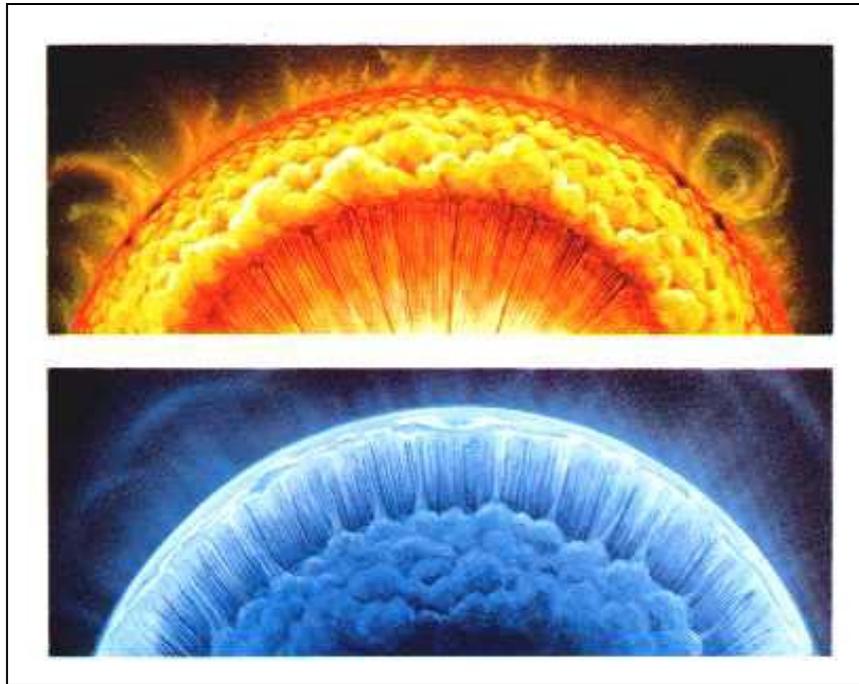


IAG/USP
Departamento de Astronomia

TRANSPORTE DE ENERGIA EM ASTROFÍSICA

Walter J. Maciel



2013

Imagem da capa:
Estratificação do interior de uma estrela de massa intermediária (acima) e de uma estrela massiva (abaixo).
<http://brattahlid.tripod.com/Image179.jpg>

PREFÁCIO

Esta é a segunda edição das notas de aulas do curso de graduação Transporte de Energia em Astrofísica, oferecido aos alunos da graduação em Astronomia pelo Departamento de Astronomia do IAG/USP. Diversos erros da primeira edição foram corrigidos, e o texto foi aumentado em cerca de 40 páginas, com a introdução de novos exemplos e um índice. O texto surgiu a partir da proposta de um curso avançado abordando diversos fenômenos de transporte de energia em astrofísica. Em geral, a expressão “transporte de energia” refere-se à radiação, convecção e condução eletrônica, e suas principais aplicações em astrofísica, principalmente na física estelar e na física do meio interestelar. Neste curso, estes aspectos são abordados, mas o enfoque é mais geral: vamos considerar diversos processos físicos importantes para a astrofísica em que energia é transportada de um objeto a outro, independente do mecanismo efetivamente utilizado. Portanto, muitos processos serão considerados, o que requer um conhecimento prévio dos aspectos mais elementares desses objetos, discutidos em cursos anteriores.

Os muitos exemplos considerados neste texto refletem basicamente minha experiência como docente e pesquisador, e portanto estão restritos aos processos mais familiares em que trabalhei ao longo dos anos. Outros exemplos, distintos dos tratados neste texto, poderiam igualmente servir como ilustração dos processos de transporte de energia.

Partes do material neste texto foram baseadas em trabalhos anteriores, em particular nos livros Introdução à estrutura e evolução estelar (Edusp, 1999), Astrofísica do meio interestelar (Edusp, 2002), Hidrodinâmica e ventos estelares: uma introdução (Edusp, 2004), e Evolução química da Galáxia (Notas de aulas, IAG/USP, 2011). Para um tratamento mais detalhado o leitor pode consultar esses textos, referenciados na bibliografia. Outros textos básicos, principalmente livros recentes e artigos de revisão estão também incluídos na bibliografia de cada capítulo. Além dos exemplos trabalhados no texto, cada capítulo inclui também uma série de exercícios, que devem ser considerados como parte integral do texto, pois ilustram e complementam o material discutido no capítulo.

São Paulo, janeiro de 2013

W. J. Maciel

À memória de

Lílian

Alessandro

João Marcelo

Cristiano & Graziela

José Eduardo

*When you understand the laws of physics, Penny,
anything is possible.*

Sheldon Cooper

SUMÁRIO

1 - TRANSPORTE RADIATIVO	1
1.1 - Introdução	1
1.2 - Conceitos do campo de radiação	1
1.3 - Equação de transporte radiativo	11
1.4 - Solução geral da equação de transporte radiativo	13
1.5 - Estimativa do campo de radiação interestelar	15
Exercícios	20
Referências	21
2 - EQUILÍBRIO TERMODINÂMICO	23
2.1 - Lei de Kirchhoff e o equilíbrio termodinâmico (ET)	23
2.2 - Propriedades da função de Planck	25
2.3 - A lei de Stefan-Boltzmann e as equações da termodinâmica	32
2.4 - Equações do equilíbrio termodinâmico	33
2.5 - Desvios do equilíbrio termodinâmico	40
Exercícios	48
Referências	48
3 - ATMOSFERAS ESTELARES	51
3.1 - Introdução	51
3.2 - Atmosfera plano-paralela	51
3.3 - Atmosfera cinza	59
3.4 - Cálculo do fluxo emergente em uma atmosfera cinza	65
3.5 - Opacidade	68
Exercícios	77
Referências	77
4 - FORMAÇÃO DE LINHAS ESPECTRAIS	79
4.1 - Introdução	79
4.2 - Linhas espectrais	79
4.3 - Alargamento de linhas espectrais	82
4.4 - Largura equivalente	91
4.5 - Curva de crescimento	93
4.6 - Formação de linhas espectrais em atmosferas estelares	98
Exercícios	99
Referências	100

5 - VENTOS ESTELARES	101
5.1 - Introdução	101
5.2 - A taxa de perda de massa	105
5.3 - Equações dos ventos estelares	109
5.4 - Ventos estelares e transferência de energia	115
5.5 - Mecanismos responsáveis pelos ventos estelares	119
5.6 - Perda de massa em ventos de estrelas quentes	123
5.7 - Perda de massa em ventos de estrelas frias	125
5.8 - Interação dos ventos estelares com o meio interestelar	127
5.9 - Transporte radiativo e ventos estelares	128
Exercícios	129
Referências	130
6 - INTERIORES ESTELARES	131
6.1 - Introdução	131
6.2 - Energias estelares	131
6.3 - Equilíbrio radiativo	141
6.4 - Transporte convectivo	146
6.5 - Condução em estrelas	156
Exercícios	162
Referências	163
7 - FENÔMENOS DE TRANSPORTE	165
7.1 - Introdução	165
7.2 - O teorema do virial	165
7.3 - O teorema de Liouville	174
7.4 - O limite de Oort	180
Exercícios	184
Referências	185
8 - ELEMENTOS DE DINÂMICA ESTELAR	187
8.1 - Introdução	187
8.2 - Dinâmica estelar	187
8.3 - O teorema de do virial na dinâmica estelar	190
8.4 - Relaxação colisional	195
8.5 - Tempo de cruzamento e tempo de relaxação	199
8.6 - A equação de transporte de Boltzmann	200
8.7 - A equação de Boltzmann sem colisões em sistemas estelares	203
Exercícios	204
Referências	205

9 - TRANSPORTE DE ENERGIA NO MEIO INTERESTELAR	207
9.1 - Introdução	207
9.2 - Estrutura do meio interestelar	209
9.3 - A temperatura de equilíbrio das nuvens interestelares	215
9.4 - Aquecimento e resfriamento das nuvens interestelares	218
9.5 - Instabilidades no gás interestelar	232
9.6 - Instabilidades de formação de estrelas	236
Exercícios	240
Referências	241
10 - ELEMENTOS DE ASTROFÍSICA DE PLASMAS	243
10.1 - Introdução: plasmas em astrofísica	243
10.2 - Equações básicas da dinâmica de fluidos	249
10.3 - Critério de instabilidade de Jeans	251
10.4 - Equações básicas da MHD	256
10.5 - Choques hidromagnéticos	259
10.6 - Instabilidade de Parker	262
Exercícios	265
Referências	266
CONSTANTES	267
ÍNDICE	269

CAPITULO 1 – TRANSPORTE RADIATIVO

1.1 Introdução

Em meios astrofísicos, ocorrem diversos processos importantes de transporte de energia, frequentemente de maneira simultânea. Entre esses processos, possivelmente o mais importante é o transporte da radiação, uma vez que a maior parte das informações astrofísicas são obtidas por meio de alguma observação de radiação, seja no contínuo, seja em linhas ou bandas espectrais. Neste capítulo, vamos estudar os principais conceitos do campo de radiação, a equação de transporte radiativo, e suas soluções em alguns casos simples.

Diversos textos básicos de astrofísica tratam do transporte radiativo, da equação de transporte e suas soluções nos casos mais simples. Entre eles, podem ser mencionados Choudhuri (2010), Carroll e Ostlie (2006), Kartunnen et al. (2007), Zeilik e Gregory (1997), Shu (1982) e Swihart (1968). Algumas partes do desenvolvimento a seguir foram baseadas no tratamento dado por Maciel (1999) e (2002).

1.2 Conceitos do campo de radiação

Para o estudo do transporte de radiação em meios astrofísicos, precisamos inicialmente caracterizar um campo de radiação. Alguns exemplos de regiões onde podemos observar um campo de radiação são a atmosfera solar (figura 1.1a), de onde provêm os fótons visíveis solares observados na Terra, ou a região vizinha às estrelas quentes que formam o “Trapézio”, um aglomerado de estrelas quentes e jovens imersas na Nebulosa de Orion (figura 1.1b). Quantitativamente, podemos caracterizar um campo de radiação usando diversas grandezas, das quais consideramos a seguir as mais importantes.

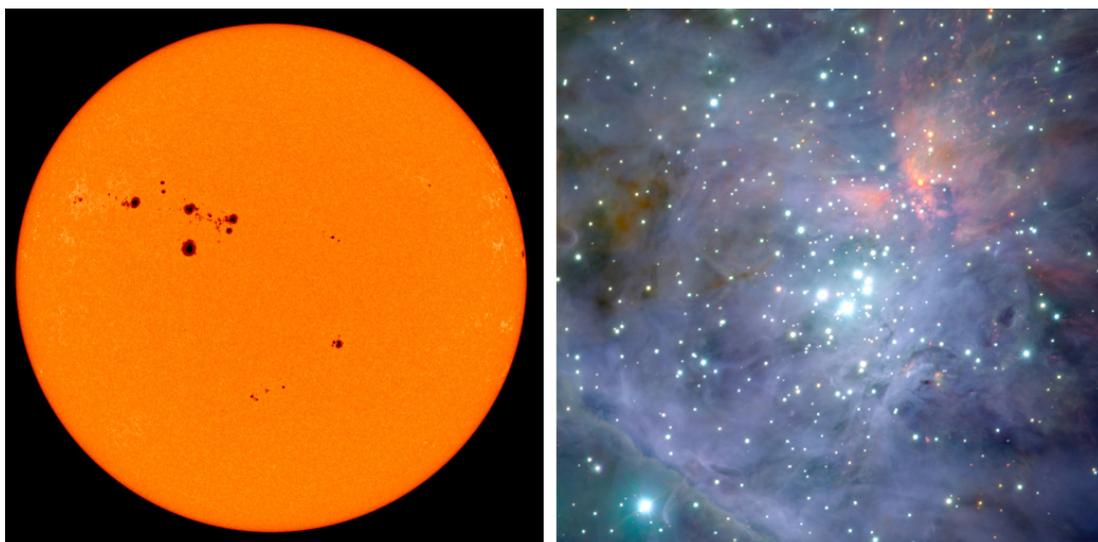


Figura 1.1 - Fotosfera solar (SOHO) e estrelas do Trapézio em Orion (VLT/ESO).

(a) Intensidade específica

A intensidade $I_\nu(\vec{r}, \vec{s}, t)$, na posição \vec{r} , direção \vec{s} , tempo t , é a energia que passa através de uma área unitária, perpendicularmente a essa área, por unidade de tempo, por intervalo de frequência, em um ângulo sólido unitário (figura 1.2). Podemos então escrever

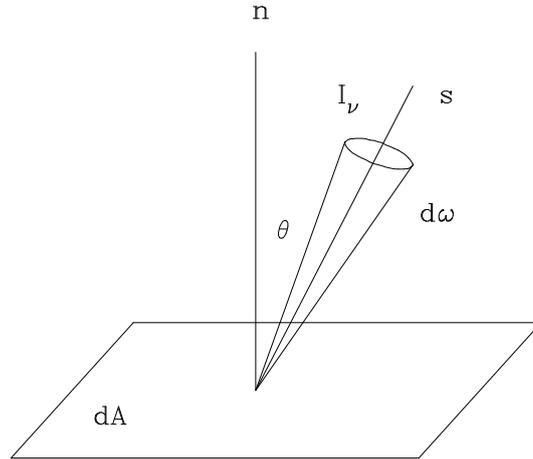


Figura 1.2 - Definição de intensidade específica.

$$dE_\nu = I_\nu(\vec{r}, \vec{s}, t) dA \cos \theta d\omega d\nu dt \tag{1.1}$$

As unidades de I_ν são $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}$. Da mesma maneira, podemos definir a intensidade específica por unidade de comprimento de onda, I_λ , geralmente medida em $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{\AA}^{-1} \text{sr}^{-1}$.

A intensidade integrada pode ser obtida por

$$I = \int I_\nu d\nu = \int I_\lambda d\lambda \tag{1.2}$$

onde a integração é feita em todas as frequências (ou comprimentos de onda), tendo como unidades $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{sr}^{-1}$. Note-se que $I_\nu \neq I_\lambda$. Como $\lambda = c/\nu$, onde $c = 3.00 \times 10^{10} \text{ cm/s}$ é a velocidade da luz no vácuo, temos de (1.2)

$$I_\nu d\nu = I_\lambda d\lambda \tag{1.3}$$

$$I_\nu = I_\lambda \left| \frac{d\lambda}{d\nu} \right| = \frac{c}{\nu^2} I_\lambda = \frac{\lambda^2}{c} I_\lambda \tag{1.4}$$

Geralmente, não é considerada a dependência de I_ν com o tempo, e $I_\nu(\vec{r}, \vec{s}, t)$ pode ser escrita na forma $I_\nu(\vec{r}, \vec{s})$. Considerando um sistema de coordenadas esféricas

(figura 1.3), temos $I_\nu(r, \theta, \phi)$, onde r caracteriza a posição do ponto considerado e θ (ângulo polar) e ϕ (ângulo azimutal) caracterizam a direção de propagação da radiação. Admitindo adicionalmente simetria azimutal, a intensidade em cada ponto pode ser escrita na forma $I_\nu(\theta)$.

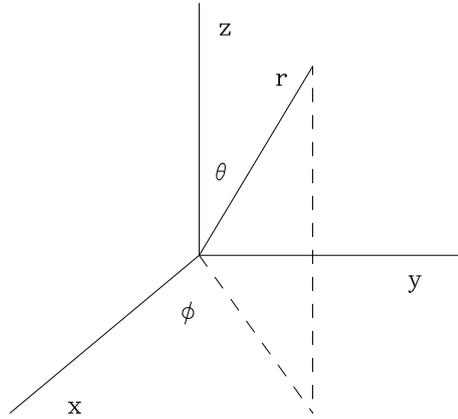


Figura 1.3 - Coordenadas esféricas.

(b) Intensidade média

A intensidade média J_ν pode ser definida por:

$$J_\nu = \frac{\int I_\nu d\omega}{\int d\omega} = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\omega \tag{1.5}$$

onde a integração é feita em todos os ângulos sólidos, e a intensidade média integrada é dada por:

$$J = \int J_\nu d\nu = \frac{1}{4\pi} \int I d\omega \tag{1.6}$$

As unidades de J_ν são $\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ sr}^{-1}$, e as de J são $\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$. Como no caso anterior podemos de maneira equivalente definir a intensidade média por intervalo de comprimento de onda, J_λ . Em coordenadas esféricas, em termos de θ e ϕ , lembrando que o elemento de ângulo sólido é $d\omega = \text{sen}\theta d\theta d\phi$, temos:

$$J = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I(\theta, \phi) \text{sen}\theta d\theta d\phi \tag{1.7}$$

Se houver simetria azimutal,

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\pi I(\theta) \text{sen}\theta d\theta \tag{1.8}$$

(c) Fluxo

A intensidade específica, como definida acima, envolve uma medida dentro de um certo ângulo sólido, o que é possível no caso de superfícies extensas como a atmosfera solar (figura 1.1a), nebulosas, como a Nebulosa de Orion (figura 1.1b), ou galáxias, como Andrômeda (M31) (figura 1.4a), isto é, objetos extensos. No caso de estrelas, essas medidas são difíceis, pois quase todas as estrelas que podemos observar são pontuais, ou seja, observamos a radiação integrada em um cone subtendido pela estrela. Exceções a isso são algumas estrelas gigantes e supergigantes vermelhas como Betelgeuse, ou α Orionis (figura 1.4b), para as quais técnicas interferométricas modernas permitem obter medidas em diferentes posições na superfície da estrela.

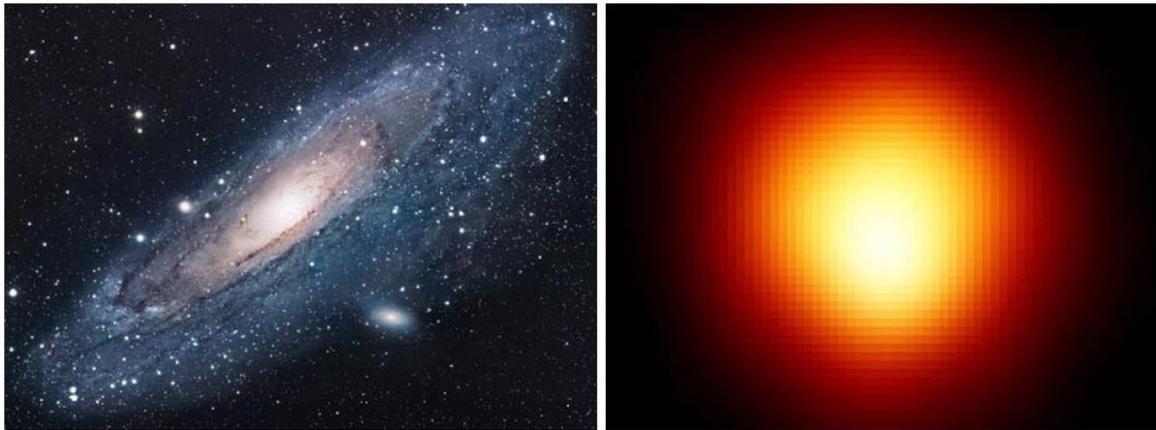


Figura 1.4 - Andrômeda (M31) (NASA) e Betelgeuse (HST).

Portanto, para a maior parte das estrelas somente podemos medir seu *fluxo*, isto é, a intensidade integrada em um certo ângulo sólido. Uma definição rigorosa do fluxo está além dos limites destas notas de aulas, e o leitor interessado pode consultar textos mais avançados como Mihalas (1978). Entretanto, considerando (1.1), podemos observar que a energia transportada por unidade de área e tempo em uma certa direção perpendicular à área considerada em um intervalo de frequência é simplesmente $I_\nu \cos \theta d\omega$, de modo que o fluxo monocromático (unidades: $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$) pode ser escrito

$$F_\nu = \int I_\nu \cos \theta d\omega \tag{1.9}$$

e o fluxo integrado (unidades: $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$) fica

$$F = \int I \cos \theta d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \tag{1.10}$$

Com simetria azimutal,

$$F = 2\pi \int_0^\pi I(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta \tag{1.11}$$

Às vezes são usadas outras definições. O *fluxo astrofísico* é $F' = (1/\pi)F$, e o *fluxo de Eddington* é $H = (1/4\pi)F$.

É interessante comentar algumas diferenças entre a intensidade específica e o fluxo de um feixe de radiação propagando-se no vácuo. Como a intensidade é medida por ângulo sólido, à medida que consideramos pontos mais afastados da fonte a intensidade não se altera: menos fótons chegam a esses pontos, mas isso é contrabalançado por um ângulo sólido menor, o qual decresce na mesma proporção. Portanto, a intensidade específica é essencialmente uma medida do brilho superficial. No caso do fluxo, que é uma medida da energia por unidade de área e tempo, o valor medido decresce quando distâncias maiores são consideradas, pois a área aumenta com o quadrado da distância, de modo que o fluxo diminui na mesma proporção. Na verdade, no espaço interestelar, interplanetário ou intergaláctico, o fluxo pode diminuir ainda mais, como veremos mais tarde, no caso de haver absorções no caminho entre a fonte e o observador.

► EXEMPLO 1.1 - Intensidade e fluxo no disco solar

Podemos fazer uma comparação direta entre intensidade específica e fluxo considerando a radiação em $\lambda = 5010 \text{ \AA}$ emitida pelo disco solar. O valor medido para a intensidade específica no centro do disco solar é $I_{5010} = 4.03 \times 10^{13} \text{ W m}^{-3} \text{ sr}^{-1} = 4.03 \times 10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1} \text{ sr}^{-1}$. Considerando em primeira aproximação que este valor se aplica a todo o disco solar, o fluxo total em $\lambda = 5010 \text{ \AA}$ na superfície do Sol, onde a coordenada espacial $r = R_\odot = 6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$, seria

$$\begin{aligned} F_{5010}(R_\odot) &\simeq \int I_{5010} \cos \theta d\omega \\ &= 2 I_{5010} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= 4 \pi I_{5010} \left. \frac{\sin^2 \theta}{2} \right|_0^{\pi/2} \\ &= 2 \pi I_{5010} \\ &= 2.53 \times 10^7 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1} \end{aligned} \tag{1.12}$$

A maior parte da radiação solar concentra-se em uma faixa entre $\lambda \simeq 4500 \text{ \AA}$ e $\lambda \simeq 7000 \text{ \AA}$, centrada em $\lambda \simeq 5000 \text{ \AA}$, como pode ser visto no espectro solar mostrado na figura 1.5.

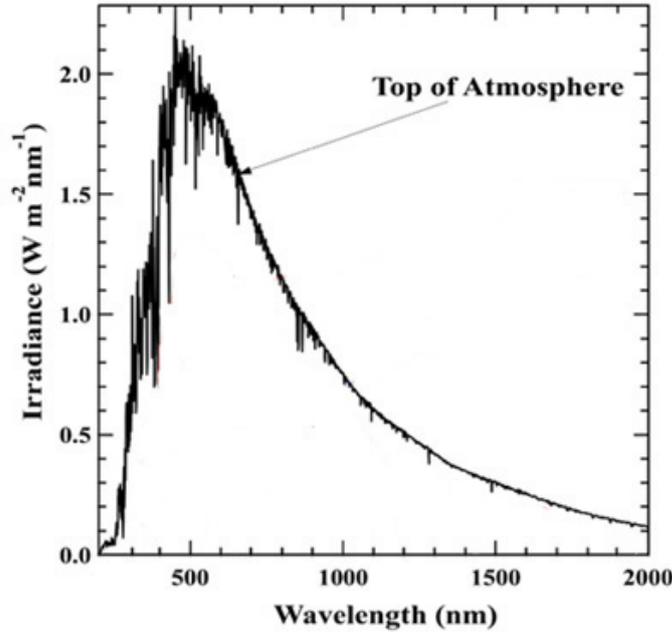


Figura 1.5 - Espectro solar.

Portanto, o fluxo total na superfície do Sol é, em primeira aproximação,

$$\begin{aligned}
 F(R_{\odot}) &\simeq F_{5010} \Delta\lambda = F_{5010}(R_{\odot}) (7000 - 4500) \\
 &= (2.53 \times 10^7) (2500) = 6.33 \times 10^{10} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

Considerando agora a diluição deste fluxo no caminho entre a superfície do Sol e a superfície da Terra, e que a distância Terra-Sol é $1 \text{ UA} = 1.5 \times 10^{13} \text{ cm}$, o fluxo observado no alto da atmosfera da Terra é

$$F(\text{UA}) \simeq \left(\frac{R_{\odot}}{\text{UA}} \right)^2 F(R_{\odot}) = 1.36 \times 10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}
 \tag{1.14}$$

Este valor pode ser comparado com o fluxo solar efetivamente observado no alto da atmosfera (Cox 2000), ou “constante solar”, $S = 1.4 \times 10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

► EXEMPLO 1.2 - Conversão de energia solar

A luminosidade do Sol é $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{33} \text{ erg/s}$, e seu raio é $R_{\odot} = 6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$, de modo que o fluxo total na superfície do Sol é aproximadamente

$$F(R_{\odot}) = \frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2} = 6.32 \times 10^{10} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}
 \tag{1.15}$$

como vimos no Exemplo 1.1. A Terra está a uma distância $d_T = 1 \text{ UA} = 1.5 \times 10^{13} \text{ cm}$, e o fluxo no alto da atmosfera, desprezando a extinção entre o Sol e a Terra é

$$F(d_T) \simeq F(R_\odot) \left(\frac{R_\odot}{d_T} \right)^2 \simeq 1.36 \times 10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.16)$$

Supondo que o hemisfério terrestre voltado para o Sol tenha uma área dada por $S \simeq 2 \pi R_T^2$, onde $R_T \simeq 6400 \text{ km}$ é o raio médio da Terra, a energia solar por unidade de tempo que atinge nosso planeta por segundo é

$$L(d_T) \simeq F(d_T) (2 \pi R_T^2) \simeq 3.5 \times 10^{24} \text{ erg/s} = 3.5 \times 10^{17} \text{ W} = 3.5 \times 10^5 \text{ TW} \quad (1.17)$$

O valor correto deve ser menor que o valor calculado acima, uma vez que nem todos os pontos da superfície terrestre recebem a mesma quantidade de energia, que depende da inclinação dos raios solares. Podemos admitir que, de fato, a potência liberada pelo Sol ao nosso planeta é mais corretamente da ordem de $1.2 \times 10^5 \text{ TW}$. Este valor pode ser comparado com a taxa que a civilização humana produz e consome energia, que é da ordem de 13 TW , ou seja, cerca de 9000 vezes menor que a potência transmitida pelo Sol. A maior hidrelétrica brasileira, Itaipu (figura 1.6), e a maior usina geradora de energia do mundo, tem uma capacidade instalada de cerca de 14 GW , o que corresponde a 10^{-7} do valor solar. Por exemplo, em 2011 a usina produziu 92.2 TWh . No mesmo período, o Sol liberou cerca de $1.1 \times 10^9 \text{ TWh}$.



Figura 1.6 - A usina hidrelétrica de Itaipu (R. A. Costa).

► EXEMPLO 1.3 - Intensidade e fluxo a uma distância r de uma estrela

Vamos considerar uma estrela esférica de raio R que emite radiação uniformemente em todas as direções com intensidade I . Vamos estimar a intensidade média J e o

fluxo F a uma distância r da estrela. A intensidade média à distância r pode ser obtida pela equação (1.6), onde a integral deve ser feita em todo o ângulo sólido compreendido pela estrela. Seja θ_r o raio angular da estrela vista da distância r , ou seja,

$$\text{sen}\theta_r = \frac{R}{r} \tag{1.18}$$

Lembrando que $d\omega = \text{sen}\theta d\theta d\phi$, a intensidade média é dada por

$$J(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_r} \text{sen}\theta d\theta = \frac{1}{2} I (1 - \cos\theta_r) \tag{1.19}$$

que pode ser escrita

$$J(r) = \frac{I}{2r} \left[r - (r^2 - R^2)^{1/2} \right] \tag{1.20}$$

Lembrando que

$$(a + b)^n \simeq a^n + n a b^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \dots \tag{1.21}$$

e tomando $r \gg R$, temos $(r^2 - R^2)^{1/2} \simeq r - R^2/2r$, de modo que a intensidade média fica

$$J(r) \simeq \frac{I R^2}{4 r^2} \tag{1.22}$$

Para o fluxo, temos de (1.10)

$$F(r) = \int I \cos\theta d\omega \tag{1.23}$$

$$F(r) = I \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_r} \cos\theta \text{sen}\theta d\theta = \pi I \text{sen}^2\theta_r \tag{1.24}$$

$$F(r) = \frac{\pi I R^2}{r^2} \tag{1.25}$$

(d) Densidade de energia

Vamos considerar um cilindro através do qual uma radiação de intensidade específica I_ν se propaga em uma direção que faz um ângulo θ com a normal à base, em um tempo dt (figura 1.7). A densidade de energia, ou seja, a quantidade de energia elementar por unidade de volume e por intervalo de frequência nesse cilindro (medida em $\text{erg cm}^{-3} \text{ Hz}^{-1}$) é simplesmente

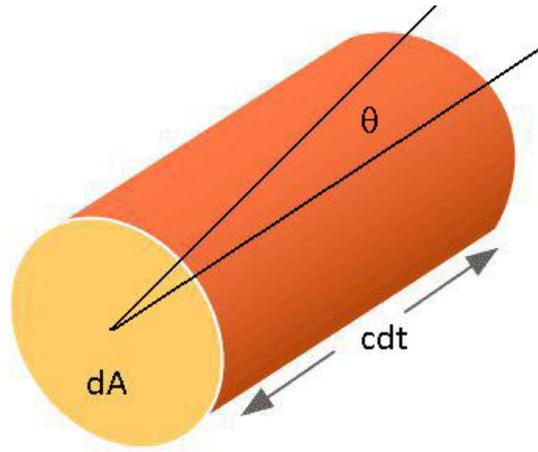


Figura 1.7 - Definição de densidade de energia.

$$\frac{dE_\nu}{dA \cos \theta c dt d\nu} = \frac{I_\nu d\omega}{c} \tag{1.26}$$

de modo que a densidade de energia monocromática U_ν pode ser escrita

$$U_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\omega \tag{1.27}$$

tendo unidades de $\text{erg cm}^{-3} \text{ Hz}^{-1}$. Em termos de quantidades integradas (unidades: erg/cm^3):

$$U = \frac{1}{c} \int I d\omega = \frac{1}{c} \int \int I(\theta, \phi) \text{sen}\theta d\theta d\phi \tag{1.28}$$

Com simetria azimutal,

$$U = \frac{2\pi}{c} \int_0^\pi I(\theta) \text{sen}\theta d\theta \tag{1.29}$$

Comparando (1.29) com (1.8), temos

$$U = \frac{4\pi}{c} J \tag{1.30}$$

(e) Pressão da radiação

No caso de um gás perfeito com uma densidade de partículas n , medida em número de partículas por centímetro cúbico, e uma temperatura T , sabemos que este gás exerce uma pressão dada por $P = nkT$, onde $k = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$ é a constante de Boltzmann. No caso de um feixe de radiação propagando-se em uma certa direção, podemos também dizer que a radiação exerce uma pressão P_r ,

chamada *pressão da radiação*. Podemos obter uma expressão aproximada para P_r considerando a definição da intensidade específica (1.1). A pressão é essencialmente a taxa de variação da quantidade de movimento por unidade de área. Um fóton com frequência ν tem energia $h\nu$ e quantidade de movimento $h\nu/c$, onde $h = 6.63 \times 10^{-27}$ erg s é a constante de Planck. Portanto, a quantidade de movimento de um feixe de radiação com energia elementar dE_ν é simplesmente dE_ν/c , e a pressão elementar é $dE_\nu/(c dt dA)$. Tomando a componente normal da pressão temos $dP_r = dE_\nu \cos\theta/(c dt dA)$. Considerando ainda a pressão por intervalo de frequência, de (1.1) podemos escrever que para um campo de radiação com intensidade específica I_ν , a pressão da radiação monocromática é

$$P_{r\nu} = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\omega \tag{1.31}$$

com unidades de $\text{din cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$. Em termos de quantidades integradas (unidades: din/cm^2):

$$P_r = \frac{1}{c} \int I \cos^2 \theta d\omega = \frac{1}{c} \int \int I(\theta, \phi) \cos^2 \theta \sin\theta d\theta d\phi \tag{1.32}$$

Com simetria azimutal,

$$P_r = \frac{2\pi}{c} \int_0^\pi I(\theta) \cos^2 \theta \sin\theta d\theta \tag{1.33}$$

Mais geralmente, J, F , e P_r podem ser considerados como momentos da intensidade específica, ou momentos de ordem n do campo de radiação, definidos por:

$$M_n = \int I \cos^n \theta d\omega \tag{1.34}$$

Para $n = 0$, temos a intensidade média J , ou a densidade de energia; para $n = 1$, é obtido o fluxo e, para $n = 2$, a pressão da radiação. Momentos de ordem superior são às vezes usados na teoria do transporte radiativo.

► EXEMPLO 1.4 - O caso isotrópico

Um caso especial do campo de radiação é aquele em que a intensidade específica é *isotrópica*, isto é, não depende da direção considerada. Nesse caso, é fácil ver que a intensidade média J_ν definida em (1.5) pode ser escrita

$$J_\nu = \frac{I_\nu}{4\pi} \int d\omega = \frac{4\pi}{4\pi} I_\nu = I_\nu \tag{1.35}$$

Esse resultado é de fácil interpretação: se a intensidade é a mesma em todas as direções, a média das intensidades é seu próprio valor em uma direção qualquer. Já o fluxo, definido por (1.9), fica

$$F_\nu = I_\nu \int \cos \theta \, d\omega = I_\nu \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos \theta \, \text{sen} \theta \, d\theta = 0 \quad (1.36)$$

Este resultado é também de interpretação simples: se a intensidade é a mesma em todas as direções, para qualquer direção escolhida haverá uma intensidade igual na direção oposta, de modo que o fluxo total deve ser nulo. A densidade de energia definida em (1.27) fica nesse caso

$$U_\nu = \frac{I_\nu}{c} \int d\omega = \frac{4\pi}{c} I_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu \quad (1.37)$$

Finalmente, a pressão da radiação definida em (1.31) fica

$$P_{r\nu} = \frac{I_\nu}{c} \int \cos^2 \theta \, d\omega = \frac{I_\nu}{c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos^2 \theta \, \text{sen} \theta \, d\theta = \frac{4\pi}{3c} I_\nu = \frac{1}{3} U_\nu \quad (1.38)$$

► EXEMPLO 1.5 - Fluxo parcial em um hemisfério

Vimos de (1.36) que o fluxo da radiação é nulo no caso isotrópico. Entretanto, em algumas aplicações podemos considerar o fluxo *parcial* em um hemisfério F_ν^+ , desprezando a radiação que se propaga no hemisfério oposto. Neste caso, de (1.10) temos

$$\begin{aligned} F_\nu^+ &\simeq \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} I_\nu \cos \theta \, \text{sen} \theta \, d\theta \\ &= 2\pi I_\nu \left. \frac{\text{sen}^2 \theta}{2} \right|_0^{\pi/2} \\ &= 2\pi I_\nu \frac{1}{2} = \pi I_\nu \end{aligned} \quad (1.39)$$

Este resultado é frequentemente usado para obter uma estimativa do fluxo em diversas situações, como nas atmosferas das estrelas. Como veremos no capítulo 2, a intensidade específica no caso isotrópico é a função de Planck $B_\nu(T)$, ou seja, $I_\nu = B_\nu(T)$, e depende unicamente da temperatura.

1.3 Equação de transporte radiativo

Vamos considerar o caso simples de um feixe de radiação com intensidade I_ν propagando-se através de uma lâmina unidimensional, caracterizada pela direção s (figura 1.8).

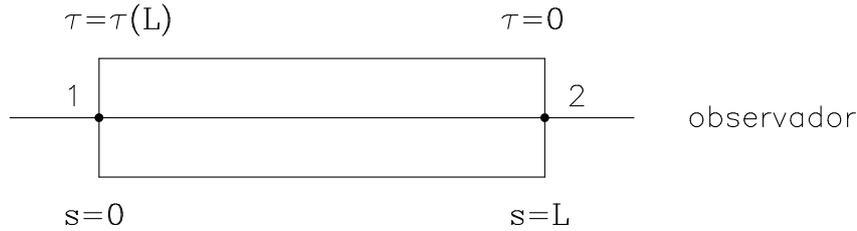


Figura 1.8 - Propagação da radiação no caso unidimensional.

Durante a propagação, a radiação pode ser absorvida, e podemos definir um coeficiente de absorção k_ν tal que $I_\nu k_\nu ds$ seja a intensidade absorvida ao atravessar uma região de extensão ds , ou seja, $k_\nu I_\nu = (dI_\nu/ds)_{abs}$. Portanto, k_ν deve ter unidades de cm^{-1} no sistema cgs que estamos usando. Analogamente, dentro da lâmina pode ocorrer emissão de radiação na frequência ν , que vamos caracterizar por um coeficiente de emissão j_ν , que mede a energia emitida por unidade de volume e tempo no intervalo de frequência $d\nu$ dentro de um ângulo sólido $d\omega$. Assim, j_ν tem como unidades $\text{erg cm}^{-3} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}$. Nesse caso, podemos escrever a equação de transporte radiativo como

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - k_\nu I_\nu \tag{1.40}$$

Uma região de pequenas dimensões espaciais em que o coeficiente de absorção seja alto pode ser equivalente a uma outra região mais extensa em que o coeficiente de absorção seja menor. Por esta razão, costumamos definir um parâmetro chamado *profundidade óptica*, representado pela letra grega τ . Vamos neste caso definir a profundidade óptica por

$$d\tau_\nu = -k_\nu ds \tag{1.41}$$

De acordo com a geometria da figura 1.8, a radiação entra na lâmina no ponto 1, onde $s = 0$, sofre emissões e absorções dentro da lâmina de largura L e emerge no ponto 2, onde $s = L$, mais próximo do observador. Dependendo da geometria do problema, a profundidade óptica pode ser definida de maneira um pouco diferente.

A profundidade óptica total da região é $\tau_\nu(L)$. Considerando (1.40), a equação de transporte fica

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - \frac{j_\nu}{k_\nu} \tag{1.42}$$

A razão j_ν/k_ν desempenha um papel importante na teoria do transporte radiativo, sendo denominada *função fonte*,

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{k_\nu} \tag{1.43}$$

Em termos da função fonte, a equação de transporte (1.42) pode ser escrita

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu \tag{1.44}$$

As equações (1.40), (1.42) e (1.44) são formas equivalentes da equação de transporte radiativo. Vamos a seguir considerar suas soluções em alguns casos simples.

1.4 Solução geral da equação de transporte radiativo

Multiplicando ambos os membros da equação (1.42) por $e^{-\tau_\nu}$, obtemos

$$e^{-\tau_\nu} \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = e^{-\tau_\nu} I_\nu - \frac{j_\nu}{k_\nu} e^{-\tau_\nu} \tag{1.45}$$

Mas

$$\frac{d}{d\tau_\nu} (e^{-\tau_\nu} I_\nu) = e^{-\tau_\nu} \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} - e^{-\tau_\nu} I_\nu \tag{1.46}$$

portanto,

$$\frac{d}{d\tau_\nu} (e^{-\tau_\nu} I_\nu) = -\frac{j_\nu}{k_\nu} e^{-\tau_\nu} \tag{1.47}$$

Integrando ao longo da região em consideração, entre os pontos 1 e 2 da figura 1.8, obtemos para a intensidade emergente no ponto 2,

$$I_\nu(L) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu(L)} + \int_0^{\tau_\nu(L)} \frac{j_\nu}{k_\nu} e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu \tag{1.48}$$

Desta equação vemos que a intensidade emergente é a soma de dois termos: o primeiro dá a radiação incidente, descontada a absorção que ocorre dentro da lâmina, que é proporcional a $\exp[-\tau_\nu(L)]$. O segundo termo mede a energia emitida dentro da lâmina. Parte deste energia é também absorvida no caminho entre o local de produção e a extremidade da lâmina, o que é representado pela exponencial envolvendo a profundidade óptica τ_ν dentro da lâmina. Como vemos, o termo de emissão é caracterizado pela função fonte $S_\nu = j_\nu/k_\nu$ ao longo da região.

Se os coeficientes de emissão e absorção forem constantes, isto é, não dependerem da posição, de (1.48) temos

$$I_\nu(L) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu(L)} + \frac{j_\nu}{k_\nu} (1 - e^{-\tau_\nu(L)}) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu(L)} + S_\nu (1 - e^{-\tau_\nu(L)}) \tag{1.49}$$

Da solução (1.49) podemos observar que, se os coeficientes j_ν e k_ν (e S_ν) forem constantes, a intensidade emergente I_ν tende ao valor da função fonte S_ν , a partir do valor inicial $I_\nu(0)$. De (1.49) podemos escrever

$$\frac{I_\nu(L)}{I_\nu(0)} = e^{-\tau_\nu(L)} + \frac{S_\nu}{I_\nu(0)} (1 - e^{-\tau_\nu(L)}) \tag{1.50}$$

Chamando $n = S_\nu/I_\nu(0)$ a razão entre a função fonte e a intensidade original, a figura 1.9 mostra a razão $I_\nu(L)/I_\nu(0)$ em função da profundidade óptica total $\tau_\nu(L)$

para $n = 1, 2$ e 3 . Vemos que em todos os casos I_ν tende para o valor da função fonte.

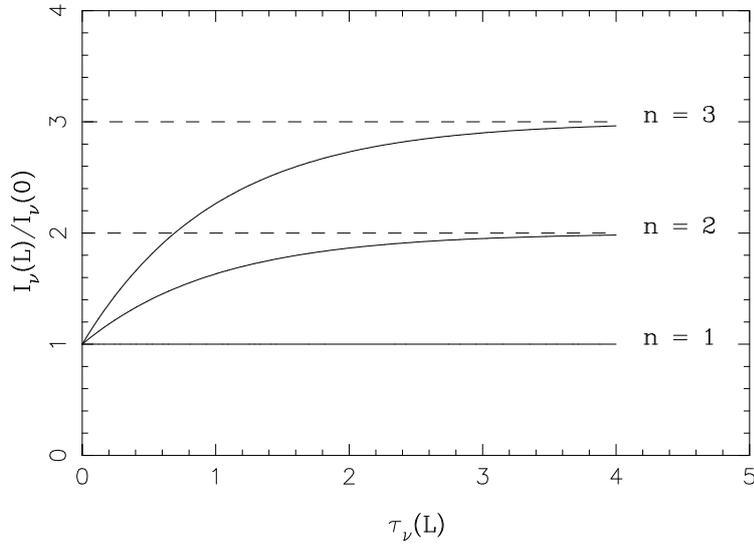


Figura 1.9 - Intensidade e função fonte.

► **EXEMPLO 1.6 - O caso opticamente fino**

Um caso especial é aquele em que a profundidade óptica é pequena, que é o caso opticamente fino, ou transparente. Nesse caso, de (1.49) temos

Caso opticamente fino: $\tau_\nu(L) \ll 1$

$$\begin{aligned}
 I_\nu(L) &= I_\nu(0) + \frac{j_\nu}{k_\nu} [1 - (1 - \tau_\nu(L))] = I_\nu(0) + \frac{j_\nu}{k_\nu} \tau_\nu(L) \\
 &= I_\nu(0) + \frac{j_\nu}{k_\nu} (k_\nu L) = I_\nu(0) + j_\nu L
 \end{aligned}
 \tag{1.51}$$

ou seja, a intensidade emergente é essencialmente igual à intensidade original, somada às emissões que ocorrem dentro da lâmina.

► **EXEMPLO 1.7 - O caso opticamente espesso**

O outro caso de interesse é o caso oposto, em que a profundidade óptica é muito grande, o caso opticamente espesso, ou opaco. Temos então

Caso opticamente espesso: $\tau_\nu(L) \gg 1$

$$I_\nu = \frac{j_\nu}{k_\nu} = S_\nu
 \tag{1.52}$$

Neste caso, as emissões que ocorrem muito longe da borda da lâmina não tem uma contribuição importante, e a intensidade emergente vem essencialmente da região

mais próxima do ponto 2, dentro de um caminho livre médio da borda. O caminho livre médio para os fótons de frequência ν é essencialmente $\ell_\nu \sim 1/k_\nu$, de modo que, neste caso, $I_\nu \simeq j_\nu \ell_\nu$.

► EXEMPLO 1.8 - Emissão rádio de regiões HII

Regiões HII, ou regiões de hidrogênio ionizado em torno de estrelas quentes, emitem radiação térmica em ondas de rádio. Nesta faixa espectral, a emissão pode ser aproximada pela distribuição de Rayleigh-Jeans, como veremos no capítulo 2. Para esta distribuição, a intensidade é $I_\nu \propto \nu^2$ (ver equação 2.7). Ocorre que nesta mesma região a profundidade óptica é $\tau_\nu \propto \nu^{-2}$. Assim, para frequências mais baixas (na faixa rádio), a profundidade óptica é alta, e temos o caso opticamente espesso. De (1.52) a intensidade é proporcional à função fonte, ou seja, $I_\nu \propto S_\nu \propto \nu^2$. À medida que a frequência aumenta, a profundidade óptica diminui, até alcançar uma situação em que $\tau_\nu \ll 1$, que é o caso opticamente fino. De (1.51) vemos que $I_\nu \propto S_\nu \tau_\nu$. Como $S_\nu \propto \nu^2$ e $\tau_\nu \propto \nu^{-2}$, a intensidade fica aproximadamente constante. Isto pode ser visto na figura 1.10b, onde é mostrado o espectro rádio da Nebulosa de Orion (figura 1.10a), uma região HII típica. A ordenada é a densidade de fluxo, dada em Janskys ($1 \text{ Jy} = 10^{-23} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$). Nesse caso, a transição entre os regimes opticamente espesso e opticamente fino ocorre para $\nu \sim 10^3 \text{ MHz}$.

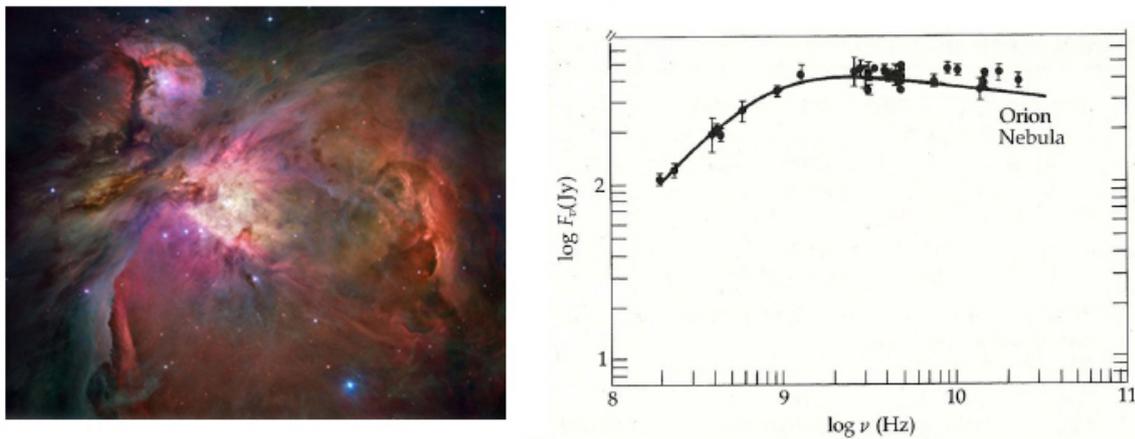


Figura 1.10 - Nebulosa de Orion (HST) e espectro rádio (Zeilik)

1.5 Estimativa do campo de radiação interestelar

Vamos considerar o transporte da radiação no campo de radiação interestelar e estimar a densidade de energia do campo em um ponto do disco galáctico, sob a ação das estrelas, gás e poeira. Admitindo que a Galáxia tem a forma de um disco achatado, a intensidade específica da radiação I_ν ($\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ sr}^{-1}$) em uma dada frequência é função apenas da altura z ao plano galáctico (figura 1.11). A equação de transporte radiativo é basicamente a equação (1.40), mas vamos subdividir o termo de absorção em duas componentes: a absorção “pura” pelos grãos

de poeira, caracterizada pelo coeficiente de absorção k_ν dado em cm^{-1} , e o “espalhamento”, isto é, o desvio da direção original dos fótons, caracterizado pelo coeficiente de espalhamento σ_ν , também medido em cm^{-1} . Nesse caso, a equação de transporte radiativo pode ser escrita

$$\mu \frac{dI_\nu}{dz} = j_\nu - (k_\nu + \sigma_\nu) I_\nu + \sigma_\nu J_\nu \tag{1.53}$$

onde $\mu = \cos \theta$, sendo θ o ângulo entre a direção de propagação do feixe e a normal ao elemento considerado e j_ν é o coeficiente de emissão por volume ($\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ sr}^{-1}$). J_ν é a intensidade média da radiação, e admitimos que a intensidade espalhada é proporcional a esta intensidade média, ou seja, $(dI_\nu/dz)_{esp} = \sigma_\nu J_\nu$.

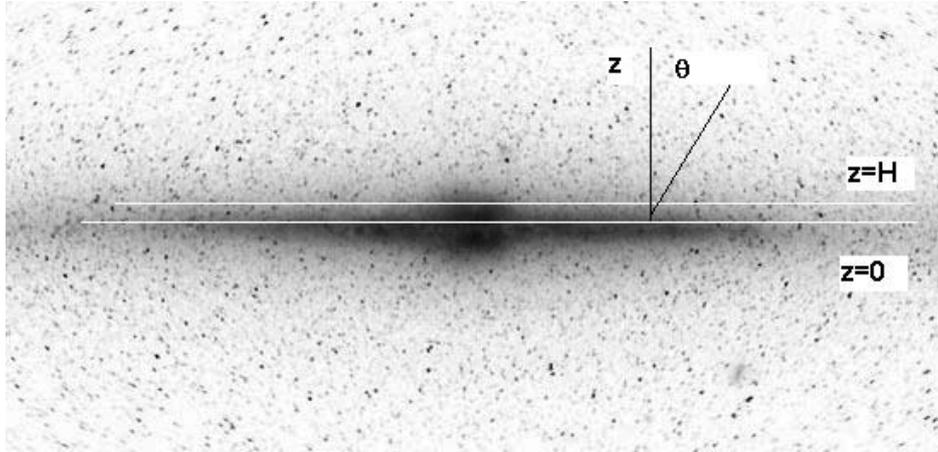


Figura 1.11 - Disco galáctico.

