-\sigma\phi}.$

Pontos Críticos

$$\bar{\phi}_{\pm} = -\frac{2}{\sigma} \left(1 \mp \sqrt{1 + \sigma^2/4\xi} \right)$$

$$\bar{H}_{\pm}^2 = \frac{V(\bar{\phi}_{\pm})}{3F(\bar{\phi}_{\pm})}$$

Comentários

- $\xi \leq -\sigma^2/4 \therefore Ae^{-\sigma\phi}$.
- Os pontos fixos $\phi(t) = \bar{\phi}$ e $H(t) = \bar{H}$ correspondem às soluções de Sitter $a(t) \propto \exp(\bar{H}t)$ para a qual $\omega_{\phi} = -1$.

Pontos Críticos

$$\bar{\phi}_{\pm} = -\frac{2}{\sigma} \left(1 \mp \sqrt{1 + \sigma^2/4\xi} \right)$$

$$\bar{H}_{\pm}^2 = \frac{V(\bar{\phi}_{\pm})}{3F(\bar{\phi}_{\pm})}$$

Comentários

- $\xi \leq -\sigma^2/4 \therefore Ae^{-\sigma\phi}$.
- Os pontos fixos $\phi(t) = \bar{\phi}$ e $H(t) = \bar{H}$ correspondem às soluções de Sitter $a(t) \propto \exp(\bar{H}t)$ para a qual $\omega_{\phi} = -1$.
- $\bar{\phi}_{+} \rightarrow$ máximo e $\bar{\phi}_{-} \rightarrow$ mínimo para V_{eff} .

Pontos Críticos

$$\bar{\phi}_{\pm} = -\frac{2}{\sigma} \left(1 \mp \sqrt{1 + \sigma^2/4\xi} \right)$$

$$\bar{H}_{\pm}^2 = \frac{V(\bar{\phi}_{\pm})}{3F(\bar{\phi}_{\pm})}$$

Comentários

- $\xi \leq -\sigma^2/4 \quad \therefore \quad Ae^{-\sigma\phi}$.
- Os pontos fixos $\phi(t) = \bar{\phi}$ e $H(t) = \bar{H}$ correspondem às soluções de Sitter $a(t) \propto \exp(\bar{H}t)$ para a qual $\omega_{\phi} = -1$.
- $\bar{\phi}_{+} \rightarrow$ máximo e $\bar{\phi}_{-} \rightarrow$ mínimo para V_{eff} .
- $\phi(t) \rightarrow \bar{\phi}_{-}, \quad \dot{H} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad H(t) \rightarrow \bar{H}_{-}$.

Pontos Críticos

$$\bar{\phi}_{\pm} = -\frac{2}{\sigma} \left(1 \mp \sqrt{1 + \sigma^2/4\xi} \right)$$

$$\bar{H}_{\pm}^2 = \frac{V(\bar{\phi}_{\pm})}{3F(\bar{\phi}_{\pm})}$$

Comentários

- $\xi \leq -\sigma^2/4 \therefore Ae^{-\sigma\phi}$.
- Os pontos fixos $\phi(t) = \bar{\phi}$ e $H(t) = \bar{H}$ correspondem às soluções de Sitter $a(t) \propto \exp(\bar{H}t)$ para a qual $\omega_{\phi} = -1$.
- $\bar{\phi}_+ \rightarrow$ máximo e $\bar{\phi}_- \rightarrow$ mínimo para V_{eff} .
- $\phi(t) \rightarrow \bar{\phi}_-, \dot{H} \rightarrow 0 \Rightarrow H(t) \rightarrow \bar{H}_-$.
- Método de Lyapunov $\rightarrow (\bar{\phi}_-, \bar{H}_-) \rightarrow$ atrator.