Vamos definir a profundidade óptica pela expressão

$$d\tau_\nu = (k_\nu + \sigma_\nu) dz = k_E dz \tag{1.54}$$

onde k_E é o coeficiente de extinção total. Com esta definição, temos que $\tau = 0$ em $z = 0$ e $\tau = \tau_H$ em $z = H$, a escala de altura do disco. Substituindo em (1.53)

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{j_\nu}{k_\nu + \sigma_\nu} - I_\nu + \frac{\sigma_\nu}{k_\nu + \sigma_\nu} J_\nu \tag{1.55}$$

que pode ser simplificada para

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu + \gamma_\nu J_\nu \tag{1.56}$$

onde definimos o albedo dos grãos

$$\gamma_\nu = \frac{\sigma_\nu}{k_\nu + \sigma_\nu} \tag{1.57}$$

e a função fonte

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{k_\nu + \sigma_\nu} \quad (1.58)$$

Vamos considerar a solução de (1.56) usando a aproximação de dois feixes de Schuster (1905, ver também Mihalas 1978). Neste caso, definimos

$$I_\nu^+ = \int_0^{\pi/2} I_\nu \text{sen}\theta \, d\theta = \int_0^1 I_\nu \, d\mu \quad (0 \leq \mu \leq 1) \quad (1.59)$$

$$I_\nu^- = \int_{\pi/2}^\pi I_\nu \text{sen}\theta \, d\theta = \int_{-1}^0 I_\nu \, d\mu \quad (-1 \leq \mu \leq 0) \quad (1.60)$$

lembrando que $\mu = 1$ para $\theta = 0$, $\mu = 0$ para $\theta = \pi/2$ e $\mu = -1$ para $\theta = \pi$. Neste caso, I_ν^+ e I_ν^- não dependem de μ , e

$$\begin{aligned} J_\nu &= \frac{1}{4\pi} \int I_\nu \, d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi I_\nu \text{sen}\theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi I_\nu \text{sen}\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu \, d\mu \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 I_\nu \, d\mu + \frac{1}{2} \int_0^1 I_\nu \, d\mu = \frac{1}{2}(I_\nu^+ + I_\nu^-) \end{aligned} \quad (1.61)$$

onde usamos $d\omega = \text{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$ para o elemento de ângulo sólido em torno da direção considerada. Da mesma forma, o fluxo F_ν é dado por

$$F_\nu = \frac{1}{\pi} \int I_\nu \cos\theta \, d\omega = 2 \int_{-1}^1 I_\nu \mu \, d\mu \simeq I_\nu^+ - I_\nu^- \quad (1.62)$$

Por analogia, esta expressão pode ser escrita

$$F_\nu = F_\nu^+ - F_\nu^- \quad (1.63)$$

onde definimos

$$F_\nu^+ = 2 \int_0^1 I_\nu \mu \, d\mu \quad (1.64)$$

e

$$F_\nu^- = -2 \int_{-1}^0 I_\nu \mu \, d\mu \quad (1.65)$$

Multiplicando (1.56) por $d\mu$ e integrando de 0 a 1, lembrando (1.62) e (1.63), obtemos

$$\frac{d}{d\tau_\nu} \int_0^1 I_\nu \mu \, d\mu = S_\nu \int_0^1 d\mu - \int_0^1 I_\nu \, d\mu + \gamma_\nu J_\nu \int_0^1 d\mu \quad (1.66)$$

$$\frac{1}{2} \frac{dI_\nu^+}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu^+ + \gamma_\nu J_\nu \quad (1.67)$$

onde admitimos o caso homogêneo, em que j_ν , k_ν , σ_ν e γ_ν são independentes de μ . Analogamente, multiplicando (1.56) por $d\mu$ e integrando de -1 a 0 :

$$-\frac{1}{2} \frac{dI_\nu^-}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu^- + \gamma_\nu J_\nu \quad (1.68)$$

Somando e subtraindo (1.67) e (1.68), e considerando (1.61) e (1.62), temos as relações

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau_\nu} (I_\nu^+ - I_\nu^-) = 2S_\nu - (I_\nu^+ + I_\nu^-) + 2\gamma_\nu J_\nu \quad (1.69)$$

$$\frac{dF_\nu}{d\tau_\nu} = 4S_\nu - 4J_\nu(1 - \gamma_\nu) \quad (1.70)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau_\nu} (I_\nu^+ + I_\nu^-) = -(I_\nu^+ - I_\nu^-) \quad (1.71)$$

$$\frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu} = -F_\nu \quad (1.72)$$

Diferenciando (1.70) e usando (1.72)

$$\frac{d^2 F_\nu}{d\tau_\nu^2} = -4(1 - \gamma_\nu) \frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu} = 4(1 - \gamma_\nu) F_\nu \quad (1.73)$$

A expressão (1.73) é uma equação diferencial ordinária, de segunda ordem, linear, e com coeficientes constantes. Sua solução pode ser escrita

$$F_\nu = A \cosh \left[2(1 - \gamma_\nu)^{1/2} \tau_\nu \right] + B \sinh \left[2(1 - \gamma_\nu)^{1/2} \tau_\nu \right] \quad (1.74)$$

lembrando que $\sinh x = (1/2)(e^x - e^{-x})$ e $\cosh x = (1/2)(e^x + e^{-x})$. As constantes A e B podem ser determinadas pelas condições de contorno. Para $\tau_\nu = 0$, temos $F_\nu(\tau_\nu) = 0$, portanto $A = 0$, e (1.74) fica

$$F_\nu = B \sinh \left[2(1 - \gamma_\nu)^{1/2} \tau_\nu \right] \quad (1.75)$$

De (1.70) e (1.75)

$$J_\nu = \frac{S_\nu}{1 - \gamma_\nu} - \frac{1}{4(1 - \gamma_\nu)} \frac{dF_\nu}{d\tau_\nu} \quad (1.76)$$

$$\frac{dF_\nu}{d\tau_\nu} = 2(1 - \gamma_\nu)^{1/2} B \cosh \left[2(1 - \gamma_\nu)^{1/2} \tau_\nu \right] \quad (1.77)$$

de modo que

$$J_\nu = \frac{S_\nu}{1 - \gamma_\nu} - \frac{B}{2(1 - \gamma_\nu)^{1/2}} \cosh \left[2(1 - \gamma_\nu)^{1/2} \tau_\nu \right] \quad (1.78)$$

Aplicando a segunda condição de contorno na borda do disco, onde não há radiação incidente, temos que, em $z = H$, $\tau_\nu = \tau_{\nu H}$. De (1.61) e (1.62)

$$J_\nu(\tau_{\nu H}) = \frac{1}{2} I_\nu^+(\tau_{\nu H}) \quad (1.79)$$

$$F_\nu(\tau_{\nu H}) = I_\nu^+(\tau_{\nu H}) \quad (1.80)$$

de modo que

$$J_\nu(\tau_{\nu H}) = \frac{1}{2} F_\nu(\tau_{\nu H}) \quad (1.81)$$

De (1.75), (1.78) e (1.81)

$$B = \frac{2S_\nu}{1 - \gamma_\nu} \left\{ \sinh \left[2(1 - \gamma_\nu)^{1/2} \tau_{\nu H} \right] + \frac{\cosh \left[2(1 - \gamma_\nu)^{1/2} \tau_{\nu H} \right]}{(1 - \gamma_\nu)^{1/2}} \right\}^{-1} \quad (1.82)$$

Substituindo o valor de B em (1.75) e (1.78) podemos calcular o fluxo e a intensidade média. Finalmente, a densidade de energia pode ser calculada por

$$U_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu \quad (1.83)$$

Vamos estimar a densidade de energia em $\lambda = 5500 \text{ \AA}$, no centro do espectro visível, em um modelo do disco galáctico, admitindo $2H \simeq 200 \text{ pc}$. O coeficiente de emissão j_{5500} é determinado essencialmente pelas estrelas mais quentes, com tipos espectrais anteriores a M. Adotando uma função de luminosidade típica, isto é, uma distribuição para os diversos tipos espectrais na Galáxia (para detalhes ver Maciel 2002, seção 2.5), obtemos um coeficiente de emissão total

$$j_{5500} = 5.5 \times 10^{-28} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1} \text{ sr}^{-1}$$

Para o coeficiente de extinção total, podemos adotar um valor médio

$$k_E = 3.0 \times 10^{-22} \text{ cm}^{-1}$$

de modo que $\tau_{5500H} \simeq 9.3 \times 10^{-2}$. Adotando também um valor médio para o albedo, $\gamma_{5500} \simeq 0.2$, temos $\sigma_{5500} \simeq 6.0 \times 10^{-23} \text{ cm}^{-1}$ e $k_{5500} \simeq 2.4 \times 10^{-22} \text{ cm}^{-1}$. A função fonte fica $S_{5500} \simeq 1.8 \times 10^{-6} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1} \text{ sr}^{-1}$ e a constante $B \simeq 3.5 \times 10^{-6} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1} \text{ sr}^{-1}$. A intensidade média J_{5500} no centro do disco, onde $\tau_{5500} = 0$

é $J_{5500} \simeq 2.9 \times 10^{-7} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1} \text{ sr}^{-1}$. Finalmente, a densidade de energia é $U_{5500} \simeq 1.2 \times 10^{-16} \text{ erg cm}^{-3} \text{ \AA}^{-1}$, que pode ser comparada com o valor observado, da ordem de $U_{5500} \simeq 0.6 \times 10^{-16} \text{ erg cm}^{-3} \text{ \AA}^{-1}$.

EXERCÍCIOS

1.1 A figura 1.12 mostra o campo de radiação observado na Galáxia, desde as ondas de rádio até os raios γ . A abscissa é o logaritmo da frequência ν , e a ordenada é o logaritmo do produto νU_ν , onde U_ν é a densidade de energia. Mostre que o produto νU_ν representa a densidade de energia do campo de radiação por intervalo logarítmico de frequência.

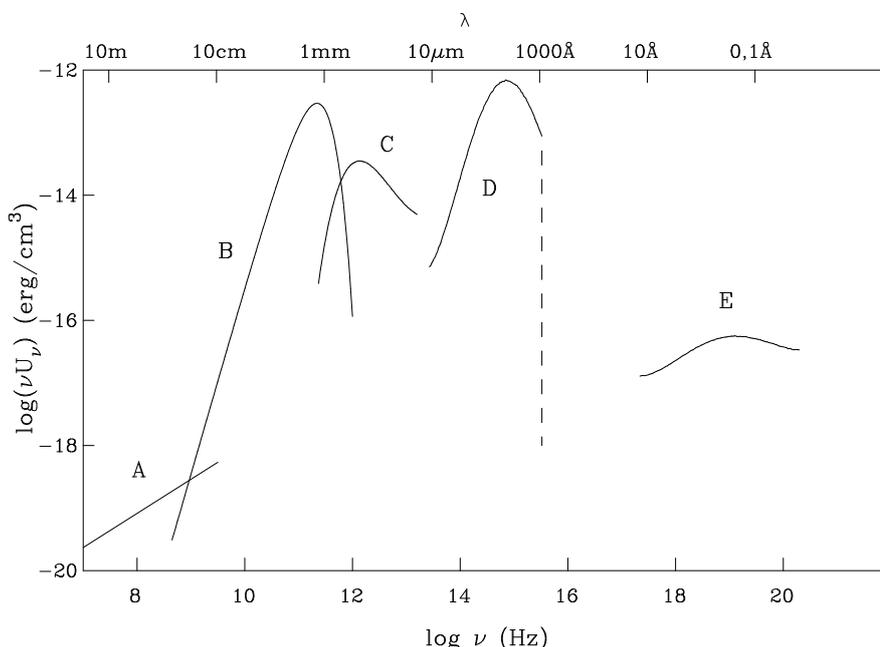


Figura 1.12 - O campo de radiação interestelar.

1.2 A componente D na figura 1.12 é basicamente a radiação estelar integrada, que pode ser observada no meio interestelar. A partir do resultado para a densidade de energia em $\lambda = 5500\text{\AA}$ encontrado na seção 1.5, estime o produto νU_ν para esse comprimento de onda e compare seu resultado com o valor indicado na figura.

1.3 Na faixa óptica e ultravioleta do espectro é costume medir as frequências em Hz e os comprimentos de onda em \AA , mas na região de alta energia (raios X e γ) é mais usual relacionar a energia dos quanta em eV (ou seus múltiplos) e os

comprimentos de onda em Å. Obtenha (a) uma expressão para a frequência ν em Hz em função do comprimento de onda λ em Å, e (b) uma expressão para a energia do quantum E_ν em eV em função do comprimento de onda λ em Å.

1.4 Na fotosfera solar, a opacidade em $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ é $\kappa_\lambda = 0.3 \text{ cm}^2/\text{g}$, onde κ_λ é o coeficiente de absorção por massa, definido por $\kappa_\lambda = k_\lambda/\rho$, onde $\rho \simeq 2.1 \times 10^{-7} \text{ g/cm}^3$ é a densidade típica da fotosfera. Qual é a distância média percorrida por um fóton com $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ na fotosfera solar?

1.5 Uma estrela esférica de tipo espectral MIII tem luminosidade $\log(L/L_\odot) = 3.0$ e raio $R/R_\odot = 100$. (a) Qual é o fluxo na superfície da estrela? (b) Supondo que a estrela está a uma distância de 20 pc, qual seria o fluxo observado no alto da atmosfera da Terra? Despreze a extinção interestelar.

Referências

- Carroll, B. W., Ostlie, D. A. 2006, *An Introduction to Modern Astrophysics*, Benjamin Cummings
- Choudhuri, A. R. 2010, *Astrophysics for physicists*, Cambridge University Press
- Cox, A. N. 2000, *Allen's Astrophysical Quantities*, AIP
- Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H. Poutanen, M., Donner, K. J. 2007, *Fundamental Astronomy*, Springer
- Maciel, W. J. 1999, *Introdução à estrutura e evolução estelar*, Edusp
- Maciel, W. J. 2002, *Astrofísica do meio interestelar*, Edusp
- Mihalas, D. 1978, *Stellar atmospheres*, Freeman
- Schuster, A. 1905, *Astrophysical Journal*, 21, 1
- Shu, F. H. 1982, *The physical universe*, University Science Books
- Swihart, T. L. 1968, *Astrophysics and stellar astronomy*, Wiley
- Zeilik, M., Gregory, S. A. 1997, *Introductory Astronomy and Astrophysics*, Brooks Cole

CAPITULO 2 – EQUILÍBRIO TERMODINÂMICO

2.1 Lei de Kirchhoff e o equilíbrio termodinâmico (ET)

Neste capítulo, vamos analisar a condição de equilíbrio termodinâmico e algumas de suas principais aplicações em problemas astrofísicos. Algumas referências sobre o material deste capítulo incluem Choudhuri (2010), Carroll e Ostlie (2006), Maciel (1999, 2002), Zeilik e Gregory (1997), Shu (1982) e Swihart (1968).

Vamos considerar a equação de transporte radiativo dada por (1.40)

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - k_\nu I_\nu \quad (2.1)$$

Podemos imaginar uma situação em que a radiação incidente sobre um objeto, vinda de todas as direções, tem a mesma natureza da radiação emitida pelo objeto, isto é, a intensidade I_ν é a mesma. Após um certo tempo, o objeto alcança um estado chamado *equilíbrio termodinâmico (ET)*, em que um equilíbrio é atingido entre a radiação emitida e a radiação absorvida pelo objeto. Nesse caso, a intensidade específica da radiação será constante, ou seja, $dI_\nu/ds = 0$, de modo que (2.1) fica

$$j_\nu = k_\nu I_\nu \quad (2.2)$$

$$I_\nu = \frac{j_\nu}{k_\nu} = S_\nu = B_\nu(T) \quad (2.3)$$

ou seja, a intensidade é idêntica à função fonte e depende de um único parâmetro, que é a *temperatura* T . A intensidade neste caso é conhecida como *Função de Planck* $B_\nu(T)$, ou radiação de corpo negro, dada por

$$B_\nu(T) = \frac{2 h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (2.4)$$

com unidades: $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}$. A relação (2.2) é a *lei de Kirchhoff*, e permite determinar a função fonte diretamente em função da temperatura, se a condição de ET prevalecer. O ET é uma condição idealizada, mas na prática existem diversas situações em que esta condição é aproximadamente verdadeira, inclusive em situações astrofísicas. Por exemplo, um objeto isolado em um envoltório adiabático tenderá a se aproximar do equilíbrio termodinâmico.

No caso da emissão de um corpo negro, podemos aplicar as relações obtidas no capítulo 1 para a emissão isotrópica, isto é, as relações (1.35), (1.36), (1.37) e (1.38). Obtemos então para a intensidade média, o fluxo, a densidade de energia e a pressão radiação as seguintes relações

$$J_\nu = I_\nu = B_\nu(T) = \frac{2 h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (2.5)$$

$$F_\nu = 0 \tag{2.6}$$

$$U_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{2.7}$$

$$P_{r\nu} = \frac{1}{3} U_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{3c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{2.8}$$

► EXEMPLO 2.1 - Energia média dos fótons em ET

Vamos determinar a energia média dos fótons em uma situação de equilíbrio termodinâmico (ET) caracterizado pela temperatura T . A energia média dos fótons \bar{E} pode ser obtida por

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty E_\nu n_\nu d\nu}{\int_0^\infty n_\nu d\nu} \tag{2.9}$$

onde $E_\nu = h\nu$ é a energia do fóton de frequência ν e n_ν é a densidade de fótons, ou seja, $n_\nu d\nu$ é o número de fótons por unidade de volume com frequência entre ν e $\nu + d\nu$. Este número pode ser relacionado com a densidade de energia U_ν por

$$n_\nu d\nu = \frac{U_\nu d\nu}{h\nu} \tag{2.10}$$

Usando a relação (2.7) para U_ν , temos

$$n_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \tag{2.11}$$

Substituindo (2.11) em (2.9) obtemos

$$\bar{E} = \frac{kT \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}{\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1}} = kT \frac{I_1}{I_2} \tag{2.12}$$

onde $x = h\nu/kT$. A primeira integral tem um resultado conhecido,

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \tag{2.13}$$

A segunda integral é

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \simeq 2(1 + 1/8 + 1/27 + 1/64 + \dots) \simeq 2.404 \tag{2.14}$$

Portanto, obtemos $\bar{E} = 2.701 kT$.

2.2 Propriedades da função de Planck

Vamos explorar um pouco a equação (2.4). A figura 2.1 mostra a intensidade $B_\nu(T)$ em função da frequência para alguns valores da temperatura T no intervalo de $T = 100\text{ K}$ até $T = 10^7\text{ K}$.

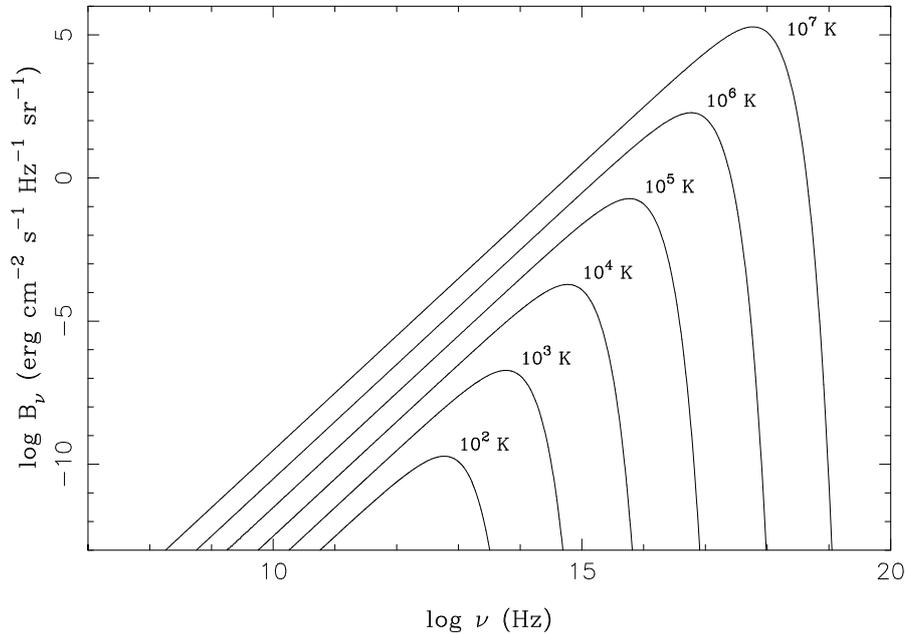


Figura 2.1 - Intensidade da radiação de um corpo negro.

Podemos observar que, para uma dada frequência, a intensidade aumenta para temperaturas mais altas, enquanto que para uma certa temperatura existe um valor de ν para o qual a intensidade é máxima. Para obter este valor, basta encontrar o máximo da função $B_\nu(T)$ dada por (2.4), resultando

$$h \nu_{max} = 2.821 k T \tag{2.15}$$

onde ν está em Hz e T em K e $k = 1.38 \times 10^{-16}$ erg/K é a constante de Boltzmann. Esta relação é conhecida como *lei de Wien*, e mostra que, para temperaturas mais altas, o máximo da função de Planck ocorre em frequências maiores (ou comprimentos de onda menores).

► EXEMPLO 2.2 - Cor e temperatura

Sabemos que uma barra de ferro aquecida torna-se avermelhada se a temperatura for da ordem de 1000 graus centígrados, ficando amarelada e tendendo para o azul se a temperatura for ainda mais alta (figura 2.2a). Nesse caso, a emissão de luz (radiação) pela barra segue aproximadamente a relação (2.4), no sentido de que o comprimento de onda dominante da radiação (sua “cor”) desloca-se para valores menores (mais “azuis”) à medida que a temperatura aumenta (figura 2.2b).

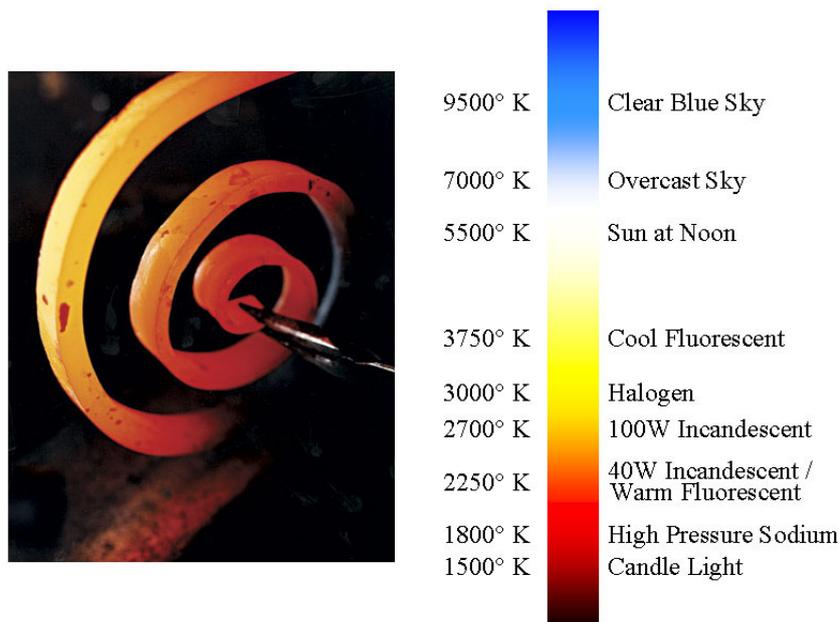


Figura 2.2 - (a) Emissão de luz por uma barra aquecida. (b) Cor e temperatura.

A função de Planck (2.4) tem duas aproximações importantes, válidas para a região de altas ou baixas frequências:

Altas frequências: $h \nu / k T \gg 1$

Se $h \nu / k T \gg 1$, é fácil ver que

$$B_\nu(T) \simeq \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT} \quad (h \nu / k T \gg 1) \quad (2.16)$$

Esta relação é conhecida como *distribuição de Wien*.

Baixas frequências: $h \nu / k T \ll 1$

Por outro lado, se $h \nu / k T \ll 1$, temos

$$B_\nu(T) \simeq \frac{2\nu^2 k T}{c^2} \quad (h \nu / k T \ll 1) \quad (2.17)$$

que é a *distribuição de Rayleigh-Jeans*.

Finalmente, estamos às vezes interessados em obter o valor integrado da função de Planck, isto é, na energia total emitida em todas as frequências, com unidades $\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$. Definindo novamente

$$x = \frac{h \nu}{k T} \quad (2.18)$$

$$dx = \frac{h d\nu}{k T} \quad (2.19)$$

obtemos de (2.4)

$$\begin{aligned}
 B(T) &= \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu \\
 &= \frac{2h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \\
 &= \frac{2k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \\
 &= \frac{2k^4 T^4}{h^3 c^2} \frac{\pi^4}{15} = \frac{\sigma}{\pi} T^4
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

onde introduzimos a *constante de Stefan-Boltzmann*

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}
 \tag{2.21}$$

Às vezes é usada a *constante de radiação*,

$$a = \frac{4\sigma}{c} = 7.57 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}
 \tag{2.22}$$

de modo que (2.20) fica

$$B(T) = \frac{\sigma}{\pi} T^4 = \frac{ac}{4\pi} T^4
 \tag{2.23}$$

Lembrando (1.37), podemos escrever para a densidade de energia integrada

$$U = \frac{4\pi}{c} J = \frac{4\pi}{c} B(T) = aT^4
 \tag{2.24}$$

Analogamente, lembrando (1.38) temos para a pressão da radiação integrada

$$P_r = \frac{1}{3} U = \frac{1}{3} aT^4
 \tag{2.25}$$

A fotosfera das estrelas não está em ET, pois, por definição, ela é a região onde se origina o fluxo de radiação que podemos observar, o qual, portanto, não é nulo como previsto pela equação (1.36). Entretanto, podemos aproximar o fluxo na fotosfera das estrelas por uma expressão semelhante à equação (2.23), definindo um parâmetro conveniente, que chamamos *temperatura efetiva* T_{ef} . Nesse caso, para uma estrela de raio R e temperatura efetiva T_{ef} , a luminosidade total, ou seja, a energia emitida em todas as frequências por unidade de tempo L é

$$L = 4\pi R^2 F = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4
 \tag{2.26}$$

As relações (2.20), (2.23), (2.24), (2.25) e (2.26) são versões alternativas da *equação de Stefan-Boltzmann*. A temperatura não é constante na atmosfera das estrelas, como veremos no capítulo 3, de modo que a temperatura efetiva deve ser uma temperatura representativa das condições médias na fotosfera.

As relações acima foram obtidas em termos das quantidades monocromáticas definidas em função da frequência ν . Naturalmente, podemos obter relações equivalentes em função do comprimento de onda λ . Nesse caso, temos para a intensidade específica

$$B_\lambda(T) = \frac{2 h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{h c / \lambda k T} - 1} \tag{2.27}$$

com unidades: $\text{erg cm}^{-3} \text{s}^{-1} \text{sr}^{-1}$ ou $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{\AA}^{-1} \text{sr}^{-1}$. A figura 2.3 mostra a função $B_\lambda(T)$ para algumas temperaturas típicas das atmosferas estelares, estrelas quentes ($T = 7000 \text{ K}$), o Sol ($T = 5800 \text{ K}$) e estrelas mais frias ($T = 4000 \text{ K}$).

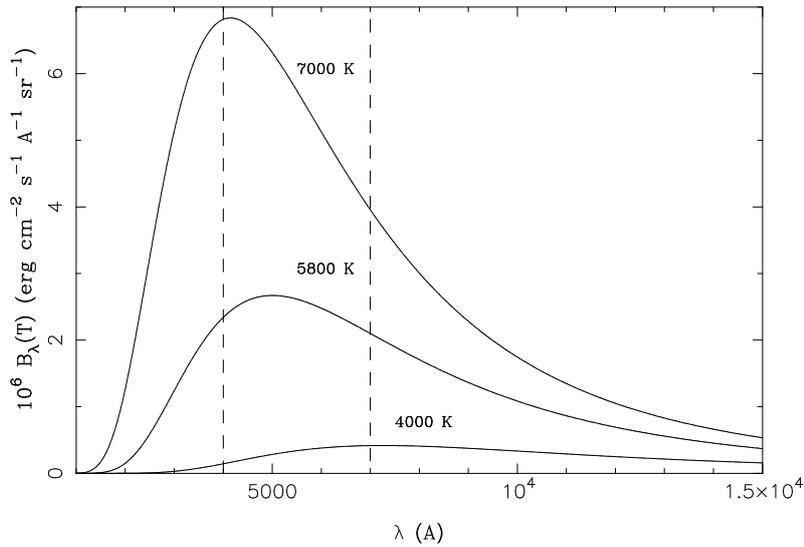


Figura 2.3 - Intensidade da radiação de um corpo negro.

Para as demais equações em termos do comprimento de onda, temos:

$$\lambda_{max} T = 0.290 \quad (\text{lei de Wien}) \tag{2.28}$$

onde λ está em cm e T em K.

$$B_\lambda(T) \simeq \frac{2 h c^2}{\lambda^5} e^{-h c / \lambda k T} \quad (h c / \lambda k T \gg 1, \text{ Wien}) \tag{2.29}$$

$$B_\lambda(T) \simeq \frac{2 c k T}{\lambda^4} \quad (h c / \lambda k T \ll 1, \text{ Rayleigh - Jeans}) \tag{2.30}$$

Vemos que $B_\lambda \neq B_\nu$, mas como $B_\lambda d\lambda = B_\nu d\nu$, a relação (2.20) para a intensidade integrada não se altera:

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu d\nu = \int_0^\infty B_\lambda d\lambda = \frac{\sigma}{\pi} T^4 = \frac{a c}{4 \pi} T^4 \tag{2.31}$$

► EXEMPLO 2.3 - Emissão infravermelha do corpo humano

De acordo com a equação (2.26), a energia emitida por segundo por uma estrela é $L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$, ou seja, $L = S \sigma T_{ef}^4$, onde S é a área da superfície da estrela. Uma pessoa também emite radiação. Em condições normais, a temperatura do corpo humano é de cerca de 37°C ou $T \simeq 310\text{K}$. A área do corpo de uma pessoa de tamanho normal é $S \simeq 1.4\text{m}^2$, aproximadamente. Portanto, a energia emitida por segundo por uma pessoa é $L_p \simeq (1.4 \times 10^4) (5.67 \times 10^{-5}) (310)^4 \simeq 7.3 \times 10^9 \text{ erg/s} = 730 \text{ J/s} = 730 \text{ W}$. De acordo com a lei de Wien (2.28), o comprimento de onda que corresponde ao máximo da emissão é dado por $\lambda_{max} T \simeq 0.29$, ou seja, $\lambda_{max} \simeq 0.29/310 = 9.35 \times 10^{-4} \text{ cm} = 93500 \text{ \AA} = 9350 \text{ nm} = 9.35 \mu$, ou seja, a emissão ocorre principalmente no infravermelho. Naturalmente este resultado é aproximado, não apenas porque a área da superfície varia de pessoa para pessoa, como também porque partes diferentes do corpo humano têm temperaturas diferentes (figura 2.4).

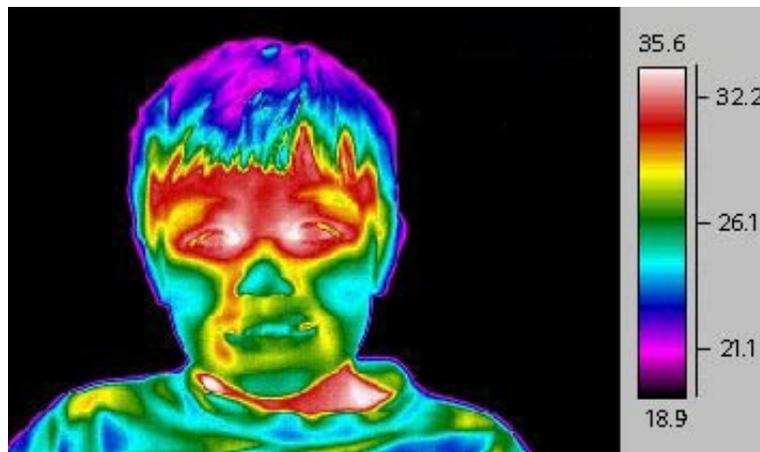


Figura 2.4 - Temperaturas do corpo humano ($^\circ\text{C}$) em cores falsas (NASA/IPAC)

Além disto, em uma situação normal, a pessoa também absorve energia do meio ambiente, de modo que a energia efetivamente perdida deve levar em conta a energia absorvida.

► EXEMPLO 2.4 - Emissão infravermelha pela poeira interestelar

Na seção 1.5 consideramos a determinação do campo de radiação levando em conta a absorção pelos grãos de poeira interestelar. Estudos detalhados mostram que esses grãos têm uma composição química variada, incluindo silicatos, óxidos de ferro, carbono, etc. Por exemplo, grãos de SiC são identificados em meteoritos (figura 2.5b), como o meteorito de Murchison, que caiu na Austrália em 1969 (figura 2.5a). Os grãos podem ser estudados pela extinção, polarização e também pela emissão de energia na faixa infravermelha do espectro. Esta emissão pode ser aproximada por um corpo negro, de modo que as equações desta seção são aplicáveis.

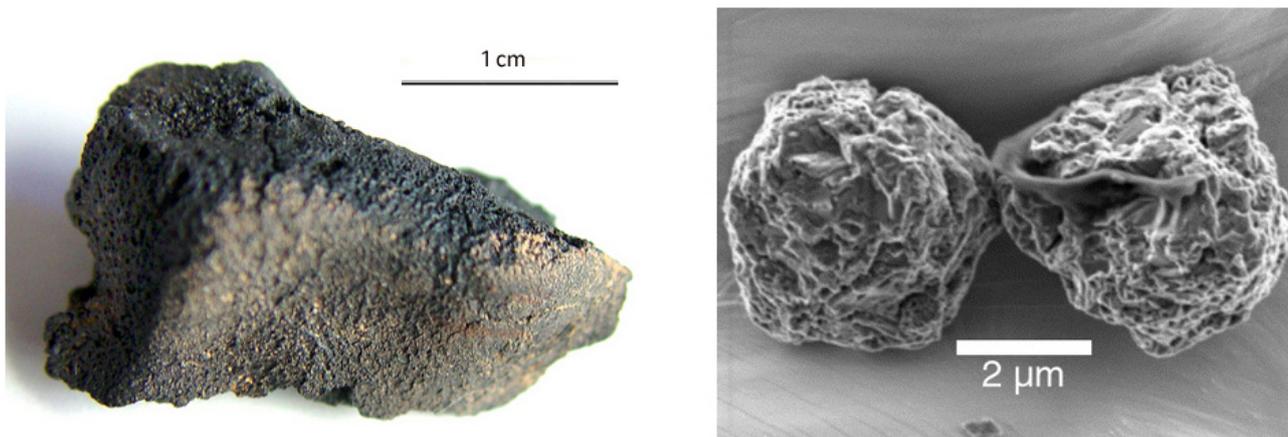


Figura 2.5 - (a) Meteorito Murchison (New England Meteoritical Services). (b) Grãos de SiC no meteorito Murchison (University of Chicago).

A figura 2.6a mostra a distribuição de energia no infravermelho produzida pela poeira interestelar na vizinhança solar, obtida pelo satélite COBE. Neste caso, o pico da emissão ocorre em $\lambda_{max} \simeq 140 \mu\text{m}$, de modo que a temperatura dos grãos deve ser próxima a $T_g \simeq 20 \text{ K}$, de acordo com a lei de Wien (2.28). Mesmo em objetos muito distantes, como a galáxia *starburst* NGC 6240, situada a cerca de 100 Mpc, pode ser observada a emissão pela poeira (figura 2.5b), com um máximo em $\lambda_{max} \simeq 63 \mu\text{m}$, correspondendo a uma temperatura $T_g \simeq 46 \text{ K}$.

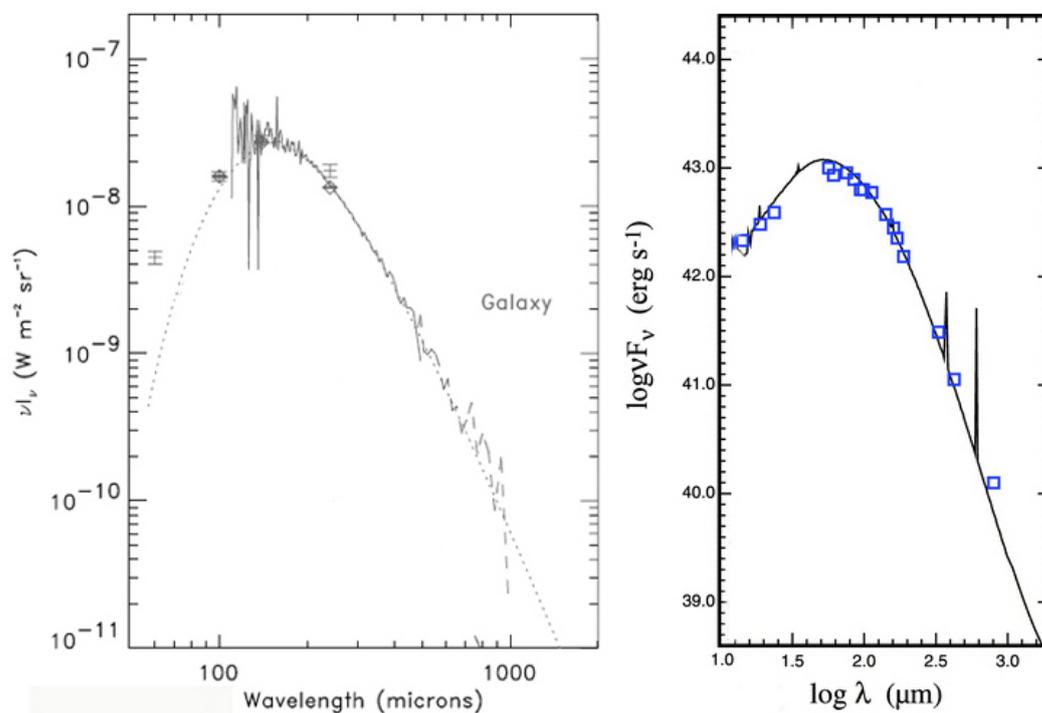


Figura 2.6 - (a) Distribuição de energia no infravermelho na Galáxia (COBE). (b) Idem, em NGC 6240 (B. Groves).

► EXEMPLO 2.5 - Fluxo na fotosfera solar

No Exemplo 1.4 analisamos o caso isotrópico, e obtivemos as equações (1.35)-(1.38), válidas para este caso. Como pode ser observado por exemplo na equação (2.4), no ET a intensidade não depende dos ângulos θ e ϕ , sendo a mesma em todas as direções. Portanto, as equações do caso isotrópico são também válidas no ET.

Considerando a equação de Stefan-Boltzmann (2.26), podemos escrever para o fluxo total ($\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$) na superfície do Sol:

$$F(R_{\odot}) = \pi B(T_{ef}) = \sigma T_{ef}^4 \tag{2.32}$$

A temperatura efetiva do Sol é aproximadamente $T_{ef} = 5800 \text{ K}$, tal que o fluxo observado seja equivalente ao de um corpo negro à temperatura T_{ef} . Isto pode ser confirmado considerando

$$F(R_{\odot}) = \sigma T_{ef}^4 = (5.67 \times 10^{-5}) (5800)^4 = 6.42 \times 10^{10} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \tag{2.33}$$

Vemos que esse resultado é virtualmente idêntico ao resultado que obtivemos no Exemplo 1.1, $F(R_{\odot}) = 6.33 \times 10^{10} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

► EXEMPLO 2.6 - O gás coronal

O Sol tem uma atmosfera complexa, compreendendo (i) a fotosfera, onde é essencialmente produzida a radiação visível, característica de uma temperatura da ordem de 6000 K, (ii) a cromosfera, (iii) a região de transição, e (iv) a coroa. As camadas mais externas (ii)-(iv) podem ser observadas em eclipses ou usando técnicas especiais, e suas propriedades diferem significativamente das propriedades da fotosfera solar (figura 2.7).

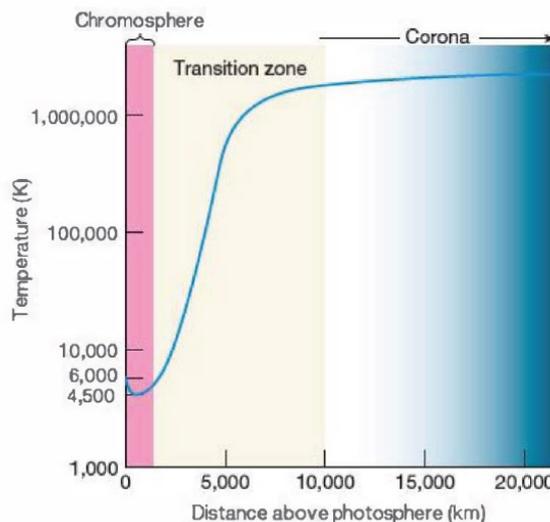


Figura 2.7 - Variação da temperatura nas camadas externas da atmosfera solar (E. Chaisson).

A região mais quente é a coroa, o que pode ser constatado pela observação de átomos altamente ionizados, cuja existência requer altas temperaturas, como Fe XIV. Os processos físicos responsáveis pela coroa não são completamente conhecidos, mas estão provavelmente ligados a perturbações de origem magnética na fotosfera solar. Uma evidência é o fato de que a coroa difere significativamente dependendo do nível de atividade do Sol, que está ligado a seu campo magnético. Isto pode ser visto na figura 2.8, onde está mostrada a coroa solar na fase quiescente do Sol (a) e na fase de Sol ativo (b).

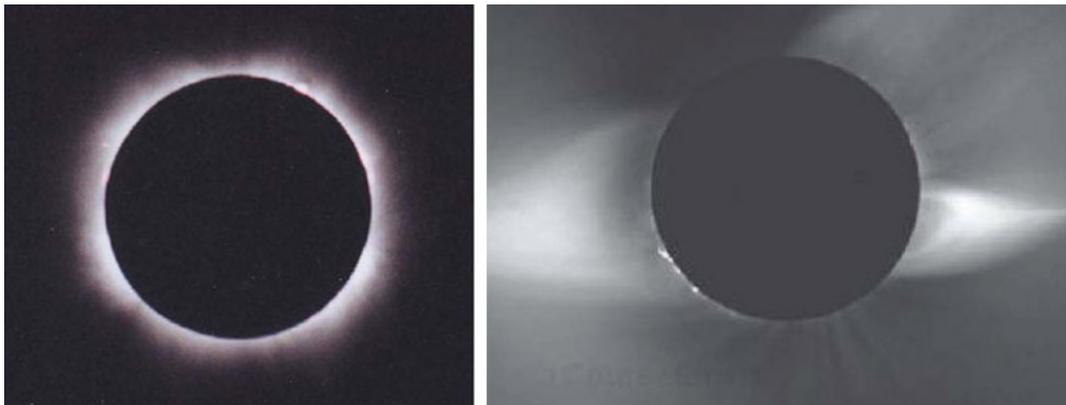


Figura 2.8 - Duas imagens da coroa solar no ultravioleta. (a) Sol calmo (b) Sol ativo (B. Angelov, NCAR High Altitude Observatory).

2.3 A lei de Stefan-Boltzmann e as equações da termodinâmica

Vamos mostrar que a lei de Stefan-Boltzmann (2.24) pode ser obtida diretamente das equações básicas da termodinâmica no caso do ET (cf. Maciel 1999, Rybicki e Lightman 1979). Da primeira lei da termodinâmica podemos escrever

$$dE = dQ - P dV \tag{2.34}$$

onde dE é a variação de energia interna do sistema em um processo infinitesimal, dQ é o calor absorvido pelo sistema, P é a pressão do gás, e $P dV$ é o trabalho realizado pelo sistema em uma expansão infinitesimal com uma variação de volume dada por dV , por exemplo colocando um pistão que permita a expansão do gás. Da segunda lei temos

$$dQ = T dS \tag{2.35}$$

onde dS é a variação de entropia do sistema. Combinando estas equações temos

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dE}{T} + \frac{P dV}{T} \tag{2.36}$$

Sabemos que a densidade de energia do sistema U é simplesmente $U = E/V$, e de (2.25) vemos que $P = U/3$. Portanto, $dE = U dV + V dU$ de modo que

$$dS = \frac{U dV}{T} + \frac{V dU}{T} + \frac{P dV}{T} = \frac{V}{T} \frac{dU}{dT} dT + \left(\frac{U + U/3}{T} \right) dV$$

$$dS = \frac{V}{T} \frac{dU}{dT} dT + \frac{4U}{3T} dV \tag{2.37}$$

Mas

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV \tag{2.38}$$

Combinando estas duas equações

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{V}{T} \frac{dU}{dT} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \frac{4U}{3T} \tag{2.39}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{1}{T} \frac{dU}{dT} = -\frac{4U}{3T^2} + \frac{4}{3T} \frac{dU}{dT} \tag{2.40}$$

Simplificando esta última expressão obtemos

$$\frac{dU}{dT} = \frac{4U}{T} \tag{2.41}$$

que pode ser integrada, obtendo

$$\log U = 4 \log T + \log a \tag{2.42}$$

onde a é uma constante, ou seja, $U(T) = aT^4$, que é a lei de Stefan-Boltzmann. As equações da termodinâmica permitem obter a lei de Stefan-Boltzmann, mas para mostrar que a constante a da equação (2.42) é a mesma constante a da equação (2.24) é necessário usar a mecânica estatística quântica.

2.4 Equações do equilíbrio termodinâmico

Além das equações envolvendo o campo de radiação, o ET pode ser caracterizado por outras 3 equações que descrevem propriedades do gás, como a *distribuição de Maxwell*, a *equação de Boltzmann* e a *equação de Saha* (cf. Maciel 2002).

(a) A função de distribuição de velocidades de Maxwell

A distribuição de Maxwell é extremamente útil em diversos problemas astrofísicos. Esta equação pode ser colocada em diversas formas (cf. Reif 1965), das quais veremos as mais usuais. Seja $f(\mathbf{v})d\mathbf{v}$ a fração das partículas de massa m de um sistema cuja velocidade esteja em um intervalo tridimensional entre \mathbf{v} e $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. No ET a função f

é isotrópica, e podemos escrever $f(\mathbf{v}) = f(v)$, onde $v = |\mathbf{v}|$. A *função de distribuição de Maxwell* é

$$f(v) dv = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp(-mv^2/2kT) dv \quad (2.43)$$

(ver por exemplo Reif 1965). O valor médio (rms) da velocidade é

$$\langle v^2 \rangle^{1/2} = \left(\frac{3kT}{m} \right)^{1/2} \quad (2.44)$$

Em algumas situações astrofísicas temos informações sobre apenas uma componente da velocidade, frequentemente a velocidade radial. Neste caso, estamos interessados na distribuição maxwelliana de uma componente da velocidade. De (2.43) podemos mostrar que

$$f(v_x) dv_x = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp(-mv_x^2/2kT) dv_x \quad (2.45)$$

onde $f(v_x)dv_x$ é a fração das partículas cuja componente de velocidade na direção x está compreendida no intervalo entre v_x e $v_x + dv_x$, independentemente das outras componentes. Neste caso, $\langle v_x \rangle = 0$, pois a componente x pode ser positiva ou negativa com igual probabilidade. Porém,

$$\langle v_x^2 \rangle^{1/2} = \left[\frac{\int f(v_x) v_x^2 dv_x}{\int f(v_x) dv_x} \right]^{1/2} = \left(\frac{kT}{m} \right)^{1/2} \quad (2.46)$$

ou seja, a velocidade rms da distribuição (2.45) é uma média representativa desta distribuição.

A figura 2.9 mostra um exemplo da distribuição de uma componente da velocidade considerando (i) uma nuvem interestelar com temperatura típica $T = 100$ K e (ii) a fotosfera solar, com uma temperatura $T = 5800$ K. Em ambos os casos consideramos o gás composto apenas de H atômico, de modo que a massa de cada partícula é $m = m_H = 1.67 \times 10^{-24}$ g.

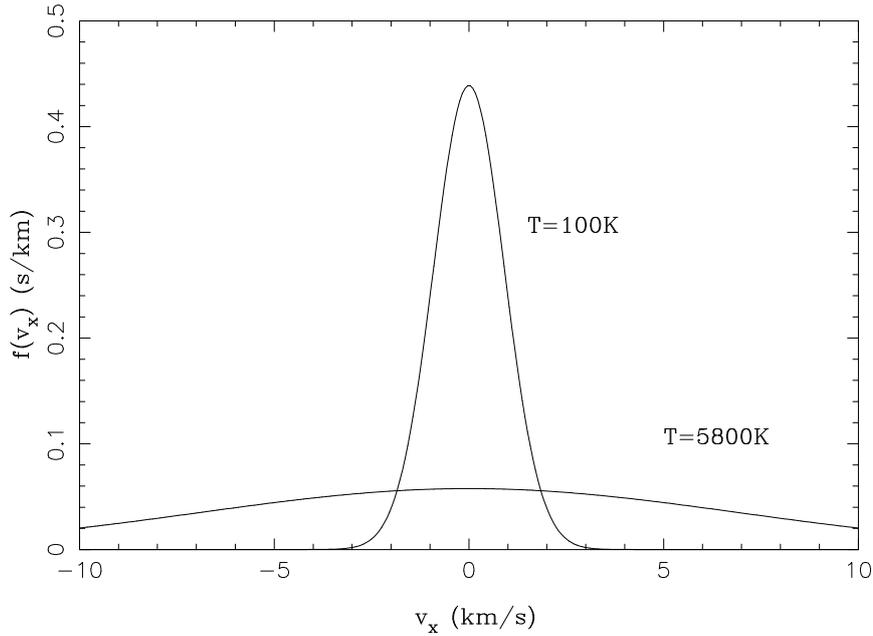


Figura 2.9 - Distribuição de uma componente da velocidade em nuvens interestelares e na fotosfera solar.

Como pode ser observado, a distribuição é simétrica, e torna-se mais estreita à medida que temperaturas mais baixas são consideradas.

Finalmente, estamos também interessados no caso em que precisamos conhecer a fração $f'(v)dv$ de partículas com $v = |\mathbf{v}|$ entre v e $v + dv$, independentemente da direção do vetor velocidade. Nesse caso temos

$$\begin{aligned}
 f'(v) dv &= 4 \pi f(v) dv v^2 \\
 &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp(-mv^2/2kT) dv
 \end{aligned}
 \tag{2.47}$$

A figura 2.10 mostra a distribuição $f'(v)$ nos dois casos considerados na figura 2.9, isto é, uma nuvem interestelar com $T = 100 \text{ K}$ e a fotosfera solar $T = 5800 \text{ K}$, adotando $m = m_H = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$.

Neste caso, podemos definir as velocidades

$$\langle v \rangle = \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2} \quad (\text{velocidade média})
 \tag{2.48}$$

$$\langle v^2 \rangle^{1/2} = \left(\frac{3kT}{m} \right)^{1/2} \quad (\text{velocidade rms})
 \tag{2.49}$$

$$v_p = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \quad (\text{velocidade mais provável})
 \tag{2.50}$$

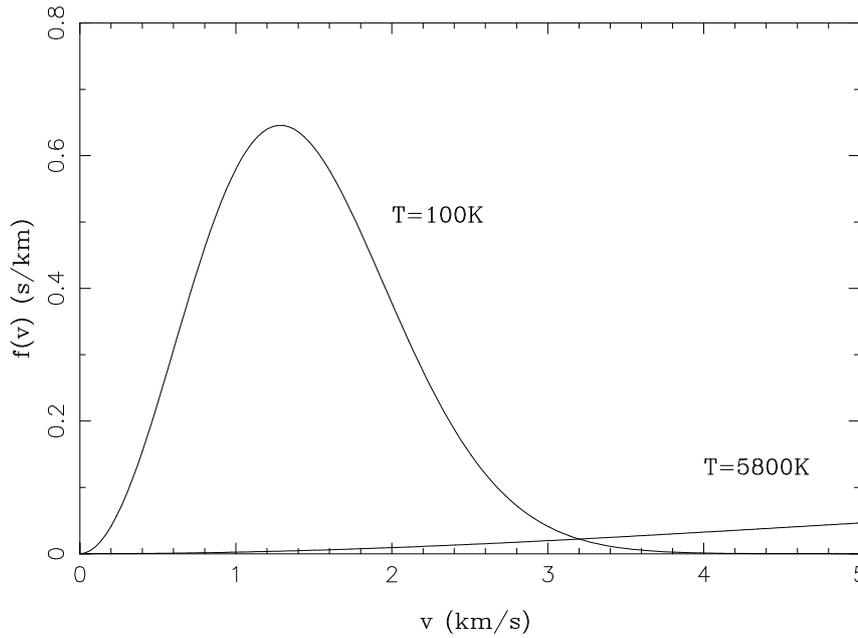


Figura 2.10 - Distribuição da velocidade (módulo) em nuvens interestelares e na fotosfera solar.

Todas essas velocidades são representativas das condições do gás, e

$$\langle v^2 \rangle^{1/2} \simeq 1.224 v_p \tag{2.51}$$

$$\langle v \rangle \simeq 1.128 v_p \tag{2.52}$$

As três distribuições (2.43), (2.45) e (2.47) são frequentemente usadas em problemas astrofísicos, podendo caracterizar as condições do gás de maneira aproximada, mesmo fora do ET. Nesse caso, a temperatura T que aparece nessas equações é a *temperatura cinética* do gás.

► **EXEMPLO 2.7 - Estimativa da velocidade média**

Vamos estimar as velocidades médias típicas dos átomos do gás em algumas situações astrofísicas. Inicialmente, vamos considerar uma nuvem interestelar difusa. Nesse caso, a temperatura cinética é da ordem de $T \simeq 100$ K, e sua composição é basicamente de H neutro, de modo que o peso molecular deste gás é $\mu \simeq 1$. A velocidade média representativa das partículas é

$$v \simeq \sqrt{\frac{kT}{\mu m_H}} = \sqrt{\frac{(1.38 \times 10^{-16}) (100)}{(1) (1.67 \times 10^{-24})}} = 0.9 \text{ km/s} \tag{2.53}$$

onde $m_H = 1.67 \times 10^{-24}$ g é a massa do átomo de H. Vamos agora considerar novamente a fotosfera do Sol. Como a temperatura típica da fotosfera é a temperatura efetiva, $T_{ef} = 5800$ K, e admitindo que o gás é composto essencialmente de H, temos que $\mu \simeq 1$ e

$$v \simeq \sqrt{\frac{kT}{\mu m_H}} = \sqrt{\frac{(1.38 \times 10^{-16}) (5800)}{(1) (1.67 \times 10^{-24})}} = 6.9 \text{ km/s} \quad (2.54)$$

Finalmente, vamos considerar o gás quente que envolve o disco galáctico, observável por exemplo pela presença do íon OVI. Para que este íon exista, é necessário que a energia média do gás seja da ordem do potencial de ionização para transformar OV em OVI, que é $PI = 114 \text{ eV}$ (Cox 2000). Portanto, a temperatura média deste gás deve ser dada por $kT \simeq PI$, de onde obtemos $T \sim 1.3 \times 10^6 \text{ K}$. Com este valor temos para a velocidade típica dos átomos de oxigênio

$$v \simeq \sqrt{\frac{kT}{\mu m_H}} = \sqrt{\frac{(1.38 \times 10^{-16}) (1.3 \times 10^6)}{(16) (1.67 \times 10^{-24})}} = 26 \text{ km/s} \quad (2.55)$$

(b) A equação de Boltzmann

Seja um elemento X no estado de ionização r . No ET, as populações relativas de dois níveis de energia j e k são relacionadas pela expressão

$$\frac{n_j(X^r)}{n_k(X^r)} = \frac{g_{rj}}{g_{rk}} \exp [-(E_{rj} - E_{rk})/kT] \quad (2.56)$$

que é a *equação de Boltzmann*, onde g_{rj}, g_{rk} são os pesos estatísticos dos níveis j e k , e E_{rj}, E_{rk} são as energias destes níveis.

► EXEMPLO 2.8 - A linha de 21 cm do H

O equilíbrio termodinâmico é favorecido pela frequência de colisões, que fazem uma equipartição da energia disponível, estabelecendo um equilíbrio entre as diversas partículas do sistema. Por esta razão, situações em que os processos colisionais são dominantes frequentemente podem ser estudadas a partir das equações do ET. No meio interestelar, em geral, não há equilíbrio termodinâmico, principalmente porque as baixas densidades do gás nas nuvens interestelares dificultam os processos colisionais. Apesar disso, em alguns casos esses processos são dominantes. A linha de 21 cm do H é produzida por uma transição radiativa entre dois níveis hiperfinos do estado fundamental, os quais correspondem às duas orientações possíveis do spin do elétron e do núcleo. Os dois níveis têm uma diferença de energia $h\nu_{12} = 5.9 \times 10^{-6} \text{ eV}$, de modo que a frequência da radiação emitida é $\nu_{12} = 1420 \text{ MHz}$, correspondendo a um comprimento de onda $\lambda_{12} = 21.11 \text{ cm}$. A probabilidade de transição espontânea do nível 2 (superior) para o nível 1 (inferior), medida pelo coeficiente A_{21} de Einstein, é muito baixa: $A_{21} = 2.9 \times 10^{-15} \text{ s}^{-1}$ (ver capítulo 3). Isto significa que um átomo no nível 2 fica um longo tempo neste nível antes de decair para o nível 1. Esse tempo é essencialmente o inverso do coeficiente A_{21} , ou seja, $t_2 \sim 1/A_{21} \sim 10^7 \text{ ano}$. Como esse tempo é muito longo, antes de ocorrer um decaimento há uma grande probabilidade de haver colisões com outras partículas, mesmo nas baixas densidades

interestelares. Nestas condições, os níveis de energia serão povoados colisionalmente, resultando populações características de ET, ou seja, podemos usar as equações desta seção, em particular a equação de Boltzmann, (2.56). Esta equação fica então

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-h\nu_{12}/kT} \tag{2.57}$$

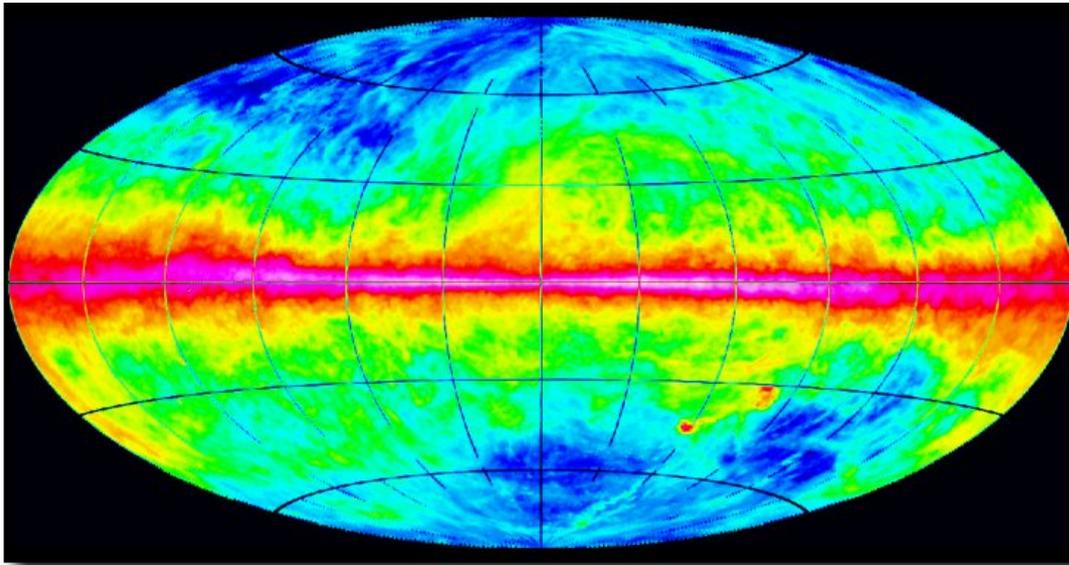


Figura 2.11 - Emissão galáctica em 21 cm (levantamento Leiden/Argentina/Bonn).

Considerando que a temperatura das nuvens interestelares é baixa, $T \simeq 100$ K, mais uma simplificação pode ser feita, pois

$$\frac{h\nu_{12}}{kT} = \frac{1.44}{\lambda_{12}(\text{cm}) T(\text{K})} \simeq \frac{0.07}{T} \ll 1 \tag{2.58}$$

Portanto, para as temperaturas interestelares típicas podemos desprezar o termo exponencial em (2.57). Com os pesos estatísticos $g_2 = 3$ e $g_1 = 1$, a razão das abundâncias dos níveis 2 e 1 fica

$$\frac{n_2}{n_1} \simeq \frac{g_2}{g_1} = \frac{3}{1} = 3 \tag{2.59}$$

ou seja, cerca de 3/4 dos átomos de H estão no nível superior, e 1/4 no nível inferior, e as populações dos níveis não dependem da temperatura. Apesar do grande tempo de vida do nível superior, a densidade de coluna do H neutro nas nuvens interestelares é tão alta, da ordem de $N_H \sim 10^{22} \text{ cm}^{-2}$, que a emissão na linha de 21 cm pode ser observada, como mostrado por exemplo na figura 2.11. De fato, esta emissão é tão importante, que levou aos primeiros mapeamentos da estrutura do disco galáctico, já no final da década de 1950.

(c) A equação de Saha

A equação de ionização de Saha exprime a distribuição dos átomos do elemento X nos diversos estágios de ionização em ET, podendo ser obtida pela generalização da equação de excitação de Boltzmann. A *equação de Saha* é:

$$\frac{n(X^{r+1}) n_e}{n(X^r)} = \frac{f_{r+1} f_e}{f_r} \tag{2.60}$$

onde as funções de partição dos átomos f_r e f_{r+1} são dadas por

$$f(X^r) = f_r = \sum_k g_{rk} \exp(-E_{rk}/kT) \tag{2.61}$$

onde g_{rk} é novamente o peso estatístico e E_{rk} a energia correspondente, e a função de partição dos elétrons livres por unidade de volume f_e é dada por

$$f_e = 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \tag{2.62}$$

onde $m_e = 9.11 \times 10^{-28}$ g é a massa do elétron. Uma aproximação usual consiste em considerar apenas os primeiros termos das funções de partição atômicas

$$f_r \simeq g_{r,1} \exp(-E_{r,1}/kT) \tag{2.63}$$

$$f_{r+1} \simeq g_{r+1,1} \exp(-E_{r+1,1}/kT) . \tag{2.64}$$

Neste caso, (2.60) fica

$$\frac{n(X^{r+1}) n_e}{n(X^r)} \simeq \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} 2 \frac{g_{r+1,1}}{g_{r,1}} e^{(-\Delta E_r/kT)} \tag{2.65}$$

onde $\Delta E_r = E_{r+1,1} - E_{r,1}$ é a energia necessária para ionizar o elemento X^r a partir do estado fundamental.

► EXEMPLO 2.9 - Ionização do H

Vamos considerar uma aplicação simples da equação de Saha (2.65) para o H na atmosfera solar. De acordo com modelos para a fotosfera solar (Cox 2000), em um ponto típico da fotosfera, temos uma densidade eletrônica $n_e \simeq 2 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$. Para o H, o potencial de ionização é de 13.6 eV, e os pesos estatísticos são $g_1 = 2$ (para $r = 1$, ou seja, átomos neutros de H, com densidade n_H) e $g_2 = 1$ (para $r = 2$, ou seja, prótons, com densidade n_p). De (2.65) obtemos

$$\log \left(\frac{n_p n_e}{n_H} \right) \simeq 15.38 + 1.5 \log T - \frac{68544}{T} \tag{2.66}$$

com T em K e n em cm^{-3} . Podemos definir o grau de ionização do H por

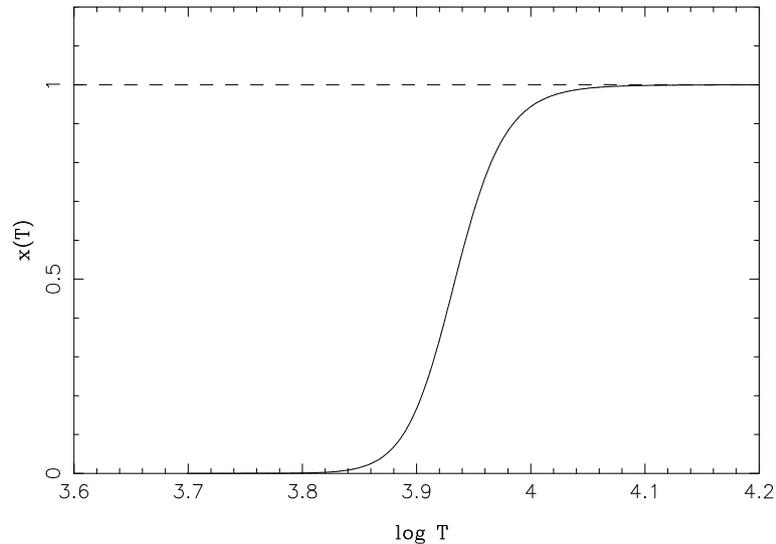


Figura 2.12 - Ionização do H.

$$x = \frac{n_p}{n_p + n_H} = \frac{(n_p/n_H)}{1 + (n_p/n_H)} \tag{2.67}$$

Portanto, admitindo uma densidade eletrônica constante, de (2.66) podemos obter n_p/n_H para cada temperatura, e de (2.67) o grau de ionização do hidrogênio. A figura 2.12 mostra os resultados para temperaturas $5000 < T(K) < 12000$. Vemos que, nas condições adotadas, o H está essencialmente neutro para as temperaturas mais baixas, $T \leq 8000$ K, e ionizado para temperaturas mais altas.

2.5 Desvios do Equilíbrio Termodinâmico

(a) Coefficientes de desvio

Na maior parte das situações astrofísicas, o equilíbrio termodinâmico estrito não prevalece, de modo que, a rigor, as equações das seções anteriores não são aplicáveis. Entretanto, frequentemente elas são usadas para obter estimativas, ou cálculos de ordens de grandeza, com resultados aproximadamente corretos. Nesse caso, o parâmetro T que aparece nestas equações tem um significado mais complexo, não sendo mais identificado com a temperatura absoluta característica do ET. Por exemplo, na distribuição de Maxwell esse parâmetro é a *temperatura cinética* T_k , na equação de Boltzmann é a *temperatura de excitação* T_{ex} , na equação de Saha é a *temperatura de ionização* T_i , e na função de Planck é a *temperatura de radiação* T_r ou a *temperatura de cor* T_c . Em atmosferas estelares definimos a *temperatura efetiva* T_{ef} , como vimos. Naturalmente, se $T_k = T_{ex} = T_i = T_r = T_c = T_{ef}$, temos uma situação de equilíbrio termodinâmico, e quanto mais discrepantes forem essas temperaturas, maiores serão os desvios com relação ao ET.

► EXEMPLO 2.10 - Masers em estrelas gigantes e supergigantes frias

Um exemplo de um desvio do ET é a emissão MASER observada na radiação em microondas emitida pelos envelopes circunstelares de estrelas gigantes e supergigantes vermelhas, como as estrelas AGB, OH/IR e Miras. Desde o final da década de 1960, observações de envoltórias dessas estrelas mostram emissões variáveis no tempo das moléculas de OH (em 1612, 1665, 1667, 1720 MHz, ou 18 cm), H₂O (em 22 GHz) e SiO (em 43 GHz). No caso de OH, a emissão tem frequentemente dois picos (figura 2.13a), identificados como a emissão vinda das camadas do envelope que se aproximam e se afastam do observador, respectivamente (figura 2.13b). Nesse caso, a velocidade da estrela está localizada a meio termo entre as duas emissões. Esta emissão vem das camadas mais externas do envelope, enquanto que as emissões de H₂O e SiO são produzidas nas regiões mais internas.

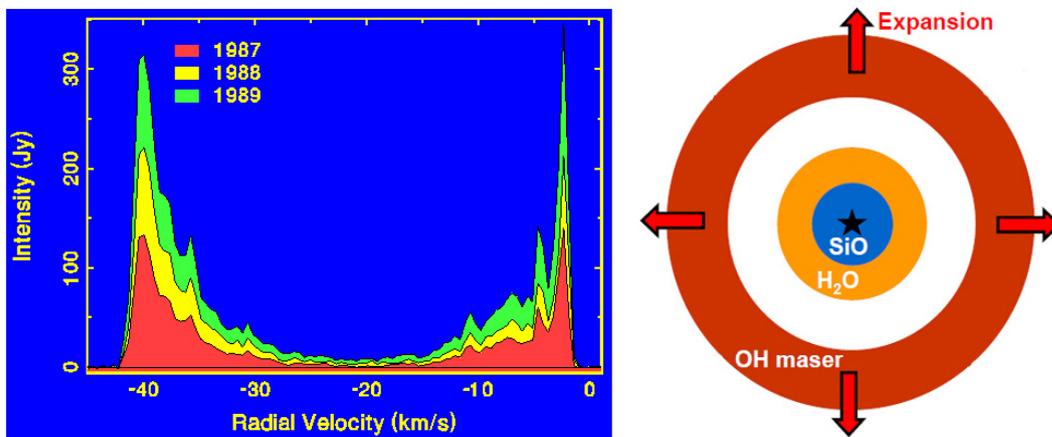


Figura 2.13 - Masers de OH em estrelas OH/IR (M.West).

A temperatura do envelope é ainda mais baixa que a temperatura efetiva das estrelas, sendo da ordem de 1000 K, o que é necessário para a existência de moléculas. Supondo que a emissão seja térmica, podemos usar a função de Planck em sua aproximação para $h\nu \ll kT$, a distribuição de Rayleigh-Jeans (2.17). Neste caso, vemos que a intensidade $I \propto T$, ou seja, a medida da intensidade da emissão fornece diretamente uma medida da temperatura, que no caso é chamada *temperatura de brilho* T_b . Ocorre que, nesses casos, a temperatura de brilho medida é muito alta, $T_b \sim 10^{10} - 10^{15}$ K, muito superior à temperatura cinética do gás, que é da ordem de 1000 K. Portanto, temos aqui uma emissão claramente de origem não térmica, evidenciando um desvio do ET. No ET, a equação de Boltzmann (2.56) mostra que para uma dada temperatura, os níveis superiores são em geral menos povoados que os níveis inferiores. Estudos detalhados mostram que a radiação observada em microondas é devida a um processo de amplificação da radiação causado por um aumento no número de elétrons nos níveis superiores, muito acima do previsto pela equação de Boltzmann, ou seja, há uma inversão de populações dos níveis de energia. Em termos da equação de transporte radiativo, a inversão implica em uma profundidade óptica

negativa. A radiação incidente (*background radiation*) ou a radiação produzida na própria camada podem ser amplificadas pelo “bombeamento” dos níveis inferiores para os níveis superiores, que é causado pela radiação infravermelha que permeia o envelope, dando origem à amplificação da radiação em microondas característica da emissão MASER (*microwave amplification by stimulated emission of radiation*).

No caso mais geral, para dois níveis j e k , fora do ET podemos definir os chamados *coeficientes de desvio*

$$b_j = \frac{n_j(X^r)}{n_j^*(X^r)} \qquad b_k = \frac{n_k(X^r)}{n_k^*(X^r)} \qquad (2.68)$$

onde usamos um asterisco (*) para caracterizar a condição de ET. Nessas condições, (2.56) pode ser escrita

$$\frac{n_k(X^r)}{n_j(X^r)} = \frac{b_k}{b_j} \frac{g_{rk}}{g_{rj}} \exp(-h\nu_{jk}/kT) \qquad (2.69)$$

onde $\nu_{jk} = (E_{rk} - E_{rj})/h$ é a frequência do fóton emitido ou absorvido em uma transição radiativa entre os níveis j e k , admitindo $E_{rj} < E_{rk}$, e T é a temperatura de excitação. De (2.69) vemos que a razão entre as populações dos níveis j e k pode ser determinada conhecendo-se os coeficientes de desvio b_j e b_k . A determinação desses coeficientes é complexa e depende das condições físicas de cada caso.

Considerando agora a distribuição de velocidades, em ET prevalece a distribuição de Maxwell, como vimos. No caso geral, podem ocorrer colisões *elásticas* entre as partículas, que tendem a estabelecer uma distribuição maxwelliana, mas também pode haver colisões *inelásticas*, em que isso não ocorre. Nas colisões inelásticas há troca de energia entre a energia cinética das partículas e alguma outra forma de energia, como nos processos de excitação, ionização, recombinação e dissociação, no caso de moléculas. Se esses processos forem dominantes haverá um maior desvio com relação à distribuição de Maxwell. Caso contrário, a temperatura cinética T_k é um parâmetro representativo da energia do gás.

(b) Fluxo radial no interior estelar

O equilíbrio termodinâmico (ET) é uma excelente aproximação para muitas das aplicações relativas ao interior das estrelas. Entretanto, essa hipótese não é correta, uma vez que existe um fluxo radial de energia, o que está em desacordo com a condição de ET estrito, representada pela equação (1.36). Considerando uma geometria plano-paralela, em que a intensidade específica depende apenas da coordenada polar θ , em uma aproximação mais realística do interior estelar o campo de radiação pode ser expandido em série de Fourier da forma:

$$I(\theta) = I_0 + I_1 \cos \theta + \dots \qquad (2.70)$$

onde I_0 é a componente isotrópica e I_1 é uma pequena anisotropia, responsável pelo fluxo. Vamos examinar cada uma das principais quantidades definidas para o campo de radiação com a intensidade dada por (2.70).

Aplicando a definição da intensidade média, dada pela equação (1.7), obtemos:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\pi (I_0 + I_1 \cos \theta) \sin \theta \, d\theta = I_0 \tag{2.71}$$

ou seja, a intensidade média depende apenas da componente isotrópica do campo de radiação, como no caso do ET. Substituindo agora (2.70) na definição do fluxo (1.10)

$$F = 2\pi \int_0^\pi (I_0 + I_1 \cos \theta) \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{4\pi}{3} I_1 \tag{2.72}$$

Como podíamos imaginar, o fluxo depende apenas da componente anisotrópica I_1 . De (2.70) e (1.28), a densidade de energia fica:

$$U = \frac{2\pi}{c} \int_0^\pi (I_0 + I_1 \cos \theta) \sin \theta \, d\theta = \frac{4\pi}{c} I_0 \tag{2.73}$$

Finalmente, de (2.70) e (1.33), a pressão da radiação P_r pode ser escrita:

$$P_r = \frac{2\pi}{c} \int_0^\pi (I_0 + I_1 \cos \theta) \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{4\pi}{3c} I_0 \tag{2.74}$$

Nos dois últimos casos obtemos as mesmas expressões válidas para o ET.

(c) ET, ETL e NETL

Fora do ET, um caso especial ocorre quando a distância na qual a temperatura varia de maneira apreciável D for muito grande com relação ao caminho livre médio λ das partículas do gás, isto é, a distância média percorrida pelas partículas antes de uma colisão é pequena com relação à distância em que a temperatura varia apreciavelmente. Isto significa que as partículas sofrerão colisões (e equipartição de energia) em um volume onde a temperatura não variou muito. Isto caracteriza o *Equilíbrio termodinâmico local* ETL, de modo que o problema pode ser tratado como em ET, desde que um número suficientemente grande de camadas seja considerado, onde a hipótese $\lambda \ll D$ seja válida.

► EXEMPLO 2.11 - ETL na fotosfera solar

Um exemplo da aproximação de ETL pode ser a fotosfera solar. Modelos para a fotosfera, como os modelos citados de Cox (2000), mostram que em uma região onde a temperatura é da ordem de $T \simeq 5800$ K, a temperatura varia cerca de $\Delta T \simeq 200$ K

em uma distância $\Delta R \simeq 25$ km. Portanto, em ordem de grandeza, a escala de altura para as variações de temperatura é

$$h_T \simeq \frac{T}{|dT/dR|} \simeq \frac{5800}{200/25} \simeq 700 \text{ km} \tag{2.75}$$

Podemos considerar a fotosfera solar composta de átomos de H, com uma densidade típica $n_H \sim 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. A seção de choque de colisões entre os átomos de H é dada aproximadamente por $\sigma_H \simeq \pi a_0^2 \simeq 10^{-16} \text{ cm}^{-2}$, onde $a_0 \sim 10^{-8} \text{ cm}$ é o raio da primeira órbita de Bohr. Portanto, o caminho livre médio dos átomos de H é, aproximadamente,

$$\lambda_H \sim \frac{1}{n_H \sigma_H} \sim \frac{1}{(10^{17})(10^{-16})} \sim 0.1 \text{ cm} \tag{2.76}$$

Vemos que $\lambda_H \ll h_T$, ou seja, a aproximação de ETL é uma aproximação razoável para este caso.

No caso mais geral, em que o equilíbrio termodinâmico local (ETL) não pode ser aplicado, temos o caso de não equilíbrio termodinâmico local, ou NETL. Neste caso, é necessário considerar todos os processos físicos importantes (ou pelo menos os mais importantes) no povoamento dos diversos níveis de energia de todos os componentes do gás, assim como todas as íons de todos os elementos relevantes. O estudo desses casos é mais complexo, e o leitor interessado pode consultar discussões mais detalhadas de alguns desses processos em Rybicki e Lightman (1979) e Maciel (2002).

► EXEMPLO 2.12 - O fluxo contínuo em estrelas AGB

Estrelas do ramo assintótico das gigantes (*Asymptotic Giant Branch, AGB*) são objetos frios com temperaturas efetivas da ordem de 3000 K e composição química característica de objetos ricos em oxigênio ou em carbono. Observações obtidas com o satélite ISO (*Infrared Space Observatory*) permitem obter espectros detalhados das fotosferas destas estrelas, como mostrado na figura 2.14 para a estrela AGB rica em carbono TT Cyg (Jorgensen et al. 2000). Neste objeto, a razão de abundâncias entre carbono e oxigênio é $C/O \simeq 1.5$, o que caracteriza uma estrela carbonada. A figura mostra o espectro de TT Cyg entre 2 e 20 μm , aproximadamente. A curva grossa (preta) é o espectro observado, incluindo limites em azul claro, destacando algumas linhas de absorção na faixa de 3 e 5 μm ; a curva mais fina vermelha é o melhor ajuste obtido por um modelo de atmosfera, e a linha fina superior (preta) mostra o espectro contínuo calculado pelo modelo. Para esta estrela, o melhor ajuste corresponde a uma temperatura efetiva de $T_{ef} = 2900 \text{ K}$ e gravidade $\log g = -1.0$, ou $g = 0.10 \text{ cm/s}^2$. Com este valor da temperatura podemos estimar o fluxo de corpo negro usando a equação (2.4) adotando $F_\nu = \pi B_\nu(T_{ef})$, como mostrado pela linha azul grossa na figura. Neste caso, o fluxo foi calibrado pelo fluxo contínuo do modelo

em $\lambda \simeq 3.47 \mu\text{m}$, onde $F_\nu = 100 \text{ Jy}$. Vemos que um ajuste simples, baseado na função de Planck, não se afasta muito do resultado do modelo numérico.

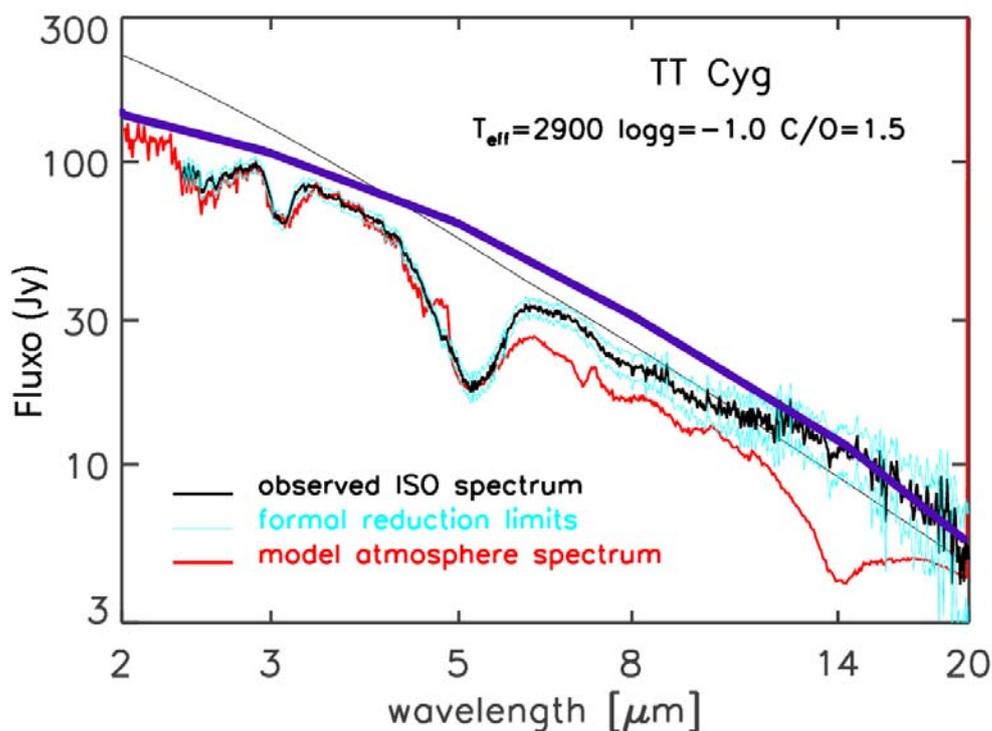


Figura 2.14 - Espectro ISO da estrela AGB TT Cyg. Curva preta espessa: espectro observado, com limites em azul claro; curva mais fina vermelha: modelo numérico; linha contínua superior preta: modelo da emissão contínua; curva grossa superior azul: ajuste de corpo negro calibrado para um fluxo de 100 Jy em 3.47 micra (U. G. Jorgensen).

Vamos concluir esta discussão sobre o equilíbrio termodinâmico com alguns comentários sobre os espectros observados em fontes astrofísicas. Da relação (1.51), vemos que no caso opticamente fino $I_\nu \simeq j_\nu L$, ou seja, a radiação proveniente de uma fonte opticamente fina é basicamente determinada por seu coeficiente de emissão. Por outro lado, o coeficiente de emissão é significativamente mais alto nas *linhas espectrais*, de modo que a emissão de um gás opticamente fino deve estar contida essencialmente nas linhas espectrais. Um exemplo deste caso ocorre com o espectro óptico das nebulosas planetárias, nuvens de gás em volta de estrelas centrais remanescentes das estrelas de massa intermediária ($0.8 M_\odot$ a $8 M_\odot$). Na figura 2.15a vemos a nebulosa NGC 2346 e o seu espectro óptico (figura 2.15b). Nesse caso, podem ser observadas diversas linhas espectrais de emissão, superpostas a um contínuo muito fraco ou mesmo inexistente.

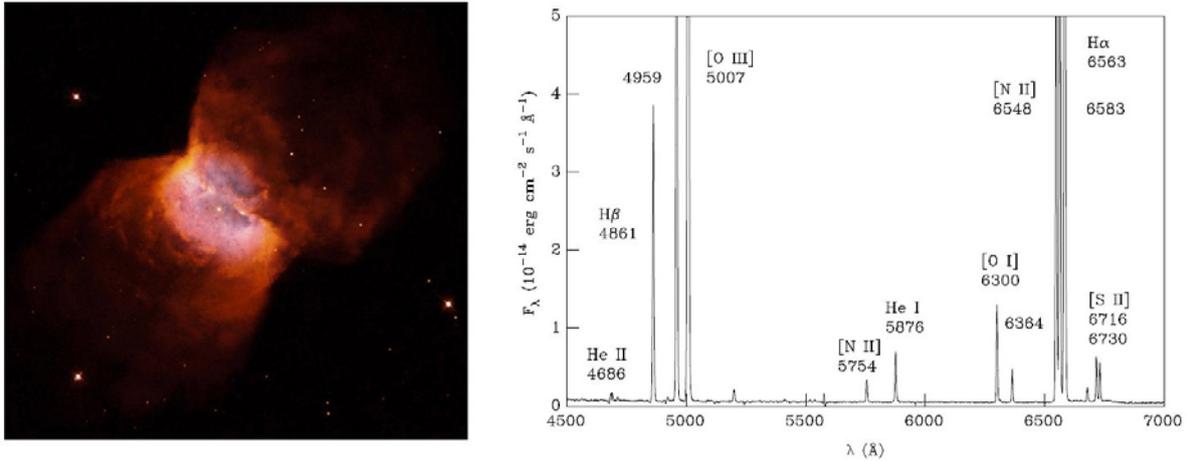


Figura 2.15 - A nebulosa planetária NGC 2346 (AURA/STScI/NASA) e seu espectro óptico (R. Costa).

No caso oposto, de um gás opticamente espesso, de (1.52) e (2.3) vemos que $I_\nu \simeq S_\nu = B_\nu(T)$ em ET. Portanto, um objeto opticamente espesso deve em princípio ter uma emissão contínua como a de um corpo negro, como vimos por exemplo no caso da barra de ferro (figura 2.2) e da emissão infravermelha pelos grãos interestelares (figura 2.6).

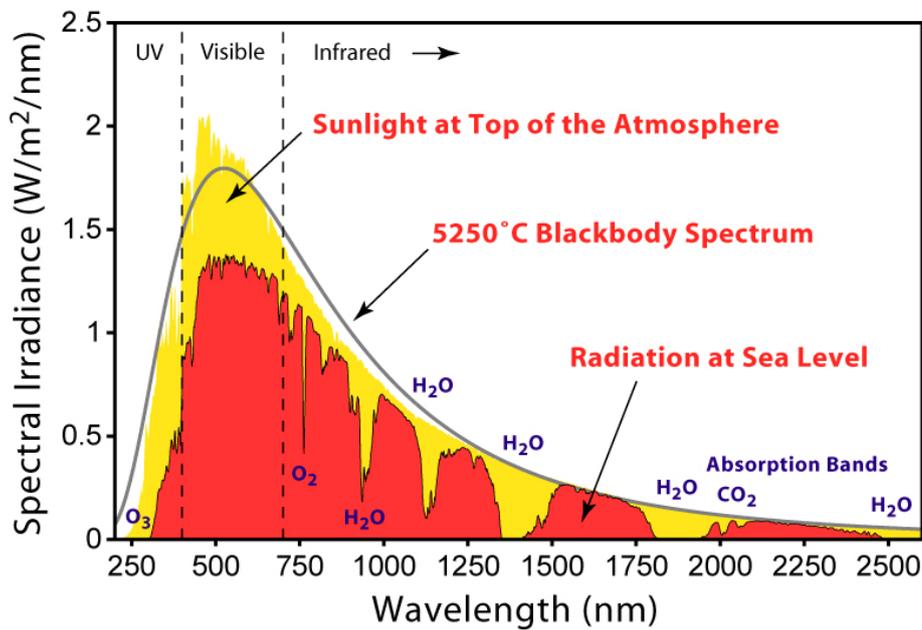


Figura 2.16 - Espectro solar acima da atmosfera da Terra (amarelo) e ao nível do mar (vermelho). Uma curva correspondente a um corpo negro com temperatura de 5250 K é também mostrada. Algumas das bandas moleculares observadas ao nível do mar estão identificadas (R. A. Rohde).

No caso das estrelas, isto também é aproximadamente correto. Na figura 2.16 vemos um espectro solar como visto acima da atmosfera da Terra (curva amarela), uma curva característica de um corpo negro, no caso a uma temperatura $T = 5250$ K (curva sólida), além da radiação observada ao nível do mar (curva vermelha). Um espectro solar foi também mostrado na figura 1.5. Vemos que, superposta à emissão contínua estão *linhas de absorção* e *bandas moleculares*, algumas das quais identificadas na figura. Isto mostra que a hipótese de equilíbrio termodinâmico não é exatamente válida. De fato, a temperatura do gás varia com a profundidade na atmosfera solar, havendo portanto um *gradiente de temperatura*, que não é admitido no ET estrito. Portanto, as linhas espectrais de absorção observadas no espectro solar decorrem da passagem da radiação contínua, vinda das camadas mais internas, pelas camadas mais externas e frias da estrela, além das linhas produzidas na atmosfera terrestre.

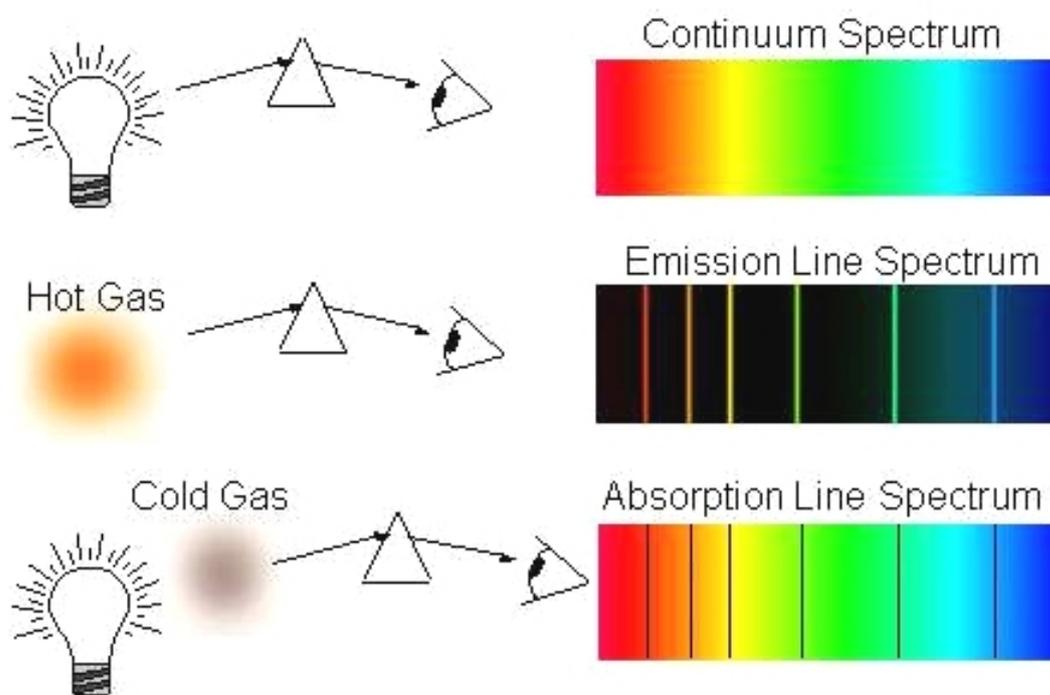


Figura 2.17 - Ilustração das leis de Kirchhoff (J. N. Imamura).

No caso das figuras 2.15 e 2.16 vemos uma aplicação das *leis de Kirchhoff*, como pode ser ilustrado na figura 2.17. Vemos que um objeto quente e opaco, como um gás quente e denso, ou um objeto sólido e quente, emite essencialmente radiação contínua (primeira lei); um objeto quente, mas com baixa densidade emite principalmente em linhas espectrais (segunda lei), e objetos difusos e mais frios na linha de visada de objetos quentes e densos produzem linhas de absorção superpostas ao espectro contínuo (terceira lei).

EXERCÍCIOS

2.1 Considerando a temperatura efetiva do Sol, $T_{ef} = 5800\text{ K}$ e o seu raio médio, $R_{\odot} = 6.96 \times 10^{10}\text{ cm}$, (a) estime a luminosidade solar, admitindo que o Sol é uma estrela esférica. (b) Compare seu resultado com a luminosidade obtida a partir do fluxo determinado no Exemplo 1.1.

2.2 A curva B da figura 1.12 mostra a radiação cósmica de fundo em microondas, que é um remanescente das altas temperaturas na época do Big Bang. Admitindo que a densidade de energia $U_{\nu}(T)$ desta radiação corresponde a um corpo negro com temperatura T , mostre que o pico observado na curva B corresponde a uma temperatura $T \simeq 2.7\text{ K}$.

2.3 Mostre que a equação de Saha (2.65) pode ser colocada na forma

$$\log \left[\frac{n(X^{r+1}) n_e}{n(X^r)} \right] = 15.38 + \log \left(\frac{2 g_{r+1,1}}{g_{r,1}} \right) + 1.5 \log T - \frac{5040}{T} \Delta E_r$$

onde T está em K, ΔE_r em eV e n em cm^{-3} .

2.4 O hélio tem três estágios de ionização: neutro (He°), uma vez ionizado (He^{+}) e duas vezes ionizado (He^{++}). Podemos definir as frações de cada estágio por

$$x_{\circ} = \frac{n(\text{He}^{\circ})}{n(\text{He})} \quad x_{+} = \frac{n(\text{He}^{+})}{n(\text{He})} \quad x_{++} = \frac{n(\text{He}^{++})}{n(\text{He})}$$

onde $n(\text{He}) = n(\text{He}^{\circ}) + n(\text{He}^{+}) + n(\text{He}^{++})$. (a) Obtenha expressões para x_{\circ} , x_{+} e x_{++} em função das razões $n(\text{He}^{+})/n(\text{He}^{\circ})$ e $n(\text{He}^{++})/n(\text{He}^{+})$. (b) Faça um gráfico semelhante ao da figura 2.12 mostrando as variações de x_{\circ} , x_{+} e x_{++} com a temperatura. Considere que a pressão eletrônica é $P_e = n_e kT = 1\text{ din/cm}^2$. Dados: $g_{\circ} = 1$, $g_{+} = 2$, $g_{++} = 1$, $\Delta E_{\circ} = 24.58\text{ eV}$ e $\Delta E_{+} = 54.41\text{ eV}$.

2.5 Prove as relações (2.15) e (2.28).

Referências

Carroll, B. W., Ostlie, D. A. 2006, *An Introduction to Modern Astrophysics*, Benjamin Cummings
 Choudhuri, A. R. 2010, *Astrophysics for physicists*, Cambridge University Press
 Cox, A. N., 2000, *Allen's Astrophysical Quantities*, AIP
 Jorgensen, U. G., Hron, J., Loidi, R. 2000, *Astron. Astrophys.* **356**, 253
 Maciel, W. J. 1999, *Introdução à estrutura e evolução estelar*, Edusp

Maciel, W. J. 2002, *Astrofísica do meio interestelar*, Edusp
Reif, F. 1965, *Fundamentals of statistical and thermal physics*, McGraw-Hill
Rybicki, G. B., Lightman, A. P. 1979, *Radiative processes in astrophysics*, Wiley
Shu, F. H. 1982, *The physical universe*, University Science Books
Swihart, T. L. 1968, *Astrophysics and stellar astronomy*, Wiley
Zeilik, M., Gregory, S. A. 1997, *Introductory Astronomy and Astrophysics*, Brooks
Cole

CAPITULO 3 – ATMOSFERAS ESTELARES

3.1 Introdução

Uma das principais aplicações clássicas da equação de transporte radiativo é a análise da transferência da radiação nas atmosferas estelares. Uma vez que o fluxo radiativo de energia ocorre tanto na radiação contínua como nas linhas espectrais (ver por exemplo as figuras 1.5, 2.6, e 2.13), uma análise completa do transporte da radiação deve incluir ambos. Entretanto, para tornar o problema mais simples, vamos neste capítulo considerar apenas a radiação contínua, deixando as linhas espectrais para o capítulo 4. Algumas referências sobre o material deste capítulo incluem Choudhuri (2010), Swihart (1968), Zeilik e Gregory (1997), Carroll e Ostlie (2006) e Shu (1982).

3.2 Atmosfera plano-paralela

As estrelas são basicamente esféricas, como é o caso do Sol (figura 1.1). Portanto, as coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) (ver figura 1.3) seriam as coordenadas ideais para descrever suas principais propriedades. Entretanto, em muitos problemas podemos desprezar a curvatura da atmosfera considerando que sua espessura é pequena com relação ao raio da estrela. Esta aproximação é válida para a maior parte das estrelas, sendo as principais exceções as gigantes e supergigantes vermelhas, onde as atmosferas extensas podem alcançar valores da ordem ou superiores ao raio estelar. Na hipótese plano-paralela (figura 3.1), podemos considerar o eixo z na direção vertical perpendicular à superfície da estrela, de modo que um feixe de radiação propagando-se em uma direção caracterizada pelo elemento ds faz um ângulo θ com relação à vertical. Nesse caso, todas as variáveis termodinâmicas de interesse, como a temperatura T , densidade ρ , etc., dependem apenas da altura z , isto é, temos $T = T(z)$, $\rho = \rho(z)$, etc. Pela geometria da figura, temos

$$dz = ds \cos \theta = \mu ds \quad (3.1)$$

onde introduzimos a variável $\mu = \cos \theta$, da mesma forma que na solução da equação de transporte para o campo de radiação interestelar que vimos na seção 1.5. Neste caso, a intensidade específica monocromática da radiação na direção θ e na altura z pode ser escrita na forma $I_\nu(z, \theta)$ ou $I_\lambda(z, \theta)$. A equação de transporte (1.40)

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - k_\nu I_\nu \quad (3.2)$$

pode ser escrita, neste caso

$$\mu \frac{\partial I_\nu(z, \mu)}{\partial z} = j_\nu - k_\nu I_\nu \quad (3.3)$$

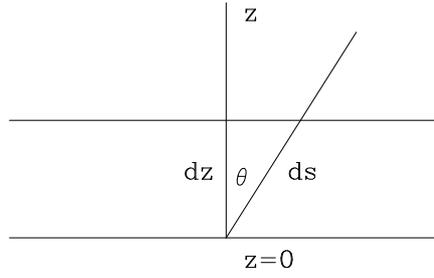


Figura 3.1 - Geometria plano-paralela.

Vamos definir a profundidade óptica por

$$d\tau_\nu = -k_\nu dz \tag{3.4}$$

em analogia à equação (1.41). Neste caso, τ_ν aumenta *para dentro* da estrela, em contraste com a coordenada z , que aumenta *para fora* da superfície da estrela. Reescrevendo (3.3) em termos da profundidade óptica,

$$\mu \frac{\partial I_\nu(\tau_\nu, \mu)}{\partial \tau_\nu} = I_\nu - \frac{j_\nu}{k_\nu} = I_\nu - S_\nu \tag{3.5}$$

onde $S_\nu = j_\nu/k_\nu$ é novamente a função fonte. Usando o mesmo procedimento da seção 1.4, podemos multiplicar esta equação por $e^{-\tau_\nu/\mu}$, obtendo

$$\mu e^{-\tau_\nu/\mu} \frac{\partial I_\nu(\tau_\nu, \mu)}{\partial \tau_\nu} = (e^{-\tau_\nu/\mu}) I_\nu - (e^{-\tau_\nu/\mu}) S_\nu$$

mas

$$\frac{\partial}{\partial \tau_\nu} \left(I_\nu e^{-\tau_\nu/\mu} \right) = I_\nu (-1/\mu) (e^{-\tau_\nu/\mu}) + (e^{-\tau_\nu/\mu}) \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu}$$

Portanto,

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau_\nu} \left(I_\nu e^{-\tau_\nu/\mu} \right) = -S_\nu e^{-\tau_\nu/\mu} \tag{3.6}$$

que pode ser integrada de $\tau_\nu = \tau_{\nu,0}$ a τ_ν :

$$I_\nu e^{-t_\nu/\mu} \Big|_{\tau_{\nu,0}}^{\tau_\nu} = - \int_{\tau_{\nu,0}}^{\tau_\nu} \frac{S_\nu}{\mu} e^{-t_\nu/\mu} dt_\nu \tag{3.7}$$

Como na solução da seção 1.5, vamos considerar dois casos: (a) $0 \leq \mu \leq 1$, correspondendo a $\pi/2 > \theta > 0$, ou seja, os raios são dirigidos para fora da superfície da estrela; neste caso, podemos adotar $\tau_{\nu,0} \rightarrow \infty$, pois a radiação vem do fundo da atmosfera. (b) $-1 \leq \mu \leq 0$, correspondendo a $\pi > \theta > \pi/2$, ou seja, os raios penetram na atmosfera da estrela, de modo que $\tau_{\nu,0} = 0$. Portanto, as duas soluções correspondentes a (3.7) são

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu e^{-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu} \quad (0 \leq \mu \leq 1) \quad (3.8)$$

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_0^{\tau_\nu} S_\nu e^{-(\tau_\nu - t_\nu)/(-\mu)} \frac{dt_\nu}{(-\mu)} \quad (-1 \leq \mu \leq 0) \quad (3.9)$$

Note-se que para $\mu < 0$, $I_\nu(0, \mu) = 0$, ou seja, a intensidade no topo da atmosfera é nula para a radiação dirigida para dentro da estrela. Vamos adotar a hipótese de ETL, isto é, vamos considerar $S_\nu = B_\nu(T)$, onde $T = T(\tau_\nu)$, de modo que podemos escrever $B_\nu[T(\tau_\nu)]$ ou simplesmente $B_\nu(\tau_\nu)$. Vamos expandir a função fonte em série de Taylor

$$S_\nu(t_\nu) \simeq B_\nu(\tau_\nu) + (t_\nu - \tau_\nu) \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} + \dots \quad (3.10)$$

De (3.8) temos

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_\nu, \mu) &= \int_{\tau_\nu}^{\infty} B_\nu(\tau_\nu) e^{-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu} + \int_{\tau_\nu}^{\infty} (t_\nu - \tau_\nu) \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} e^{-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu} \\ &= B_\nu(\tau_\nu) \int_{\tau_\nu}^{\infty} e^{-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu} + \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \int_{\tau_\nu}^{\infty} (t_\nu - \tau_\nu) e^{-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu} \end{aligned}$$

As integrais que aparecem nesta última expressão são iguais a 1 e μ , respectivamente, de modo que

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = B_\nu(\tau_\nu) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \quad (3.11)$$

A mesma equação (3.11) pode ser obtida de (3.9), usando (3.10) (ver exercício 3.1). Note a semelhança entre (3.11) e a equação (2.70), em que o primeiro termo do segundo membro é o termo isotrópico, enquanto que o segundo termo contém a anisotropia. Neste termo está implícito um gradiente de temperatura $dT/d\tau_\nu$, de modo que $dB_\nu(\tau_\nu)/d\tau_\nu \neq 0$. Vamos a seguir estimar o termo anisotrópico $dB_\nu/d\tau_\nu$. Das relações (1.28), (1.9) e (1.31) envolvendo a densidade de energia, o fluxo e a pressão da radiação, obtemos

$$\begin{aligned} U_\nu &= \frac{1}{c} \int I_\nu d\omega = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi I_\nu \sin\theta d\theta \\ &= \frac{2\pi}{c} \int_0^\pi I_\nu \sin\theta d\theta = \frac{2\pi}{c} \int_{+1}^{-1} I_\nu(-d\mu) \\ U_\nu &= \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{+1} I_\nu d\mu \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}
 F_\nu &= \int I_\nu \cos \theta d\omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta \\
 &= 2\pi \int_0^\pi I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta = 2\pi \int_{+1}^{-1} I_\nu \mu (-d\mu) \\
 F_\nu &= 2\pi \int_{-1}^{+1} I_\nu \mu d\mu
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
 P_\nu &= \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\omega = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi I_\nu \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{2\pi}{c} \int_0^\pi I_\nu \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2\pi}{c} \int_{+1}^{-1} I_\nu \mu^2 (-d\mu) \\
 P_\nu &= \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{+1} I_\nu \mu^2 d\mu
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde usamos a notação P_ν para a pressão da radiação. Substituindo (3.11) nas relações (3.12)-(3.14),

$$\begin{aligned}
 U_\nu &= \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{+1} \left[B_\nu(\tau_\nu) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \right] d\mu = \frac{2\pi}{c} \left[B_\nu(\tau_\nu) \times 2 + \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \times 0 \right] \\
 U_\nu &= \frac{4\pi}{c} B_\nu(\tau_\nu)
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
 F_\nu &= 2\pi \int_{-1}^{+1} \left[B_\nu(\tau_\nu) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \right] \mu d\mu = 2\pi \left[B_\nu(\tau_\nu) \times 0 + \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \times (2/3) \right] \\
 F_\nu &= \frac{4\pi}{3} \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
 P_\nu &= \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{+1} \left[B_\nu(\tau_\nu) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \right] \mu^2 d\mu = \frac{2\pi}{c} \left[B_\nu(\tau_\nu) \times (2/3) + \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \times 0 \right] \\
 P_\nu &= \frac{4\pi}{3c} B_\nu(\tau_\nu)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Como era de se esperar, somente o fluxo F_ν depende do termo anisotrópico (ver por exemplo a equação 2.72). Usando (3.15) e (3.16), podemos estimar a razão entre os termos anisotrópico e isotrópico de (3.11)

$$\frac{dB_\nu/d\tau_\nu}{B_\nu(\tau_\nu)} \simeq \frac{3F_\nu}{4\pi} \frac{4\pi}{cU_\nu} = \frac{3F_\nu}{cU_\nu} \simeq \frac{3F}{cU} \tag{3.18}$$

onde F e U são as quantidades integradas em todas as frequências. De (2.24) sabemos que em ET $U = aT^4$, e para uma estrela com temperatura efetiva T_{ef} temos $F = \sigma T_{ef}^4 = (ac/4) T_{ef}^4$ (ver a equação 2.23), de modo que

$$\frac{dB_\nu/d\tau_\nu}{B_\nu(\tau_\nu)} \simeq \frac{3}{4} \left(\frac{T_{ef}}{T} \right)^4 \tag{3.19}$$

Vimos que a temperatura efetiva é uma temperatura representativa das condições na atmosfera estelar e, portanto, para as regiões onde $T_{ef} \simeq T$ o termo anisotrópico é da mesma ordem de grandeza do termo isotrópico. À medida que regiões mais internas da atmosfera são consideradas, a temperatura local aumenta e a razão T_{ef}/T diminui, de modo que nessas regiões a radiação é quase totalmente isotrópica.

► EXEMPLO 3.1 - Atmosferas plano-paralelas

O Sol tem um raio fotosférico dado por $R_\odot = 6.96 \times 10^{10}$ cm \simeq 700000 km, e as dimensões de sua fotosfera podem ser determinadas a partir de modelos teóricos precisos, sendo da ordem de $\Delta R \simeq$ 500 km. Portanto, $\Delta R \ll R_\odot$ e $\Delta R/R_\odot \simeq$ 500/700000 \simeq 7×10^{-4} , ou seja, a fotosfera solar corresponde a cerca de 0.07% do raio solar. Assim, a hipótese de uma atmosfera plano-paralela é válida. Naturalmente, se consideramos a coroa solar, que se estende até vários raios solares, essa hipótese não é mais uma boa aproximação. Em estrelas gigantes e supergigantes vermelhas, como Betelgeuse (α Ori, ver a figura 1.4), o raio estelar é variável, uma vez que a estrela é pulsante, sendo tipicamente da ordem de $900 R_\odot$, ou seja, cerca de 600 milhões de km. Sua atmosfera é extensa, alcançando uma fração considerável de seu raio, e além disso objetos como esse têm envelopes extensos, alcançando vários raios estelares. Portanto, nesses casos a hipótese de atmosfera plano-paralela não é adequada. A Terra tem um raio de 6400 km, e a maior parte dos gases atmosféricos está contida dentro de uma altura $\Delta R \simeq$ 100 km, de modo que $\Delta R/R \simeq$ 100/6400 \simeq 0.015, ou seja, 1.5% do raio, e a hipótese plano-paralela é também razoável neste caso.