Método de Lyapunov

- Função de Lyapunov

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V_{\text{eff}}(\phi), \quad \dot{L} = -G\dot{\phi}^2 < 0, \quad G(\phi, \dot{\phi}, H) \geq 0$$

Método de Lyapunov

- Função de Lyapunov

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V_{\text{eff}}(\phi), \quad \dot{L} = -G\dot{\phi}^2 < 0, \quad G(\phi, \dot{\phi}, H) \geq 0$$

$$G(\phi, \dot{\phi}, H) = 3 \left(F(\phi)H + \frac{1-6\xi}{6} F'(\phi)\dot{\phi} \right) + \frac{9}{2} (F'(\phi))^2 H, \quad \xi > -5/6$$

Método de Lyapunov

- Função de Lyapunov

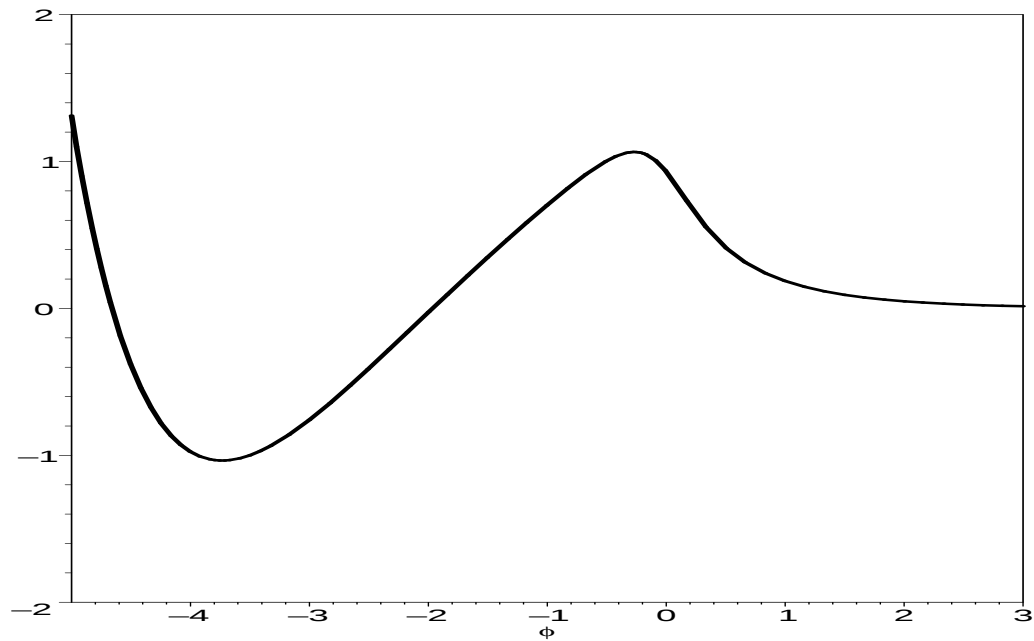
$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V_{\text{eff}}(\phi), \quad \dot{L} = -G\dot{\phi}^2 < 0, \quad G(\phi, \dot{\phi}, H) \geq 0$$

$$G(\phi, \dot{\phi}, H) = 3 \left(F(\phi)H + \frac{1-6\xi}{6} F'(\phi)\dot{\phi} \right) + \frac{9}{2} (F'(\phi))^2 H, \quad \xi > -5/6$$

- Simulações numéricas sugerem $\xi < -100$ indicando que eventuais amplificações futuras das regiões $G(\phi, \dot{\phi}, H) < 0$ não são seriam suficientes para vencer o potencial V_{eff} em torno de $\bar{\phi}$.