► EXEMPLO 3.2 - Fotosfera solar

Vamos considerar novamente a fotosfera solar, de acordo com o modelo descrito por Cox (2000, página 349). Nesse caso temos, para cada valor da profundidade óptica τ_ν em $\lambda = 5000$ Å os valores da temperatura T (figura 3.2a), de modo que podemos obter $B_\lambda(T)$ e portanto estimar a variação $dB_\lambda/d\tau_\lambda$, obtendo finalmente a razão entre os termos anisotrópico e isotrópico. Para comparação, podemos também estimar esta razão por (3.19), como mostrado na figura 3.2b. A intensidade dada por (3.11) está mostrada na figura 3.2c, assim como as duas componentes com $\mu \simeq 0$, e o fluxo, obtido por (3.16) está mostrado na figura 3.2d.

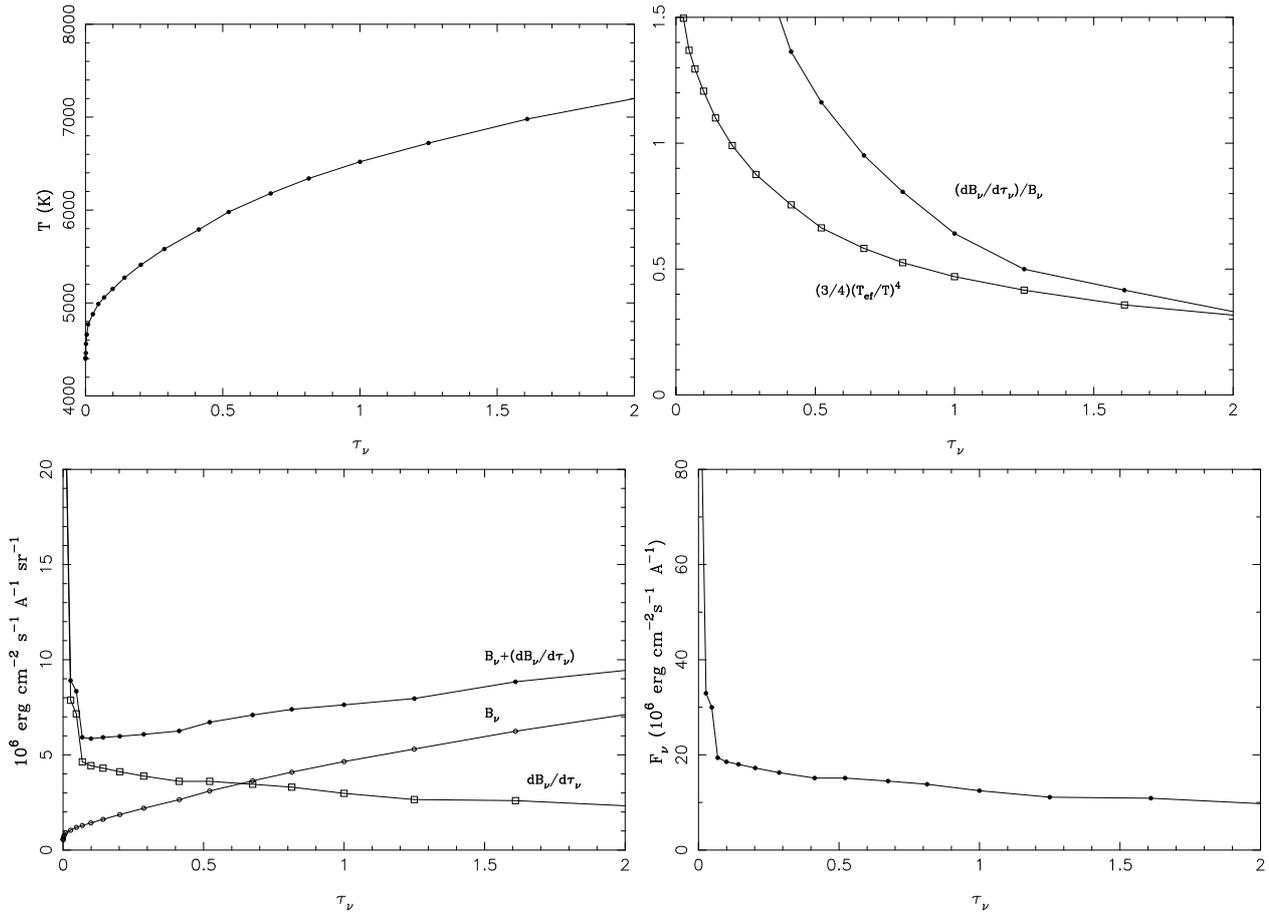


Figura 3.2 - Modelo da fotosfera solar (Cox 2000). (a) Variação da temperatura com a profundidade óptica, (b) Razão entre os termos anisotrópico e isotrópico, (c) Intensidade da radiação, e (d) fluxo monocromático.

Em resumo, para determinar a intensidade da radiação na fotosfera $I_\nu(\tau, \mu)$ por (3.11) precisamos conhecer a variação da temperatura T com a profundidade óptica τ_ν , ou seja, a relação $T(\tau_\nu)$, de modo a poder calcular $B_\nu(\tau_\nu)$ e o termo anisotrópico $dB_\nu/d\tau_\nu$.

► **EXEMPLO 3.3 - Heliosismologia**

A maior parte das informações que obtemos sobre a física solar vem de suas camadas mais externas - fotosfera, cromosfera, região de transição e coroa, especialmente a primeira, de onde se origina a maior parte dos fótons observados no espectro visível. De fato, é muito difícil obter informações sobre as camadas abaixo da fotosfera, havendo atualmente duas fontes principais: os neutrinos, que são produzidos nas reações nucleares no interior do Sol, e os resultados recentes da *heliosismologia*. Medidas do efeito Doppler em linhas espectrais mostram que a superfície do Sol tem oscilações, como indicado na figura 3.3.

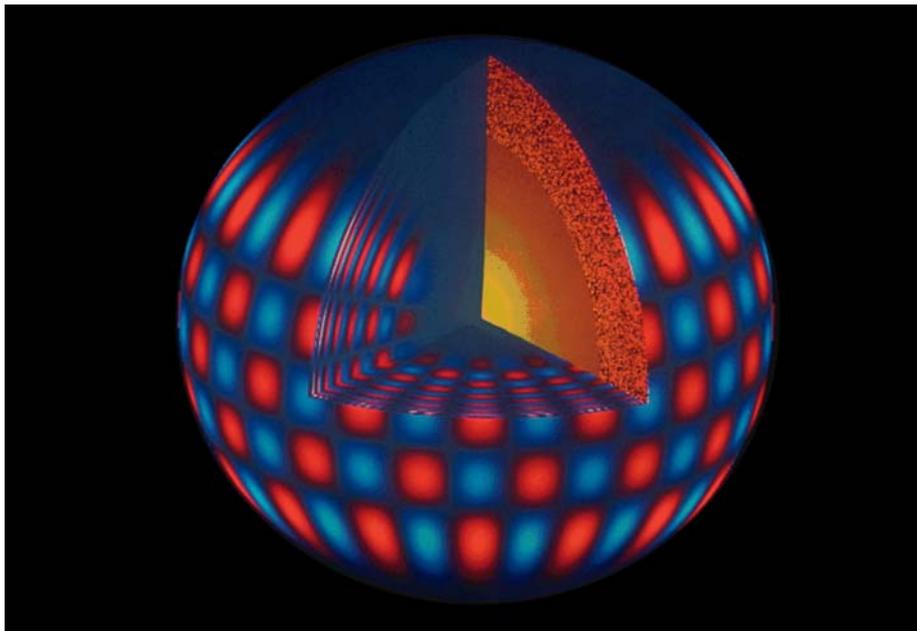


Figura 3.3 - Representação dos modos de vibração observados no Sol. As partes vermelhas indicam os gás que se move para dentro do Sol, e as partes azuis mostram o gás que está “subindo” (National Solar Observatory).

Nesta figura, as partes vermelhas indicam os gás que se move para dentro do Sol, enquanto que as partes azuis mostram o gás que está “subindo”. Essas oscilações são complexas, geralmente compostas por diferentes *modos de vibração* e resultam de ondas de pressão internas que são refletidas pela fotosfera. Algumas dessas ondas conseguem penetrar no interior solar, de modo que sua análise permite determinar as condições físicas dessas regiões, que são de difícil acesso a partir de observações da radiação fotosférica. Esses resultados podem ser comparados com as previsões de modelos teóricos do Sol, os quais são assim aperfeiçoados.

► **EXEMPLO 3.4 - Equação de transporte radiativo em coordenadas esféricas**

A solução da equação de transporte radiativo na forma (1.48) é adequada para obter a intensidade específica em função da profundidade óptica ao longo de uma linha de visada. Em alguns casos a equação (1.48) pode ser diretamente aplicada, em particular no caso do meio interestelar, como vimos na seção 1.5. Para atmosferas estelares costumamos definir a profundidade óptica ao longo do raio da estrela, e não ao longo da linha de visada. Vimos que a geometria plano-paralela é adequada no caso da fotosfera solar, e em outros casos em que a espessura da fotosfera é pequena em relação ao raio da estrela. No caso de estrelas esféricas, devemos usar coordenadas esféricas, como visto na figura 1.3 ou na figura 3.4 (ver por exemplo Gray 2008).

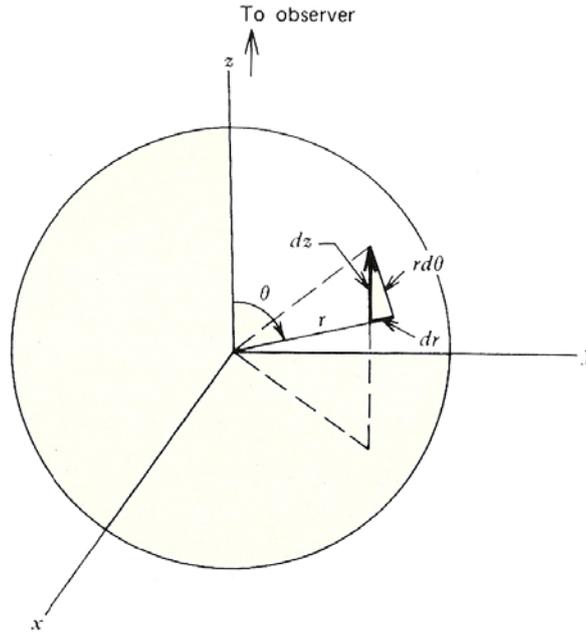


Figura 3.4 - Coordenadas esféricas (D. F. Gray.)

Podemos escolher o eixo z na direção do observador, de modo que a equação de transporte radiativo na forma (1.40) pode ser escrita

$$\frac{dI_\nu}{dz} = -k_\nu I_\nu + k_\nu S_\nu \tag{3.20}$$

Na maior parte dos casos, podemos admitir uma simetria azimutal, isto é, a intensidade I_ν não depende do ângulo ϕ , podendo ser escrita na forma $I_\nu(r, \theta)$, de modo que

$$\frac{dI_\nu}{dz} = \frac{\partial I_\nu}{\partial r} \frac{dr}{dz} + \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dz} \tag{3.21}$$

Mas, da figura 3.4 temos

$$dr = \cos \theta dz \tag{3.22}$$

$$r d\theta = -\text{sen} \theta dz \tag{3.23}$$

e a equação de transporte (3.20) fica

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} \frac{\text{sen} \theta}{r} = -k_\nu I_\nu + k_\nu S_\nu \tag{3.24}$$

Esta é a forma da equação de transporte que deve ser usada nos interiores estelares e no caso de atmosferas extensas, como nas estrelas supergigantes. Naturalmente, a partir de (3.24) podemos reobter a equação de transporte para o caso plano-paralelo. Admitindo que θ não depende de z , ou seja, $d\theta/dz = 0$ em (3.21), a equação (3.24) fica

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial r} \cos \theta = -k_\nu I_\nu + k_\nu S_\nu \tag{3.25}$$

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial r} = -k_\nu I_\nu + k_\nu S_\nu \tag{3.26}$$

Usando a definição $\tau_\nu = -k_\nu dr$, reobtemos a equação (3.5)

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = I_\nu - S_\nu \tag{3.27}$$

3.3 Atmosfera cinza

Para a solução geral da equação de transporte radiativo em uma atmosfera estelar, é necessário conhecer os coeficientes de emissão j_ν e absorção k_ν para todas as frequências relevantes. Uma simplificação considerável consiste em admitir que esses coeficientes são independentes da frequência, isto é, só precisamos considerar as eventuais variações de j_ν e k_ν com a temperatura, ou com a profundidade óptica. Este caso é conhecido como *atmosfera cinza*.

Existem diversas derivações da atmosfera cinza na literatura, como por exemplo em Swihart (1968, 1981), Mihalas (1978), Choudhuri (2010). Vamos a seguir adotar a derivação de Choudhuri (2010) com algumas modificações. Da definição da profundidade óptica (3.4) temos $\tau_\nu = \tau$, sendo a mesma para todas as frequências. De (3.5) temos, no caso plano-paralelo

$$\mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} = I - S \tag{3.28}$$

onde usamos as quantidades integradas $I = \int I_\nu d\nu$ e $S = \int S_\nu d\nu$. Analogamente, de (3.12), (3.13) e (3.14) temos,

$$U = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{+1} I d\mu \tag{3.29}$$

$$F = 2\pi \int_{-1}^{+1} I \mu d\mu \tag{3.30}$$

$$P_r = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{+1} I \mu^2 d\mu \tag{3.31}$$

Por outro lado, de (1.8) e (3.29) podemos escrever para a intensidade média

$$J = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I d\mu = \frac{c}{4\pi} U \tag{3.32}$$

na seção (1.2) mencionamos que a intensidade média, o fluxo, a densidade de energia e a pressão da radiação são momentos do campo de radiação. Vamos aplicar este conceito à equação (3.28), multiplicando esta equação por $(1/2)$, integrando em μ , e usando (3.30) e (3.32)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \int I \mu d\mu = \frac{1}{2} \int I d\mu - \frac{1}{2} \int S d\mu$$

$$\frac{1}{4\pi} \frac{dF}{d\tau} = J - S \tag{3.33}$$

pois a função fonte depende da temperatura (ou de τ), mas não de μ . Analogamente, multiplicando (3.28) por $2\pi\mu/c$, integrando em μ e usando (3.30) e (3.31)

$$\frac{2\pi}{c} \frac{d}{d\tau} \int I \mu^2 d\mu = \frac{2\pi}{c} \int I \mu d\mu - \frac{2\pi}{c} S \int \mu d\mu$$

$$\frac{dP_r}{d\tau} = \frac{F}{c} \tag{3.34}$$

pois a última integral é nula. Como F e P_r dependem apenas de τ podemos abandonar a notação de derivada parcial. Se não houver fontes ou sumidouros de energia na atmosfera plano-paralela, o fluxo nas camadas externas é constante, ou seja, $dF/d\tau = 0$ e, de (3.33)

$$J = S \tag{3.35}$$

Esta condição é conhecida como condição de *equilíbrio radiativo*. Usando (3.28), (3.32) e (3.35) temos

$$\mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} = I - \frac{1}{2} \int_1^{+1} I d\mu \tag{3.36}$$

Esta equação pode ser resolvida de maneira exata para obter $I(\tau, \mu)$ (ver por exemplo Mihalas 1978, p. 64). Vamos aqui considerar uma aproximação mais simples. Aplicando a condição de equilíbrio radiativo ($F = \text{constante}$) em (3.34), temos

$$\int dP_r = \frac{F}{c} \int d\tau$$

$$P_r = \frac{F}{c} (\tau + q) \tag{3.37}$$

onde q é uma constante a ser determinada. Vimos na seção 3.2 que, nas camadas mais profundas da atmosfera, o campo de radiação é aproximadamente isotrópico, o que é mostrado por exemplo pela figura 3.2b. Neste caso, a relação

$$P_r = \frac{1}{3} U \tag{3.38}$$

é válida, como vimos na seção 2.2. *Vamos então admitir que esta relação é válida mesmo nas camadas mais superficiais da atmosfera, que é uma aproximação conhecida como aproximação de Eddington.* Portanto, neste caso a equação (3.38) é válida em toda a atmosfera. Usando ainda (3.32), (3.35) e (3.37) temos

$$S = J = \frac{c}{4\pi} U = \frac{3c}{4\pi} P_r = \frac{3F}{4\pi} (\tau + q) \tag{3.39}$$

Como F é constante, (3.39) é uma relação entre S e τ . Conhecida esta relação podemos obter a intensidade específica, usando por exemplo (3.8) ou (3.9), isto é, precisamos determinar a constante de integração q . Isto pode ser feito calculando o fluxo F pela relação (3.39). Na seção 3.2 mostramos que (3.8) e (3.9) são as soluções de (3.5). Agindo da mesma forma para $1 \geq \mu \geq 0$ e $0 \geq \mu \geq -1$, respectivamente, para a equação (3.28) obtemos para $1 \geq \mu \geq 0$

$$I(\tau, \mu) = \int_{\tau}^{\infty} S e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} \quad (1 \geq \mu \geq 0) \tag{3.40}$$

Considerando a intensidade emergente em $\tau = 0$,

$$I(0, \mu) = \int_0^{\infty} S e^{-t/\mu} \frac{dt}{\mu} \tag{3.41}$$

Substituindo a função fonte por (3.39)

$$I(0, \mu) = \frac{3F}{4\pi} \int_0^{\infty} (t + q) e^{-t/\mu} \frac{dt}{\mu} \tag{3.42}$$

A integral é

$$\int_0^{\infty} (t + q) e^{-t/\mu} \frac{dt}{\mu} = \mu + q \tag{3.43}$$

(ver exercício 3.2), de modo que

$$I(0, \mu) = \frac{3F}{4\pi} (\mu + q) \tag{3.44}$$

Mas, de (3.30) temos que o fluxo emergente da atmosfera é

$$F = 2\pi \int_0^1 I \mu d\mu \tag{3.45}$$

Usando (3.44) e (3.45)

$$F = \frac{3F}{2} \int_0^1 (\mu + q) \mu d\mu \tag{3.46}$$

Mas

$$\int_0^1 (\mu + q) \mu d\mu = \int_0^1 \mu^2 d\mu + q \int_0^1 \mu d\mu = \frac{1}{3} + \frac{q}{2} \quad (3.47)$$

ou seja

$$F = \frac{3F}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{q}{2} \right) \quad (3.48)$$

Desta relação obtemos a constante q :

$$q = \frac{2}{3} \quad (3.49)$$

Portanto, a solução para a função fonte de (3.39) é

$$S = \frac{3F}{4\pi} \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \quad (3.50)$$

De (3.32), (3.35) e (3.50) obtemos

$$U = \frac{3F}{c} \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \quad (3.51)$$

Finalmente, lembrando a lei de Stefan-Boltzmann (2.24) e usando (2.26), ou seja, tomando $F = \sigma T_{ef}^4$, obtemos uma relação $T(\tau)$,

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{ef}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \quad (3.52)$$

Esta equação fornece a relação entre a temperatura de cada camada e a profundidade óptica no caso da atmosfera cinza com a aproximação de Eddington. A figura 3.5 mostra a variação da temperatura com a profundidade óptica no caso cinza usando a aproximação de Eddington (linha tracejada) e a solução exata (linha cheia). Os maiores desvios ocorrem nas proximidades da superfície da estrela, onde $\tau \simeq 0$, diminuindo para os valores mais altos da profundidade óptica. A maior contribuição ao fluxo vem da região onde $\tau \simeq 1$, onde a aproximação de Eddington é essencialmente correta.

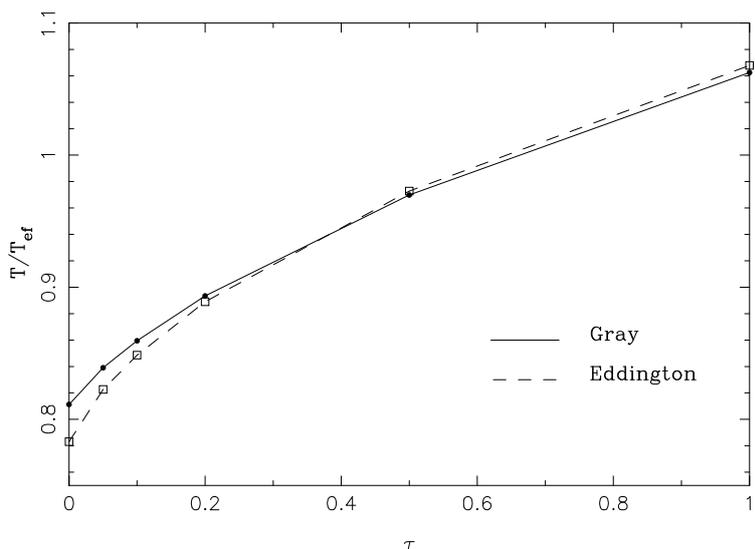


Figura 3.5 - Relação temperatura-profundidade óptica no caso cinza.

► EXEMPLO 3.5 - A relação $T(\tau)$ nas atmosferas estelares

Podemos comparar a relação $T(\tau)$ dada por (3.52) com valores mais precisos, obtidos a partir de modelos numéricos para atmosferas estelares. Vamos considerar uma estrela A0 V típica, com temperatura efetiva $T_{ef} = 10000$ K e gravidade $\log g = 4$, ou seja, $g = 10^4$ cm/s². Na figura 3.6 os pontos pretos ligados mostram resultados de modelos numéricos de Cox (2000, p. 395, ver também Kurucz 1979), enquanto que a curva vermelha representa valores dados pela equação (3.52). No intervalo considerado, aproximadamente $0.001 < \tau < 10$, a diferença entre os resultados é inferior a 10%.

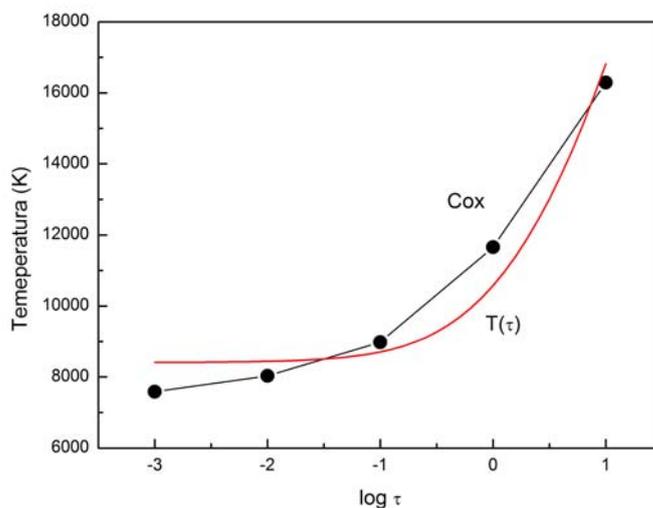


Figura 3.6 - Comparação dos resultados de modelos numéricos para uma estrela com temperatura efetiva de 10000 K (pontos pretos) e valores da equação (3.52) (curva vermelha).

► EXEMPLO 3.6 - Escurecimento do limbo

A solução da atmosfera cinza com a aproximação de Eddington permite obter um resultado interessante que é a determinação do *escurecimento do limbo*. Em imagens do Sol (figura 3.7a) podemos observar que as bordas da imagem (“o limbo”) são menos brilhantes (ou mais escuras) que a região central. Isto ocorre porque na direção do centro do Sol o feixe de radiação atravessa camadas mais profundas, portanto mais quentes, enquanto que nas bordas da imagem o feixe atravessa uma região mais próxima da superfície, portanto mais fria (figura 3.7b).

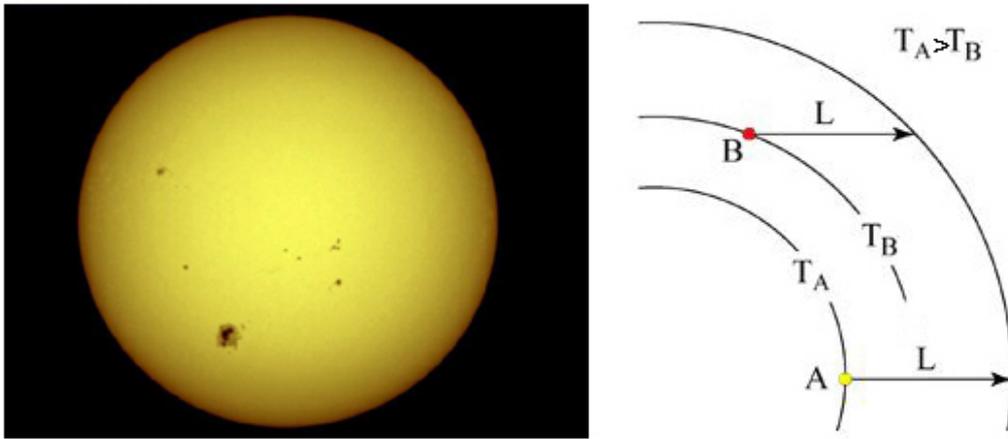


Figura 3.7 - Escurecimento do limbo do Sol.

De (3.44) e (3.49) temos

$$I(0, \mu) = \frac{3F}{4\pi} \left(\mu + \frac{2}{3} \right) \tag{3.53}$$

Comparando esta intensidade com a intensidade em $\tau = 0$ e $\mu = 1$ ($\theta = 0$)

$$I(0, 1) = \frac{3F}{4\pi} \left(1 + \frac{2}{3} \right) = \frac{5F}{4\pi} \tag{3.54}$$

Portanto

$$\frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)} = \frac{3}{5} \left(\mu + \frac{2}{3} \right) \tag{3.55}$$

ou seja, a intensidade é menor vinda de direções tais que $1 \geq \mu \geq 0$ comparado com a radiação emergente perpendicular à superfície. A equação (3.55) fornece a variação da intensidade no disco do Sol à medida que consideramos direções variando do centro para as bordas. É fácil ver de (3.55) que para $\mu \simeq 0$ ($\theta \simeq \pi/2$) temos $I(0, 0)/I(0, 1) \simeq 2/5$, correspondendo a 40%. A figura 3.8 mostra esta variação, onde

os pontos são dados observacionais para $\lambda = 5485 \text{ \AA}$, a linha tracejada é a relação obtida com a aproximação de Eddington e a linha cheia é a relação obtida com a solução exata.

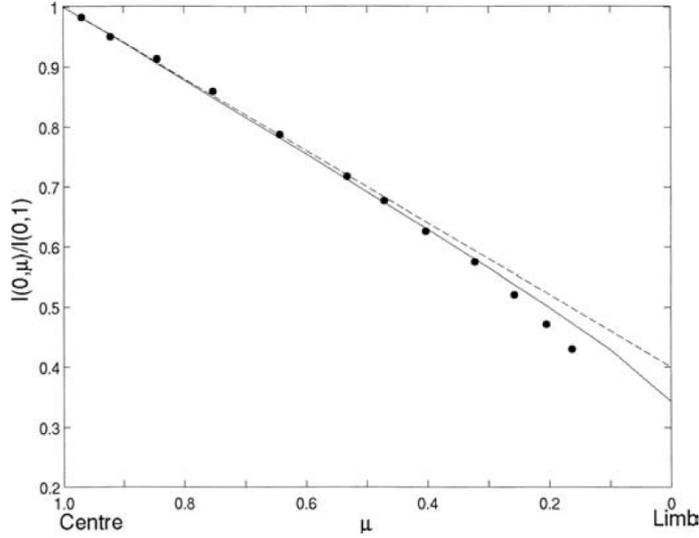


Figura 3.8 - Escurecimento do limbo do Sol (A. Choudhuri).

3.4 Cálculo do fluxo em uma atmosfera cinza

Vamos a seguir determinar o fluxo emergente de radiação sob a hipótese de atmosfera cinza (Mihalas 1978, p. 73). Para isso vamos considerar a expressão para o fluxo monocromático (3.13) e as duas expressões para a intensidade específica válidas para $0 \leq \mu \leq 1$ e $-1 \leq \mu \leq 0$, equações (3.8) e (3.9), respectivamente. Podemos então escrever

$$\begin{aligned}
 F_\nu(\tau_\nu) &= 2\pi \int_{-1}^{+1} I_\nu(\tau_\nu, \mu) \mu d\mu \\
 &= 2\pi \left[\int_0^1 d\mu \int_{\tau_\nu}^\infty S_\nu(t_\nu) e^{-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu} dt_\nu \right. \\
 &\quad \left. - \int_{-1}^0 d\mu \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-(\tau_\nu - t_\nu)/(-\mu)} dt_\nu \right] \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

Vamos inverter a ordem de integração em (3.56) e fazer uma mudança de variáveis. Na primeira integral vamos definir

$$w = \frac{1}{\mu} \quad dw = -\frac{1}{\mu^2} d\mu \quad d\mu = -\mu^2 dw = -w^{-2} dw \quad (3.57)$$

Neste caso, $w = \infty$ para $\mu = 0$ e $w = 1$ para $\mu = 1$. Na segunda integral definimos

$$w = -\frac{1}{\mu} \quad dw = \frac{1}{\mu^2} d\mu \quad d\mu = \mu^2 dw = w^{-2} dw \quad (3.58)$$

Neste caso, $w = \infty$ para $\mu = 0$ e $w = 1$ para $\mu = -1$. A expressão (3.56) fica

$$F_\nu(\tau_\nu) = 2\pi \left[\int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) dt_\nu \int_1^{\infty} e^{-w(t_\nu - \tau_\nu)} w^{-2} dw - \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) dt_\nu \int_1^{\infty} e^{-w(\tau_\nu - t_\nu)} w^{-2} dw \right] \quad (3.59)$$

As integrais em (3.59) formam uma classe especial de integrais, chamadas *integrais exponenciais*. Elas são definidas por

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} t^{-n} e^{-xt} dt \quad (3.60)$$

Algumas de suas propriedades podem ser vistas em Mihalas (1978) ou Chandrasekhar (1960). Para $n = 2$

$$E_2(x) = \int_1^{\infty} t^{-2} e^{-xt} dt \quad (3.61)$$

É fácil ver que as integrais em (3.59) podem ser reduzidas a esta integral exponencial

$$\int_1^{\infty} e^{-w(t_\nu - \tau_\nu)} w^{-2} dw = E_2(t_\nu - \tau_\nu) \quad (3.62)$$

$$\int_1^{\infty} e^{-w(\tau_\nu - t_\nu)} w^{-2} dw = E_2(\tau_\nu - t_\nu) \quad (3.63)$$

Portanto,

$$F_\nu(\tau_\nu) = 2\pi \left[\int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) E_2(t_\nu - \tau_\nu) dt_\nu - \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) E_2(\tau_\nu - t_\nu) dt_\nu \right] \quad (3.64)$$

No caso cinza temos $\tau_\nu = \tau$ e $S_\nu(t_\nu) = B_\nu[T(t)] = B_\nu(t)$, e (3.64) fica

$$F_\nu(\tau) = 2\pi \left[\int_\tau^{\infty} B_\nu(t) E_2(t - \tau) dt - \int_0^\tau B_\nu(t) E_2(\tau - t) dt \right] \quad (3.65)$$

Nesta expressão a temperatura aparece na função de Planck, na forma $h\nu/kT$, sendo portanto útil definir o parâmetro α tal que

$$\alpha = \frac{h\nu}{kT_{ef}} \quad (3.66)$$

Além disto, da relação $T(\tau)$ (3.52) temos

$$\frac{T(\tau)}{T_{ef}} = \left[\frac{3}{4} \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \right]^{1/4} \quad (3.67)$$

sendo conveniente definir a variável $p(\tau)$

$$p(\tau) = \frac{T_{ef}}{T} = \left[\frac{4}{3} \frac{1}{\tau + 2/3} \right]^{1/4} \tag{3.68}$$

$$\frac{h\nu}{kT} = \frac{h\nu}{kT_{ef}} \frac{T_{ef}}{T} = \alpha p(t) \tag{3.69}$$

Aplicando esta mudança de variáveis ao fluxo, temos $F_\nu(\tau) d\nu = F_\alpha(\tau) d\alpha$, ou

$$F_\nu(\tau) = F_\alpha(\tau) \frac{d\alpha}{d\nu} = F_\alpha(\tau) \frac{h}{kT_{ef}} \tag{3.70}$$

e (3.65) fica

$$F_\alpha(\tau) \frac{h}{kT_{ef}} = 2\pi \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[\int_\tau^\infty \frac{E_2(t-\tau) dt}{e^{\alpha p(t)} - 1} - \int_0^\tau \frac{E_2(\tau-t) dt}{e^{\alpha p(t)} - 1} \right] \tag{3.71}$$

Usando o fato de que $F = \sigma T_{ef}^4$ e simplificando, obtemos finalmente a relação

$$\frac{F_\alpha(\tau)}{F} = \left(\frac{4\pi k^4}{h^3 c^2 \sigma} \right) \alpha^3 \left[\int_\tau^\infty \frac{E_2(t-\tau) dt}{e^{\alpha p(t)} - 1} - \int_0^\tau \frac{E_2(\tau-t) dt}{e^{\alpha p(t)} - 1} \right] \tag{3.72}$$

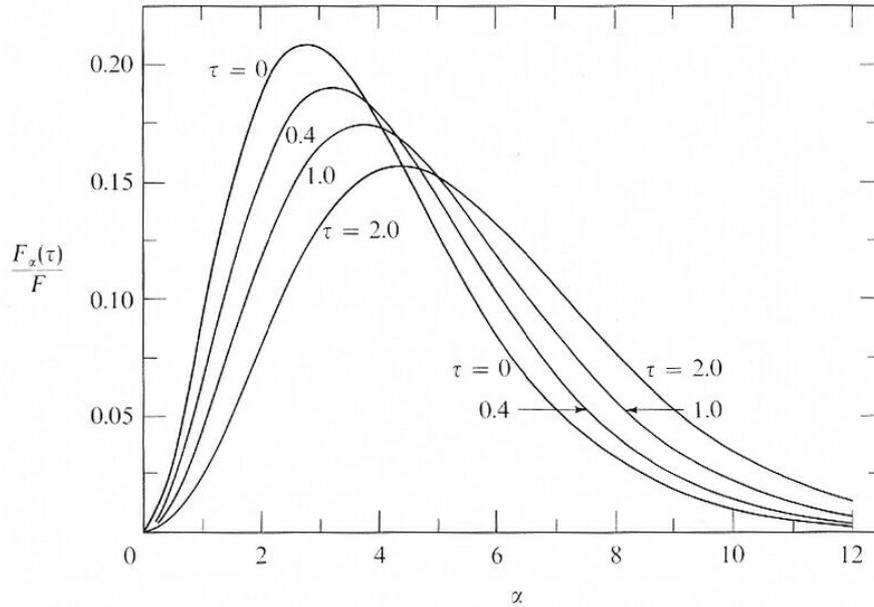


Figura 3.9 - Fluxo de radiação em uma atmosfera cinza (D. Mihalas).

O termo entre colchetes depende apenas de α e τ , e pode ser calculado de forma independente (ver por exemplo Chandrasekhar 1945, 1960). A figura 3.9 mostra a

razão $F_\alpha(\tau)/F$ em função do parâmetro α (ou da frequência) para diversos valores da profundidade óptica τ (cf. Mihalas 1978).

Podemos notar que a curva é semelhante à de um corpo negro, e o pico desloca-se para frequências mais altas para valores maiores da profundidade óptica, pois a temperatura do gás aumenta com τ , de acordo com (3.52).

► **EXEMPLO 3.7 - O fluxo contínuo em atmosferas estelares**

Vamos estimar a razão F_α/F para a atmosfera de uma estrela com $T_{ef} = 10000$ K e $\log g = 4$ ($g = 10^4$ cm/s²) de acordo com o modelo dado por Cox (2000, p. 395, ver também Kurucz 1979), dado na tabela 3.1. Para comprimentos de onda no intervalo $500 < \lambda(\text{Å}) < 200000$ (coluna 1), o modelo lista valores do fluxo emergente F_λ dado em erg cm⁻² s⁻¹ Å⁻¹ (colunas 2 e 3). Podemos então obter o parâmetro α pela equação (3.66) (coluna 4), e o fluxo F_α pode ser obtido por

$$F_\alpha d\alpha = F_\lambda d\lambda \tag{3.73}$$

$$F_\alpha = \frac{k T_{ef}}{h c} \lambda^2 F_\lambda \tag{3.74}$$

dado na coluna 5 da tabela 3.1 em erg cm⁻² s⁻¹. O fluxo total pode ser estimado por

$$F = \sigma T_{ef}^4 = 5.67 \times 10^{11} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \tag{3.75}$$

de modo que a razão F_α/F pode ser obtida (coluna 6). O resultado está mostrado na figura 3.10, que pode ser comparada com a figura 3.9. Podemos notar que as curvas são semelhantes, embora o modelo apresente uma queda mais pronunciada para as frequências mais altas, e o pico da emissão esteja também deslocado para frequências mais altas.

3.5 Opacidade

Os processos de opacidade incluem as transições ligado-ligado (*bound-bound*), ligado-livre (*bound-free*) e livre-livre (*free-free*), além do espalhamento (*scattering*). Nas transições *ligado-ligado*, um fóton é absorvido, e sua energia é usada para excitar um nível de energia mais alto do íon; inversamente, a passagem de um elétron de um nível superior para um nível inferior pode resultar na emissão de um fóton. Em ambos os casos, a transição produz uma *linha espectral*, de emissão ou absorção. Nas transições *ligado-livre* a energia do fóton é usada para ejetar um elétron para o contínuo, isto é, ele não está mais ligado ao átomo ou íon. No caso inverso, um elétron livre é capturado por um átomo ou íon, situando-se em um dado nível de energia, o que constitui uma *recombinação*. Em ambos os casos a transição é contínua, uma vez que no contínuo não há restrição para a energia do elétron. Nas transições *livre-livre* o elétron é livre antes e depois da transição, ou seja, trata-se de transições no contínuo.

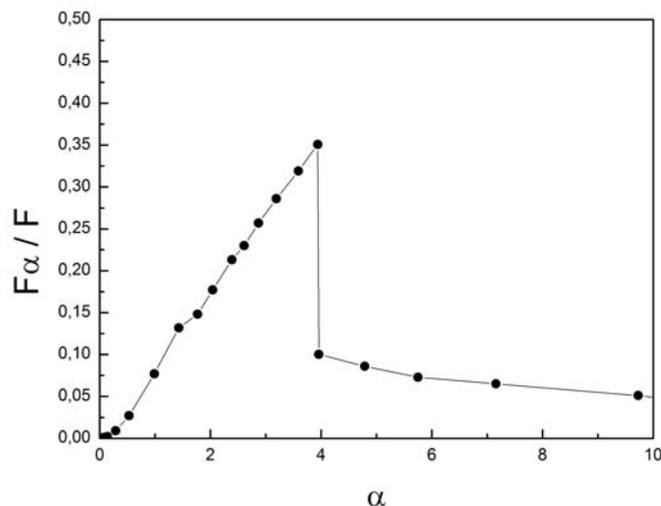


Figura 3.10 - Razão entre o fluxo emergente na frequência dada pelo parâmetro alfa com relação ao fluxo total, em função de alfa, para uma estrela com temperatura efetiva de 10000 K.

λ (Å)	$\log F_\lambda$	F_λ	α	F_α	F_α/F
506	-6.26	5.50×10^{-7}	28.48	9.76×10^{-6}	0.000
890	1.11	1.29×10^1	16.19	$7.08 \times 10^{+2}$	0.000
920	3.73	5.37×10^3	15.67	$3.15 \times 10^{+5}$	0.000
1482	8.28	1.91×10^8	9.73	2.90×10^{10}	0.051
2012	8.12	1.32×10^8	7.16	3.70×10^{10}	0.065
2506	7.98	9.55×10^7	5.75	4.16×10^{10}	0.073
3012	7.89	7.76×10^7	4.79	4.89×10^{10}	0.086
3636	7.79	6.17×10^7	3.96	5.66×10^{10}	0.100
3661	8.33	2.14×10^8	3.94	1.99×10^{11}	0.351
4012	8.21	1.62×10^8	3.59	1.81×10^{11}	0.319
4512	8.06	1.15×10^8	3.19	1.62×10^{11}	0.286
5025	7.92	8.32×10^7	2.87	1.46×10^{11}	0.257
5525	7.79	6.17×10^7	2.61	1.31×10^{11}	0.230
6025	7.68	4.79×10^7	2.39	1.21×10^{11}	0.213
7075	7.46	2.88×10^7	2.04	1.00×10^{11}	0.177
8152	7.26	1.82×10^7	1.77	8.39×10^{10}	0.148
8252	7.33	2.14×10^7	1.75	1.01×10^{11}	0.178
10050	7.03	1.07×10^7	1.43	7.51×10^{10}	0.132
14594	6.47	2.95×10^6	0.99	4.36×10^{10}	0.077
27000	5.48	3.02×10^5	0.53	1.53×10^{10}	0.027
50000	4.45	2.82×10^4	0.29	$4.89 \times 10^{+9}$	0.009
100000	3.27	1.86×10^3	0.14	$1.29 \times 10^{+9}$	0.002
200000	2.07	1.17×10^2	0.07	$3.26 \times 10^{+8}$	0.001

Tabela 3.1 - Fluxo emergente para uma estrela com temperatura efetiva de 10000 K (para as unidades ver o texto).

Classicamente, o elétron muda de uma órbita hiperbólica para outra de maior (ou menor) energia, e a transição é então uma absorção (ou emissão) livre-livre no contínuo. Pode-se também dizer que, neste caso, um elétron ao passar próximo de um átomo, induz um momento de dipolo que pode interagir com o campo de radiação. Finalmente, no caso do *espalhamento*, o fóton é defletido pelo átomo ou íon mudando sua direção de propagação, mas geralmente mantendo a mesma frequência, ou energia.

No caso geral, em que os coeficientes de emissão e absorção variam com a frequência, esses coeficientes devem ser conhecidos para que a equação de transporte radiativo seja resolvida. Um estudo detalhado dos processos de emissão e absorção da radiação está além dos objetivos deste texto, e o leitor interessado pode consultar, por exemplo, Rybicki e Lightman (1979), Swihart (1968), Choudhuri (2010), Maciel (1999). Neste capítulo vamos discutir alguns aspectos importantes relacionados com o coeficiente de absorção aplicado às atmosferas das estrelas.

Os processos de absorção da radiação geralmente envolvem a absorção de fótons seguida de uma excitação de um nível superior de um átomo ou íon, de modo que as populações dos níveis relevantes dos átomos e íons devem ser conhecidas. Em ETL este procedimento é relativamente simplificado, podendo ser aplicadas as equações de Boltzmann e Saha, vistas no capítulo 2. Este procedimento está relacionado com a determinação de uma relação entre a temperatura e a profundidade óptica, como vimos na equação (3.52). Como resultado, o coeficiente de absorção pode ser colocado na forma $k_\nu = f(T, P, \text{c.q.})$, isto é, pode ser determinado em função da temperatura, da pressão e da composição química.

(a) Os coeficientes de Einstein

Os coeficientes j_ν e k_ν são coeficientes *macroscópicos*, aplicáveis à matéria como um todo. O coeficiente k_ν , medido em cm^{-1} , pode também ser dado por massa, isto é, definimos o coeficiente κ_ν , medido em cm^2/g , tal que

$$\kappa_\nu = \frac{k_\nu}{\rho} \tag{3.76}$$

onde ρ é a densidade do gás. Podemos também definir os coeficientes de emissão e absorção do ponto de vista *microscópico*, que são os coeficientes de Einstein A_{kj} , B_{jk} e B_{kj} , onde j e k são dois níveis de energia do átomo ou íon considerado (figura 3.11).

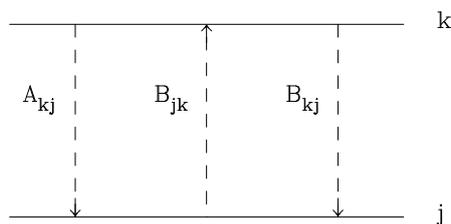


Figura 3.11 - Níveis de energia e coeficientes de Einstein.

Considerando dois níveis j e k com energia E_j e E_k , onde $k > j$, o coeficiente A_{kj} exprime a probabilidade por unidade de tempo de que um átomo X^r no estado de excitação k sofra espontaneamente uma transição $k \rightarrow j$ com emissão de um fóton.

Portanto, as unidades de A_{kj} são s^{-1} , e o inverso do coeficiente de emissão (A_{kj}^{-1}) corresponde essencialmente ao tempo de vida do nível k para as emissões ao nível j . Vimos no Exemplo 2.8 que o coeficiente de emissão espontânea de Einstein para a linha de 21 cm é $A_{kj} = 2.9 \times 10^{-15} s^{-1}$. O número de emissões espontâneas por unidade de volume e por unidade de tempo é (cf. Maciel 2002).

$$\frac{\text{número de emissões espontâneas } k \rightarrow j}{\text{cm}^3 \text{ s}} = n_k(X^r) A_{kj} \quad (3.77)$$

A emissão espontânea é geralmente isotrópica, de modo que a energia total emitida espontaneamente por unidade de volume, por unidade de tempo e por unidade de ângulo sólido é

$$\int j_\nu d\nu = \frac{1}{4\pi} h \nu_{jk} n_k(X^r) A_{kj} \quad (3.78)$$

(unidades: $\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$), onde ν_{jk} é a frequência correspondente à diferença de energia entre os dois níveis.

O processo de absorção pode ser caracterizado pelo coeficiente de absorção de Einstein B_{jk} modificado pelas emissões induzidas, também chamadas absorções negativas. Estas são caracterizadas pelo coeficiente B_{kj} e refletem as emissões causadas pela absorção de fótons com energia $E_{jk} = E_k - E_j$. Neste caso, o número de absorções corrigidas pelas emissões induzidas por unidade de volume e por unidade de tempo é

$$\frac{\text{número de abs.}}{\text{cm}^3 \text{ s}} = \left[n_j(X^r) B_{jk} - n_k(X^r) B_{kj} \right] U_\nu \quad (3.79)$$

onde B_{jk} e B_{kj} têm unidades $\text{erg}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \text{ Hz}$, e a densidade de energia U_ν tem unidades $\text{erg cm}^{-3} \text{ Hz}^{-1}$. Note-se que o coeficiente de absorção pode também ser definido, por exemplo, usando a intensidade média da radiação. Analogamente ao caso da emissão, a energia total absorvida por unidade de volume, por unidade de tempo e por unidade de ângulo sólido é

$$\begin{aligned} \int k_\nu I_\nu d\nu &= \frac{1}{4\pi} h \nu_{jk} \left[n_j(X^r) B_{jk} - n_k(X^r) B_{kj} \right] U_{\nu_{jk}} \\ &= \frac{1}{c} h \nu_{jk} \left[n_j(X^r) B_{jk} - n_k(X^r) B_{kj} \right] I_{\nu_{jk}} \end{aligned} \quad (3.80)$$

(unidades: $\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$), onde usamos o fato de que $U_\nu = (4\pi/c)I_\nu$. Uma transição entre dois níveis de energia produz uma linha espectral, que sofre de alguns processos de alargamento, como veremos no capítulo 4. Podemos eventualmente admitir que a intensidade não varia sensivelmente ao longo da linha, sendo aproximadamente igual à intensidade no contínuo, de modo que $\int k_\nu I_\nu d\nu \simeq I_{\nu_{jk}} \int k_\nu d\nu$.

Os coeficientes de Einstein não são completamente independentes, e pode ser mostrado que existem algumas relações entre eles (Exercício 3.3. Para detalhes ver Maciel 2002). Estas relações são:

$$g_j B_{jk} = g_k B_{kj} \quad (3.81)$$

$$A_{kj} = \frac{8\pi h\nu_{jk}^3}{c^3} B_{kj} \tag{3.82}$$

$$A_{kj} = \frac{8\pi h\nu_{jk}^3}{c^3} \frac{g_j}{g_k} B_{jk} \tag{3.83}$$

(b) O íon H⁻ nas atmosferas estelares

Em atmosferas de estrelas como o Sol, há uma grande abundância de átomos de H neutro, bem como de elétrons doados por elementos mais pesados, como Na, Mg, Al, cujos potenciais de ionização são muito mais baixos que o do H, que é de 13.6 eV (Tabela 3.2). O resultado é que os átomos de H conseguem capturar alguns desses elétrons, formando o íon H⁻, isto é, um núcleo contendo um próton e uma nuvem eletrônica com dois elétrons. Desde o final da década de 1930, ficou demonstrado que a absorção ligado-livre e livre-livre de fótons solares pelos íons de H⁻ é a principal fonte de opacidade contínua na fotosfera solar, apesar da abundância relativamente baixa destes íons. As transições ligado-livre envolvendo H⁻ são favorecidas por seu baixo potencial de ionização, $PI = 0.75\text{ eV}$ ou seja, fótons com comprimentos de onda $\lambda \geq 16500 \text{ \AA} = 1.6 \mu\text{m}$ conseguem ionizar o H⁻.

Atom	Stage of ionization					
	I	II	III	IV	V	VI
1 H	13.598 44					
2 He	24.587 41	54.417 78				
3 Li	5.391 72	75.640 18	122.454			
4 Be	9.322 63	18.211 16	153.897	217.713		
5 B	8.298 03	25.154 84	37.931	259.366	340.22	
6 C	11.260 30	24.383 32	47.888	64.492	392.08	489.98
7 N	14.534 14	29.601 3	47.449	77.472	97.89	552.06
8 O	13.618 06	35.117 30	54.936	77.413	113.90	138.12
9 F	17.422 82	34.970 82	62.708	87.140	114.24	157.17
10 Ne	21.564 54	40.963 28	63.45	97.12	126.21	157.93
11 Na	5.139 08	47.286 4	71.620	98.91	138.40	172.18
12 Mg	7.646 24	15.035 28	80.144	109.265	141.27	186.76
13 Al	5.985 77	18.828 56	28.448	119.99	153.83	190.49
14 Si	8.151 69	16.345 85	33.493	45.142	166.77	205.27
15 P	10.486 69	19.769 4	30.203	51.444	65.03	220.42
16 S	10.360 01	23.337 9	34.79	47.222	72.59	88.05
17 Cl	12.967 64	23.814	39.61	53.465	67.8	97.03
18 Ar	15.759 62	27.629 67	40.74	59.81	75.02	91.01
19 K	4.340 66	31.63	45.806	60.91	82.66	99.4
20 Ca	6.113 16	11.871 72	50.913	67.27	84.50	108.78
21 Sc	6.561 44	12.799 67	24.757	73.489	91.65	111.68
22 Ti	6.828 2	13.575 5	27.492	43.267	99.30	119.53
23 V	6.746 3	14.66	29.311	46.71	65.28	128.1
24 Cr	6.766 64	16.485 7	30.96	49.16	69.46	90.64
25 Mn	7.434 02	15.639 99	33.668	51.2	72.4	95.6
26 Fe	7.902 4	16.187 8	30.652	54.8	75.0	99.1
27 Co	7.881 0	17.083	33.50	51.3	79.5	103
28 Ni	7.639 8	18.168 84	35.19	54.9	75.5	108
29 Cu	7.726 38	20.292 40	36.841	55.2	79.9	103
30 Zn	9.394 05	17.964 40	39.723	59.4	82.6	108

Tabela 3.2 - Potenciais de ionização (A. N. Cox).

Um aspecto importante da opacidade pelo íon H^- é que o coeficiente de absorção não depende muito fortemente da frequência, ou seja, as equações da seção 3.3 para a atmosfera cinza podem ser aplicadas. Em particular, a relação $T(\tau)$ dada por (3.52) pode ser usada de modo que a dependência da temperatura com a profundidade óptica é determinada, mesmo sem levar em conta a estrutura detalhada da atmosfera, como sua composição química, pressão, etc.

► EXEMPLO 3.8 - Opacidade pelo íon H^- na atmosfera solar

No caso do Sol, observamos uma emissão contínua semelhante à de um corpo negro, como já vimos nas figuras 1.5 e 2.16. De acordo com as relações (1.52) e (2.3), devemos esperar que a fotosfera seja opaca (opticamente espessa) para radiação visível, mas sabemos que a densidade de gás na fotosfera é muito baixa para que isso aconteça. A razão de observarmos uma emissão próxima de um corpo negro é que boa parte da opacidade na fotosfera solar deve-se ao íon H^- . Este íon tem um único estado ligado, de modo que pode originar transições ligado-livre ou livre-livre apenas. A energia de ligação do segundo elétron de apenas 0.75 eV, como vimos, e o comprimento de onda máximo dos fótons necessários para a absorção é

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{hc}{0.75 \text{ eV}} \simeq 16500 \text{ \AA} = 1.65 \mu\text{m} \tag{3.84}$$

O coeficiente de absorção em função do comprimento de onda está mostrado na figura 3.12 para uma temperatura próxima da temperatura efetiva do Sol, $T = 6300 \text{ K}$.

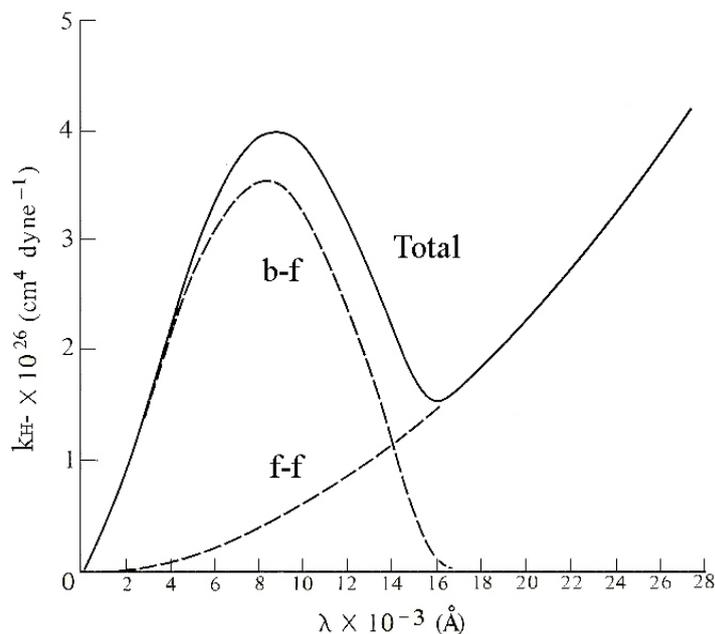


Figura 3.12 - Coeficiente de absorção para o íon H^- na fotosfera solar em função do comprimento de onda (E. Novotny).

Nesta figura, a ordenada é dada por $10^{26} (k_{H-}/P_e n_H)$, isto é, a ordenada é o coeficiente de absorção k_{H-} , medido em cm^{-1} dividido pela pressão eletrônica $P_e = n_e kT$ e pela densidade de átomos de H neutro, n_H , tudo isso multiplicado por 10^{26} , de modo que as unidades da ordenada no sistema cgs são $\text{cm}^4 \text{dina}^{-1}$. Estão destacadas as componentes ligado-livre e livre-livre. Vemos que, para $\lambda \leq 14000 \text{ \AA}$, a principal componente é ligado-livre, e para $\lambda > 14000 \text{ \AA}$, a principal componente é a transição livre-livre. Para maiores detalhes ver Novotny (1973) e Doughty e Fraser (1966).

(c) Espalhamento por elétrons

Em atmosferas de estrelas mais quentes, os elementos mais abundantes, H e He, estão ionizados, de modo que a densidade eletrônica na atmosfera é alta, incluindo os elétrons doados pelo H ($n_e = n_H$) e aqueles doados pelo He ($n_e = 2n_{He}$), além das contribuições dos elementos pesados. Portanto, *o espalhamento da radiação pelos elétrons, ou espalhamento Thomson, é uma fonte importante de opacidade* (Figura 3.13).

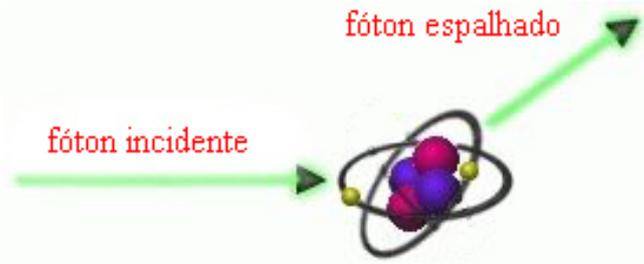


Figura 3.13 - Espalhamento Thomson.

Também neste caso, o coeficiente de absorção (ou coeficiente de espalhamento) é independente da frequência da radiação. A radiação a ser espalhada vem principalmente na direção radial, mas após o espalhamento, a direção dos fótons espalhados é essencialmente isotrópica, resultando uma diminuição no número de fótons propagando-se na direção radial.

Para temperaturas suficientemente baixas, $kT \ll m_e c^2 \simeq 8.2 \times 10^{-7} \text{ erg} = 0.5 \text{ MeV}$, a seção de choque de espalhamento por elétrons é constante, e pode ser obtida classicamente por

$$\sigma_e = \frac{8\pi e^4}{3 m_e^2 c^4} = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2 \tag{3.85}$$

(ver por exemplo Rybicki e Lightman 1979, Panofsky e Phillips 1962). Como $k_e = \kappa_e \rho = n_e \sigma_e$, o coeficiente de espalhamento por massa é:

$$\kappa_e = \sigma_e \frac{n_e}{\rho} = 6.65 \times 10^{-25} \frac{n_e}{\rho} \text{ cm}^2/\text{g} \tag{3.86}$$

onde n_e é a densidade eletrônica. Chamando X, Y e Z as abundâncias de H, He e elementos pesados por massa, o número de elétrons doados pelo H é $\rho X/m_H$, o

número de elétrons doados pelo He é $\rho Y/2 m_H$, e o número de elétrons doados pelos elementos pesados é $(\rho Z/m_H)(Z_i/A_i) \simeq \rho Z/2 m_H$, onde $m_H = 1.67 \times 10^{-24}$ g é a massa do átomo de H, Z_i e A_i são o número atômico e massa atômica do elemento pesado i , respectivamente. Portanto, a densidade eletrônica total é

$$n_e \simeq \frac{\rho}{m_H} \left(X + \frac{Y}{2} + \frac{Z}{2} \right) \simeq \frac{\rho}{m_H} \frac{1+X}{2} \tag{3.87}$$

onde usamos o fato de que $X + Y + Z = 1$. De (3.86) e (3.87) temos

$$\kappa_e = \frac{\sigma_e}{m_H} \frac{1+X}{2} = 0.2(1+X) \quad \text{cm}^2/\text{g} \tag{3.88}$$

Nas temperaturas típicas das atmosferas estelares a contribuição do espalhamento Thomson para a opacidade é pequena, mas pode ser considerável nos interiores das estrelas e no início da expansão do Universo, quando toda a matéria estava ionizada.

► EXEMPLO 3.9 - O limite de Eddington

Partículas situadas na superfície de uma estrela podem sofrer uma força devida à radiação, causada pela absorção da quantidade de movimento dos fótons em um processo como o espalhamento por elétrons. O *limite de Eddington* é definido como a luminosidade máxima de uma estrela para que a força sobre os elétrons ou íons devida à radiação não exceda a força gravitacional. Em uma estrela de luminosidade L , a força radiativa sobre um átomo de H à distância r do centro é $L\sigma_e/4\pi r^2 c$, correspondendo à taxa de variação da quantidade de movimento dos fótons do campo de radiação. Para uma estrela de massa M , para haver equilíbrio, devemos ter

$$\frac{L \sigma_e}{4\pi r^2 c} \simeq \frac{G M m_H}{r^2} \tag{3.89}$$

de onde obtemos:

$$L \simeq \frac{4\pi c G m_H}{\sigma_e} M \simeq 1.3 \times 10^{38} \frac{M}{M_\odot} \text{ erg/s} \tag{3.90}$$

ou

$$\frac{L}{L_\odot} \simeq 3.4 \times 10^4 \frac{M}{M_\odot} \tag{3.91}$$

que é o limite de Eddington.

► EXEMPLO 3.10 - A aproximação de Kramers

Em alguns casos, é possível obter uma aproximação analítica para o coeficiente de absorção ligado-livre, especialmente quando o H e o He estão ionizados. Então, à medida que T aumenta, um número maior de níveis de elementos pesados deixa de ser importante, diminuindo o coeficiente de absorção. A *aproximação de Kramers*, obtida por Eddington a partir do coeficiente de absorção de Kramers é dada por

$$\kappa_{bf} \simeq 4.3 \times 10^{25} \frac{g_{bf}}{t} Z(1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \text{ cm}^2/\text{g} \quad (3.92)$$

(ver por exemplo Maciel 1999, Clayton 1968). Nessa expressão, X e Z são novamente as frações por massa de H e elementos pesados; g_{bf} é um valor médio do fator de Gaunt, da ordem da unidade; t é o fator de guilhotina, da ordem de 1–100, relacionado com o número de elétrons restante no íon considerado.

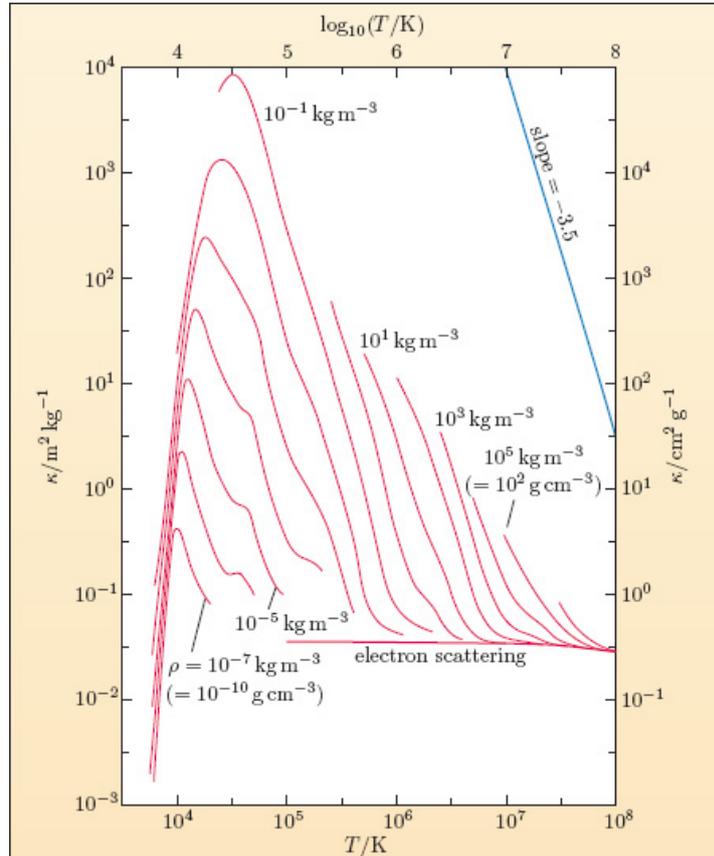


Figura 3.14 - Valores médios do coeficiente de absorção em função da temperatura e densidade (S. G. Ryan, A. W. Norton).

A figura 3.14 mostra o coeficiente de absorção médio κ em função da temperatura para um gás de composição química solar. Na escala vertical à esquerda, κ está em m^2/kg , e à direita está em cm^2/g , lembrando que $\kappa(\text{cm}^2/\text{g}) = 10 \kappa(\text{m}^2/\text{kg})$. O gráfico também mostra a variação de κ com a densidade do gás, relacionada ao lado das curvas. Temos que $\rho(\text{g}/\text{cm}^3) = 10^{-3} \rho(\text{kg}/\text{m}^3)$. Podemos notar que, para $T > 30000 \text{ K}$ ($\log T > 4.5$) as curvas têm uma inclinação semelhante, da ordem de -3.5 , como indicado pela reta inclinada à direita e acima na figura, refletindo o expoente da aproximação de Kramers (3.92). Note-se ainda o espalhamento Thomson dado por (3.86), que é essencialmente constante e igual a $\kappa_e \simeq 0.32 \text{ cm}^2/\text{g}$, ou $\log \kappa_e \simeq -0.5$. Para valores altos da temperatura, κ_e é um limite inferior para a opacidade.

EXERCÍCIOS

3.1 Mostre que a equação (3.11) pode ser obtida a partir de (3.9) e (3.10). Note que, para $\mu < 0$, devemos considerar pontos localizados profundamente na atmosfera, de modo que $\tau_\nu(-\mu) \rightarrow \infty$.

3.2 Prove o resultado abaixo

$$\int_0^\infty (t + q) e^{-t/\mu} \frac{dt}{\mu} = \mu + q$$

3.3 Prove as relações (3.81), (3.82) e (3.83). Considere que, em ET, as taxas de emissão e absorção de energia (3.78) e (3.80) devem ser iguais, e use a equação de Boltzmann (2.56) para obter uma relação entre os coeficientes de Einstein.

3.4 O íon H^- tem um potencial de ionização de 0.75 eV. Supondo que o Sol emita radiação como um corpo negro a uma temperatura de 5800 K, que fração do número de fótons emitidos pelo Sol pode ionizar o H^- ?

3.5 Estime o caminho livre médio para espalhamento Thomson (a) em um ponto da fotosfera solar onde $\rho \sim 10^{-7} \text{ g/cm}^3$ e (b) em um ponto do interior do Sol, onde $\rho \sim 140 \text{ g/cm}^3$. Admita que o hidrogênio representa cerca de 70% da massa do gás.

Referências

- Carroll, B. W., Ostlie, D. A. 2006, *An Introduction to Modern Astrophysics*, Benjamin Cummings
- Chandrasekhar, S. 1945, *Astrophysical Journal* **101**, 328
- Chandrasekhar, S. 1960, *Radiative transfer*, Dover
- Choudhuri, A. R. 2010, *Astrophysics for physicists*, Cambridge University Press
- Clayton, D. D. 1968, *Principles of stellar evolution and nucleosynthesis*, McGraw-Hill
- Cox, A. N., 2000, *Allen's Astrophysical Quantities*, AIP
- Doughty, N. A., Fraser, P. A. 1966, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **132**, 267
- Gray, D. F. 2008, *The observation and analysis of stellar photospheres*, 3a. ed., CUP
- Kurucz, R. L. 1979, *Astrophys. J. Suppl.* **40**, 1
- Maciel, W. J. 1999, *Introdução à estrutura e evolução estelar*, Edusp
- Maciel, W. J. 2002, *Astrofísica do meio interestelar*, Edusp
- Mihalas, D. 1978, *Stellar atmospheres*, Freeman
- Novotny, E. 1973, *Introduction to stellar atmospheres and interiors*, Oxford
- Panofsky, W. K. H., Phillips, M. 1962, *Classical electricity and magnetism*, Addison-Wesley
- Ryan, S. G., Norton, A. W. 2010, *Stellar evolution and nucleosynthesis*, CUP

Rybicki, G. B., Lightman, A. P. 1979, *Radiative processes in astrophysics*, Wiley

Shu, F. H. 1982, *The physical universe*, University Science Books

Swihart, T. L. 1968, *Astrophysics and stellar astronomy*, Wiley

Swihart, T. L. 1981, *Radiation transfer and stellar atmospheres*, Pachart

Zeilik, M., Gregory, S. A. 1997, *Introductory Astronomy and Astrophysics*, Brooks
Cole

CAPITULO 4 – FORMAÇÃO DE LINHAS ESPECTRAIS

4.1 Introdução

No capítulo anterior estudamos as atmosferas estelares, em particular no que se refere à radiação contínua emitida pelas estrelas. Neste capítulo vamos considerar alguns aspectos básicos relativos às linhas espectrais observadas nas estrelas e no meio interestelar. Algumas referências sobre o material deste capítulo incluem Choudhuri (2010), Swihart (1968), Maciel (2002), Zeilik e Gregory (1997) e Carroll e Ostlie (2006).

4.2 Linhas espectrais

As linhas espectrais podem ser observadas em emissão ou em absorção, superpostas ou não a uma emissão contínua. Por exemplo, na figura 1.5 podemos ver algumas linhas de absorção no espectro solar, e na figura 2.16 observamos diversas bandas moleculares (H_2O , CO_2) – essencialmente conjuntos de milhares de linhas espectrais – produzidas na atmosfera terrestre. Na figura 2.15 podemos observar, à direita, algumas linhas de emissão observadas nos espectros de nebulosas planetárias, como as linhas do [OIII] ($\lambda 4959,5007\text{\AA}$), $\text{H}\alpha$ ($\lambda 6563\text{\AA}$) e $\text{H}\beta$ ($\lambda 4861\text{\AA}$).

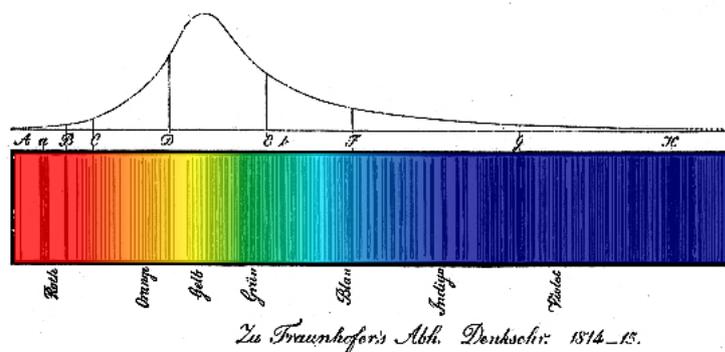


Figura 4.1 - O espectro solar de Fraunhofer.

A figura 4.1 mostra o espectro solar clássico de Fraunhofer (1787-1826), obtido a partir de uma grade de difração para determinar as posições relativas de centenas de linhas no espectro solar. Note que Fraunhofer deu nomes às linhas mais importantes, partindo da região vermelha em direção ao ultravioleta. Alguns dos nomes dados por ele são usados até hoje, como no caso das linhas H ($\lambda 3968.47\text{\AA}$) e K ($\lambda 3933.66\text{\AA}$) do Ca II e das linhas D1 ($\lambda 5895.92\text{\AA}$) e D2 ($\lambda 5889.95\text{\AA}$) do Na I. Outros exemplos de linhas espectrais em absorção podem ser vistos na figura 4.2.

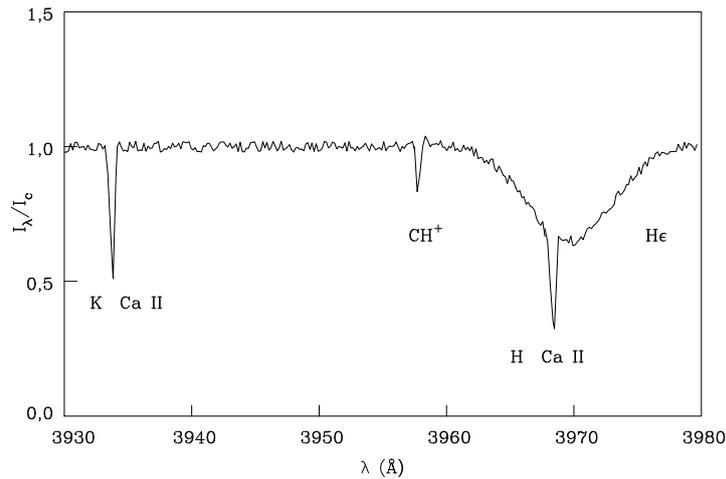


Figura 4.2 - Linhas espectrais em absorção: estrelas e meio interestelar.

Nesta figura, podemos observar as linhas H e K do Ca II em absorção de origem interestelar superpostas ao espectro da estrela ζ Oph, uma estrela de tipo O9.5V, assim como uma linha interestelar da molécula CH⁺ (λ3957.74Å). A linha Heε em absorção, mas de origem estelar, pode também ser observada na figura. Note-se que as linhas interestelares são muito mais estreitas que a linha estelar, refletindo as menores temperaturas das nuvens interestelares, que produzem movimentos (e um efeito Doppler) mais modesto em comparação com as condições nas atmosferas estelares (seção 4.3).

A tabela 4.1 mostra características de algumas das linhas de absorção ópticas de origem interestelar, as quais produziram a maior parte dos dados sobre as nuvens interestelares até a década de 1970.

íon/molécula	λ (Å)	transição
Na I	(D2) 5889.95	$3^2S_{1/2} - 3^2P_{3/2}^0$
Na I	(D1) 5895.92	$3^2S_{1/2} - 3^2P_{1/2}^0$
Ca II	(K) 3933.66	$4^2S_{1/2} - 4^2P_{3/2}^0$
Ca II	(H) 3968.47	$4^2S_{1/2} - 4^2P_{1/2}^0$
CN	3874.61	$B^2\Sigma^+ \leftarrow X^2\Sigma^+(0,0) R(0)$
CH	4300.31	$A^2\Delta \leftarrow X^2\Pi(0,0) R_2(1)$
CH ⁺	4232.58	$A^1\Pi \leftarrow X^1\Sigma^+(0,0) R(0)$
CH ⁺	3957.74	$A^1\Pi \leftarrow X^1\Sigma^+(1,0) R(0)$

Tabela 4.1 - Exemplos de linhas espectrais interestelares ópticas.

Mais recentemente, linhas espectrais passaram a ser observadas em outras faixas do espectro, como o ultravioleta. A tabela 4.2 mostra algumas linhas importantes observadas nesta faixa do espectro.

íon	λ (Å)	íon	λ (Å)
H I	1215.67	Mg I	2852.13
H I	1025.72	Mg II	2795.53
Cl	1328.83	Si I	2514.32
Cl	1277.24	Si II	1193.29
C II	1334.53	Si II	1260.42
C IV	1548.20	Si III	1206.51
N I	1200.71	S II	1259.52
N II	1134.17	S III	1190.21
O I	1302.17	Fe II	2599.40
O I	1039.23	Fe II	2382.03

Tabela 4.2 - Exemplos de linhas espectrais no ultravioleta.

A figura 4.3 mostra um exemplo de uma linha de absorção ultravioleta de origem interestelar em alta resolução para o Si III ($\lambda 1206.51\text{Å}$) na direção da estrela ζ Oph. Este é um exemplo de uma linha não saturada, enquanto que linhas de elementos mais abundantes, como a linha Lyman- α do H ($\lambda 1216\text{Å}$), encontram-se saturadas na direção desta estrela.

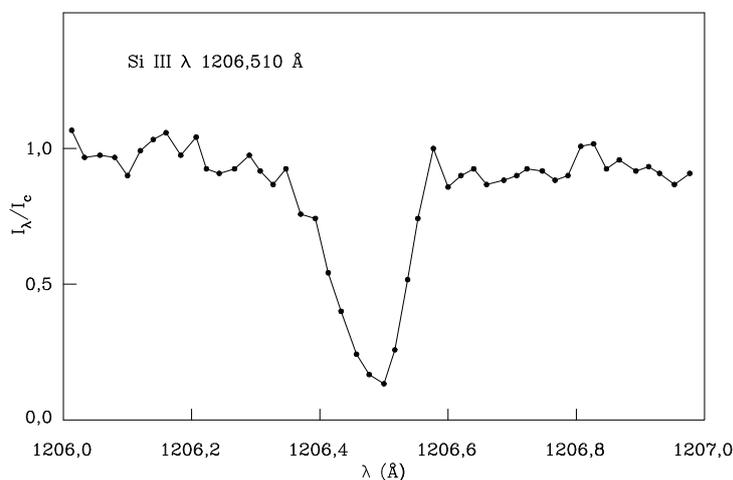


Figura 4.3 - A linha de absorção interestelar do Si III na direção de ζ Oph. (D. C. Morton)

Podemos também observar e analisar linhas espectrais em objetos extragalácticos, como mostrado na figura 4.4, para o espectro da galáxia tipo Seyfert 2 NGC 1667 e

da galáxia *LINER* (*Low ionization nuclear emission region*) NGC 1052, onde podem ser observadas linhas estreitas em emissão do oxigênio, cálcio e sódio.

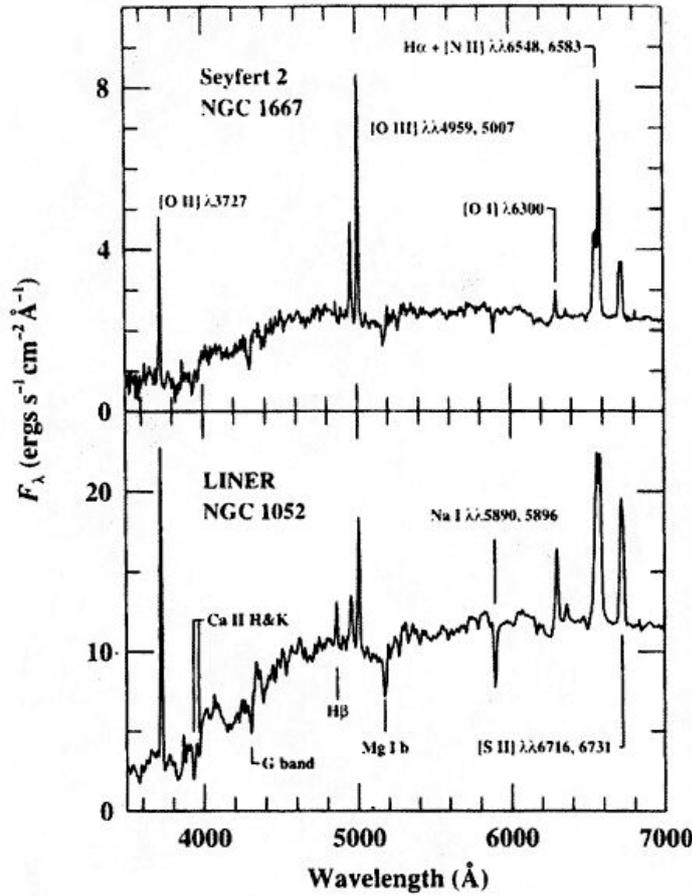


Figura 4.4 - Espectros de galáxias Seyfert 2 e LINER. (A. V. Filippenko)

4.3 Alargamento das linhas espectrais

As linhas espectrais correspondem à emissão ou absorção de fótons causadas pela transição de um átomo ou íon entre dois níveis de energia j e k , com energias E_j e E_k , respectivamente (ver por exemplo as figuras 3.11 ou 4.6). Se os níveis fossem infinitamente finos, a transição ocorreria para um comprimento de onda λ_{jk} , ou frequência ν_{jk} , bem definidos, dados por

$$\Delta E_{jk} = E_k - E_j = h \nu_{jk} = \frac{hc}{\lambda_{jk}} \tag{4.1}$$

Entretanto, os níveis j e k não são infinitamente finos, eles possuem um certo intervalo de energias (ou tempos de vida), de modo que os comprimentos de onda (ou frequências) vizinhos ao central também devem ser incluídos no processo de emissão ou absorção. Processos que produzem alargamento das linhas espectrais incluem o alargamento rotacional, o alargamento por pressão, turbulência, efeito de campos

magnéticos (efeito Zeeman), campos elétricos (efeito Stark), e o próprio instrumental usado para analisar as linhas. Como resultado, a linha espectral tem um *perfil*, isto é, inclui uma parte central, o *núcleo* da linha, e também as partes mais afastadas do centro, que são as *asas* da linha, como pode ser visto no exemplo da figura 4.3. Nesta figura a linha de absorção do SiIII está centrada em $\lambda = 1206.5 \text{ \AA}$, mas estende-se à esquerda e à direita por alguns centésimos de Angstroms. Nesta seção vamos analisar os principais processos de alargamento das linhas espectrais.

► EXEMPLO 4.1 - Tempos de vida dos níveis de energia

Como vimos no Exemplo 2.5, a probabilidade de transição espontânea para a linha de 21 cm do H é $A_{21} = 2.9 \times 10^{-15} \text{ s}^{-1}$, de modo que o tempo de vida do nível superior é muito longo, $t \sim 1/A_{21} \simeq 3.45 \times 10^{14} \text{ s} \sim 1.1 \times 10^7 \text{ ano}$. Para as linhas proibidas do [OIII] em $\lambda = 4959$ e 5007 \AA , frequentemente observadas no espectro de nebulosas planetárias, as probabilidades médias são $A_{21} = 6.7 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ e $2.0 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ (Maciel 2002), de modo que as escalas de tempo dos níveis superiores são também relativamente altas, $t \simeq 1.49 \times 10^2 \text{ s}$ e 50 s , respectivamente. A figura 4.5 mostra o espectro da nebulosa planetária Pe1-15, onde estas duas linhas são claramente observadas, sendo muito intensas. Já para as linhas permitidas do hidrogênio Lyman- α em $\lambda = 1216 \text{ \AA}$ (ver a figura 4.11), H α ($\lambda = 6563 \text{ \AA}$) e H β ($\lambda = 4861 \text{ \AA}$), (figura 4.5), as probabilidades são muito altas, $A_{21} = 4.7 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$, $4.4 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ e $8.4 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ (Cox 2000), de modo que as escalas de tempo dos níveis correspondentes são curtas, $t \simeq 2.1 \times 10^{-9} \text{ s}$, $2.3 \times 10^{-8} \text{ s}$ e $1.2 \times 10^{-7} \text{ s}$, respectivamente.

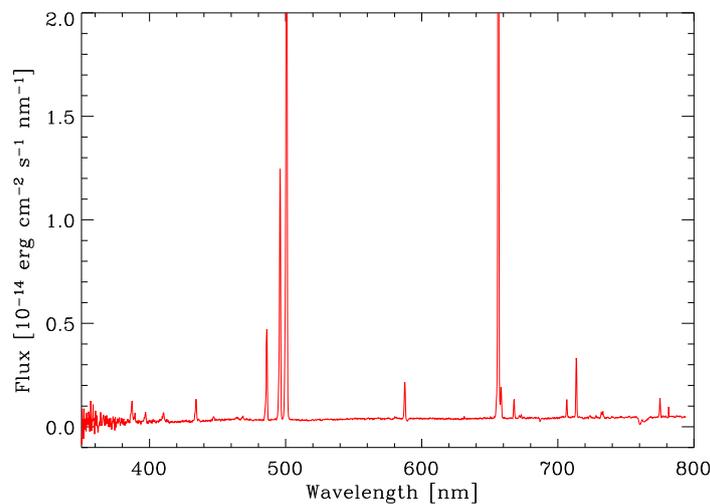


Figura 4.5 - Espectro da nebulosa planetária Pe1-15. As linhas 4959, 5007 Å do [OIII] podem ser vistas, além de H-alfa (6563 Å) e H-beta (4861 Å). (O. Cavichia)

(a) Perfil de uma linha espectral

Vamos considerar o processo envolvendo dois níveis de energia j e k (figura 4.6) de um átomo. O coeficiente de absorção por volume (cm^{-1}) pode ser escrito

$$k_\nu = n_j(X) \sigma_\nu \tag{4.2}$$

onde $n_j(X)$ é a densidade de partículas do tipo X no nível j (cm^{-3}), e σ_ν (cm^2) é a seção de choque de absorção, ou coeficiente de absorção por átomo no nível j , relacionada à seção de choque integrada σ ($\text{cm}^2 \text{ Hz}$) por

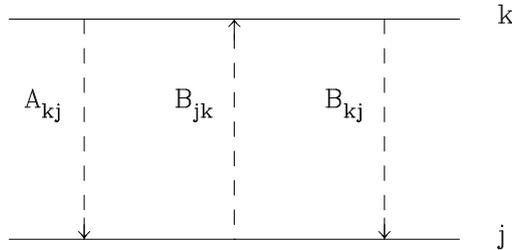


Figura 4.6 - Níveis de energia j e k .

$$\sigma = \int \sigma_\nu d\nu \tag{4.3}$$

onde a integral é feita em toda a linha. A seção de choque total, desprezando as emissões induzidas, pode ser escrita

$$\sigma = \frac{h \nu_{jk} B_{jk}}{c} \tag{4.4}$$

onde B_{jk} é o coeficiente de absorção de Einstein, visto na seção 3.5a. A seção de choque σ está relacionada com a *força de oscilador* f_{jk} para a transição $j \rightarrow k$ por

$$\sigma = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{jk} \tag{4.5}$$

Os coeficientes de Einstein A_{kj} , B_{jk} , B_{kj} podem ser relacionados entre si, como vimos no Exercício 3.3, e também com a força de oscilador f_{jk} (ver Exercício 4.1). Definindo $\Delta\nu = \nu - \nu_{jk}$, podemos introduzir a função *perfil da linha* $\phi(\Delta\nu)$ (unidades: Hz^{-1}), por

$$\sigma_\nu = \sigma \phi(\Delta\nu) \tag{4.6}$$

Esta função é *normalizada*, ou seja,

$$\int \phi(\Delta\nu) d\nu = 1 \tag{4.7}$$

onde a integral é feita em toda a linha. A função $\phi(\Delta\nu)$ depende da largura intrínseca da linha, bem como de outros mecanismos de alargamento que possam ocorrer. O

alargamento *natural* ou *intrínseco* é uma conseqüência do princípio da incerteza de Heisenberg. O movimento térmico dos átomos causadores da linha introduz um alargamento adicional, devido ao efeito Doppler, isto é, átomos com uma componente de velocidade na direção do observador produzem um pequeno desvio para comprimentos de onda mais curtos, enquanto que os átomos afastando-se do observador produzem um desvio para comprimentos de ondas maiores.

Em termos da profundidade óptica, o perfil pode ser escrito

$$\tau_\nu = \int k_\nu ds = \int n_j \sigma_\nu ds = \int n_j \sigma \phi(\Delta\nu) ds \tag{4.8}$$

ou seja,

$$\tau_\nu = N_j \sigma \phi(\Delta\nu) \tag{4.9}$$

onde introduzimos a densidade de coluna N_j medida em cm^{-2}

$$N_j = \int n_j ds \tag{4.10}$$

A integral é feita em toda a dimensão da nuvem, e a densidade de coluna pode ser obtida integrando (4.9)

$$\int \tau_\nu d\nu = N_j \sigma \int \phi(\Delta\nu) d\nu = N_j \sigma \tag{4.11}$$

$$N_j = \frac{1}{\sigma} \int \tau_\nu d\nu \tag{4.12}$$

(b) O perfil Doppler

No caso de alargamento Doppler devido ao movimento térmico das partículas absorvedoras temos

$$\phi(\Delta\nu) d\nu = f(v) dv \tag{4.13}$$

onde a função de distribuição de velocidades $f(v)$ é admitida maxwelliana, representando a fração dos átomos com velocidade radial no intervalo entre v e $v + dv$. Para $v \ll c$, temos

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_{jk}} = \frac{v}{c} \tag{4.14}$$

$$\frac{dv}{c} = \frac{d\nu}{\nu_{jk}} = \frac{d\nu}{c} \frac{\lambda_{jk}}{c} \tag{4.15}$$

Usando a função de distribuição de Maxwell (2.45) e a relação (4.13)

$$\begin{aligned}
 \phi(\Delta\nu) &= f(v) \frac{dv}{d\nu} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-mv^2/2kT} \frac{c}{\nu_{jk}} \\
 &= \frac{c}{b \sqrt{\pi} \nu_{jk}} e^{-(v/b)^2} \\
 &= \frac{\lambda_{jk}}{b \sqrt{\pi}} e^{-(v/b)^2} \\
 &= \frac{c}{b \sqrt{\pi} \nu_{jk}} e^{-(c\Delta\nu/b\nu_{jk})^2}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

onde introduzimos o parâmetro b dado por

$$b = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \tag{4.17}$$

sendo m a massa do átomo absorvedor e T a temperatura do gás. Este parâmetro está relacionado com a *largura Doppler* $\Delta\nu_D$, ou seja, o valor de $\Delta\nu$ para o qual a função perfil diminui por um fator e de (4.16). O máximo de $\phi(\Delta\nu)$ é dado por

$$\phi_M(\Delta\nu) = \frac{c}{b \sqrt{\pi} \nu_{jk}} = \frac{\lambda_{jk}}{b \sqrt{\pi}} \tag{4.18}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
 \phi(\Delta\nu_D) &= \frac{1}{e} \phi_M(\Delta\nu) \\
 &= \frac{1}{e} \left(\frac{c}{b \sqrt{\pi} \nu_{jk}} \right) \\
 &= \frac{c}{b \sqrt{\pi} \nu_{jk}} e^{-(c\Delta\nu_D/b\nu_{jk})^2}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

ou seja,

$$\Delta\nu_D = b \frac{\nu_{jk}}{c} = \frac{b}{\lambda_{jk}} \tag{4.20}$$

Em termos da largura Doppler, o perfil $\phi(\Delta\nu)$ pode ser escrito

$$\phi(\Delta\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} e^{-(\Delta\nu/\Delta\nu_D)^2} \tag{4.21}$$

Note que o perfil Doppler é normalizado, de acordo com a equação (4.7) (ver Exercício 4.3). A largura total à metade da intensidade máxima FWHM (*full width at half maximum*), representada por $\Delta\nu_h$, pode ser calculada de (4.21)

$$\phi(\Delta\nu_h/2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} e^{-(\Delta\nu_h/2\Delta\nu_D)^2} \tag{4.22}$$

de onde temos

$$e^{(\Delta\nu_h/2\Delta\nu_D)^2} = 2 \tag{4.23}$$

e o resultado é

$$\Delta\nu_h = 2 \Delta\nu_D \sqrt{\ln 2} = \frac{2b\nu_{jk}\sqrt{\ln 2}}{c} = \frac{2b\sqrt{\ln 2}}{\lambda_{jk}} \tag{4.24}$$

► EXEMPLO 4.2 - Perfil Doppler da linha K da CaII interestelar

Um exemplo do perfil Doppler $\phi(\Delta\nu)$ em Hz^{-1} está mostrado na figura 4.7, para a linha K do Ca II interestelar, para a qual $\lambda_{jk} = 3933.66 \text{ \AA}$ ou $\nu_{jk} = 7.63 \times 10^{14} \text{ Hz}$. Adotando $T \simeq 100 \text{ K}$ para a temperatura da nuvem, obtemos de (4.17) $b \simeq 2.0 \times 10^4 \text{ cm/s}$ com $m_{Ca} \simeq 40 m_H = 6.68 \times 10^{-23} \text{ g}$. De (4.20), a largura Doppler é $\Delta\nu_D \simeq 5.2 \times 10^8 \text{ Hz}$, de modo que a largura total à meia altura (FWHM), de (4.24), é $\Delta\nu_h \simeq 8.6 \times 10^8 \text{ Hz}$. Em termos do comprimento de onda, a região caracterizada por uma largura Doppler é dada por $\Delta\lambda_D \simeq \lambda_{jk}\Delta\nu_D/\nu_{jk} \simeq 0.003 \text{ \AA}$, isto é, a linha é bastante estreita.

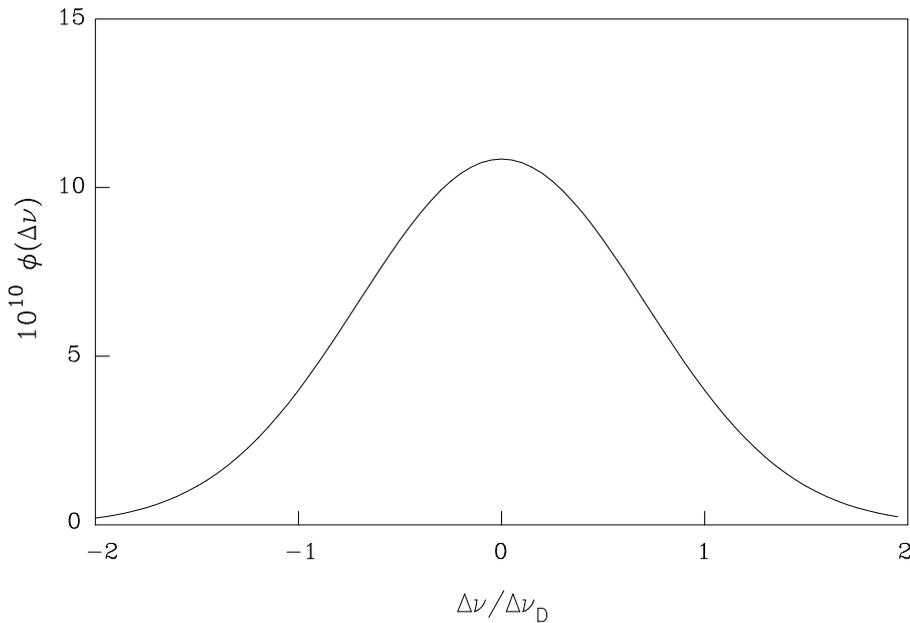


Figura 4.7 - Perfil de uma linha espectral com alargamento Doppler.

No caso de uma linha de absorção, o perfil da figura 4.7 dá uma idéia do próprio perfil da linha, invertido com relação ao eixo horizontal. A relação entre as intensidades observada e original é $I_\nu/I_\nu(0) = e^{-\tau_\nu}$, onde a profundidade óptica é $\tau_\nu \propto \phi(\Delta\nu)$, como visto na equação (4.9). Para $|\Delta\nu| \gg \Delta\nu_D$, $\phi(\Delta\nu) \rightarrow 0$ e

$I_\nu/I_\nu(0) \rightarrow 1$, isto é, a intensidade da radiação não é afetada pelos átomos absorvedores em frequências muito distantes da frequência central. No centro da linha, onde $\phi(\Delta\nu) = \phi(0) = 1/(\sqrt{\pi}\Delta\nu_D)$, a profundidade óptica é máxima, podendo chegar a valores $\tau_\nu \gg 1$ para linhas completamente escuras, de modo que $I_\nu/I_\nu(0) \rightarrow 0$ nesta região. Por exemplo, para $\tau_\nu \simeq 1$ e $\tau_\nu \simeq 5$ no centro da linha, teríamos $I_\nu/I_\nu(0) \simeq e^{-1} \simeq 0.37$ e $I_\nu/I_\nu(0) \simeq e^{-5} \simeq 0.01$, respectivamente. Nas regiões intermediárias, o perfil $\phi(\Delta\nu)$ decresce com relação ao valor central. Como o número de átomos absorvedores permanece constante, a razão $I_\nu/I_\nu(0)$ cresce até atingir o valor inicial $I_\nu/I_\nu(0) \simeq 1$ nas frequências distantes da frequência central.

(c) O perfil de Lorentz

Pelo princípio da incerteza de Heisenberg, a vida média finita dos níveis de energia implica um *alargamento natural* ou intrínseco das linhas espectrais. Neste caso, temos que $\Delta E \Delta t \geq h$ para um dado nível de energia, isto é, há uma imprecisão na energia do nível ΔE , que corresponde a um certo intervalo de frequência $\Delta\nu$. Mesmo que o movimento dos átomos absorvedores seja desprezível, e portanto o alargamento Doppler, ainda assim a linha espectral terá uma largura natural. Este tipo de alargamento pode ser caracterizado por uma função que é o chamado perfil natural ou *perfil de Lorentz*,

$$\phi(\Delta\nu) = \frac{\Gamma_k/4\pi^2}{(\nu - \nu_{jk})^2 + (\Gamma_k/4\pi)^2} \tag{4.25}$$

onde Γ_k é o coeficiente de dissipação quântico, ou constante de amortecimento,

$$\Gamma_k = \sum_j A_{kj} \tag{4.26}$$

sendo essencialmente o inverso do tempo de vida radiativo do nível k considerado, onde A_{kj} é o coeficiente de emissão de Einstein (ver seção 3.5a). Assim como o perfil Doppler, o perfil de Lorentz é normalizado, de acordo com (4.7). De (4.25), é fácil mostrar que a FWHM neste caso é (ver Exercício 4.4)

$$\Delta\nu_h = \frac{\Gamma_k}{2\pi} \tag{4.27}$$

Em regiões densas, a presença de átomos ou íons causa perturbações na estrutura dos níveis de energia de um dado átomo ou íon, levando a um alargamento adicional das linhas espectrais, chamado *alargamento colisional*, ou *alargamento por pressão*. O tratamento detalhado deste tipo de alargamento é bastante complexo, sendo geralmente aproximado pelo perfil de Lorentz (4.25), com uma definição conveniente do coeficiente de dissipação. Fazendo uma analogia com o alargamento natural, pode-se mostrar que a FWHM neste caso pode ser escrita

$$\Delta\nu_h = \frac{n\sigma}{\pi} \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \frac{n\sigma}{\pi} b \tag{4.28a}$$

$$\Delta\lambda_h = \frac{\lambda^2}{c} \frac{n\sigma}{\pi} \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \frac{\lambda^2}{c} \frac{n\sigma}{\pi} b \tag{4.28b}$$

onde σ é a seção de choque para as colisões com as partículas do meio.

(d) O perfil de Voigt

No caso mais geral, além do alargamento natural ou radiativo e do alargamento Doppler térmico (ou eventualmente turbulento, ver a seção 4.5b), outros mecanismos podem atuar no processo de formação da linha espectral. Por exemplo, campos magnéticos podem causar um alargamento do tipo Zeeman, e meios com altas densidades podem causar um alargamento colisional, como nas atmosferas estelares. Discussões sobre os diversos tipos de alargamento podem ser encontrados em Lang (1978) e Rybicki e Lightman (1979). De maneira aproximada, podemos dizer que o perfil é dado pela expressão (4.21) nas regiões centrais da linha espectral, onde o coeficiente de absorção é maior. Próximo das asas da linha, ou seja, nas regiões onde $\Delta\nu \gg \Delta\nu_D$, o alargamento natural é dominante, e o perfil é dado essencialmente por (4.25). No caso mais geral, ou intermediário, podemos combinar estas duas expressões e obter o *perfil de Voigt*,

$$\phi(\Delta\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} H(a, u) \tag{4.29}$$

onde $H(a, u)$ é a *função de Hjerting*,

$$H(a, u) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{a^2 + (u - x)^2} \tag{4.30}$$

Nesta relação, usamos a constante adimensional

$$a = \frac{\Gamma_k}{4\pi \Delta\nu_D} \tag{4.31}$$

e definimos

$$u = \frac{\nu - \nu_{jk}}{\Delta\nu_D} = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D} \tag{4.32}$$

Na maior parte dos casos de interesse astrofísico, a constante $a \ll 1$, e o perfil de Voigt reduz-se ao perfil Doppler no centro da linha e ao perfil de Lorentz na região das asas radiativas. Por exemplo, para o caso da linha K do Ca II no Exemplo 4.2, $\Gamma_k \sim 1.6 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$, de modo que $a \sim 0.02$. A região de transição pode ser estimada igualando os perfis (4.21) e (4.25), de onde obtemos

$$e^{-u^2} (u^2 + a^2) = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$$

que pode ser escrita

$$F(a, u) = (u^2 + a^2)e^{-u^2} - \frac{a}{\sqrt{\pi}} = 0 \tag{4.33}$$

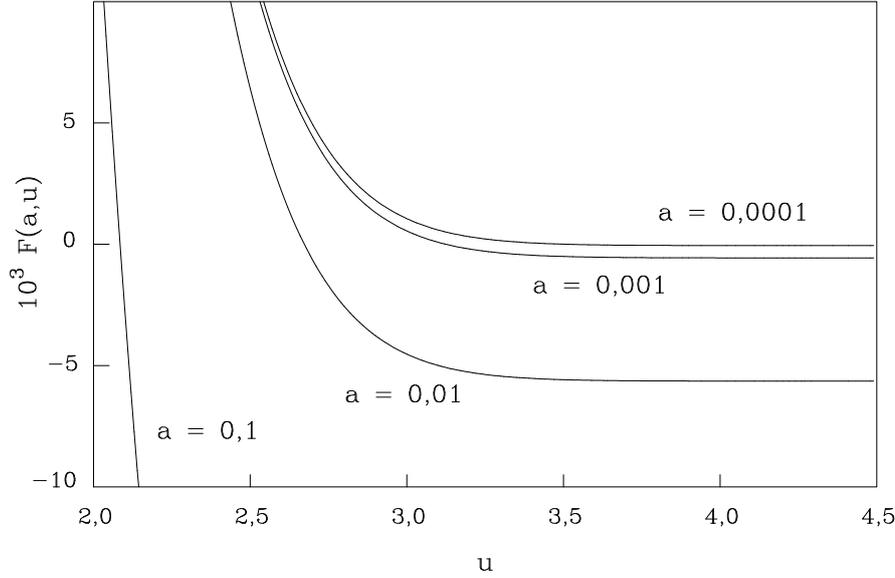


Figura 4.8 - O parâmetro a do perfil de Voigt.

Para valores pequenos de a , a figura 4.8 mostra que $u \simeq 3$ ou $\Delta\nu \simeq 3\Delta\nu_D$, ou seja, o perfil é Doppler para $\Delta\nu \lesssim 3\Delta\nu_D$, e Lorentz para $\Delta\nu \gtrsim 3\Delta\nu_D$.

► EXEMPLO 4.3 - A linha $H\alpha$ na atmosfera solar

Vamos considerar a linha $H\alpha$ ($\lambda = 6563 \text{ \AA} = 656.3 \text{ nm}$) em absorção na fotosfera solar (figura 4.9), admitindo uma temperatura $T = 5800 \text{ K}$. De (4.17), o parâmetro $b = 9.79 \times 10^5 \text{ cm/s} \simeq 9.8 \text{ km/s}$ usando $m_H = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$. A largura Doppler é $\Delta\nu_D = 1.49 \times 10^{10} \text{ cm/s}$, a FWHM dada por (4.24) é $\Delta\nu_h(D) = 2.48 \times 10^{10} \text{ Hz}$, correspondendo a

$$\Delta\lambda_h(D) = \lambda_{jk} \frac{\Delta\nu_h(D)}{\nu_{jk}} = \lambda_{jk}^2 \frac{\Delta\nu_h(D)}{c} \simeq 3.6 \times 10^{-9} \text{ cm} = 0.36 \text{ \AA} = 0.036 \text{ nm}$$

A largura natural desta linha pode ser estimada por $\Delta\nu_h(N) = \Gamma_k/2\pi \simeq A_{kj}/2\pi = 1.6 \times 10^7 \text{ Hz}$, onde usamos $A_{kj} \simeq 1.0 \times 10^8 \text{ Hz}$. Portanto, a largura natural de $H\alpha$ em angstroms é $\Delta\lambda_h(N) = \lambda_{jk}^2 \Delta\nu_h(N)/c \simeq 2.3 \times 10^{-12} \text{ cm} = 2.3 \times 10^{-4} \text{ \AA}$, cerca de 1500 vezes menor que a largura $\Delta\nu_h(D)$ correspondente. Tomando $\sigma \simeq \pi(2a_0)^2 = 3.5 \times 10^{-16} \text{ cm}^2$, onde $a_0 = 5.3 \times 10^{-9} \text{ cm}$ é o raio de Bohr, e admitindo uma densidade típica $n \simeq 1.5 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ para a fotosfera solar, temos de (4.28) que a FWHM para o alargamento de pressão nestas condições é $\Delta\lambda_h(P) \simeq 2.3 \times 10^{-12} \text{ cm} = 2.3 \times 10^{-4} \text{ \AA}$, semelhante ao valor da largura natural da linha.