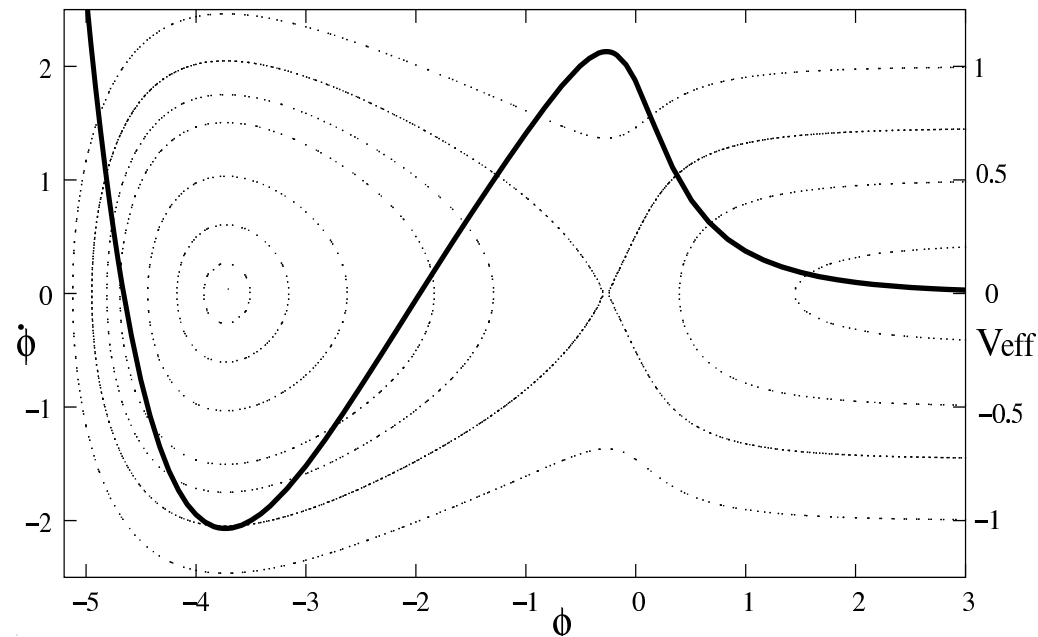
O Potencial

$$V'_{\text{eff}}(\phi) = A\sigma\xi e^{-\sigma\phi} \frac{(\phi - \bar{\phi}_+)(\phi - \bar{\phi}_-)}{1 - \xi(1 - 6\xi)\phi^2}$$



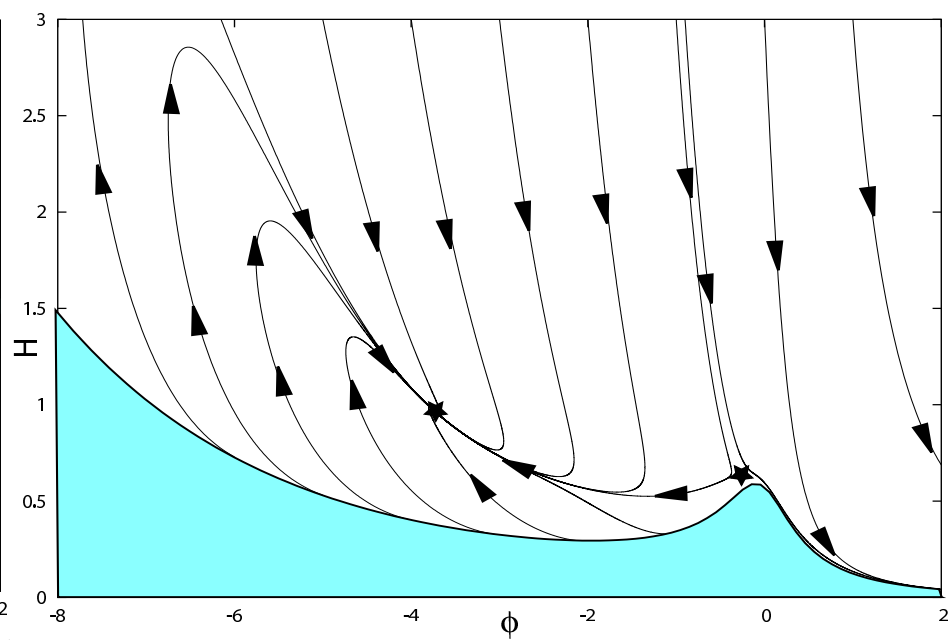
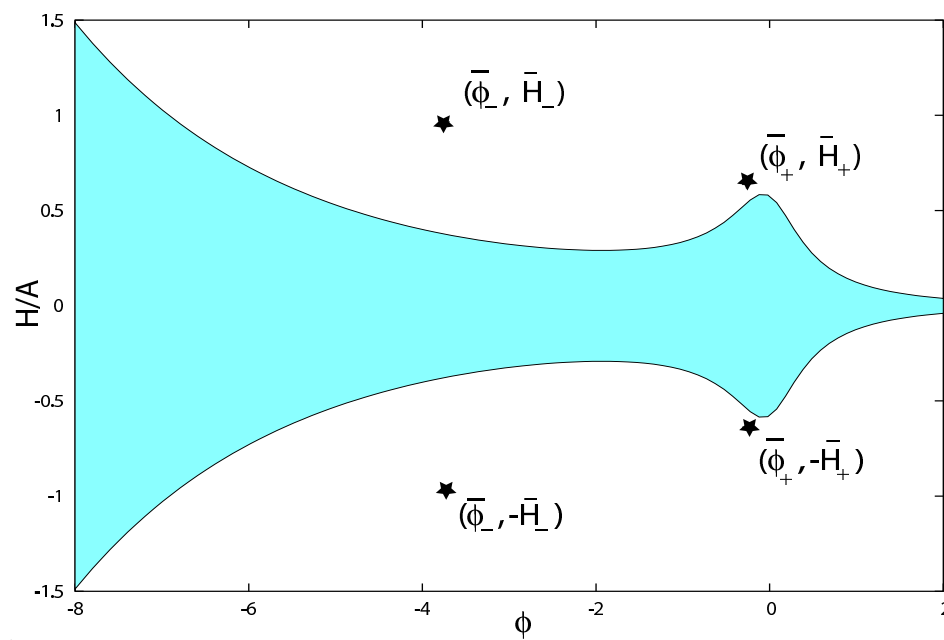
O Potencial

$$V'_{\text{eff}}(\phi) = A\sigma\xi e^{-\sigma\phi} \frac{(\phi - \bar{\phi}_+)(\phi - \bar{\phi}_-)}{1 - \xi(1 - 6\xi)\phi^2}$$



$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V_{\text{eff}}(\phi), \quad \dot{L} = -G\dot{\phi}^2$$

Espaço de Fase



Conclusões

- Modelos de quintessência NMC com potenciais exponenciais podem exibir fases assintóticas de Sitter para grandes intervalos de condições iniciais no regime $\omega_\phi < -1$.

Conclusões

- Modelos de quintessência NMC com potenciais exponenciais podem exibir fases assintóticas de Sitter para grandes intervalos de condições iniciais no regime $\omega_\phi < -1$.
- O modelo apresentado aqui está livre das instabilidades que são usualmente associadas aos modelos *phantom*.

Conclusões

- Modelos de quintessência NMC com potenciais exponenciais podem exibir fases assintóticas de Sitter para grandes intervalos de condições iniciais no regime $\omega_\phi < -1$.
- O modelo apresentado aqui está livre das instabilidades que são usualmente associadas aos modelos *phantom*.
 - Classicamente, visto que $F(\phi) \neq 0$, o modelo não apresenta as singularidades anisotrópicas conhecidas na literatura.

Conclusões

- Modelos de quintessência NMC com potenciais exponenciais podem exibir fases assintóticas de Sitter para grandes intervalos de condições iniciais no regime $\omega_\phi < -1$.
- O modelo apresentado aqui está livre das instabilidades que são usualmente associadas aos modelos *phantom*.
 - Classicamente, visto que $F(\phi) \neq 0$, o modelo não apresenta as singularidades anisotrópicas conhecidas na literatura.
 - Visto que $F(\phi)$ é sempre positiva e $V(\phi)$ é limitada por baixo, o modelo está também livre de instabilidades quânticas.

Conclusões

- Modelos de quintessência NMC com potenciais exponenciais podem exibir fases assintóticas de Sitter para grandes intervalos de condições iniciais no regime $\omega_\phi < -1$.
- O modelo apresentado aqui está livre das instabilidades que são usualmente associadas aos modelos *phantom*.
 - Classicamente, visto que $F(\phi) \neq 0$, o modelo não apresenta as singularidades anisotrópicas conhecidas na literatura.
 - Visto que $F(\phi)$ é sempre positiva e $V(\phi)$ é limitada por baixo, o modelo está também livre de instabilidades quânticas.
- É possível em princípio, construir modelos realísticos para energia escura com $w < -1$. [PRD70,087302]