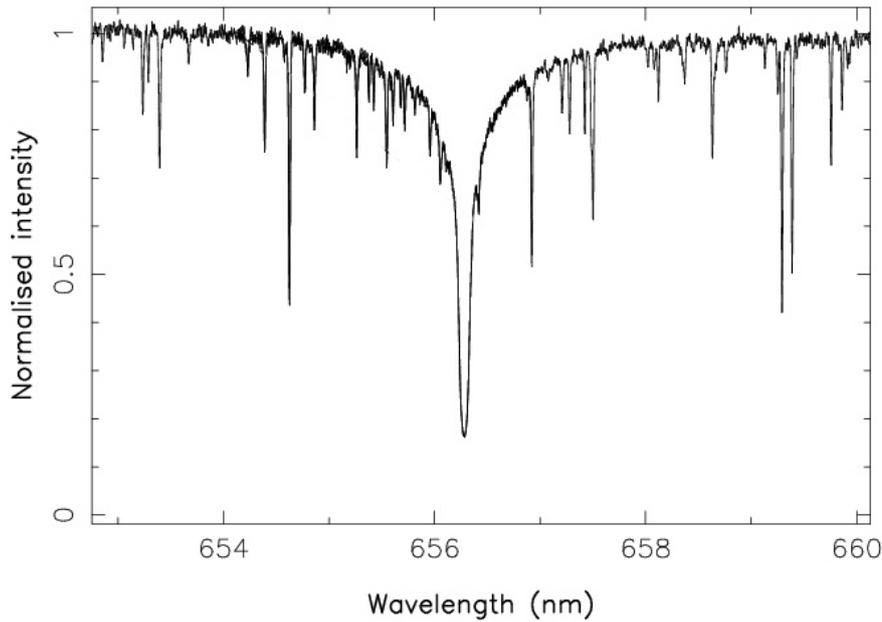


Figura 4.9 - A linha H-alfa do H em absorção na fotosfera solar. (J. F. Donati)

4.4 Largura equivalente

A medida da intensidade da radiação emitida ou absorvida em uma linha espectral pode ser caracterizada por um único parâmetro, a *largura equivalente*. Vamos considerar uma linha espectral, como mostrado na figura 4.10. I_c é a intensidade no contínuo, e I_λ é a intensidade na linha para o comprimento de onda λ . A área S mostrada na figura pode ser escrita como

$$S = \int I_c d\lambda - \int I_\lambda d\lambda = \int (I_c - I_\lambda) d\lambda \quad (4.34a)$$

onde as integrais devem ser feitas em toda a extensão da linha. Vamos imaginar uma linha “retangular” de largura W_λ e altura I_c como indicado na figura, tal que a área total desta linha seja igual à área S . Temos então

$$S = \int (I_c - I_\lambda) d\lambda = W_\lambda I_c \quad (4.34b)$$

de onde obtemos

$$W_\lambda = \frac{1}{I_c} \int (I_c - I_\lambda) d\lambda = \int \frac{I_c - I_\lambda}{I_c} d\lambda = \int \left(1 - \frac{I_\lambda}{I_c}\right) d\lambda \quad (4.35)$$

Definindo a profundidade da linha por

$$A_\lambda = 1 - \frac{I_\lambda}{I_c} \quad (4.36)$$

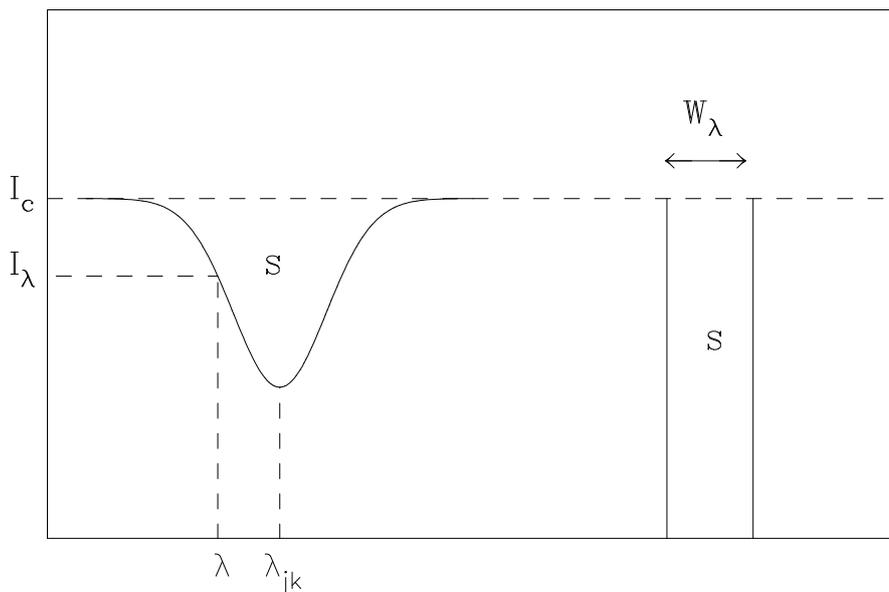


Figura 4.10 - Definição da largura equivalente.

temos que no centro da linha, $I_\lambda \ll I_c$ e $A_\lambda \rightarrow 1$, enquanto que nas asas da linha, $I_\lambda \simeq I_c$ e $A_\lambda \rightarrow 0$. Em termos da profundidade da linha, a largura equivalente pode ser escrita

$$W_\lambda = \int A_\lambda d\lambda \tag{4.37}$$

Considerando a solução da equação de transporte (1.49) e uma linha de absorção pura, onde $S_\nu = 0$, temos $I_\lambda = I_c e^{-\tau_\nu}$, e a largura equivalente fica

$$W_\lambda = \int \left(1 - \frac{I_\lambda}{I_c}\right) d\lambda = \int (1 - e^{-\tau_\nu}) d\lambda = \frac{\lambda_{jk}^2}{c} \int (1 - e^{-\tau_\nu}) d\nu \tag{4.38}$$

A largura equivalente dá uma medida direta da energia total absorvida na linha espectral, e depende da densidade de partículas nos níveis responsáveis pela absorção.

► **EXEMPLO 4.4 - Largura equivalente da linha Lyman- α interestelar**

Podemos estimar a largura equivalente de uma linha espectral usando o espectro mostrado na figura 4.11, onde vemos a linha Lyman- α ($\lambda = 1216 \text{ \AA}$) em absorção de origem interestelar na direção da estrela central da nebulosa planetária NGC 2392, obtido com o *International Ultraviolet Explorer* (IUE). A estrela é muito quente, com uma temperatura acima de 70 000 K, portanto, com uma emissão considerável nesta

parte do espectro. Esta linha é a primeira linha da série de Lyman do átomo de H, como pode ser visto na figura 4.12, onde estão também indicadas linhas das séries de Balmer, Paschen, Brackett e Pfund. Aplicando a definição (4.33), obtemos a largura equivalente $W_\lambda \simeq 10 \text{ \AA}$.

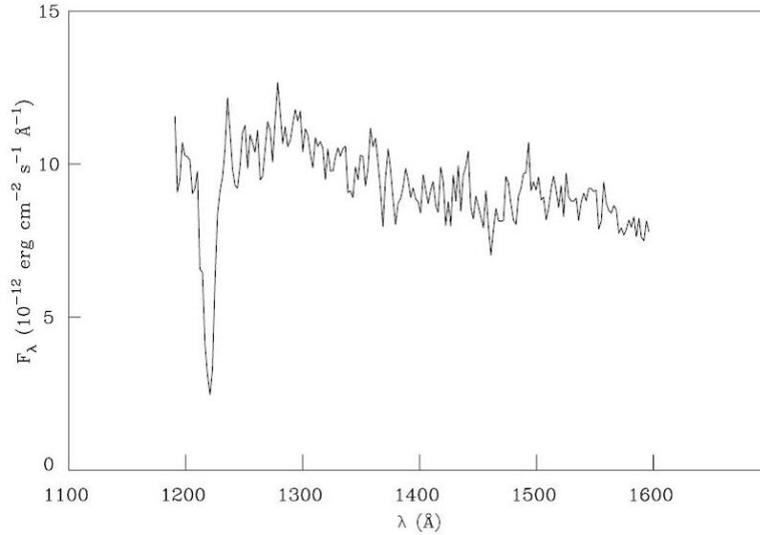


Figura 4.11 - A linha Lyman alfa em absorção interestelar na direção de NGC 2392. (IUE)

A partir da figura podemos estimar o fluxo no contínuo na região da linha, que é aproximadamente $F_c \simeq 10 (10^{-12} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ \AA}^{-1})$. A área S dentro da linha pode ser estimada por $S \simeq 100 (10^{-12} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1})$. Aplicando a definição (4.35) obtemos $W_\lambda \simeq S/F_c \simeq 100/10 \simeq 10 \text{ \AA}$. A área S é uma medida da energia absorvida pelos átomos do H interestelar, mais exatamente do fluxo da radiação da estrela removido do feixe que atravessa a nuvem interestelar. O valor estimado, $S \simeq 10^{-10} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ pode ser comparado com o fluxo total na superfície da estrela, $F \simeq \sigma T_{ef}^4 \simeq (5.67 \times 10^{-5}) (70000)^4 \simeq 1.36 \times 10^{15} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Pode também ser comparado com o fluxo total que efetivamente seria observado se não houvesse extinção interestelar, dado por $F(d) \simeq F(R) (R/d)^2$, onde R é o raio da estrela e d sua distância até nós. Adotando uma luminosidade típica para a estrela central $L \simeq 10^3 L_\odot$, temos que $L = 4 \pi R^2 F(R)$, ou seja, $R \simeq \sqrt{L/[4 \pi F(R)]} \simeq 1.5 \times 10^{10} \text{ cm}$. Tomando uma distância $d \simeq 1.0 \text{ kpc}$, temos $F(d) \simeq (1.36 \times 10^{15}) (1.5 \times 10^{10}/3.08 \times 10^{21})^2 \simeq 3.2 \times 10^{-8} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Portanto, o fluxo correspondente à linha Lyman do H é cerca de 320 vezes menor que o fluxo total observado na distância d .

4.5 Curva de crescimento

(a) A curva de crescimento teórica

A relação entre W_λ (ou W_λ/λ_{jk}) e o número efetivo de átomos absorvedores $N_j f_{jk}$ é a chamada *curva de crescimento*, que tem grande utilidade na determinação de abundâncias químicas. O parâmetro f_{jk} é novamente a força de oscilador da

transição (ver equação 4.5). A expressão geral desta curva depende da solução da equação de transporte na linha espectral. Entretanto, uma expressão simples pode ser obtida no caso de *linhas fracas*, onde a profundidade óptica é $\tau_\nu \ll 1$ em toda a linha, tanto no carço quanto nas asas da linha. Neste caso, de (4.38)

$$\frac{W_\lambda}{\lambda_{jk}} = \frac{\lambda_{jk}}{c} \int (1 - e^{-\tau_\nu}) d\nu \simeq \frac{\lambda_{jk}}{c} \int \tau_\nu d\nu \quad (4.39)$$

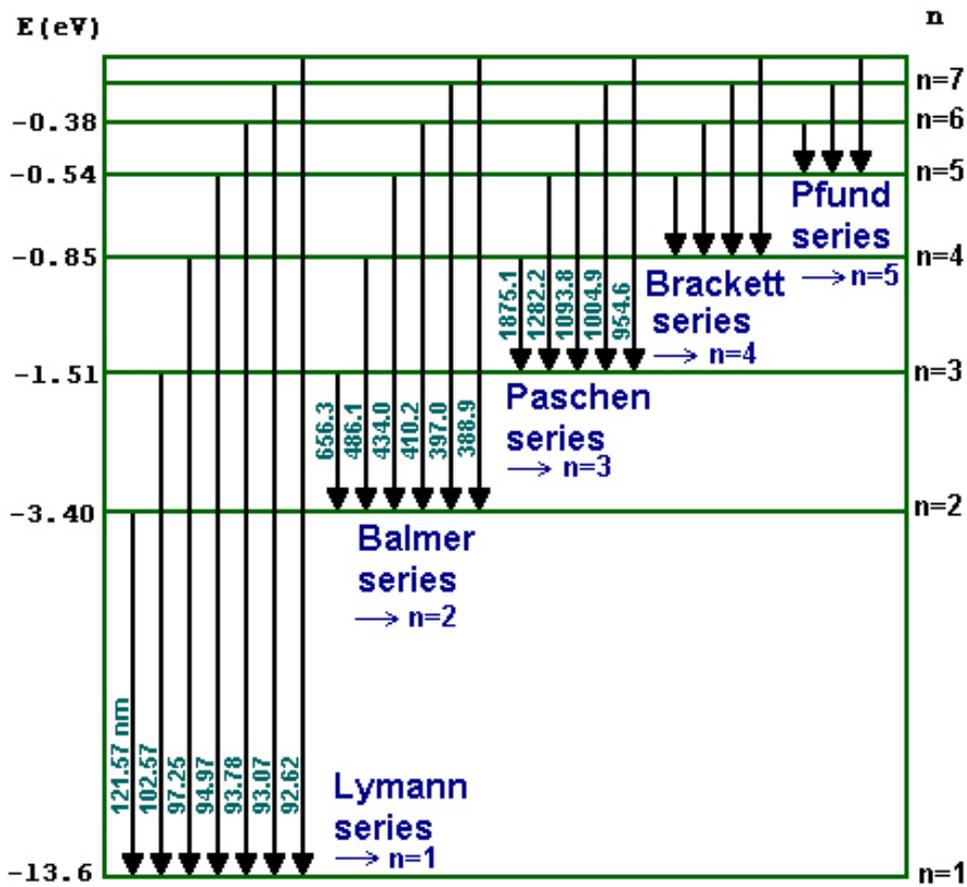


Figura 4.12 - Diagrama de níveis de energia do hidrogênio.

Usando (4.11),

$$\frac{W_\lambda}{\lambda_{jk}} \simeq \frac{\lambda_{jk}}{c} N_j \sigma \quad (\tau_\nu \ll 1) \quad (4.40)$$

Desprezando novamente as emissões induzidas, e usando (4.5)

$$\frac{W_\lambda}{\lambda_{jk}} \simeq \frac{\pi e^2}{m_e c^2} N_j f_{jk} \lambda_{jk} \quad (4.41)$$

válida, portanto, para *linhas fracas*, com $\tau_\nu \ll 1$. Isto significa que W_λ/λ_{jk} é proporcional a $N_j f_{jk}$, correspondendo à *parte linear* da curva de crescimento, como pode ser visto na curva esquemática da figura 4.13.

No caso mais geral, a integral (4.38) envolvendo τ_ν é mais complexa, e depende do perfil $\phi(\Delta\nu)$ admitido. Vamos considerar o caso do perfil Doppler (4.21), e linhas moderadamente fortes, em que o número de partículas absorvedoras na linha de visada é suficientemente grande para que a profundidade óptica central $\tau_0 \gg 1$, mas $\tau_\nu \lesssim 1$ nas asas da linha. Nesse caso, podemos mostrar que

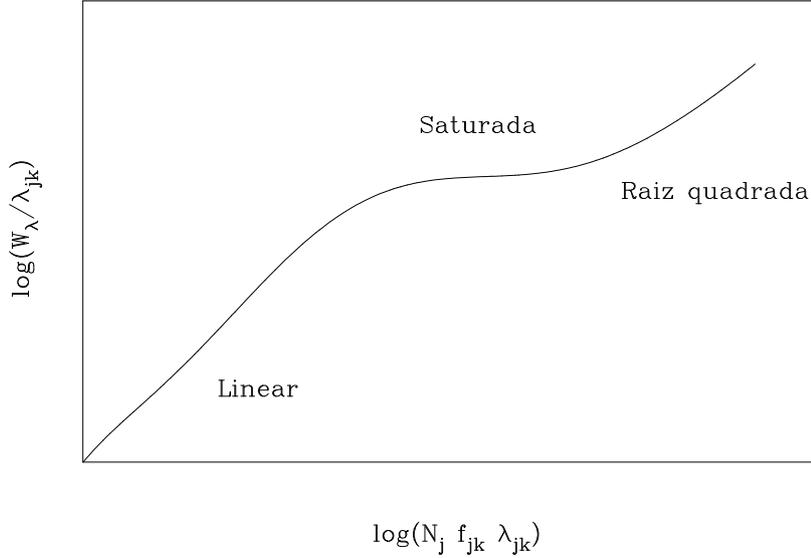


Figura 4.13 - Curva de crescimento esquemática.

$$\frac{W_\lambda}{\lambda_{jk}} \simeq \frac{2b}{c} \left[\ln \left(\frac{\pi e^2}{m_e c b \sqrt{\pi}} N_j f_{jk} \lambda_{jk} \right) \right]^{1/2} \tag{4.42}$$

válida para *linhas moderadamente fortes*, com $\tau_0 \gg 1$, $\tau_\nu \lesssim 1$ e *perfil Doppler* (ver Maciel 2002 para uma discussão mais completa). Vemos que W_λ/λ_{jk} cresce muito lentamente com $N_j f_{jk}$, pois toda a energia disponível nas regiões centrais da linha já foi absorvida, e o aumento do número de átomos absorvedores não produz efeito considerável. Diz-se que a linha está *saturada*, e (4.42) corresponde à *parte de saturação, ou plana* da curva de crescimento (ver figura 4.13). Note-se que, nesta região, W_λ/λ_{jk} é proporcional ao parâmetro b , definido em (4.17).

Finalmente, para linhas muito fortes, $\tau_0 \gg 1$ e $\tau_\nu \gg 1$ também para as asas radiativas da linha, e $\tau_\nu \sim 1$ longe do comprimento de onda central λ_{jk} . Neste caso obtemos

$$\frac{W_\lambda}{\lambda_{jk}} = \frac{\lambda_{jk}}{c} \left(\frac{N_j \sigma \Gamma_k}{\pi} \right)^{1/2} \tag{4.43}$$

que é uma expressão válida para *linhas muito fortes*, em que $\tau_\nu \gg 1$, onde Γ_k é novamente o coeficiente de dissipação quântico (ver eqs. 4.25 e 4.26). A relação (4.43) corresponde à parte *raiz quadrada* da curva de crescimento (ver figura 4.13).

► **EXEMPLO 4.5** - Densidade de coluna de H usando a linha Lyman- α interestelar
 Vimos no Exemplo 4.4 que a largura equivalente da linha Lyman- α pode ser estimada, resultando $W_\lambda \simeq 10 \text{ \AA}$. Podemos usar este resultado para estimar a densidade de coluna do H interestelar, usando a relação (4.43), uma vez que a linha é saturada, ocupando a região de raiz quadrada da curva de crescimento. Considerando um átomo com apenas dois níveis, onde $\Gamma_k = A_{kj}$, e usando as relações (4.43), (4.5), assim como a relação entre o coeficiente de emissão de Einstein A_{kj} e a força de oscilador (ver Exercício 4.1), obtemos o resultado

$$W_\lambda = \frac{2\pi e^2}{m_e c^2} f_{jk} \lambda_{jk} \left(2 \frac{g_j}{g_k} N_j \right)^{1/2} \quad (4.44)$$

onde g_j e g_k são os pesos estatísticos dos níveis j e k , respectivamente. Aplicando esta relação para a linha Lyman- α , e lembrando que o estado excitado com $n = 2$ corresponde a um duplete com níveis $2^2P_{1/2}$ e $2^2P_{3/2}$, temos $g_j = 2$, $g_k = 6$, e $g_j/g_k = 1/3$. Usando ainda $f_{jk} = 0.4162$ e $\lambda_{jk} = 1215.67 \text{ \AA}$, temos

$$W_\lambda = 7.3 \times 10^{-10} \sqrt{N_j} \quad (4.45)$$

$$N_j = 1.9 \times 10^{18} W_\lambda^2 \quad (4.46)$$

onde a largura equivalente W_λ está em \AA e a densidade de coluna $N_j \simeq N(\text{HI})$ está em cm^{-2} . Com $W_\lambda = 10 \text{ \AA}$, obtemos então a $N(\text{HI}) \simeq 1.9 \times 10^{20} \text{ cm}^{-2}$. Admitindo que a distância da nebulosa é $d \simeq 1.0 \text{ kpc}$ e que o gás está uniformemente distribuído, obtemos uma densidade volumétrica média $N(\text{HI})/d \simeq 0.1 \text{ cm}^{-3}$. Considerando uma nuvem “típica” com dimensões de 10 pc , a densidade resultante é de 6 cm^{-3} .

(b) Velocidade térmica e turbulenta

Além das velocidades macroscópicas, incluídas no perfil Doppler, pode haver no meio interestelar e nas estrelas uma componente de (micro)turbulência, que tende a complicar o perfil de uma linha de absorção. Se a turbulência for representada por uma velocidade média (rms), $\langle v_t \rangle^{1/2}$, e a velocidade tiver uma distribuição maxwelliana, o perfil Doppler térmico-turbulento será ainda o perfil dado por (4.21), mas a largura Doppler é agora

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_{jk}}{c} \left[\frac{2kT}{m} + \langle v_t^2 \rangle \right]^{1/2} \quad (4.47)$$

Portanto, quanto mais alta a velocidade de turbulência, maior será a largura Doppler da linha, ou seja, a diferença em relação à frequência central ν_{jk} , para que a intensidade seja diminuída por um fator e . Neste caso, é necessária uma densidade de coluna de átomos absorvedores *maior* para que a linha seja saturada.

(c) A curva de crescimento empírica

A curva de crescimento teórica discutida acima admite um perfil Doppler, que não é necessariamente realístico. Na prática, usa-se o método da *curva de crescimento empírica*, agrupando átomos que provavelmente tenham a mesma distribuição de velocidades e calculando-se uma curva (ou trechos de uma curva) de crescimento para esses átomos. Por exemplo, em regiões H I, os íons no estágio de ionização dominante devem ser N I, O I, Mg II, Si II, Al I, Ar I, S II, Fe II, C II e Na II; os íons em estágios de ionização não dominantes são Mg I, Si I, C I, Na I, S I, K I e Fe I. Estes dois grupos devem em princípio definir duas curvas de crescimento, se suas abundâncias relativas forem iguais nas nuvens.

Para cada grupo fazemos o gráfico dos valores observados da largura equivalente, $\log(W_\lambda/\lambda_{jk})$ em função de $\log(f_{jk}\lambda_{jk})$ para as linhas disponíveis. Para cada íon obtemos um trecho da curva de crescimento, e N_j pode ser determinada deslocando-se as diferentes seções da curva ao longo do eixo das abscissas, até obter um acordo entre os diferentes íons. Obtida a curva, podemos ajustar, por exemplo, um perfil teórico e determinar a temperatura das nuvens. Este método foi aplicado inicialmente ao meio interestelar por Strömberg em 1948. Mais recentemente, tem sido aplicado às observações no ultravioleta feitas por satélites.

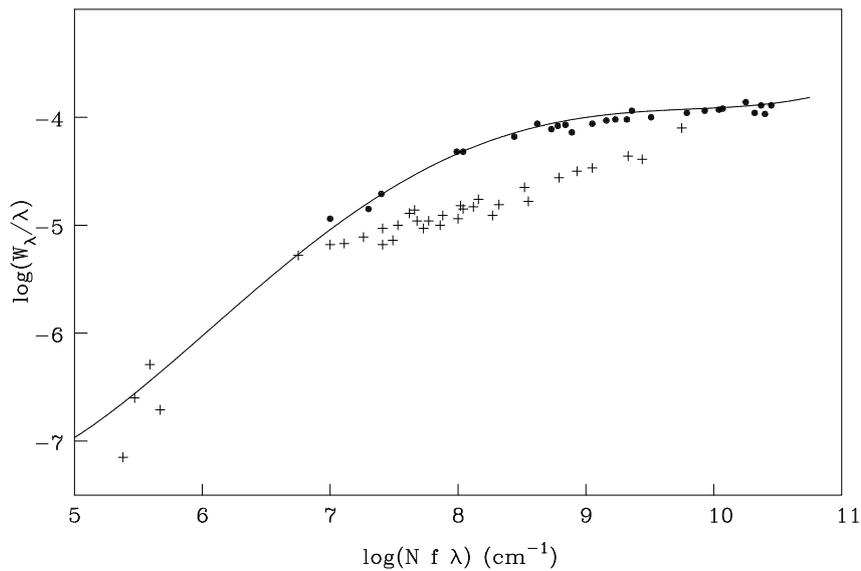


Figura 4.14 - Curva de crescimento empírica. (L. Spitzer)

A figura 4.14 mostra uma curva de crescimento empírica para a linha de visada à estrela ζ Oph. Nesta figura, os círculos cheios representam átomos no estágio de ionização dominante e as cruzes são os átomos neutros desses íons. A linha sólida é uma curva teórica caracterizada por uma distribuição de velocidades maxwelliana, com um parâmetro $b = 6.5$ km/s (ver a equação 4.17).

4.6 Formação de linhas espectrais em atmosferas estelares

No capítulo 3 consideramos o caso de atmosferas estelares cinzas, em que o coeficiente de absorção não depende da frequência. No caso mais geral, de uma atmosfera não-cinza, obtemos equações semelhantes às equações (3.33) e (3.34), mas neste caso o fluxo monocromático F_ν não pode ser considerado constante, havendo uma redistribuição entre as diferentes frequências. Vamos considerar aqui alguns aspectos mais simples do caso não-cinza para ilustrar a formação das linhas espectrais. Da equação (3.11), temos que (ver Choudhuri 2010, cap. 2)

$$I_\nu(0, 1) = B_\nu(\tau_\nu = 0) + \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \tag{4.48}$$

Expandindo a função de Planck $B_\nu(\tau_\nu = 1)$ em série de Taylor em torno de $\tau_\nu = 0$ e desprezando os termos de ordem superior a um, temos

$$B_\nu(\tau_\nu = 1) \simeq B_\nu(\tau_\nu = 0) + \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \tag{4.49}$$

ou seja

$$I_\nu(0, 1) \simeq B_\nu(\tau_\nu = 1) \tag{4.50}$$

isto é, a intensidade específica emergente de uma atmosfera estelar na frequência ν é aproximadamente igual à função de Planck calculada em uma profundidade óptica unitária. Seja k_c o coeficiente de absorção (cm^{-1}) nas camadas externas de uma atmosfera estelar, admitido constante em todo o espectro contínuo, exceto em uma pequena região em torno da frequência ν , onde o coeficiente de absorção é k_L (figura 4.15a). Da definição da profundidade óptica (ver por exemplo a equação 3.4), temos que $\tau \simeq kx$, onde x é essencialmente a profundidade da atmosfera. Para $k = k_c$ a profundidade óptica é unitária em $x_c \simeq 1/k_c$, enquanto que na linha espectral isto ocorre para $x_L \simeq 1/k_L$, tal que $x_L \ll x_c$, pois $k_L \gg k_c$. Em uma atmosfera estelar, a temperatura aumenta com a profundidade. Assim, a emissão de corpo negro na região com profundidade x_c e temperatura T_c é mais intensa que na região com profundidade x_L , onde a temperatura é T_L , tal que $T_c \gg T_L$ (figura 4.15b). Como $I_\nu \simeq B_\nu(\tau_\nu = 1)$ (de 4.48), é fácil ver que o espectro emergente terá uma redução na região em torno de ν_0 , formando portanto uma linha espectral.

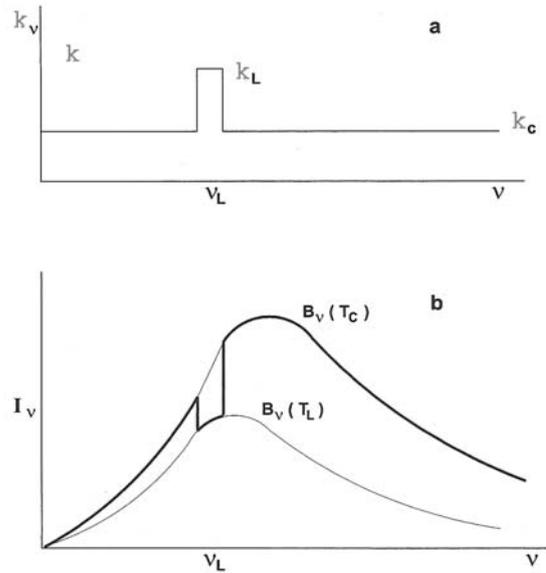


Figura 4.15 - Formação de uma linha espectral em uma atmosfera estelar. (A. Choudhuri)

EXERCÍCIOS

4.1 Prove as relações abaixo entre os coeficientes de Einstein e a força de oscilador. Sugestão: Use as relações (4.4), (4.5) e (3.81–3.83).

$$B_{jk} = \frac{\pi e^2}{m_e h \nu_{jk}} f_{jk}$$

$$B_{kj} = \frac{\pi e^2}{m_e h \nu_{jk}} \frac{g_j}{g_k} f_{jk}$$

$$A_{kj} = \frac{8\pi^2 e^2 \nu_{jk}^2}{m_e c^3} \frac{g_j}{g_k} f_{jk}$$

4.2 A linha $H\alpha$ do hidrogênio ($\lambda = 6563 \text{ \AA}$) é uma das linhas espectrais mais brilhantes em muitas estrelas e nebulosas. Mostre que esta linha corresponde à transição entre os níveis caracterizados pelos números quânticos principais $n = 2$ e $n = 3$ do H.

4.3 Mostre que o perfil Doppler (4.21) é normalizado.

4.4 Mostre que o perfil de Lorentz (4.25) é normalizado, e que a FWHM neste caso é $\Delta\nu_h = \Gamma_k/2\pi$.

- 4.5 As linhas D1 ($\lambda = 5896 \text{ \AA}$) e D2 ($\lambda = 5890 \text{ \AA}$) do Na I são formadas a partir do estado fundamental, e a força de oscilador de D2 é o dobro da força de oscilador de D1. Determine a razão das larguras equivalentes dessas linhas, W_{D2}/W_{D1} nos seguintes casos: (a) linhas fracas, na parte linear da curva de crescimento; (b) linhas moderadamente fortes, na parte de saturação da curva de crescimento; (c) linhas fortes, na parte raiz quadrada da curva de crescimento.

Referências

- Carroll, B. W., Ostlie, D. A. 2006, *An Introduction to Modern Astrophysics*, Benjamin Cummings
- Choudhuri, A. R. 2010, *Astrophysics for physicists*, Cambridge University Press
- Cox, A. N., 2000, *Allen's Astrophysical Quantities*, AIP
- Lang, K. R. 1978, *Astrophysical Formulae*, Springer [3a. edição 1999]
- Maciel, W. J. 2002, *Astrofísica do meio interestelar*, Edusp
- Rybicki, G. B., Lightman, A. P. 1979, *Radiative processes in astrophysics*, Wiley
- Swihart, T. L. 1968, *Astrophysics and stellar astronomy*, Wiley
- Zeilik, M., Gregory, S. A. 1997, *Introductory Astronomy and Astrophysics*, Brooks Cole

CAPITULO 5 – VENTOS ESTELARES

5.1 Introdução

A perda de massa é um fenômeno comum às estrelas, podendo ocorrer de forma *catastrófica*, como em uma explosão de supernova, em que a maior parte da massa da estrela é perdida, ou de forma mais discreta e *contínua*, como ocorre no Sol. Em ambos os casos, há um transporte de energia e de quantidade de movimento da estrela para o meio interestelar, além das modificações na composição química do meio causadas pela mistura com os elementos pesados formados nas estrelas. Neste capítulo vamos considerar os processos de perda de massa que ocorrem de *forma contínua*, os quais constituem os *ventos estelares*. Esses processos podem ser observados em estrelas quentes e luminosas, como as supergigantes azuis, em estrelas de tipo solar e em gigantes e supergigantes frias. Algumas referências para o estudo dos ventos estelares incluem Lamers e Cassinelli (1991), Mihalas (1978) e, especialmente Maciel (2004), do qual este capítulo constitui um resumo.



Figura 5.1 - (a) A nebulosa Rosette (NGC 2237) com evidências de um vento intenso causado pelas estrelas do aglomerado. (R. Crisp) (b) A nebulosa RCW 79 em Centaurus, com uma bolha de gás e poeira produzida pelos ventos estelares. (E. Churchwell/JPL/NASA)

Entre os mais espetaculares exemplos de ventos estelares estão os ventos de estrelas jovens e quentes, frequentemente associadas com as regiões de formação estelar. Por exemplo, a nebulosa Rosette, ou NGC 2237, é uma nebulosa de emissão brilhante claramente associada a um aglomerado aberto de estrelas, NGC 2244 (figura 5.1a). As estrelas desse aglomerado são quentes, brilhantes e jovens, com idades da ordem de 4 milhões de anos, ou seja, muito mais jovens que o Sol, cuja idade é da ordem de 4.5 bilhões de anos. O brilho observado da nebulosa deve-se à fotoionização causada

pelos fótons ultravioletas emitidos pelas estrelas do aglomerado. Essas estrelas apresentam um vento muito intenso, como pode ser visto pelo “buraco” formado na região central da nebulosa. Um outro exemplo de uma bolha de gás e poeira formada pelo vento e pela radiação de estrelas jovens e quentes é a nebulosa RCW 79, na constelação Centaurus (figura 5.1b). Nesta imagem do Spitzer Space Telescope, a cor vermelha é devida à emissão infravermelha dos grãos de poeira imersos na nebulosa. Note a presença de estrelas jovens (pontos amarelados na imagem) cuja formação foi acelerada pela expansão do gás em direção ao espaço interestelar.

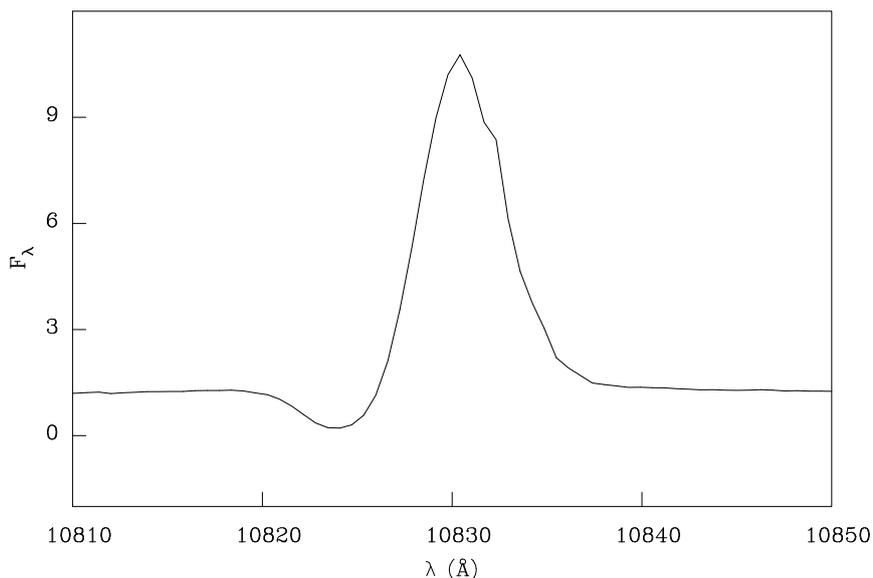


Figura 5.2 - Perfil da linha do He I em 10830Å na estrela P Cyg. O fluxo da estrela está em unidades arbitrárias. (A. Daminieli, IAG)

As principais evidências observacionais quantitativas dos ventos estelares são de natureza espectroscópica. Em particular, observa-se em algumas linhas espectrais a presença de *perfis do tipo P Cygni*, como pode ser visto na figura 5.2, obtida a partir de observações na linha 10 830 Å do He I. Em geral, esses perfis apresentam uma componente em emissão, deslocada para comprimentos de onda maiores com relação ao centro da linha λ_0 , e uma componente em absorção, deslocada para comprimentos de onda menores. Os perfis são interpretados como tendo se originado em um envelope em expansão, onde a absorção é produzida na região A e a emissão na região B, de acordo com a figura 5.3.

Este tipo de perfil foi observado na estrela P Cygni, uma variável luminosa azul (LBV, de *blue luminous star*), que pulsa de maneira irregular ejetando parte de seu envelope para o meio interestelar (figura 5.4). Essas estrelas são raras, embora sua luminosidade seja muito alta, alcançando cerca de $M_v \simeq -10$ no caso de P Cygni.

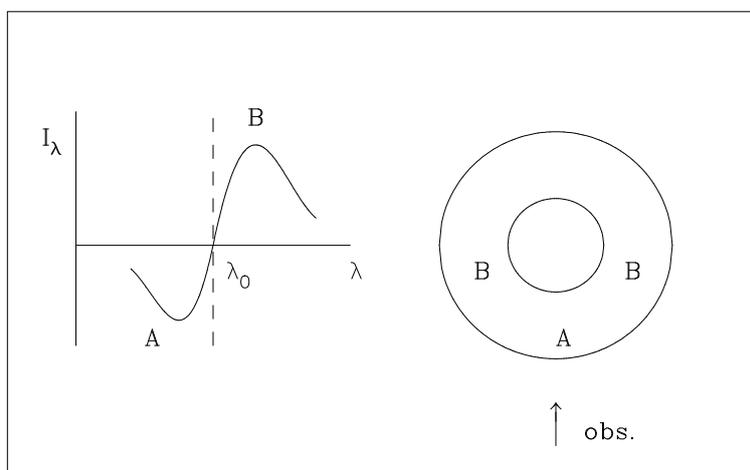


Figura 5.3 - Modelo para a interpretação dos perfis P Cygni. A absorção é produzida na região A, enquanto que a emissão provém da região B.

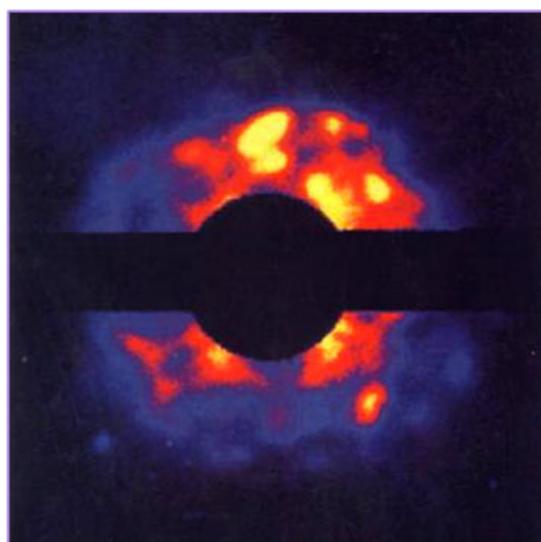


Figura 5.4 - A estrela LBV P Cygni e seu envelope externo (HST/NASA).

Os perfis P Cyg têm grande importância na identificação dos ventos estelares, em particular aplicados às linhas ultravioletas ressonantes em estrelas quentes (O, B, Wolf-Rayet, estrelas centrais de nebulosas planetárias). Essas linhas são geralmente produzidas por *espalhamento ressonante*, em que a absorção de um fóton da fotosfera por um átomo no envelope produz uma fotoexcitação logo seguida por uma desexcitação, com a reemissão do fóton praticamente na mesma frequência do fóton original, desviado pelo efeito Doppler.

Muitos exemplos de linhas com perfis P Cyg são observados, particularmente no espectro ultravioleta de estrelas quentes. A tabela 5.1 relaciona algumas linhas típicas. Dependendo da densidade de coluna do vento na região A (figura 5.3), será produzida uma componente em absorção deslocada para o azul por até cerca de 3 000 km/s pelo efeito Doppler. Para densidades colunares altas, $N \geq 10^{15} \text{ cm}^{-2}$, o perfil P Cyg apresenta a componente em emissão deslocada para o vermelho. Em princípio, a velocidade final do escoamento, a lei de velocidade e, eventualmente, a taxa de perda de massa podem ser determinadas a partir de observações em alta resolução de diferentes íons.

íon	λ (Å)
CII	1334.532
	1335.708
CIII	1175.670
CIV	1548.195
	1550.770
NIV	1718.551
NV	1238.821
	1242.804
OVI	1031.928
	1037.619

Tabela 5.1 - Exemplos de linhas com perfis P Cygni.

Além dos (i) perfis P Cygni, outras evidências observacionais para o estudo dos ventos estelares incluem (ii) a linha $H\alpha$ em emissão em estrelas quentes (O, B, Wolf-Rayet), com taxas de perda de massa $\dot{M} \geq 10^{-7} M_{\odot}/\text{ano}$; (iii) excesso infravermelho e rádio, no caso de estrelas quentes com ventos ionizados com excesso de radiação infravermelha e rádio, causado pela emissão livre-livre do vento (*Bremsstrahlung*); (iv) emissão molecular em estrelas frias, com ventos lentos, com velocidades $v_f \simeq 10$ km/s, e intensos, com taxas de $\dot{M} \sim 10^{-6} M_{\odot}/\text{ano}$, com transições rotacionais de moléculas como CO; (v) emissão infravermelha e milimétrica por grãos em gigantes frias, devida aos grãos imersos no envelope em expansão.

O estudo dos ventos estelares compreende basicamente quatro etapas: (i) análise das observações e métodos utilizados para determinar as propriedades dos ventos, (ii) estudo dos mecanismos responsáveis pela ejeção de matéria, (iii) estudo dos efeitos dos ventos sobre as regiões vizinhas do meio interestelar e (iv) estudo dos efeitos dos ventos sobre a evolução das estrelas. Neste capítulo vamos considerar basicamente algumas determinações simples da taxa de perda de massa e o papel dos ventos no transporte de energia.

5.2 A taxa de perda de massa

De modo geral, as evidências observacionais dos ventos estelares são utilizadas para a determinação da taxa de perda de massa $dM/dt = \dot{M}$ (M_{\odot} /ano) e da velocidade terminal do vento $v = v_f = v_{\infty}$ (km/s). As estrelas de baixa massa ($M < 10 M_{\odot}$) têm taxas muito baixas enquanto na seqüência principal, ou $\dot{M} \leq 10^{-10} M_{\odot}$ /ano. Nas fases finais de sua evolução, já no ramo das gigantes, essas taxas podem chegar a cerca de $10^{-6} M_{\odot}$ /ano ou ainda maiores, como no supervento que dá origem às nebulosas planetárias. Portanto, nas etapas finais, a evolução da estrela é significativamente afetada pela perda de massa. As velocidades de ejeção nessas estrelas são tipicamente da ordem de alguns km/s a dezenas de km/s. Quanto às estrelas muito massivas ($M > 20 M_{\odot}$), já na seqüência principal a taxa observada é significativa, podendo atingir cerca de $10^{-5} M_{\odot}$ /ano, afetando portanto sua evolução. Nesse caso, as velocidades finais são muito mais altas, da ordem de alguns milhares de km/s.

Vamos considerar uma estrela esférica com perda de massa contínua, de modo que a matéria atravessa uma casca esférica de espessura dr , massa dM , situada na posição r , onde a densidade do gás é ρ e a velocidade é $v = dr/dt$ (figura 5.5). Podemos escrever

$$dM = 4 \pi r^2 \rho dr \tag{5.1}$$

Seja $dM/dt = \dot{M}$ a taxa de perda de massa, medida em g/s ou em M_{\odot} /ano ($M_{\odot} = 1.99 \times 10^{33}$ g). Pela conservação da massa, a equação (5.1) pode ser escrita

$$\frac{dM}{dt} = \dot{M} = 4 \pi r^2 \rho \frac{dr}{dt} = 4 \pi r^2 \rho v \tag{5.2}$$

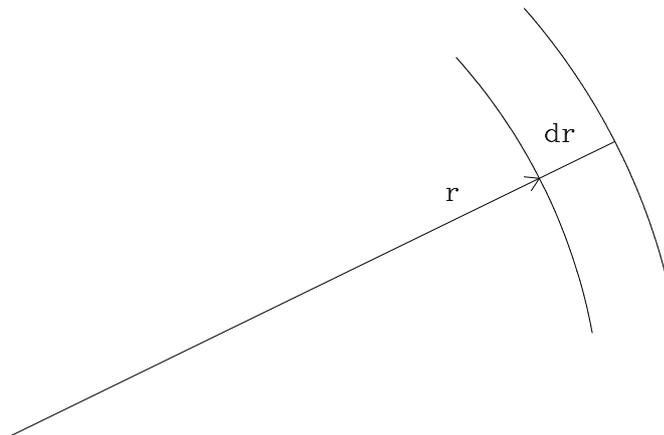


Figura 5.5 - Casca esférica com espessura dr a uma distância r do centro da estrela.

Geralmente usamos r em cm e ρ em g/cm^3 . Considerando que $1 \text{ ano} = 3.16 \times 10^7 \text{ s}$, vemos que $1 M_{\odot}/\text{ano} = 6.30 \times 10^{25} \text{ g/s}$, podendo escrever as relações:

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} (M_{\odot}/\text{ano}) \simeq 1.6 \times 10^{-26} \frac{dM}{dt} (\text{g/s}) \\ \frac{dM}{dt} (M_{\odot}/\text{ano}) \simeq 2.0 \times 10^{-25} r^2 \rho v & (v \text{ em cm/s}) \\ \frac{dM}{dt} (M_{\odot}/\text{ano}) \simeq 2.0 \times 10^{-20} r^2 \rho v & (v \text{ em km/s}). \end{cases} \quad (5.3)$$

► EXEMPLO 5.1 - O vento solar

O Sol perde massa para o meio interplanetário, o que pode ser observado pelo “vento solar”, um fluxo de partículas carregadas que atinge a órbita da Terra e além dela (cf. Brandt 1970, Carroll e Ostlie 2006, cap. 11, Choudhuri 2010, cap. 4). Podemos usar a expressão (5.3) e estimar a taxa de perda de massa do Sol e, possivelmente, de outras estrelas anãs. A densidade observada de prótons a uma distância de 1 UA = $1.5 \times 10^{13} \text{ cm}$ do Sol é $n_p \sim 10 \text{ cm}^{-3}$, com velocidades $v \sim 400 \text{ km/s}$. O fluxo de massa é $j \sim \rho v \sim n_p m_H v \sim 6.7 \times 10^{-16} \text{ g cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. De (5.3), a taxa de perda de massa do Sol é dada por $dM/dt \sim 3.0 \times 10^{-14} M_{\odot}/\text{ano}$. Sabemos que o Sol e outras estrelas têm uma cromosfera e uma coroa extensa, aquecidas por processos não térmicos. A coroa atinge temperaturas da ordem de um milhão de graus, muito superior à temperatura média do meio interplanetário, e sua evaporação constitui o vento solar (figura 5.6).



Figura 5.6 - A coroa solar, observada durante o eclipse de novembro de 1994 em Chapecó, SC. Este gás quente expande-se em direção ao meio interplanetário, formando o vento solar (Rodrigo Campos, LNA).

► EXEMPLO 5.2 - Perda de massa em gigantes vermelhas

Estrelas gigantes vermelhas são frias e luminosas, e apresentam evidências de ventos lentos, com velocidades tipicamente da ordem de $v \sim 10$ km/s. As dimensões dos envelopes dessas estrelas são da ordem do sistema solar, ou $r \sim 10^{14}$ cm, e as densidades numéricas das partículas do gás são da ordem de $n \sim 3 \times 10^8$ cm $^{-3}$, correspondendo a uma densidade de massa $\rho \sim n m_H \sim 5 \times 10^{-16}$ g/cm 3 . Com esses valores, obtemos de (5.3) a taxa de perda de massa $dM/dt \sim 10^{-6} M_\odot/\text{ano}$, característica de uma estrela gigante vermelha. Diversos processos físicos têm sido considerados como responsáveis pela ejeção de matéria, envolvendo principalmente a pressão da radiação estelar em grãos e moléculas, pulsação, e propagação de ondas nos envelopes estelares.

► EXEMPLO 5.3 - Perda de massa em estrelas quentes

Estrelas quentes, como as supergigantes de tipo espectral B, apresentam ventos rápidos, com velocidades tipicamente da ordem de $v \sim 2000$ km/s. Essas estrelas têm luminosidades da ordem de $L \sim 10^5 L_\odot$, onde $L_\odot \simeq 3.85 \times 10^{33}$ erg/s é a luminosidade do Sol. Considerando uma temperatura efetiva típica $T_{ef} \simeq 20000$ K para essas estrelas, admitidas esféricas, podemos estimar seu raio a partir da relação

$$L = 4 \pi R^2 \sigma T_{ef}^4 \quad (5.4)$$

que corresponde essencialmente à definição de temperatura efetiva, onde $\sigma = 5.67 \times 10^{-5}$ erg cm $^{-2}$ s $^{-1}$ K $^{-4}$ é a constante de Stefan-Boltzmann. Obtemos $R \simeq 1.8 \times 10^{12}$ cm $\simeq 26 R_\odot$, onde $R_\odot \simeq 6.96 \times 10^{10}$ cm é o raio do Sol. Supondo que esses ventos se originam nas vizinhanças da superfície da estrela e são rapidamente acelerados, podemos tomar $r \sim 2 R$. Considerando uma densidade média nessa região da ordem de $\rho \sim 10^{-14}$ g/cm 3 , obtemos a taxa de perda de massa $dM/dt \sim 5 \times 10^{-6} M_\odot/\text{ano}$. Nesses objetos, a pressão da radiação estelar tem certamente um papel fundamental na ejeção de matéria, em particular pela absorção da quantidade de movimento dos fótons do campo de radiação estelar por íons localizados nas camadas externas da estrela.

► EXEMPLO 5.4 - Perda de massa em estrelas centrais de nebulosas planetárias

As nebulosas planetárias têm em seu centro uma estrela quente e compacta, remanescente da estrela gigante vermelha progenitora. Vamos considerar como exemplo a nebulosa planetária He2-99 (figura 5.7). A taxa de perda de massa da estrela central desta nebulosa, medida a partir de um estudo da composição química do vento, é $\dot{M} \simeq 4 \times 10^{-6} M_\odot/\text{ano}$. A velocidade do vento alcança 1200 km/s. A estrela tem uma luminosidade $\log(L/L_\odot) \simeq 3.2$ e sua temperatura é de 27000 K. Supondo que a velocidade dada seja alcançada em $r \simeq 10 R_*$, onde R_* é o raio da estrela, podemos estimar a densidade de massa do vento nessa região.



Figura 5.7 - A nebulosa planetária He2-99 (CDS, H. E. Schwarz).

De (5.3) temos

$$\dot{M}(M_{\odot}/\text{ano}) = 2.0 \times 10^{-20} r^2(\text{cm}^2) \rho(\text{g}/\text{cm}^3) v(\text{km}/\text{s}) \quad (5.5)$$

Usando as mesmas unidades, desta equação podemos obter a densidade $\rho(r)$ por

$$\rho = \frac{\dot{M}}{(2.0 \times 10^{-20}) r^2 v} \quad (5.6)$$

Na posição $r = 10 R_*$ temos $v = 1200 \text{ km/s}$ e $\dot{M} = 4 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{ano}$. O raio da estrela R_* pode ser estimado por (5.4) Com os valores $\log(L/L_{\odot}) \simeq 3.2$ e $T_{ef} = 27000 \text{ K}$ obtemos $\log(L/L_{\odot}) = 3.2$ e $L = 1.58 \times 10^3 L_{\odot} = 6.10 \times 10^{36} \text{ erg/s}$. O raio da estrela é $R_* = 1.3 \times 10^{11} \text{ cm} = 1.8 R_{\odot}$ e $r \simeq 1.3 \times 10^{12} \text{ cm}$, e a densidade calculada por (5.6) é $\rho \simeq 9.9 \times 10^{-14} \text{ g}/\text{cm}^3$.

Vamos admitir que o vento seja constituído apenas de H e He, com uma proporção de 10 átomos de H para cada átomo de He. Neste caso podemos estimar a densidade média de partículas por cm^3 no vento por

$$n = \frac{\rho}{\mu m_H} \quad (5.7)$$

O peso molecular μ pode ser estimado por

$$\mu m_H = \frac{n_H m_H + n_{He} m_{He}}{n_H + n_{He}} = \frac{1 + 4(n_{He}/n_H)}{1 + (n_{He}/n_H)} m_H = \frac{1 + 4 \times 0.1}{1 + 0.1} m_H \quad (5.8)$$

De modo que $\mu = 1.27$ e

$$n = \frac{9.9 \times 10^{-14}}{(1.27)(1.67 \times 10^{-24})} \simeq 4.6 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3} \quad (5.9)$$

Estas relações são válidas para um vento neutro, o que é apropriado para uma estrela gigante vermelha. Se o vento estiver ionizado, o peso molecular decresce, e a densidade de partículas será mais alta.

5.3 Equações dos ventos estelares

Ventos estelares são essencialmente processos hidrodinâmicos que ocorrem nas regiões externas das estrelas, de modo que, em princípio, as equações hidrodinâmicas devem ser resolvidas, em geral com a adição da equação de transporte radiativo. Um fluido não viscoso em movimento, na ausência de campos magnéticos, pode ser caracterizado por cinco quantidades, como as três componentes da velocidade \vec{v} , além da pressão P e densidade ρ . As cinco equações que determinam essas quantidades são a equação de continuidade da massa, a equação de Euler (três componentes), e uma equação exprimindo a conservação da energia no fluido. Esta descrição corresponde ao “modelo contínuo”, em que as equações hidrodinâmicas são escritas em termos de variáveis macroscópicas, como P , ρ e \vec{v} em função da posição \vec{r} . Em um nível mais fundamental, o gás pode também ser descrito por meio de uma função de distribuição $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, cujas variações são dadas pela *equação de Boltzmann*, no caso de fluidos neutros, ou pela *equação de Vlasov*, no caso de plasmas (capítulos 7 e 10).

A equação de continuidade pode ser escrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (5.10)$$

Naturalmente, a equação de continuidade expressa a conservação da massa. Na ausência de fontes ou sumidouros, a quantidade de matéria que deixa um certo volume do fluido é igual ao decréscimo de matéria neste mesmo volume. Em outras palavras, a densidade em um certo elemento de volume varia de acordo com o escoamento para dentro ou para fora desse elemento. No caso unidimensional e estacionário com simetria esférica, temos

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho v) = 0 \quad (5.11)$$

Esta equação é facilmente integrável, de modo que

$$r^2 \rho v = \text{constante} \quad (5.12)$$

que é essencialmente a equação (5.2).

A equação do movimento, ou equação de Euler, pode ser escrita em termos da derivada total

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \quad (5.13)$$

A descrição do movimento pode ser feita considerando separadamente os dois termos, isto é, $\partial/\partial t$ em uma posição fixa e $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ em um instante fixo, o que corresponde à

descrição euleriana. Por outro lado, a descrição do movimento em termos da derivada total D/Dt corresponde à *descrição lagrangiana*. Neste caso, podemos imaginar que estamos seguindo o movimento de um elemento do fluido. Naturalmente, a derivada “lagrangiana” D/Dt está relacionada com as derivadas “eulerianas” pela relação (5.13). A equação do movimento, ou Equação de Euler, pode ser escrita

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \tag{5.14}$$

Uma extensão importante da equação do movimento ocorre quando o fluido está colocado em um campo gravitacional caracterizado pela aceleração (força por unidade de massa) \vec{g} . Nesse caso, cada unidade de volume estará sujeita à força $\rho \vec{g}$, que é a força gravitacional atuante por unidade de volume, de modo que a equação do movimento fica

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{g} \tag{5.15}$$

De modo geral, se o fluido se encontra sob a ação de um campo de forças externas \vec{F} (dina/cm³), isto é, \vec{F} é a força que atua em um volume unitário, temos

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \frac{1}{\rho} \vec{F} \tag{5.16}$$

Admitindo simetria esférica, esta equação fica

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\rho} F \tag{5.17}$$

Finalmente, no estado estacionário, $\partial v/\partial t = 0$, de modo que

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{1}{\rho} F \tag{5.18}$$

A equação de energia é geralmente a mais complexa, a não ser que alguma hipótese simplificadora seja feita. A temperatura do gás no envelope tem um papel importante no estudo dos ventos estelares, uma vez que reflete diretamente os processos de ganho e perda de energia incluídos na equação de energia. O caso mais simples corresponde aos *ventos isotérmicos*, em que a temperatura é considerada constante em todo o envelope. Neste caso, a equação de energia é simplificada, e pode ser escrita simplesmente

$$T = \text{constante} \tag{5.19}$$

Em um movimento *isentrópico*, a entropia s por unidade de massa (com unidades erg K⁻¹ g⁻¹) é constante. Isso ocorre em um gás perfeito deslocando-se sem trocas de energia entre diferentes regiões do fluido, ou com o gás circundante. Nesse caso, o movimento é *adiabático* e a entropia de cada região do fluido permanece constante durante o deslocamento espacial daquela região. Podemos escrever então

$$\begin{cases} P = \text{constante} \times \rho^\gamma \\ T = \text{constante} \times \rho^{\gamma-1} \end{cases} \quad (5.20)$$

onde γ é a razão dos calores específicos e usamos uma equação de estado dos gases perfeitos do tipo $P \propto \rho T$. No caso mais geral, podemos escrever a equação de energia na forma euleriana como

$$\frac{\partial[\rho(v^2/2 + e)]}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\rho \vec{v}(v^2/2 + e + P/\rho) + \vec{q}] = \vec{v} \cdot \vec{F} . \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial[\rho(v^2/2 + e)]}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\rho \vec{v}(v^2/2 + e + P/\rho) + \vec{q}_c] = \vec{v} \cdot \vec{F} + Q_A + Q_R \quad (5.22)$$

onde e é a energia interna por unidade de massa (erg/g), \vec{q} é o *fluxo de energia* transportada (erg cm⁻² s⁻¹), tal que $\vec{\nabla} \cdot \vec{q}$ é a energia transportada por centímetro cúbico por segundo; Q_A é a taxa de deposição de energia acústica ou mecânica (unidades: erg cm⁻³ s⁻¹); Q_R é a taxa de deposição de energia radiativa (erg cm⁻³ s⁻¹); \vec{q}_c é o fluxo de energia transportado pela condução (unidades erg cm⁻² s⁻¹). Esta equação expressa o fato de que a variação com o tempo da energia total do gás (erg cm⁻³ s⁻¹) é resultado da existência de um fluxo de energia através de um elemento de volume em torno deste ponto, o qual compreende a energia cinética do gás, a energia interna, o trabalho das forças de pressão, a energia transportada pela condução etc. e o trabalho realizado pelas forças externas.

De modo geral, as soluções das equações hidrodinâmicas mostram que, próximo da base do envelope, junto à superfície da estrela, a solução é subsônica, alcançando velocidades supersônicas para maiores distâncias da estrela. Um exemplo está mostrado na figura 5.8 para o caso isotérmico. Neste caso, o ponto sônico coincide com o ponto crítico, em que o gradiente de velocidade só é definido para um conjunto bem definido de parâmetros.

Esta figura mostra a topologia das soluções adotando valores diferentes para a velocidade inicial v_0 . A curva 1 é a solução crítica, passando pelo ponto crítico desde velocidades subsônicas até as velocidades supersônicas, alcançando finalmente a velocidade terminal (não indicada na figura). A curva 2 também passa pelo ponto crítico, mas o escoamento é iniciado supersonicamente. A curva 3 é semelhante à solução crítica, mas a velocidade inicial é insuficiente para ultrapassar o ponto sônico. Em contraposição, a curva 4 é inteiramente supersônica. As curvas 5 e 6 não têm significado físico, uma vez que as soluções não são unívocas.

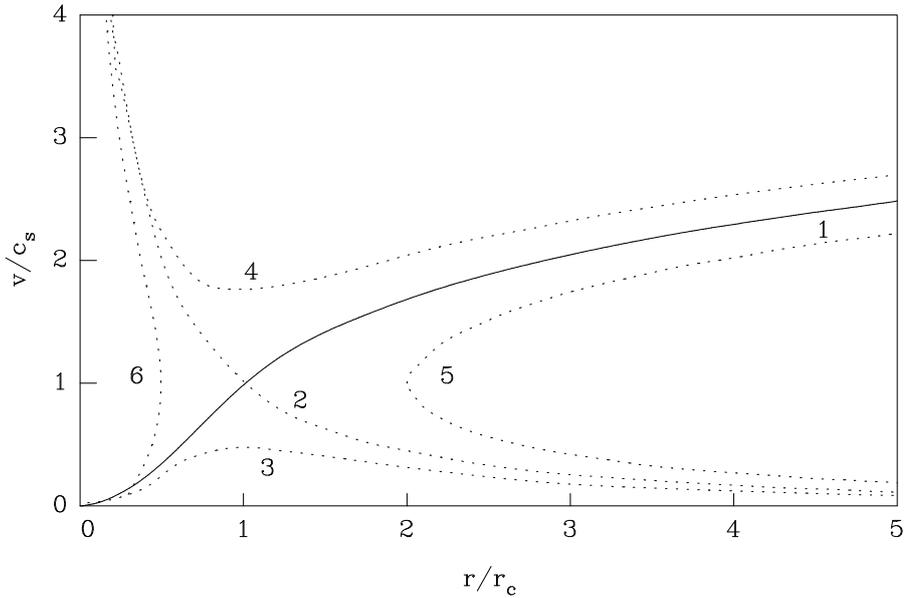


Figura 5.8 - Soluções possíveis para o perfil de velocidade em ventos isotérmicos. A curva 1 é a única que passa pelo ponto crítico e alcança velocidades supersônicas.

► **EXEMPLO 5.5 - A lei beta de velocidades**

Uma aproximação frequentemente usada para a variação da velocidade do vento com a distância até a estrela é a chamada *lei beta de velocidades*. Nesse caso, a função $v(r)$ é dada por

$$v(r) = v_0 + (v_f - v_0) \left(1 - \frac{R}{r}\right)^\beta \tag{5.23}$$

onde v_0 é a velocidade inicial do vento, ainda na fotosfera, v_f é a velocidade final ($v_f \gg v_0$), R é um nível de referência, geralmente da ordem do raio da estrela R_* , e β é um parâmetro que caracteriza a aceleração no envelope. Vemos, então, que $v \rightarrow v_0$ para $r \rightarrow R$ e que $v \rightarrow v_f$ para $r \rightarrow \infty$. Para estrelas quentes, $\beta \simeq 0.8$, enquanto que para estrelas frias temos tipicamente $\beta \simeq 2$. Alguns exemplos de leis de velocidade para diferentes valores do parâmetro β estão mostrados na figura 5.9, sendo consideravelmente mais realísticas do que a variação esquemática mostrada na figura 5.8.

A equação da lei beta pode ser escrita

$$v(r) = v_0 + (v_f - v_0) \left(1 - \frac{R/R_*}{r/R_*}\right)^\beta \tag{5.24}$$

A razão R/R_* é frequentemente próxima da unidade. Por exemplo, com uma boa aproximação podemos escrever

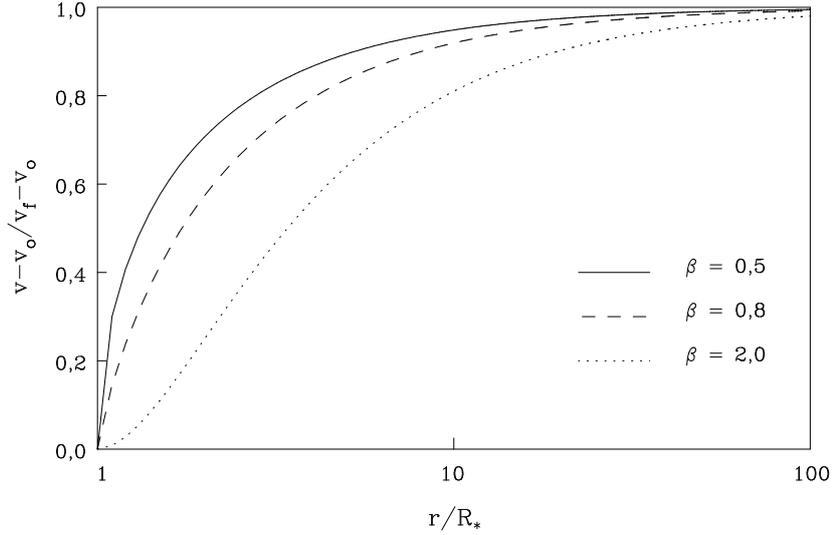


Figura 5.9 - Perfil de velocidade no caso de uma lei beta.

$$R \simeq R_* \left[1 - \left(\frac{v_0}{v_f} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] \tag{5.25}$$

Vamos considerar como exemplo uma estrela quente de tipo espectral O, cuja temperatura efetiva é $T_{ef} = 40\,000\text{ K}$, com um vento de velocidade terminal de $2\,500\text{ km/s}$. Vamos adotar $\beta \simeq 0.8$. Podemos admitir que a velocidade inicial do vento seja essencialmente igual à velocidade do som na base do envelope circunstelar, ou seja,

$$v_0^2 \simeq c_s^2 \simeq \frac{k T_{ef}}{\mu m_H} \tag{5.26}$$

onde $\mu \simeq 0.6$ é o peso molecular médio das partículas do gás. Nesse caso, temos

$$v_0^2 = \frac{k T_{ef}}{\mu m_H} = 5.51 \times 10^{12} \longrightarrow v_0 = 23.5\text{ km/s}$$

Substituindo na aproximação acima temos

$$\frac{R}{R_*} \simeq \left[1 - \left(\frac{v_0}{v_f} \right)^{1/\beta} \right] \simeq 0.997 \tag{5.27}$$

Aplicando a lei beta na forma (5.24), obtemos

$$v(r) = 23.5 + (2500 - 23.5) \left(1 - \frac{R/R_*}{r/R_*} \right)^{0.8} \tag{5.28}$$

Os resultados estão mostrados na figura 5.10.

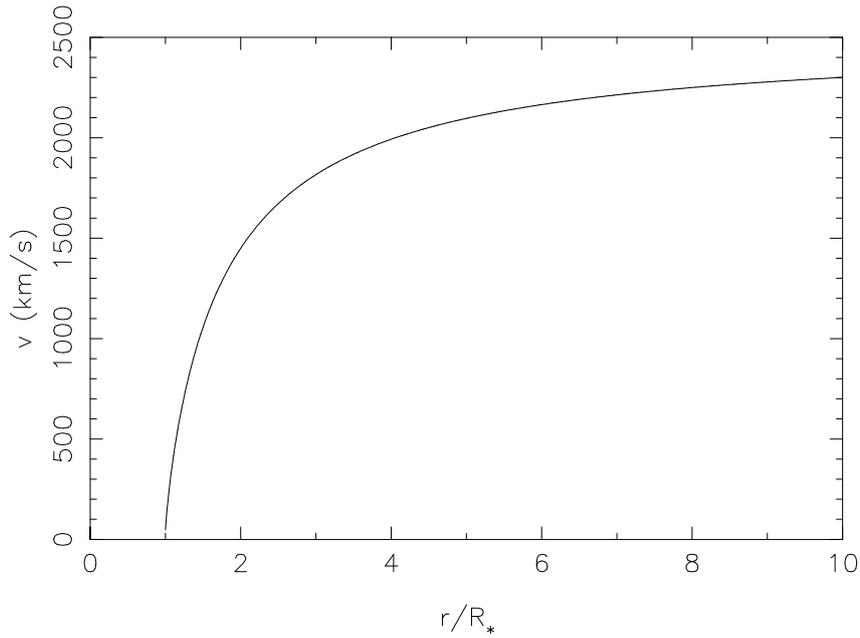


Figura 5.10 - A lei beta de velocidades na forma (5.24).

► EXEMPLO 5.6 - Equação de Euler e equação de equilíbrio hidrostático

A equação de Euler (5.15) representa a equação do movimento no caso dos fluidos. Esta equação pode ser reduzida à forma da equação de equilíbrio hidrostático, que descreve a situação de equilíbrio em uma estrela sob a ação das forças gravitacionais, que tendem a colapsar a estrela, e as forças de pressão, que agem no sentido contrário. Esta equação será vista no capítulo 6, quando estudaremos as condições dos interiores estelares. Vamos aqui mostrar que a equação de Euler se reduz à equação de equilíbrio hidrostático quando a velocidade \vec{v} é nula. De (5.15), temos então

$$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P = \vec{g} \tag{5.29}$$

Em coordenadas esféricas e com simetria esférica,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -g \tag{5.30}$$

que pode ser escrita

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g \tag{5.31}$$

Para uma estrela esférica, a aceleração gravitacional $g(r)$ na posição r é

$$g(r) = \frac{G M(r)}{r^2} \tag{5.32}$$

onde $M(r)$ é a massa interna à posição r , de modo que (5.31) pode também ser escrita

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \quad (5.33)$$

As equações (5.31) e (5.33) são formas diferentes da equação de equilíbrio hidrostático.

5.4 Ventos estelares e transferência de energia

Um vento estelar pode ser associado a uma atmosfera gravitacionalmente ligada, cuja energia potencial por unidade de massa é $-GM_*/R_*$, onde M_* e R_* são a massa e raio da estrela, respectivamente. Para que o vento escape do poço de potencial representado pela estrela, sua energia deve ser positiva a grandes distâncias de R_* , da ordem de $v_f^2/2$, ou seja, algum processo físico, responsável pela variação de temperatura, deve fornecer a energia e/ou a quantidade de movimento do vento. Dependendo dos processos de deposição de energia ou quantidade de movimento, modificações profundas podem então ocorrer na estrutura de velocidades e na taxa de perda de massa com relação ao modelo isotérmico.

A energia fornecida ao gás no vento pode estar na forma de calor ou de quantidade de movimento, ou ambos. Por exemplo, a dissipação de ondas acústicas na base da coroa solar corresponde a uma adição de calor, enquanto que a ação da pressão da radiação em linhas de íons abundantes em estrelas quentes produz uma injeção de quantidade de movimento, ou seja, a energia é adicionada pelo trabalho realizado pela força externa. Ambos os processos devem ser considerados na equação de energia e/ou na equação de Euler, mas suas conseqüências sobre a estrutura do vento são diferentes. Por exemplo, enquanto que a injeção de quantidade de movimento ao gás pela radiação corresponde a uma força externa contrária à gravidade, a adição de calor tende a aumentar a temperatura do gás, diminuindo o gradiente de temperatura e, portanto, o gradiente de pressão, resultando que as forças de pressão passam a incluir uma componente no mesmo sentido da gravidade da estrela. Em princípio, ambos os processos de deposição de energia e quantidade de movimento são necessários para obter soluções transônicas para as equações do vento, isto é, subsônicas na região de aceleração do gás e supersônicas nas regiões externas do envelope estelar. Além disso, parâmetros como a taxa de perda de massa e a velocidade terminal dependem da localização exata da região onde ocorre a deposição e da maneira como a força comunicada ao gás em expansão varia com a posição ou com a velocidade.

Assim como acontece no estudo da estrutura estelar, a consideração de *ventos politrópicos* permite a inclusão de gradientes de temperatura, mantendo uma solução relativamente simples para as equações hidrodinâmicas. Neste caso, define-se um índice politrópico Γ_p tal que $d \ln P / d \ln \rho = \Gamma_p$. O caso $\Gamma_p = 1$ corresponde a um vento isotérmico e $\Gamma_p = 5/3$ a um vento adiabático. Valores intermediários de Γ_p produzem soluções aproximadas dos ventos reais. Dependendo do valor do índice politrópico, o gás no envelope estelar pode ou não escapar da estrela. Também neste caso a taxa de perda de massa pode ser estimada a partir das condições na região subsônica, e a estrutura de velocidade depende criticamente do índice politrópico.

A solução das equações hidrodinâmicas é particularmente simples admitindo que a equação da conservação da quantidade de movimento contém apenas o termo gravitacional e o termo do gradiente de pressão. No caso de um envelope estelar com simetria esférica no estado estacionário, de (5.18) temos

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - g_* \tag{5.34}$$

onde g_* é a aceleração gravitacional estelar,

$$g_* = \frac{GM_*}{r^2} \tag{5.35}$$

Estaremos interessados em problemas onde, além da atração gravitacional g_* , há uma força externa por unidade de massa na mesma direção e sentido inverso ao da força gravitacional. Essa força pode ser, por exemplo, devida à transferência de quantidade de movimento do campo de radiação estelar ao gás em um envelope em expansão. Chamando g_r a aceleração (força por unidade de massa) causada por esse processo, temos, no caso estacionário e esfericamente simétrico

$$\begin{aligned} v \frac{dv}{dr} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - g_* + g_r \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - (g_* - g_r) \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - g_{ef} \end{aligned} \tag{5.36}$$

onde introduzimos a gravidade efetiva

$$g_{ef} = g_* - g_r \tag{5.37}$$

Definindo o *parâmetro* Γ pela razão

$$\Gamma_r = \frac{g_r}{g_*} \tag{5.38}$$

podemos escrever

$$g_{ef} = g_* \left(1 - \frac{g_r}{g_*} \right) = g_* (1 - \Gamma_r) \tag{5.39}$$

e a equação do movimento (5.36) fica

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - g_*(1 - \Gamma_r) \tag{5.40}$$

► EXEMPLO 5.7 - A velocidade de escape

Os ventos em estrelas quentes têm velocidades finais, ou terminais, da ordem de $v_f \sim 2000$ km/s, enquanto que os ventos observados em estrelas gigantes frias são consideravelmente mais lentos, com $v_f \sim 10$ km/s. Podemos comparar esses valores com a *velocidade de escape* v_e das atmosferas dessas estrelas. Considerando uma partícula de massa m e velocidade v à distância r do centro de uma estrela de massa M_* e raio R_* , a velocidade de escape é definida pela condição $E_c = |E_p|$, onde $E_c = (1/2)mv^2$ é a energia cinética da partícula e $|E_p| = GM_*m/r$ sua energia potencial em r , sendo $r \geq R_*$. A velocidade de escape nesta posição é então

$$v_e \simeq \sqrt{\frac{2GM_*}{r}} \tag{5.41}$$

Para uma estrela supergigante de tipo espectral B, adotando $M_* \simeq 25 M_\odot \simeq 5 \times 10^{34}$ g e $r \simeq R_* \simeq 30 R_\odot \simeq 2 \times 10^{12}$ cm, temos que $v_e \simeq 600$ km/s, ou seja, as velocidades terminais obtidas das observações são superiores à velocidade de escape, $v_f \gg v_e$.

Para as estrelas gigantes vermelhas a situação é um pouco mais complexa. Tomando valores típicos para essas estrelas, $M_* \simeq 1 M_\odot \simeq 2 \times 10^{33}$ g e $R_* \simeq 100 R_\odot \simeq 7 \times 10^{12}$ cm, obtemos $v_e \simeq 60$ km/s com $r \simeq R_*$, isto é, neste caso $v_f < v_e$. Esta questão foi resolvida a partir das observações do sistema α Her por Armin Deutsch. Nesse sistema, uma gigante vermelha e uma estrela anã giram em torno de seu centro de massa. As linhas espectrais circunstelares que caracterizam a envoltória da gigante vermelha eram também observadas na companheira anã, isto é, ambas estavam envolvidas por um gigantesco envelope, originado pela estrela gigante. Desta forma, a posição r na qual se deve aplicar a condição $E_c = |E_p|$ ocorre a uma distância muito maior do que o raio da estrela, $r \gg R_*$, de modo que a velocidade de escape do envelope é efetivamente menor que o valor dado acima. Por exemplo, incluindo em (5.41) as massas de ambas as estrelas, admitidas iguais, uma velocidade de escape $v_e = v_f = 10$ km/s é obtida na posição $r \simeq 2GM_*/v_e^2 \simeq 5 \times 10^{14}$ cm, ou cerca de 70 raios estelares. As dimensões observadas dos envelopes circunstelares são, efetivamente, desta ordem de grandeza, ou mesmo superiores.

► EXEMPLO 5.8 - O parâmetro Γ em estrelas quentes

Podemos obter uma estimativa do parâmetro Γ definido por (5.38) nos envelopes de estrelas quentes, onde a elevada densidade eletrônica torna o espalhamento por elétrons uma importante fonte de opacidade. Sabemos que a seção de choque para espalhamento por elétrons no caso não relativístico é a seção de choque de Thomson, $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25}$ cm² (ver seção 3.5c). Em uma camada de densidade ρ e densidade eletrônica n_e , o coeficiente de espalhamento por elétrons por massa é

$$\kappa_e \simeq \frac{n_e \sigma_T}{\rho} , \tag{5.42}$$

tipicamente da ordem de $\kappa_e \simeq 0.30 \text{ cm}^2/\text{g}$ para um gás de composição química normal. Cada fóton de energia $h\nu$ absorvido (ou espalhado) transporta uma quantidade de movimento $h\nu/c$, de modo que a razão entre as acelerações devidas ao processo de espalhamento e gravitacional é simplesmente

$$\Gamma_e = \frac{g_e}{g_*} = \frac{L_* \kappa_e}{4 \pi r^2 c} \frac{r^2}{G M_*} = \frac{L_* \kappa_e}{4 \pi c G M_*} \quad (5.43)$$

onde L_* é a luminosidade da estrela (erg/s), $L_*/4\pi r^2$ é o fluxo da estrela na posição r ($\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$), de modo que o termo $L_*\kappa_e/4\pi r^2 c$ é essencialmente a aceleração (força/massa) devida ao processo de espalhamento por elétrons. Usando valores apropriados para as estrelas quentes de tipos espectrais O e B, $L_* \sim 10^5$ a $10^6 L_\odot$ e $M_* \simeq 10$ a $50 M_\odot$, obtemos $0.1 \lesssim \Gamma_e \lesssim 2$, ou seja, nessas estrelas a aceleração devida ao espalhamento por elétrons pode eventualmente dominar a aceleração gravitacional. Em termos do parâmetro Γ_e , podemos definir uma velocidade de escape efetiva, dada por

$$v_e = \left[\frac{2(1 - \Gamma_e) G M_*}{r} \right]^{1/2} \quad (5.44)$$

Com os dados do Exemplo 5.7, $M_* \simeq 25 M_\odot$ e $r \simeq 30 R_\odot$, tomando $L_* \simeq 4 \times 10^5 L_\odot$ e $\kappa_e \simeq 0,30 \text{ cm}^2/\text{g}$, obtemos $\Gamma_e \simeq 0,37$; de (5.44), encontramos uma velocidade de escape efetiva correspondente a 80% do valor dado por (5.41).

► EXEMPLO 5.9 - O parâmetro Γ em estrelas frias

Podemos aplicar o mesmo raciocínio do Exemplo 5.8 para estimar o parâmetro Γ no caso de estrelas gigantes frias. Considerando que a contribuição g_r à gravidade efetiva seja devida à ação da radiação estelar sobre os grãos de poeira imersos no envelope, a expressão (5.43) é ainda válida, substituindo o coeficiente de espalhamento κ_e pelo equivalente dos grãos sólidos κ_d , dado por

$$\kappa_d \simeq \frac{\pi a^2 Q n_d}{\rho} \quad (5.45)$$

onde n_d é a densidade numérica de grãos (cm^{-3}), admitidos esféricos de raio a , e Q é um fator de eficiência para a pressão da radiação. Como $n_d = \rho_d/m_d$, onde ρ_d é a densidade de grãos (g/cm^3) e $m_d \simeq (4/3)\pi a^3 s_d$ é a massa de um grão com densidade interna s_d , podemos usar valores médios adequados a grãos de silicatos e estimar κ_d ou o parâmetro correspondente, Γ_d , dado por

$$\Gamma_d = \frac{L_* \kappa_d}{4 \pi c G M_*} \quad (5.46)$$

Esses valores são: $a \simeq 1000 \text{ \AA} = 10^{-5} \text{ cm}$, $s_d \simeq 3 \text{ g/cm}^3$ e $\rho/\rho_d \simeq 200$ (razão gás-poeira). Obtemos $m_d \simeq 1.3 \times 10^{-14} \text{ g}$, $n_d/\rho \simeq 1/200 m_d \simeq 3.9 \times 10^{11} \text{ g}^{-1}$ e $\kappa_d \simeq 120 Q \text{ cm}^2/\text{g}$. O coeficiente κ_d depende criticamente da frequência do fóton, refletindo

a dependência do fator de eficiência Q , que pode alcançar valores desde cerca de 0.001 até da ordem da unidade, aproximadamente. Tomando valores no intervalo $0.01 < Q < 1$ e considerando uma estrela com $L_* \simeq 10^3 L_\odot$ e $M_* \simeq 1M_\odot$, de (5.29) obtemos $0.1 < \Gamma_d < 9$, ou seja, também neste caso os valores da gravidade extra podem ser da ordem ou superiores à gravidade da estrela.

► **EXEMPLO 5.10 - Taxa de perda de massa termonuclear do Sol**

Podemos comparar a taxa de perda de massa do Sol com o valor correspondente termonuclear, isto é, a taxa de perda de massa termonuclear do Sol, que é a taxa necessária para que o Sol mantenha a luminosidade observada de $L_\odot = 3.85 \times 10^{33}$ erg/s. Considerando que a densidade de prótons do vento solar na altura da órbita da Terra é de cerca de $n_p \simeq 10 \text{ cm}^{-3}$ e que a velocidade destas partículas é tipicamente da ordem de $v_p \simeq 350 \text{ km/s}$, o fluxo de partículas do vento solar é

$$j \simeq n_p v_p \simeq (10) (350 \times 10^5) \simeq 3.5 \times 10^8 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \tag{5.47}$$

onde consideramos um gás de H puro e ionizado. A taxa de perda de massa pelo Sol é então

$$\dot{M} \simeq 4 \pi r^2 n_p v_p \simeq 1.65 \times 10^{12} \text{ g/s} = 2.6 \times 10^{-14} M_\odot/\text{ano} \tag{5.48}$$

A taxa de perda de massa termonuclear é aproximadamente,

$$\dot{M}_T \simeq \frac{L_\odot}{c^2} \simeq \frac{3.85 \times 10^{33}}{(3.0 \times 10^{10})^2} \simeq 4.3 \times 10^{12} \text{ g/s} = 6.8 \times 10^{-14} M_\odot/\text{ano} \tag{5.49}$$

Ou seja, $\dot{M}/\dot{M}_T \simeq 0.38$.

5.5 Mecanismos responsáveis pelos ventos estelares

Muitos mecanismos diferentes têm sido propostos para explicar a ejeção de matéria em todas as faixas do diagrama HR. Uma discussão detalhada pode ser encontrada em Maciel (2004). Os principais modelos e suas aplicações aos diferentes tipos de estrelas incluem:

(a) Ventos coronais

Estrelas relativamente frias da seqüência principal com tipos espectrais F5 ou posterior e algumas gigantes têm, provavelmente, cromosferas e coroas semelhantes à do Sol. Os ventos coronais são produzidos pela pressão do gás nesta região de alta temperatura, que chega a 2×10^6 K no caso do Sol. Essas temperaturas podem ser produzidas pela dissipação de energia mecânica ou pela reconexão de campos magnéticos na zona de convecção subfotosférica dessas estrelas.

(b) Ventos produzidos por ondas sonoras

Movimentos convectivos na região subfotosférica das estrelas podem criar *ondas acústicas* que se propagam ao longo da atmosfera. Essas ondas estão associadas a uma componente adicional da pressão, a “pressão de onda” $P_o \sim (1/2) \rho v_o^2$, onde v_o^2 é a velocidade quadrática média das oscilações, e o termo correspondente do gradiente de pressão pode, em princípio, gerar uma força, resultando em um vento. No caso de uma partícula em movimento em um campo de força oscilatório, se a amplitude das oscilações decrescer com a distância, parte da energia cinética das oscilações pode ser transferida para o gás em expansão, causando a aceleração da partícula.

(c) Ventos causados pela poeira circumstelar

Estrelas gigantes frias podem condensar diversas espécies de grãos em suas fotosferas e envelopes e a ação da pressão da radiação estelar pode produzir elevadas taxas de perda de massa, pela transferência da quantidade de movimento do campo de radiação para os grãos e destes para o gás. Os grãos absorvem a radiação em uma faixa ampla de comprimentos de onda, de modo que os ventos causados pela poeira circumstelar são basicamente ventos produzidos pela radiação contínua. Diferem, neste aspecto, dos ventos das estrelas quentes, impulsionados pela ação da radiação em linhas formadas por espalhamento ressonante, ou das estrelas frias sob a ação da radiação em linhas ou bandas moleculares.

Para que o mecanismo seja eficiente é necessário uma combinação entre a escala de altura do envelope, a densidade ρ e a temperatura T do gás, uma vez que os grãos só podem se condensar se ρ for suficientemente alta a uma distância em que o efeito da pressão da radiação seja comparável ou superior ao da gravidade, e onde a temperatura esteja abaixo da temperatura de condensação dos grãos. Os grãos absorvem a radiação estelar e emitem como corpos negros na faixa do infravermelho, e sua temperatura é determinada pelo equilíbrio entre esses dois processos.

As taxas de perda de massa podem ser obtidas considerando que a lei de velocidades deve passar pelo ponto crítico, em princípio onde $v \simeq c_s$. São obtidos valores da ordem de 10^{-5} a $10^{-7} M_\odot/\text{ano}$, em bom acordo com as determinações observacionais. A taxa de perda de massa (M_\odot/ano) em estrelas frias, particularmente supergigantes vermelhas, pode ser aproximada por uma expressão empírica

$$\dot{M} \simeq 4 \times 10^{-13} \eta \frac{(L_*/L_\odot)(R_*/R_\odot)}{M_*/M_\odot} \tag{5.50}$$

onde a luminosidade, raio e massa da estrela são dados em termos das quantidades solares, e η é um parâmetro ajustável, tipicamente no intervalo $0,3 \lesssim \eta \lesssim 3$. Esta é a *fórmula de Reimers*, obtida a partir de uma amostra de supergigantes vermelhas em sistemas binários, para as quais há determinações relativamente precisas de dM/dt , M_* , R_* e L_* . A quantidade mais simples com dimensões de massa/tempo que pode ser formada a partir dos parâmetros estelares básicos, M_* , R_* e L_* é $L_*/g R_*$, que é equivalente a $L_* R_*/M_* = L_*/(M_*/R_*)$, uma vez que $g \propto M_*/R_*^2$. Como $g R_* \propto$

$M_*/R_* \propto v_e^2$, se a taxa de perda de massa for proporcional a esta quantidade em diferentes estrelas, a mesma fração da luminosidade estelar é usada para fornecer a energia potencial por unidade de massa do material que escapa da estrela.

Podemos ter uma idéia da taxa de perda de massa em um vento radiativo admitindo que todos os fótons da estrela são absorvidos uma única vez, o chamado “limite de espalhamento simples”. Neste caso, a quantidade de movimento por unidade de tempo do vento é $\dot{M} v_f$, que deve ser igual à quantidade de movimento radiativa da estrela por unidade de tempo, dada por L_*/c . Temos então

$$\dot{M} \simeq \frac{L_*}{v_f c} \quad (5.51)$$

No caso de espalhamento simples, ou único, (5.51) é um limite superior, pois nem todos os fótons da estrela são absorvidos. Entretanto, um mesmo fóton pode ser absorvido e reemitido ou espalhado várias vezes, o que pode aumentar a taxa de perda de massa por um fator considerável, de modo que taxas aproximadamente corretas podem ser obtidas com a equação (5.51). Em uma aproximação melhor, pode ser mostrado que esta equação deve ser multiplicada por τ_v , a profundidade óptica do vento na região supersônica, uma quantidade que pode alcançar valores muito maiores do que a unidade.

(d) Ventos causados pela radiação em linhas

Este é o mecanismo mais importante aplicado aos ventos das estrelas quentes com tipos espectrais O, B, A e das classes de luminosidade V, III, I, estrelas centrais de nebulosas planetárias e estrelas Wolf-Rayet. Essas estrelas apresentam grande número de linhas intensas de absorção, em particular na região ultravioleta do espectro, em que as opacidades podem atingir valores um milhão de vezes mais altos que no contínuo. Os fótons absorvidos têm uma certa quantidade de movimento, que é transferida ao gás nas atmosferas destas estrelas, levando à ejeção de suas camadas superficiais. O processo é favorecido pelo efeito Doppler devido ao gradiente de velocidade, que permite a absorção de fótons não atenuados da fotosfera em comprimentos de onda diferentes do comprimento de onda central.

O processo de ejeção leva em conta a transferência de quantidade de movimento e energia das regiões internas da estrela para o envelope em expansão por absorção e espalhamento, incluindo a possibilidade de espalhamento múltiplo. Essa transferência é feita basicamente por íons de C, N, O, Ne, Si, P, S e elementos do grupo do Fe. Esses íons precisam comunicar a quantidade de movimento adquirida aos prótons, elétrons e íons de He por meio de colisões, em um processo às vezes chamado de *acoplamento coulombiano*. As condições necessárias para esta transferência requerem que o tempo de desaceleração desses íons pelas colisões com o gás seja pequeno com relação ao tempo necessário para que os íons possam adquirir uma grande velocidade de deriva com relação ao gás.

No processo de perda de massa pela ação da pressão da radiação em linhas opticamente espessas, a taxa de perda de massa pode ser escrita de maneira aproximada

$$\dot{M} \simeq N \frac{L_*}{c^2} \quad (5.52)$$

onde N é o número efetivo de linhas de absorção opticamente espessas e L_* é a luminosidade da estrela. Por exemplo, para uma estrela com $L_*/L_\odot \sim 10^5$, precisamos de $N \simeq 150$ para obter $\dot{M} \sim 10^{-6} M_\odot/\text{ano}$, da ordem dos valores observados. Uma expressão mais correta é obtida admitindo que todos os fótons da estrela são absorvidos uma única vez por um grande número de linhas intensas, essencialmente o limite de espalhamento simples dado por (5.51). Com $L_*/L_\odot \sim 10^5$ e $v_f \sim 10^3$ km/s, obtemos $\dot{M} \sim 10^{-6} M_\odot/\text{ano}$. Uma vez que os fótons são espalhados de maneira aproximadamente isotrópica, e portanto perdem sua eficiência na transferência de quantidade de movimento para a direção radial após o primeiro espalhamento, a expressão (5.31) é um bom limite superior para a taxa de perda de massa da maior parte das estrelas quentes, com a provável exceção das Wolf-Rayet, que têm taxas relativamente altas para suas luminosidades.

Uma maneira alternativa de estimar a taxa de perda de massa consiste em utilizar uma expressão do tipo

$$\dot{M} v_f \sqrt{R_*} \simeq f(L_*) \quad (5.53)$$

onde R_* é o raio da estrela. De acordo com trabalhos recentes, existe uma relação aproximadamente linear entre os logaritmos dessas quantidades. No caso mais geral, as equações acopladas devem ser resolvidas simultaneamente para determinação da taxa de perda de massa, lei de velocidades e velocidade final. Frequentemente são usadas algumas aproximações, como uma dada lei de velocidades.

O mecanismo de ejeção causada pela pressão da radiação pode também ser aplicado às estrelas frias, em que a absorção é feita a partir de linhas moleculares intensas de H_2O ou CO . Neste caso, taxas da ordem de até $10^{-7} M_\odot/\text{ano}$ podem ser obtidas, de modo que o mecanismo pode funcionar como um complemento ao processo de ejeção pelos grãos circunstelares.

(e) Ventos e campos magnéticos: ondas de Alfvén

As estrelas possuem em geral um campo magnético remanescente da nuvem protoestelar ou desenvolvido posteriormente por algum processo de dínamo. A estrutura desses campos não é bem conhecida, com exceção do Sol, mas é bastante provável que o campo tenha efeitos mensuráveis sobre os ventos estelares, em particular para as estrelas com alta rotação.

Um mecanismo provavelmente mais importante pode ocorrer na presença de campos magnéticos mesmo em estrelas em baixa rotação. Neste caso, *ondas de Alfvén* geradas na base do vento podem se propagar pelo envelope, e a dissipação de energia e quantidade de movimento associada com as ondas pode levar à aceleração do

envelope e perda de massa. Juntamente com os processos envolvendo a pressão da radiação, as ondas de Alfvén são provavelmente os principais mecanismos de produção de ventos, ocorrendo em estrelas sem regiões coronais extensas ou fluxos radiativos. Algumas aplicações incluem estrelas da seqüência principal de tipos A e mais tardios, estrelas pré-seqüência principal, além de gigantes e supergigantes com temperaturas efetivas na faixa $15\,000 > T_{ef}(\text{K}) > 3\,000$. Modelos híbridos, em que a radiação é considerada em complemento às ondas de Alfvén, têm sido também considerados. A introdução das ondas de Alfvén implica em modificações na equação de conservação da quantidade de movimento, que passa a incluir um termo correspondente à força de Lorentz, proporcional a $\vec{J} \times \vec{B}$, onde \vec{J} é a densidade de corrente e \vec{B} a intensidade do campo magnético (capítulo 10).

5.6 Perda de massa em ventos de estrelas quentes

Vamos obter uma estimativa da taxa de perda de massa em uma estrela quente utilizando um modelo muito simples para o mecanismo de absorção da radiação estelar em linhas não saturadas. Considerando o gás acelerado a partir da fotosfera, onde $r = R_*$, até uma região onde $r = R$ e $v = v_f$, temos que

$$\dot{M} = 4 \pi r^2 \rho(r) v(r) \quad (5.54)$$

em qualquer posição r . Para $r \gg R_*$, ou $r \gg R$, o que é equivalente a admitir que $R - R_* \ll r_\infty$, onde r_∞ é a dimensão total do envelope, temos

$$R^2 \rho(R) v_f \simeq r^2 \rho(r) v_f \quad (5.55)$$

de modo que

$$R^2 \rho(R) \simeq r^2 \rho(r) \quad (r \gg R) \quad (5.56)$$

Considerando que o gás no envelope é constituído de H e He, ambos ionizados, temos

$$\begin{aligned} \rho &\simeq n_p m_H + 4 n_{He} m_H \\ &\simeq n_p \left(1 + 4 \frac{n_{He}}{n_p} \right) m_H \\ &\simeq n_p (1 + 4y) m_H \end{aligned} \quad (5.57)$$

onde $y = n_{He}/n_H \simeq n_{He}/n_p$ é a abundância de He por número de átomos.

Seja k o elemento que irá produzir a linha não saturada, com abundância $a_k \simeq n_k/n_p$. Seja ainda $Q_{ki} = n_{ki}/n_k$ a fração dos átomos de k no estado de ionização i . Nessas condições, a taxa de perda de massa fica

$$\begin{aligned} \dot{M} &= 4 \pi R^2 \rho(R) v_f \\ &\simeq 4 \pi R^2 v_f n_p (1 + 4y) m_H \\ &\simeq 4 \pi R^2 v_f \frac{n_k}{a_k} (1 + 4y) m_H \end{aligned}$$

ou

$$\dot{M} \simeq 4\pi R^2 v_f \frac{n_{ki}}{Q_{ki} a_k} (1 + 4y) m_H \quad (5.58)$$

Em geral, a razão $n_{ki}/Q_{ki} a_k$ varia dentro do envelope, assim como a densidade de prótons. Vamos, no entanto, considerar esta relação essencialmente constante e igual ao seu valor em $r = R$. Como vimos, a velocidade terminal v_f pode ser estimada diretamente a partir do perfil P Cygni. A densidade das partículas absorvedoras pode ser estimada a partir da largura equivalente da linha W_ν , definida por

$$W_\nu = \int_0^\infty \frac{I_c - I_\nu}{I_c} d\nu \quad (5.59)$$

(ver seção 4.4) onde I_ν e I_c são as intensidades na linha e no contínuo, respectivamente, e a integral é feita em toda a linha. Para linhas não saturadas,

$$I_\nu \simeq I_c e^{-\tau_\nu} \simeq I_c (1 - \tau_\nu) \quad (5.60)$$

onde τ_ν é a profundidade óptica da linha, dada por

$$\tau_\nu \simeq N_{ki} \alpha_\nu \quad (5.61)$$

onde N_{ki} é a densidade de coluna dos íons absorvedores e α_ν é a seção eficaz de absorção. Portanto, a largura equivalente W_ν pode ser escrita

$$\begin{aligned} W_\nu &\simeq \int_0^\infty \tau_\nu d\nu \simeq \int_0^\infty N_{ki} \alpha_\nu d\nu \simeq N_{ki} \int_0^\infty \alpha_\nu d\nu \\ &\simeq N_{ki} \frac{\pi e^2}{m_e c} f \end{aligned} \quad (5.62)$$

onde introduzimos a força de oscilador f da linha. Em termos do comprimento de onda λ ,

$$W_\lambda \simeq \int_0^\infty N_{ki} \alpha_\lambda d\lambda = \frac{\lambda^2}{c} W_\nu \quad (5.63)$$

ou seja,

$$W_\lambda \simeq \frac{\pi e^2 \lambda^2}{m_e c^2} N_{ki} f \quad (5.64)$$

(cf. Equação 4.41). Podemos estimar a densidade de coluna N_{ki} integrando $n_{ki}(r)$ em todo o envelope, aproximadamente de $r = R$ até $r = r_\infty$,

$$\begin{aligned} N_{ki} &\simeq \int_R^{r_\infty} n_{ki}(r) dr \simeq \int_R^{r_\infty} n_{ki}(R) \frac{R^2}{r^2} dr \\ &\simeq n_{ki}(R) R^2 \int_R^{r_\infty} \frac{dr}{r^2} \end{aligned}$$

$$N_{ki} \simeq n_{ki}(R) R^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_\infty} \right) \quad (5.65)$$

onde usamos (5.56). Para $r_\infty \gg R$,

$$N_{ki} \simeq n_{ki}(R) R \quad (5.66)$$

Substituindo (5.64) e (5.66) em (5.58), obtemos

$$\dot{M} \simeq 4 \pi R v_f \frac{W_\lambda m_e c^2}{\pi e^2 \lambda^2 f Q_{ki} a_k} (1 + 4y) m_H \quad (5.67)$$

Naturalmente, o modelo é muito grosseiro, não levando em conta o efeito da expansão do gás na absorção da radiação ou o equilíbrio de ionização no envelope. Entretanto, usando valores típicos para as linhas de absorção podemos obter taxas semelhantes às observadas. Por exemplo, vamos considerar a linha $\lambda 1393 \text{ \AA}$ do Si IV em uma estrela O, com os seguintes parâmetros: $R \sim R_* \simeq 30 R_\odot$, $v_f \sim 1500 \text{ km/s}$, $W_\lambda \simeq 5 \text{ \AA}$, $\lambda \simeq 1393 \text{ \AA}$, $f \simeq 0.5$, $Q_{ki} \simeq 2 \times 10^{-3}$, $a_k \simeq 3 \times 10^{-5}$ e $y \simeq 0.1$. Usando (5.67) obtemos $\dot{M} \simeq 1.4 \times 10^{-6} M_\odot/\text{ano}$, valor semelhante às taxas observadas em estrelas quentes.

5.7 Perda de mass em ventos de estrelas frias

Analogamente à seção anterior, vamos estimar a taxa de perda de massa em uma gigante fria usando um modelo muito simples para a pressão da radiação em grãos. A taxa pode ser escrita

$$\dot{M} \simeq 4 \pi r^2 \rho v \simeq 4 \pi r^2 n m v \quad (5.68)$$

onde $n = \rho/m$ é a densidade numérica do gás e m é a massa média das partículas do gás. A força por unidade de volume sobre o gás pode ser escrita

$$n m \frac{dv}{dt} \simeq \frac{L_*}{4 \pi r^2 c} Q n_d \sigma_d \quad (5.69)$$

onde L_* é a luminosidade da estrela, Q é o fator de eficiência dos grãos, n_d é a densidade de grãos e σ_d é a seção eficaz de absorção dos grãos. A profundidade óptica dos grãos é

$$d\tau_d \simeq n_d \sigma_d Q dr \quad (5.70)$$

Usando (5.68), (5.69) e (5.70) a taxa pode ser escrita

$$\begin{aligned}
 \dot{M} \frac{dv}{d\tau_d} &\simeq \dot{M} \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dr} \frac{dr}{d\tau_d} \\
 &\simeq (4\pi r^2 n m v) \frac{dv}{dt} \frac{1}{v} \left(\frac{1}{n_d \sigma_d Q} \right) \\
 &\simeq \left(n m \frac{dv}{dt} \right) \left(\frac{4\pi r^2}{n_d \sigma_d Q} \right) \\
 &\simeq \left(\frac{L_*}{4\pi r^2 c} Q n_d \sigma_d \right) \left(\frac{4\pi r^2}{n_d \sigma_d Q} \right),
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\dot{M} \frac{dv}{d\tau_d} \simeq \frac{L_*}{c} \quad (5.71)$$

Em uma aproximação muito grosseira, $dv/d\tau_d \simeq v_f/\tau_d$, onde τ_d é a profundidade óptica total, de modo que

$$\frac{\dot{M} v_f}{\tau_d} \simeq \frac{L_*}{c} \quad (5.72)$$

ou

$$\dot{M} \simeq \frac{L_* \tau_d}{c v_f} \quad (5.73)$$

A relação (5.73) pode ser comparada com (5.51), que corresponde ao caso $\tau_d \simeq 1$. Podemos fazer uma estimativa da profundidade óptica τ_d considerando

$$\tau_d \simeq n_d \sigma_d Q R \simeq \frac{n_d}{n} n \pi a^2 Q R \quad (5.74)$$

onde R é novamente a base do envelope, n é a densidade do gás e $\sigma_d \simeq \pi a^2$ é essencialmente a seção geométrica de um grão esférico de raio a . Temos então

$$\begin{aligned}
 \tau_d &\simeq \frac{\rho_d}{\rho} \frac{m_H}{m_d} n \pi a^2 Q R \\
 &\simeq \frac{\rho_d}{\rho} \frac{\pi a^2 m_H n Q R}{\frac{4}{3} \pi a^3 s_d}
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\tau_d \simeq \frac{3 m_H}{4} \frac{n Q R}{a s_d} \frac{\rho_d}{\rho} \quad (5.75)$$

onde m_d é a massa dos grãos, s_d é a densidade do material de que os grãos são constituídos e ρ_d/ρ é a razão grãos-gás, exatamente o inverso da razão gás-poeira

ρ/ρ_d . Usando valores típicos para um envelope circunstelar de uma estrela gigante vermelha, $n \simeq 10^8 \text{ cm}^{-3}$, $Q \simeq 1$, $R \simeq R_* \sim 10^{14} \text{ cm}$, $a \simeq 1000 \text{ \AA}$, $s_d \simeq 3 \text{ g/cm}^3$ e $\rho_d/\rho \simeq 1/200$, obtemos $\tau_d \simeq 2$, não muito diferente do valor $\tau_d \simeq 1$ mencionado acima. De fato, se $\tau_d \ll 1$ os grãos são ineficientes no processo de transferência de quantidade de movimento para o gás. Se $\tau_d \gg 1$ a radiação será totalmente absorvida e portanto não será observada, de modo que $\tau_d \simeq 1$ é uma média que satisfaz estas duas restrições. Finalmente, aplicando (5.73) a uma estrela gigante do tipo Mira, com $\tau_d \simeq 1$, $L_* \sim 10^3 L_\odot$ e $v_f \simeq 10 \text{ km/s}$, obtemos $\dot{M} \simeq 2 \times 10^{-6} M_\odot/\text{ano}$. Valores desta ordem podem ser obtidos com a fórmula de Reimers (5.50), tomando $R_* \simeq 10^3 R_\odot$, $M_* \simeq 1 M_\odot$ e $\eta \simeq 3$.

5.8 Interação dos ventos estelares com o meio interestelar

A interação dos ventos estelares com a região interestelar vizinha à estrela ocorre à medida que o envelope se expande, produzindo um aquecimento, ionização e transferência de massa e quantidade de movimento ao meio interestelar, em particular pela propagação de ondas de choque. Exemplos clássicos desta interação são a interação do vento solar com o meio interestelar local, as regiões H II, associadas a estrelas quentes e jovens, e as nebulosas planetárias, associadas a estrelas de massa intermediária nos estágios finais de sua evolução. Nesses dois últimos casos, o gás é ionizado pelos fótons ultravioletas da estrela central, ocorrendo simultaneamente efeitos dinâmicos produzidos pela expansão, como a formação de “bolhas” ou “superbolhas” observadas na nossa galáxia, a Via Láctea, e em outras galáxias espirais.

A composição química do meio interestelar é também alterada pela contaminação com os elementos pesados produzidos nos processos de nucleossíntese estelar – quiescente ou explosiva – e também pela injeção de grãos sólidos coagulados nas atmosferas e envelopes de estrelas gigantes frias.

O tratamento da propagação dos choques no meio interestelar é frequentemente bastante idealizado, com a consideração de choques isotérmicos ou adiabáticos. As regiões afetadas pelo choque passam por três fases distintas segundo o estágio de propagação do choque, incluindo uma fase de expansão livre do vento, uma fase adiabática, e uma fase chamada *snowplow* (limpa-neve). Esta última é geralmente mais importante pela maior duração e pelos efeitos observacionais que podem ser previstos. Nesta fase, o meio interestelar alcança a região mais externa do choque, é aquecido e resfriado rapidamente a uma temperatura relativamente baixa, da ordem de 10^4 K . A massa do material varrido pela onda é maior que a massa da bolha formada, permanecendo na região comprimida. Esta região, mais densa e relativamente fria, é empurrada pela onda como um limpa-neve, tendo uma duração da ordem de até 10^6 anos, dependendo da intensidade do vento.

► **EXEMPLO 5.11** - Deposição de energia no meio interestelar

Um vento estelar propagando-se com uma velocidade terminal v_f tem uma energia cinética por unidade de massa da ordem de $(1/2)v_f^2$. Pela conservação da energia,

sendo $dM/dt = \dot{M}$ a taxa de perda de massa associada ao vento, a energia cinética depositada no meio interestelar vizinho por unidade de tempo é $(1/2) \dot{M} v_f^2$. Considerando que o vento age durante um intervalo de tempo Δt , a energia cinética total depositada no meio interestelar é $(1/2) \dot{M} v_f^2 \Delta t$. Por exemplo, para uma estrela quente com $v_f \simeq 2000$ km/s e $\dot{M} \sim 10^{-5} M_\odot/\text{ano}$, a taxa de deposição de energia cinética é de 1.2×10^{37} erg/s. Considerando que o estágio correspondente da evolução de estrelas massivas pode ter uma duração $\Delta t \sim 10^5$ anos, a energia total depositada por uma única estrela é de 3.9×10^{49} erg. Este valor pode ser comparado à energia total envolvida em uma explosão de supernova de tipo II, da ordem de 10^{49} a 10^{51} erg.

No caso de estrelas gigantes frias, a taxa de deposição é mais baixa, cerca de 3.1×10^{31} erg/s, onde adotamos $\dot{M} \sim 10^{-6} M_\odot/\text{ano}$ e $v_f \simeq 10$ km/s. Tomando $\Delta t \simeq 10^6$ anos para a duração do estágio de gigante vermelha, a energia cinética total depositada pela estrela é de 9×10^{44} erg, que pode ser comparada à energia produzida na explosão de uma nova, da ordem de 10^{43} a 10^{44} erg. Neste caso, a região do meio interestelar afetada é consideravelmente menor que no caso anterior, mas isto é contrabalançado pela ocorrência mais frequente de estrelas de massa pequena e intermediária com relação às estrelas massivas e quentes.

5.9 Transporte radiativo e ventos estelares

Um aspecto essencial dos ventos produzidos pela absorção da radiação em linhas é a questão do transporte radiativo, devido à necessidade de absorção dos fótons por um gás em expansão. O gás se expande segundo uma lei de velocidades $v(r)$, de modo que os fótons emitidos pela fotosfera que podem ser absorvidos em uma dada linha espectral devem estar localizados em uma certa “região de interação da linha”, definida basicamente pela largura da linha e pela velocidade do gás, através do efeito Doppler.

Este problema não tem solução rigorosa, sendo normalmente utilizada uma equação de transferência probabilística acoplada à aproximação introduzida por Sobolev (1960). Neste caso, admite-se que a região de interação em que os fótons da fotosfera podem ser absorvidos é infinitamente estreita, de modo que o perfil da linha é essencialmente uma função delta. Assim, o cálculo de propriedades como a profundidade óptica depende apenas das condições locais da região de absorção. Na realidade, as partículas do vento têm movimentos térmicos e turbulentos, o perfil da linha não é infinitamente estreito, e a região de interação é finita, sendo caracterizada pelo chamado “comprimento de Sobolev”. A aproximação não é sempre válida, em particular se as variações na densidade e no gradiente de velocidade do vento não forem desprezíveis em uma região com dimensões da ordem do comprimento de Sobolev.

Com a aproximação de Sobolev, o problema é simplificado, pois o fluxo de radiação responsável pela aceleração do gás depende apenas do fluxo emitido pela estrela e das condições locais da região de aceleração. O cálculo da aceleração radiativa devida às linhas espectrais envolve a determinação da “probabilidade de penetração”, ou seja, a probabilidade da radiação originada na fotosfera alcançar a região

de Sobolev, e da “probabilidade de escape” desta região. A partir do trabalho de Castor, Abbott e Klein (1975), costuma-se admitir o limite de fonte pontual para a estrela, com uma correção posterior para o seu tamanho finito.

Estimativas realísticas das forças radiativas das linhas podem ser relativamente complexas, pois um grande número de linhas pode contribuir de maneira significativa para a aceleração do gás, o que requer o cálculo das condições de excitação e ionização de muitos níveis de energia de diversos elementos químicos. A aceleração radiativa total devida às linhas pode ser escrita em termos da aceleração por espalhamento eletrônico introduzindo-se um fator de escala conhecido como “multiplicador de força”, cujos valores podem alcançar até cerca de 10^4 . As soluções permitem obter as taxas de perda de massa, o perfil de densidade e o de velocidade, que pode ser aproximado por uma lei de velocidades aproximada. A topologia das soluções é qualitativamente semelhante ao caso isotérmico (ver a figura 5.6), havendo uma única solução transônica que passe de maneira suave da fase subsônica para a fase supersônica.

Também no caso dos ventos radiativos em estrelas quentes a taxa de perda de massa pode ser significativamente aumentada pela ocorrência de espalhamento múltiplo, especialmente quando existem muitas linhas relativamente próximas, de modo que podem ocorrer absorções em comprimentos de onda sucessivamente mais longos à medida que o fóton escapa da estrela.

Finalmente, deve-se mencionar a possibilidade de instabilidades nos ventos radiativos, causadas pelo crescimento de perturbações na velocidade e densidade do gás. As instabilidades afetam a estrutura detalhada dos perfis de velocidade e densidade, embora os valores médios dessas quantidades sejam mantidos, sendo também responsáveis por alguns fenômenos observados nessas estrelas, como a emissão de raios X e a existência de íons em estágios elevados de ionização, o que é conhecido como superionização.

EXERCÍCIOS

5.1 Prove as relações (5.3).

5.2 A partir da aplicação da teoria dos ventos impulsionados pela radiação ao caso de estrelas quentes, é obtida uma correlação entre a quantidade de movimento do vento modificada, $\dot{M} v_f \sqrt{R_*/R_\odot}$ e a luminosidade da estrela L_* dada por

$$\log(\dot{M} v_f \sqrt{R_*/R_\odot}) \simeq -1.37 + 2.07 \log(L_*/10^6 L_\odot) ,$$

onde a taxa de perda de massa está em M_\odot/ano , a velocidade terminal v_f está em km/s. A quantidade de movimento modificada depende fracamente da massa da estrela, de modo que a relação acima não inclui esta dependência. A estrela ϵ Ori tem tipo espectral B0Ia, temperatura efetiva $T_{ef} = 28\,000$ K e raio $R_* = 33 R_\odot$.

Apresenta um vento intenso, cuja velocidade terminal, estimada a partir de perfis espectrais do tipo P Cygni, é $v_f = 1500$ km/s. (a) Estime a taxa de perda de massa da estrela. (b) Suponha que a velocidade terminal é alcançada em $r \simeq 2 R_*$. Qual é a densidade do gás circunstelar nesta região?

5.3 Mostre que a expressão no membro direito de (5.67) tem dimensões de massa por unidade de tempo. Como ficaria esta expressão se a largura equivalente da linha fosse substituída por W_ν , a quantidade correspondente por unidade de frequência?

5.4 A estrela α Sco tem tipo espectral M1.5 I, massa $M_* = 18 M_\odot$, raio $R_* = 600 R_\odot$ e luminosidade $\log(L_*/L_\odot) = 4.6$. Seu vento tem uma velocidade terminal $v_f = 20$ km/s. (a) Determine sua taxa de perda de massa usando a expressão aproximada (5.73), em que a perda de massa é devida à poeira, e usando a fórmula de Reimers (5.50). Adote os valores da profundidade óptica $\tau = 0.01$, $\tau = 0.1$, $\tau = 1.0$. (b) Considerando que a taxa obtida por métodos mais precisos é $dM/dt = 1.0 \times 10^{-6} M_\odot/\text{ano}$, qual é a profundidade óptica total dos grãos τ_d ? Qual é o valor do fator de eficiência η na fórmula de Reimers?

5.5 O fluxo de massa $\vec{j} = \rho \vec{v}$ (unidades: $\text{g cm}^{-2} \text{s}^{-1}$) pode também ser considerado como uma densidade de quantidade de movimento, ou quantidade de movimento por unidade de volume (unidades: $\text{g cm s}^{-1} \text{cm}^{-3}$). Considerando que o Sol tem um raio $R_\odot = 6.96 \times 10^{10}$ cm, determine o fluxo de massa próximo à superfície do Sol, de acordo com os dados do Exemplo 5.1. Compare seu resultado com o valor obtido em $r = 1$ UA.

Referências

- Brandt, J. C. 1970, *Introduction to the Solar Wind*, San Francisco, Freeman
 Carroll, B. W., Ostlie, D. A. 2006, *An Introduction to Modern Astrophysics*, Benjamin Cummings
 Castor, J.I., Abbott, D.C., Klein, R.I. 1975, *Astrophys. J.* 195, 157
 Choudhuri, A. R. 2010, *Astrophysics for physicists*, Cambridge University Press
 Lamers, H.J.G.L.M., Cassinelli, J. P. 1999. *Introduction to Stellar Winds*, Cambridge
 Maciel, W. J. 2004, *Hidrodinâmica e ventos estelares: uma introdução*, Edusp
 Mihalas, D. 1978, *Stellar Atmospheres*, Freeman
 Sobolev, V. V. 1960. *Moving Envelopes of Stars*, Harvard University Press.

CAPITULO 6 – INTERIORES ESTELARES

6.1 Introdução

No capítulo 3 consideramos alguns aspectos das atmosferas estelares no que se refere ao transporte de energia. Neste capítulo, vamos analisar os interiores das estrelas, em particular considerando a energia armazenada e os processos mais importantes de transporte de energia. Parte do material aqui apresentado está descrito de maneira mais detalhada em Maciel (1999). Outras referências aos problemas de transporte de energia no interior das estrelas incluem Swihart (1972), Kippenhahn et al. (2012), Carroll & Ostlie (2006) e Choudhuri (2010).

6.2 Energias estelares

Basicamente, as principais fontes de energia das estrelas são três: a energia *térmica*, a energia *potencial gravitacional*, e a energia *nuclear*. Vamos a seguir considerar cada uma dessas três fontes de energia.

(a) Energia térmica

A energia térmica total de uma estrela (erg) é dada por $E_t \simeq \bar{U}M$, onde \bar{U} é a energia térmica média por grama (erg/g) de matéria estelar e M é a massa da estrela. Para um gás perfeito,

$$\bar{U} = \frac{3kT}{2\mu m_H} \quad (6.1)$$

onde T é a temperatura do gás, μ seu peso molecular médio e m_H a massa do átomo de H. Temos então

$$E_t \simeq \frac{3}{2} \frac{kT}{\mu m_H} M \quad (6.2)$$

► EXEMPLO 6.1 - Energia térmica do Sol

Usando valores típicos para as regiões internas do Sol, $T \simeq 1.6 \times 10^7$ K, $\mu \simeq 0.5$, e $M = 1.99 \times 10^{33}$ g, obtemos $E_t \simeq 7.9 \times 10^{48}$ erg. Considerando que $T \propto M/R$, onde R é o raio da estrela (ver exercício 6.1), podemos escrever

$$E_t \simeq 7.9 \times 10^{48} \frac{(M/M_\odot)^2}{R/R_\odot} \text{ erg} \quad (6.3)$$

A luminosidade do Sol é $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{33}$ erg/s. Se a energia emitida tiver origem térmica, e essa energia não estiver sendo renovada, o Sol poderia conservar sua luminosidade por um período da ordem de $t_t \simeq E_t/L_{\odot} \simeq 2.1 \times 10^{15}$ s = 6.5×10^7 anos. Há evidências de que o Sol tem mantido sua atual luminosidade por um período muito maior, da ordem de $10^9 - 10^{10}$ anos. Do ponto de vista geológico, com o estudo dos elementos radioativos nas rochas da crosta terrestre (e da Lua) e seus produtos de decaimento, é possível estimar por quanto tempo essas rochas têm sido sólidas, o que impede variações apreciáveis na luminosidade solar. Por outro lado, estudando os fósseis nas rochas pode-se estimar o tempo de ocupação dos seres vivos no planeta, o que leva basicamente às mesmas conclusões acima. Além disso, evidências astronômicas, ligadas justamente à evolução estelar e à evolução química da Galáxia apontam para a mesma escala de tempo, da ordem de 5×10^9 anos. Portanto, pode-se concluir que a energia térmica não é suficiente para manter a luminosidade solar, havendo a necessidade de renovação a partir de outra fonte de energia.

Podemos obter uma expressão para a energia térmica E_t em termos da distribuição de massa e densidade no interior da estrela. Usando a equação de estado dos gases perfeitos,

$$P = \frac{k \rho T}{\mu m_H} \tag{6.4}$$

a energia térmica pode ser escrita

$$E_t = \frac{3}{2} \int_0^M \frac{k T}{\mu m_H} dM = \frac{3}{2} \int_0^M \frac{P}{\rho} dM \tag{6.5}$$

Usando a equação de conservação da massa,

$$dM = 4 \pi r^2 \rho dr \tag{6.6}$$

(ver a equação 5.1), temos

$$E_t = \frac{3}{2} \int_0^R \frac{P}{\rho} 4 \pi r^2 \rho dr = 6 \pi \int_0^R P(r) r^2 dr \tag{6.7}$$

O interior solar está em *equilíbrio hidrostático*, isto é, cada elemento de volume está em equilíbrio sob a ação das forças gravitacionais e de pressão (ver figura 6.1). Chamando dr a altura do elemento, dA a área de sua seção transversal e dm sua massa, a existência do equilíbrio hidrostático implica a igualdade das forças gravitacionais e de pressão. Chamando P a pressão exercida na face à altura r e $P + dP$ a pressão exercida na face à altura $r + dr$, temos $PdA - (P + dP)dA = gdm$, onde $g = g(r)$ é a aceleração gravitacional devida à matéria interior a r . Portanto, $dP dA = -g dm$. Como $dm = \rho dA dr$, obtemos

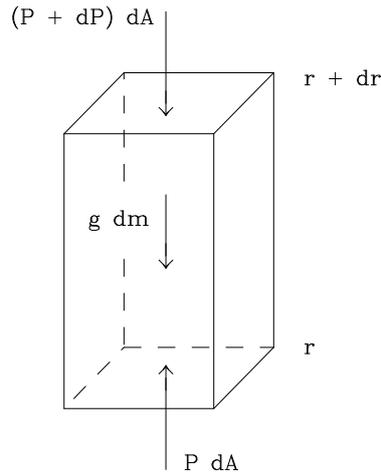


Figura 6.1 - Equilíbrio hidrostático.

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g \tag{6.8}$$

Para uma estrela esférica,

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} \tag{6.9}$$

de modo que

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \tag{6.10}$$

que é a equação de equilíbrio hidrostático, já vista no capítulo 5 (eq. 5.33). Integrando (6.7) por partes e usando (6.10) obtemos

$$E_t = 2\pi G \int_0^R M(r)\rho(r)r dr \tag{6.11}$$

(b) Energia gravitacional

No processo de contração gravitacional pelo qual passam as estrelas, energia potencial gravitacional é perdida, convertendo-se, pelo menos parcialmente, em energia térmica. Para uma estrela de massa \$M\$ a energia potencial gravitacional é

$$E_g = - \int_0^M \frac{GM(r) dM}{r} \tag{6.12}$$

ou, usando a equação de conservação da massa (6.6),

$$E_g = -4 \pi G \int_0^R M(r) \rho(r) r dr \tag{6.13}$$

Comparando (6.13) com (6.11) vemos que:

$$E_g = -2 E_t \tag{6.14}$$

ou seja, a energia gravitacional é da mesma ordem de grandeza da energia térmica das estrelas.

► EXEMPLO 6.2 - Energia gravitacional do Sol

Usando o resultado (6.3) a equação (6.14) pode ser escrita

$$E_g = -1.6 \times 10^{49} \frac{(M/M_\odot)^2}{R/R_\odot} \text{ erg} \tag{6.15}$$

correspondendo a cerca de 10^{49} erg para o Sol. Obviamente, essa energia é também insuficiente para manter a luminosidade atual do Sol por um período da ordem de $10^9 - 10^{10}$ anos, pois $t_g \sim |E_g|/L_\odot \sim 1.3 \times 10^8$ anos.

► EXEMPLO 6.3 - A escala de tempo de Kelvin-Helmholtz

Em termos da energia gravitacional de uma estrela, pode-se definir a *escala de tempo de Kelvin-Helmholtz* por

$$t_{KH} = \frac{|\bar{E}_g|}{L} \tag{6.16}$$

De maneira aproximada, podemos tomar $M(r) \simeq M/2$ em $r = R/2$, e escrever $|E_g| \simeq GM^2/2R$, de modo que

$$t_{KH} \simeq \frac{GM^2}{2RL} \tag{6.17}$$

Usando essa expressão, obtemos para o Sol $t_{KH} \simeq 5.0 \times 10^{14} \text{ s} = 1.6 \times 10^7$ anos.

Da expressão (6.14) vemos que:

$$2E_t + E_g = 0 \tag{6.18}$$

o que é uma forma simples do *teorema do virial*, aplicado a um gás perfeito, monoatômico e ionizado (ver cap. 7). De acordo com essa equação, no processo de contração gravitacional, metade da energia potencial gravitacional é convertida em energia térmica, e a outra metade é emitida na forma de radiação.

(c) Energia nuclear

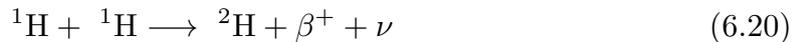
No interior estelar ocorrem continuamente colisões entre as partículas. Se a colisão de duas partículas (Z_1, A_1) e (Z_2, A_2) tiver energia suficiente para ultrapassar a barreira coulombiana, é possível a formação de um novo núcleo $(Z_1 + Z_2, A_1 + A_2)$. O excesso de energia pode aparecer como energia cinética das partículas, pode ser emitido na forma de radiação, ou ainda comunicado a uma terceira partícula (Z_3, A_3) , ejetada do núcleo, restando o núcleo final $(Z_1 + Z_2 - Z_3, A_1 + A_2 - A_3)$. De modo geral, para um núcleo (Z, A) de massa m ,

$$m(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{E(Z, A)}{c^2} \tag{6.19}$$

onde m_p e m_n são as massas do próton e nêutron, respectivamente, e $E(Z, A)$ é a energia de ligação do núcleo. Note-se que a massa do núcleo é menor que a soma das massas dos prótons e nêutrons componentes. A diferença entre as massas é diretamente proporcional ao reservatório de energia nuclear, de acordo com a equação de Einstein, $\Delta E = \Delta M c^2$.

► EXEMPLO 6.4 - Energia nuclear do Sol

Vamos considerar o caso do Sol, em que ocorre a reação



Nesta reação temos $m({}^2\text{H}) = 2.0141$ u, $m({}^1\text{H}) = 1.0078$ u, e $2m({}^1\text{H}) = 2.0156$ u, onde u = 1.66×10^{-24} g. Podemos calcular a diferença em massa $\Delta m = 0.0015$ u e energia $\Delta E = \Delta m c^2 = 2.24 \times 10^{-6}$ erg = 1.4×10^6 eV = 1.4 MeV. Para o Sol, o número de reações por segundo necessário para manter a luminosidade é $L_\odot / \Delta E \simeq 10^{39}$ s⁻¹. Por outro lado, o número médio de núcleos de H no Sol é $M_\odot / m_H \simeq 10^{57}$. Considerando que aproximadamente 10% (10^{56}) desses núcleos estão no centro, em condições de sofrer reações nucleares, em cada segundo uma fração $10^{39} / 10^{56} = 10^{-17}$ dos núcleos deve sofrer uma reação, isto é, apenas um núcleo de cada 10^{17} .

Vamos estimar a energia produzida pela transformação de H em He no interior solar. Temos $m({}^1\text{H}) = 1.0078$ u, $4m({}^1\text{H}) = 4.0312$ u, e $m({}^4\text{He}) = 4.0026$ u. Assim, $\Delta E \simeq 4.27 \times 10^{-5}$ erg = 26.7 MeV. A energia liberada por grama de H é $\Delta E / 4m_H \simeq 6.39 \times 10^{18}$ erg/g. Considerando novamente que uma fração da ordem de 10% da massa do Sol está em condições de sofrer reações nucleares, o suprimento de energia nuclear do Sol é

$$E_n \simeq \frac{\Delta E}{4m_H} (0.1M_\odot) \sim 10^{51} \text{ erg} \tag{6.21}$$

Comparando esse valor com a energia térmica (6.3) e a energia gravitacional (6.15), vemos que $E_n \gg |E_g| > E_t$. Em termos da energia nuclear da estrela, podemos definir uma escala de tempo nuclear t_n como

$$t_n \simeq \frac{E_n}{L} \tag{6.22}$$

Para o Sol, obtemos $t_n \simeq 3 \times 10^{17} \text{ s} \simeq 10^{10}$ anos, ou seja, as fontes nucleares podem manter o Sol com sua luminosidade atual pelo tempo necessário, de acordo com as observações. Outras reações podem aumentar ainda mais esse tempo, mas a energia obtida na transformação de H em He corresponde aproximadamente a 70% do total disponível.

► EXEMPLO 6.5 - O tempo de queda livre

Vamos comparar as escalas de tempo t_n e t_{KH} com o tempo de queda livre, essencialmente o tempo necessário para que uma estrela colapse sob a ação da força gravitacional. Da equação de equilíbrio hidrostático temos

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0 \tag{6.23}$$

Se as forças gravitacionais e de pressão não se equilibrarem, ou seja, se a estrela colapsar sob a ação da força gravitacional, o termo dP/dr se anula podemos escrever aproximadamente

$$\left| \frac{d^2r}{dt^2} \right| \simeq \frac{GM}{R^2} \simeq \frac{R}{t_{ql}^2} \tag{6.24}$$

$$t_{ql}^2 \simeq \frac{R^3}{GM} \simeq \frac{3}{4\pi G \bar{\rho}} \tag{6.25}$$

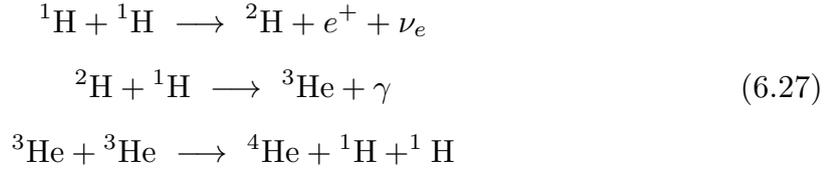
onde tomamos $r \simeq R$ e $M(r) \simeq M$ e usamos a densidade média $\bar{\rho}$. Um cálculo mais rigoroso leva a um coeficiente numericamente diferente em cerca de 10%. Em termos solares, obtemos

$$t_{ql} \simeq 1.6 \times 10^3 \frac{(R/R_\odot)^{3/2}}{(M/M_\odot)^{1/2}} \text{ s} \tag{6.26}$$

Para o Sol, $t_{ql} \simeq 1.6 \times 10^3 \text{ s} = 27 \text{ min}$; para uma gigante vermelha com $M = M_\odot$ e $R = 100 R_\odot$, $t_{ql} \simeq 18$ dias; para uma anã branca com $M = 0.6 M_\odot$ e $R = R_\odot/50$, e $t_{ql} = 5.8 \text{ s}$. Portanto, temos $t_n \gg t_{KH} \gg t_{ql}$.

► EXEMPLO 6.6 - Energia de Gamow e probabilidade de penetração

A reação (6.20) é a primeira reação da cadeia pp, em que quatro prótons são transformados em um núcleo de hélio, com a liberação de energia. A cadeia pp pode ser subdividida nas cadeias pp1, pp2 e pp3, das quais a mais importante em estrelas como o Sol é a primeira, onde temos



Para que estas reações ocorram, os dois prótons iniciais devem romper a barreira coulombiana responsável pela repulsão entre eles, que pode ser estimada por

$$V \simeq \frac{e^2}{r} \tag{6.28}$$

onde $e = 4.80 \times 10^{-10} \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ é a carga do elétron e r é a distância entre os dois prótons, que pode ser tomada como sendo da ordem do raio de Bohr, $r \simeq 1.2 \times 10^{-13} \text{ cm}$. Obtemos então

$$V \simeq \frac{(4.80 \times 10^{-10})^2}{(1.2 \times 10^{-13})} \simeq 1.9 \times 10^{-6} \text{ erg} = 1.2 \times 10^6 \text{ eV} = 1.2 \text{ MeV} \tag{6.29}$$

Por outro lado, a energia térmica média dos prótons no interior do Sol em uma região com temperatura $T_c \simeq 15 \times 10^6 \text{ K}$ é

$$E \simeq kT \simeq (1.38 \times 10^{-16}) (15 \times 10^6) \simeq 2.1 \times 10^{-9} \text{ erg} = 1.3 \text{ keV} \tag{6.30}$$

ou seja, a energia térmica média dos prótons é cerca de 1000 vezes menor que a energia necessária para ultrapassar a barreira de potencial entre eles, de modo a ocorrer a reação (6.20). A probabilidade de penetração desta barreira pode ser escrita como

$$P \simeq e^{-(E_G/E)^{1/2}} \tag{6.31}$$

onde E_G é a *energia de Gamow* dos prótons, dada por

$$E_G = 2 \pi^2 \alpha^2 c^2 m_r \simeq 7.9 \times 10^{-7} \text{ erg} = 0.49 \text{ MeV} \tag{6.32}$$

onde $\alpha = 1/137$ é a constante de estrutura fina, e $m_r = m_p/2$ é a massa reduzida dos prótons. Considerando os valores de E_G e E , temos

$$P \simeq e^{-(7.9 \times 10^{-7} / 2.1 \times 10^{-9})^{1/2}} \simeq 3.8 \times 10^{-9} \tag{6.33}$$

Vemos que a probabilidade de penetração é extremamente baixa, embora não seja nula, mesmo nas condições do interior do Sol. A reação realmente ocorre devido ao efeito do tunelamento quântico.

► EXEMPLO 6.7 - Neutrinos solares

As reações nucleares que ocorrem no interior do Sol têm como subproduto neutrinos de elétrons (ν_e), que conseguem atravessar todo o Sol sem sofrer absorções e propagam-se pelo espaço. Este é um exemplo interessante de transporte ou transferência de energia: na reação inicial da cadeia-pp (equação 6.20), temos inicialmente dois prótons com elevada energia cinética, uma vez que a temperatura na região central do Sol é de 15×10^6 K. Esta energia é parcialmente transformada em radiação no final da cadeia-pp, mas parte dela fica armazenada nos neutrinos. A detecção de neutrinos solares é, portanto, um objetivo importante, uma vez que eles trazem informações das regiões internas do Sol que são inacessíveis pela radiação. De fato, além dos neutrinos, apenas os resultados da heliosismologia podem nos dar informações das regiões subfotosféricas do Sol. A detecção dos neutrinos solares foi iniciada na década de 1960 por R. Davis, que construiu um detector no fundo de uma mina de ouro em Homestake, U.S.A. A detecção é indireta: o detector continha tetracloroetileno líquido, e a absorção de neutrinos transformava alguns átomos de Cl em Ar, e este podia ser medido. Mais recentemente, já nos anos 2000, foram construídos detectores mais eficientes no Japão e Canadá, entre outros.

De modo geral, os resultados iniciais indicavam um fluxo de neutrinos *menor* que o esperado pela teoria, o que levou a diversas especulações, inclusive colocando dúvidas sobre a exatidão das previsões da teoria das reações nucleares no Sol. Como ficou claro a partir de 2001, os neutrinos de elétrons detectados são apenas uma parte dos neutrinos que chegam até a Terra, ou seja, parte dos neutrinos de elétrons que deixam o Sol transforma-se em outros tipos de neutrinos, os neutrinos de múons (ν_μ) ou tau (ν_τ). Este processo, às vezes chamado de *oscilações de neutrinos* não era conhecido antes dos experimentos com os neutrinos solares. Um papel importante neste problema foi desempenhado pelo SDO (*Sudbury Neutrino Observatory*) em Ontario, Canadá, onde tubos fotomultiplicadores foram instalados em uma esfera geodésica de 18 m de diâmetro contendo água pesada ($^2\text{H}_2\text{O}$), todo o sistema imerso em água comum (figura 6.2).

O detector está a uma profundidade de cerca de 2 km, e os neutrinos interagem com os núcleos da água pesada de três maneiras principais: (a) O neutrino pode quebrar o núcleo do ^2H em seus componentes p e n ; o nêutron combina-se com outro deutério, produzindo radiação que libera um elétron. Este, acelerado, emite radiação Cerenkov, que é detectada. Este processo é chamado “quebra de deutério”, e pode ocorrer com os três tipos de neutrinos, ν_e , ν_μ e ν_τ . (b) O segundo processo, chamado de “absorção de neutrinos”, ocorre somente com os neutrinos de elétrons, ν_e . Neste caso, um nêutron absorve o neutrino, transformando-se em um próton e em um elétron energético, que também pode emitir radiação Cerenkov detectável. (c) Na terceira possibilidade, mais rara, os nêutrons (ν_e , ν_μ ou ν_τ) podem colidir diretamente com elétrons, os quais podem também emitir radiação. Portanto, com este detector os três tipos de neutrinos podem ser detectados, ao contrário dos experimentos iniciais, que somente detectavam os neutrinos de elétrons.

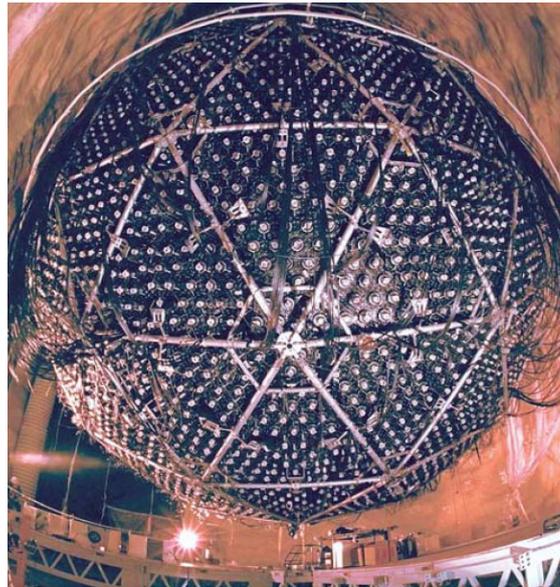


Figura 6.2 - Detector do observatório de neutrinos SNO no Canadá (SNO).

O fluxo total de neutrinos solares, detectado na Terra pelo processo de quebra de deutério, é da ordem de $f(\nu) \simeq 5.09 \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$, compreendendo neutrinos ν_e , ν_μ e ν_τ . Por outro lado, o processo de absorção de neutrinos, sensível aos neutrinos de elétrons ν_e , tem como resultado $f(\nu_e) \simeq 1.75 \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Portanto, a maior parte (cerca de 2/3) do fluxo refere-se aos neutrinos dos tipos ν_μ e ν_τ , ou seja, $f\nu_\mu + \nu_\tau \simeq f(\nu) - f(\nu_e) \simeq 3.34 \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Supondo que os fluxos dos neutrinos ν_μ e ν_τ seja semelhante, este fluxo equivale a $f(\nu_\mu) \simeq f(\nu_\tau) \simeq 1.67 \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

Considerando que o raio do Sol é $R_\odot = 6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$ e que a distância média entre a Terra e o Sol é $d_T = 1.5 \times 10^{13} \text{ cm}$, vemos que o fluxo total de neutrinos na superfície do Sol deve ser $F(\nu) \simeq f(\nu) (d_T/R_\odot)^2 \simeq 2.36 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Os neutrinos movem-se com a velocidade da luz, de modo que levam um tempo $t_1 \simeq R_\odot/c \simeq 2.3 \text{ s}$ para escapar do Sol, e um tempo $t_2 \simeq 1.5 \times 10^{13}/3 \times 10^{10} \simeq 500 \text{ s}$ ou cerca de 8.3 minutos para chegar até a Terra.

► **EXEMPLO 6.8 - A taxa de produção de energia nuclear**

Seja ϵ_n a taxa de produção de energia nuclear em uma estrela, ou seja, a energia produzida pela fusão nuclear por unidade de volume e por unidade de tempo, medida em $\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$ ou W/m^3 . Chamando R o número de reações nucleares por unidade de volume e tempo, temos

$$\epsilon_n \simeq R \Delta m c^2 \tag{6.34}$$

onde Δm é o defeito de massa, ou seja, a diferença entre as massas dos reagentes e a massa dos produtos. A taxa R pode ser colocada na forma $R \propto \rho^2 T^\nu$, de modo que $\epsilon_n \propto \rho^2 T^\nu$, onde ν é um expoente que depende do tipo de reação nuclear considerado.

Por exemplo, para a cadeia pp e o ciclo CNO obtemos os resultados mostrados na figura 6.3, onde o eixo vertical dá a taxa ϵ_n (W/m^3) em função da temperatura.

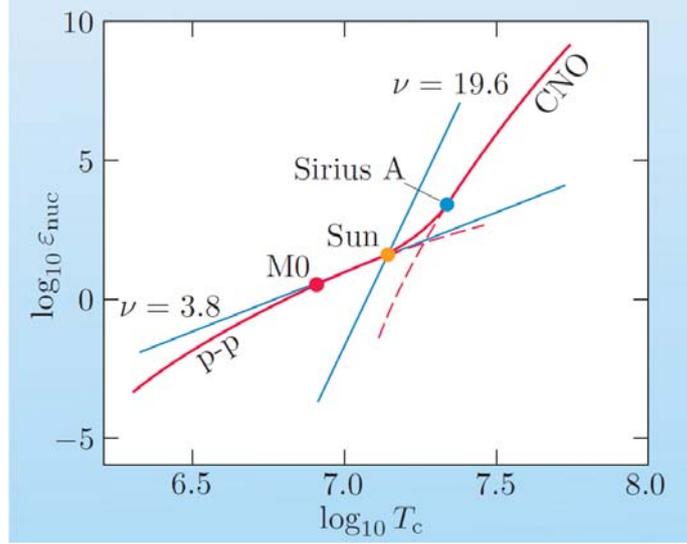


Figura 6.3 - Taxas de produção de energia para a cadeia pp e o ciclo CNO (S. Ryan).

Na figura estão indicadas algumas estrelas: o Sol (G2V), uma estrela anã vermelha (M0V) e Sirius A (A0V). No caso da cadeia pp temos $\nu \simeq 3.8$ e para o ciclo-CNO $\nu \simeq 19.6$. Temos então

$$\epsilon_n(pp) \propto \rho^2 T^{3.8} \tag{6.35}$$

$$\epsilon_n(CNO) \propto \rho^2 T^{19.6} \tag{6.36}$$

Usando as expressões acima, e fazendo uma calibração pelo Sol, obtemos as duas retas mostradas na figura.

Vamos considerar mais em detalhes a cadeia-pp. Da figura 6.3 a taxa ϵ_{pp} para o Sol é aproximadamente

$$\epsilon_{pp} \simeq 10^2 \text{ W}/\text{m}^3 \simeq 10^3 \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \tag{6.37}$$

Supondo que esta taxa se aplique a uma região interna do Sol com raio $R \simeq 0.1 R_\odot$, a luminosidade produzida por este processo é

$$L_{pp} \simeq \frac{4}{3} \pi R^3 \epsilon \simeq \frac{4}{3} \pi (0.1 R_\odot)^3 \epsilon_{pp} \simeq 1.4 \times 10^{33} \text{ erg/s} \tag{6.38}$$

que é da mesma ordem de grandeza da luminosidade do Sol. Naturalmente, esta estimativa é muito grosseira, e outras fontes nucleares de energia devem ser consideradas. A taxa de produção de energia pela cadeia-pp pode também ser expressa por unidade de massa, ou seja,

$$\epsilon'_{pp} \simeq \frac{\epsilon_{pp}}{\rho} \quad (6.39)$$

Tomando $\epsilon_{pp} \simeq 10^3 \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$ e $\rho \simeq 150 \text{ g/cm}^3$, temos $\epsilon'_{pp} \simeq 7 \text{ erg g}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Uma expressão provavelmente mais correta (Carroll e Ostlie, 2006, p. 311) é

$$\epsilon'_{pp} \simeq 1.08 \times 10^{-5} \rho X^2 T_6^4 \quad (6.40)$$

onde $X \simeq 0.4$ é a abundância atual de H no interior solar e $T_6 \simeq 15$ é a temperatura em unidades de 10^6 K . Com esta relação obtemos

$$\epsilon'_{pp} \simeq (1.08 \times 10^{-5}) (150) (0.4)^2 (15)^4 \simeq 13 \text{ erg g}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (6.41)$$

6.3 Equilíbrio radiativo

Há três processos básicos de transporte de energia nas estrelas: *radiação*, *convecção* e *condução*, dos quais os dois primeiros são geralmente mais importantes no interior estelar. Os neutrinos também transportam uma quantidade apreciável de energia para fora da estrela, mas sua seção de choque de interação com a matéria estelar é muito baixa, e a energia transportada por esse processo é essencialmente perdida pela estrela. Quando a energia é transportada pela radiação, há *equilíbrio radiativo*, e quando o transporte é feito basicamente pela convecção, temos *equilíbrio convectivo*.

No capítulo 1, seções 1.3 e 1.4, vimos a equação de transporte radiativo e sua solução geral, bem como analisamos os casos opticamente fino e espesso, e no capítulo 2, seção 2.1, vimos a lei de Kirchhoff. A equação de transporte pode ser escrita

$$\frac{dI_\nu}{ds} = k_\nu(S_\nu - I_\nu) \quad (6.42)$$

[ver eqs. (1.40) e (1.43)], onde tomamos a coordenada espacial s aumentando para dentro da estrela.

(a) O campo de radiação no interior estelar

Em uma estrela com simetria esférica, a equação de transporte radiativo pode ser convenientemente escrita em termos das coordenadas r e θ , onde r é a distância ao centro da estrela e θ é o ângulo entre a direção de propagação e a direção radial (figura 6.4).

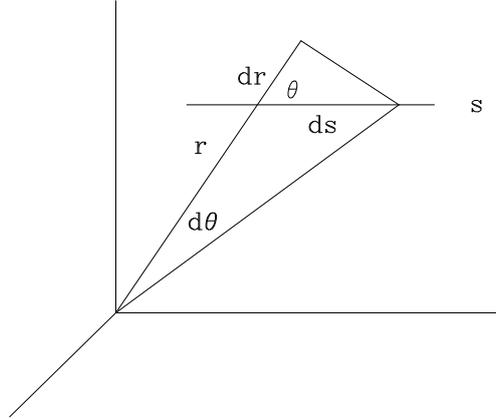


Figura 6.4 - Coordenadas em simetria esférica.

Podemos escrever as relações: $dr = \cos \theta ds$, ou $dr/ds = \cos \theta$, e $rd\theta = -\text{sen}\theta ds$, ou $d\theta/ds = -\text{sen}\theta/r$. A derivada dI_ν/ds que aparece em (6.42) pode ser escrita:

$$\frac{dI_\nu(r, \theta)}{ds} = \frac{\partial I_\nu}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} \frac{d\theta}{ds} = \cos \theta \frac{\partial I_\nu}{\partial r} - \frac{\text{sen}\theta}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} \tag{6.43}$$

e a equação de transporte (6.42) fica, então,

$$\frac{\cos \theta}{k_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial r} - \frac{\text{sen}\theta}{k_\nu r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} = S_\nu - I_\nu \tag{6.44}$$

Vamos introduzir o caminho livre médio à frequência ν

$$\Lambda_\nu \simeq \frac{1}{k_\nu} \tag{6.45}$$

Para as interações (colisões) entre as partículas no interior estelar, o caminho livre médio pode ser escrito

$$\Lambda \simeq \frac{1}{n\sigma} \tag{6.46}$$

onde σ é a seção eficaz de interação. Para colisões de elétrons ou íons com outros elétrons ou íons, $\sigma \simeq 10^{-16} - 10^{-18} \text{ cm}^2$. Para interações de fótons com elétrons ou íons, $\sigma \simeq 10^{-24} \text{ cm}^2$. Usando a relação $n = \bar{\rho}/\mu m_H$, a densidade numérica de partículas no interior estelar é, tipicamente,

$$n \simeq 1.7 \times 10^{24} \frac{M/M_\odot}{(R/R_\odot)^3} \text{ cm}^{-3} \tag{6.47}$$

Com esses valores, os caminhos livres médios são $\Lambda \sim 10^{-7}$ cm para interações entre partículas, e $\Lambda \sim 1$ cm para interações envolvendo fótons. Como $\Lambda_\nu \leq 1$ cm, de (6.44) temos, então,

$$\frac{\cos \theta}{k_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial r} \simeq \cos \theta \Lambda_\nu \frac{I_\nu}{R} \ll I_\nu \quad (6.48)$$

$$\frac{\sin \theta}{k_\nu r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} \simeq \sin \theta \frac{\Lambda_\nu}{R} \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} \ll I_\nu \quad (6.49)$$

Portanto, os dois termos do primeiro membro em (6.44) são pequenos em relação a I_ν , isto é, a diferença entre I_ν e S_ν é pequena. Isso reflete o fato de que as condições físicas no interior estelar não variam muito ao longo de um caminho livre médio, e o ET é uma boa aproximação. Nesse caso $S_\nu \simeq B_\nu$, e a intensidade é aproximadamente igual à função de Planck. O fluxo, ao contrário, depende de alguma anisotropia no campo de radiação, como vimos na seção 2.5(b). Podemos então considerar os termos do primeiro membro de (6.44) como perturbações da intensidade em ET. Em uma primeira aproximação, podemos escrever

$$I_\nu - B_\nu \simeq -\frac{\cos \theta}{k_\nu} \frac{dB_\nu}{dr} \quad (6.50)$$

pois $\partial B_\nu / \partial \theta = 0$. Essa equação pode ainda ser escrita

$$I_\nu = B_\nu - \frac{\cos \theta}{k_\nu} \frac{dB_\nu}{dr} \quad (6.51)$$

que é exatamente da forma da equação (2.70) considerada no capítulo 2, ou $I_\nu = I_{\nu 0} + I_{\nu 1} \cos \theta$, com $I_{\nu 0} = B_\nu$ e $I_{\nu 1} = -(1/k_\nu) (dB_\nu/dr)$. Usando (6.51), podemos calcular a intensidade média J_ν , o fluxo F_ν , a densidade de energia U_ν e a pressão da radiação $P_r(\nu)$,

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\omega = B_\nu \quad (6.52)$$

$$F_\nu = \int I_\nu \cos \theta d\omega = -\frac{4\pi}{3k_\nu} \frac{dB_\nu}{dr} \quad (6.53)$$

$$U_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\omega = \frac{4\pi}{c} B_\nu \quad (6.54)$$

$$P_r(\nu) = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\omega = \frac{4\pi}{3c} B_\nu \quad (6.55)$$

(ver também as eqs. 3.11 e 3.17). Em termos de quantidades integradas, temos para a intensidade específica, a intensidade média, a densidade de energia e a pressão da radiação as mesmas equações obtidas no capítulo 2, isto é

$$B = \frac{ac}{4\pi} T^4 = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \quad (6.56)$$

$$J = B = \frac{ac}{4\pi} T^4 = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \tag{6.57}$$

$$U = \frac{4\pi}{c} B = aT^4 \tag{6.58}$$

$$P_r = \frac{4\pi}{3c} B = \frac{1}{3} aT^4 \tag{6.59}$$

(b) A média de Rosseland

A obtenção do fluxo integrado é mais complexa, pois o fluxo monocromático F_ν depende do coeficiente de absorção, de acordo com (6.53). Formalmente, podemos integrar essa expressão, obtendo

$$F = -\frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{1}{k_\nu} \frac{dB_\nu}{dr} d\nu \tag{6.60}$$

Para calcular F precisamos conhecer explicitamente o coeficiente de absorção k_ν em função da frequência, o que depende da composição química e das condições físicas do material no interior estelar de uma forma extremamente complexa. É portanto conveniente definir um coeficiente médio k_R tal que a equação (6.53) seja válida *também* para as quantidades integradas, isto é

$$F = -\frac{4\pi}{3k_R} \frac{dB}{dr} \tag{6.61}$$

Igualando (6.60) e (6.61), obtemos

$$\frac{1}{k_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu} \frac{dB_\nu}{dr} d\nu}{\frac{dB}{dr}} \tag{6.62}$$

O termo dB_ν/dr depende da temperatura e portanto da estrutura da estrela, e não pode ser conhecido *a priori*. Lembrando que $dB_\nu/dr = (dB_\nu/dT)(dT/dr)$, com uma expressão semelhante para as quantidades integradas, temos

$$\frac{1}{k_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu} = \frac{\pi}{acT^3} \int_0^\infty \frac{1}{k_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu \tag{6.63}$$

onde usamos (6.56). Portanto, k_R é uma *média harmônica* de k_ν tendo como peso dB_ν/dT . O cálculo da opacidade em função da frequência é bastante complicado, devido ao grande número de processos de absorção de radiação importantes no interior estelar, o que justifica a utilização de valores médios nos casos em que não se

necessita grande precisão. A expressão (6.63) pode ser considerada como a definição da opacidade média k_R , chamada *média de Rosseland* (cf. Rosseland 1924).

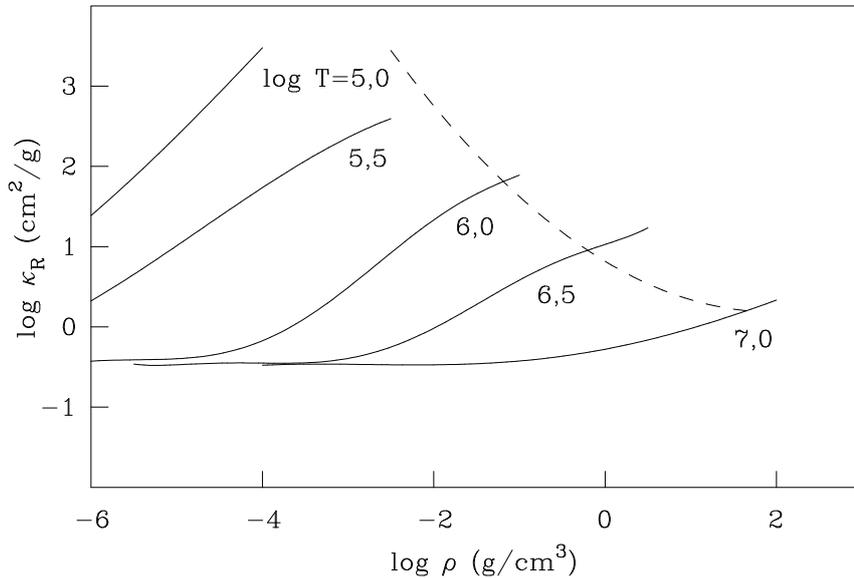


Figura 6.5 - Opacidade de Rosseland.

Até agora usamos o coeficiente de absorção por volume k_ν . Frequentemente é usado o coeficiente de absorção por massa κ_ν , com unidades de cm^2/g , tal que $k_\nu = \kappa_\nu \rho$. Valores típicos para o coeficiente de absorção médio de Rosseland estão no intervalo $10^4 > \kappa_R(\text{cm}^2/\text{g}) > 0.1$. De modo geral, $\kappa_R \geq 0.4 \text{ cm}^2/\text{g}$, um limite correspondente ao espalhamento por elétrons [ver seção 3.5(c)]. Alguns valores de κ_R em função da densidade estão mostrados na figura 6.5, para uma composição química típica, $X = 0.70$, $Y = 0.28$, $Z = 0.02$ e temperaturas no intervalo $10^7 > T(\text{K}) > 10^5$. A linha tracejada mostra parte do modelo padrão do Sol. Cálculos detalhados do coeficiente de absorção médio para a mistura solar produzem resultados semelhantes aos valores da figura 6.5.

(c) O fluxo radiativo

No caso do equilíbrio radiativo, o fluxo é dado por (6.61). Usando novamente (6.56)

$$\frac{dB}{dr} = \frac{ac}{4\pi} \frac{dT^4}{dr} = \frac{ac}{\pi} T^3 \frac{dT}{dr} \tag{6.64}$$

e o fluxo é

$$F = -\frac{ac}{3k_R} \frac{dT^4}{dr} = -\frac{4ac}{3k_R} T^3 \frac{dT}{dr} \tag{6.65}$$

Lembrando que a luminosidade radiativa é $L(r) = 4\pi r^2 F(r)$, obtemos

$$L(r) = -\frac{16\pi ac}{3k_R} r^2 T^3 \frac{dT}{dr} \tag{6.66}$$

Dessa relação, podemos escrever para o gradiente de temperatura radiativo

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3k_R}{4ac} \frac{1}{T^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2} \tag{6.67}$$

As equações (6.65)–(6.67) exprimem a condição de *equilíbrio radiativo* e constituem uma das equações básicas da estrutura estelar na forma euleriana. Na equação de equilíbrio radiativo, vemos que, quanto maior a opacidade, maior o gradiente de temperatura que pode ser mantido na estrela. Por outro lado, para uma dada opacidade, quanto maior o gradiente de temperatura, maior será o fluxo de energia.

► **EXEMPLO 6.9 - Gradientes de temperatura no interior do Sol**

No modelo padrão do Sol, pode-se estimar um intervalo de gradientes de temperatura dado por $5 \times 10^{-4} > |dT/dr|$ (K/cm) $> 5 \times 10^{-5}$. Em regiões com $T \simeq 10^7$ K e $\rho \simeq 40$ g/cm³, temos $\kappa_R \simeq 1$ cm²/g e $dT/dr \simeq -5 \times 10^{-4}$ K/cm, de modo que o fluxo integrado dado por (6.65) é aproximadamente $F \simeq 3.8 \times 10^{12}$ erg cm⁻² s⁻¹. Em uma região mais distante do centro, onde $T \simeq 10^6$ K e $\rho \simeq 0.05$ g/cm³, temos $\kappa_R \simeq 60$ cm²/g, $dT/dr \simeq -1 \times 10^{-4}$ K/cm, e $F \simeq 1.0 \times 10^{10}$ erg cm⁻² s⁻¹.

6.4 Transporte convectivo

A convecção consiste no transporte de energia por movimentos de matéria em grande escala. Ao contrário da radiação e da condução, que sempre ocorrem, ainda que eventualmente com baixos fluxos, a convecção depende da existência desses movimentos do gás. Vamos neste capítulo examinar as condições necessárias para a existência da convecção em estrelas, e estimar o fluxo convectivo.

(a) Instabilidade convectiva

Podemos considerar o gás no interior estelar como um sistema em uma situação de equilíbrio. Nesse caso, o estado macroscópico do sistema é independente do tempo, a não ser por flutuações ou perturbações a partir da posição de equilíbrio. Vamos considerar um elemento de massa em equilíbrio em uma região com pressão P e densidade ρ (figura 6.6). Devido às flutuações no interior estelar, o elemento pode momentaneamente sofrer uma perturbação que o desloque para baixo, por exemplo,

em uma região onde a pressão no meio é $P + dP$ e a densidade, $\rho + d\rho$. Se o elemento sofrer a ação de uma força restauradora para cima que o empurre de volta à posição original, será estabelecido o equilíbrio e não haverá movimento de matéria em grande escala. Ao contrário, se após o deslocamento a força exercida tiver a direção e o sentido do movimento, este será amplificado, resultando movimentos em grande escala e, portanto, em convecção. Nesse caso, dizemos que há *instabilidade convectiva*.

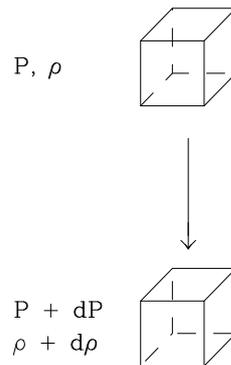


Figura 6.6 - Elementos convectivos.

Vamos determinar a condição necessária para a existência da convecção. Após alcançar a região de maior pressão, o elemento tende a se contrair rapidamente até que seja eliminado o excesso de pressão, isto é, até que seja reestabelecido o equilíbrio de pressão. Esse processo é tão rápido que praticamente nenhuma energia é trocada entre o elemento e o meio, isto é, o processo é adiabático. Portanto, a densidade do elemento sofrerá a variação $\rho \rightarrow \rho + (d\rho/dP)_{ad} dP$. Para que o movimento do elemento tenha continuidade, este deverá ser mais denso que o meio. A condição para existência da convecção, ou condição de instabilidade convectiva é, então,

$$\rho + \left(\frac{d\rho}{dP}\right)_{ad} dP > \rho + d\rho \tag{6.68}$$

que pode ser escrita

$$\frac{d\rho}{dP} < \left(\frac{d\rho}{dP}\right)_{ad} \tag{6.69}$$

Portanto, haverá convecção se a densidade na região considerada variar mais lentamente com a pressão que no caso adiabático. Usando o mesmo raciocínio, e considerando que nas duas posições da figura 6.6 a temperatura é T e $T + dT$, o elemento de volume passa a ter uma temperatura $T + (dT/dP)_{ad} dP$. Para haver instabilidade convectiva é necessário que

$$T + \left(\frac{dT}{dP}\right)_{ad} dP < T + dT \tag{6.70}$$

Ou seja,

$$\frac{dT}{dP} > \left(\frac{dT}{dP}\right)_{ad} \tag{6.71}$$

Esta equação pode também ser obtida pela diferenciação da equação de estado de um gás perfeito não degenerado, admitindo que o peso molecular é constante e substituindo na expressão (6.69). Este é o *critério de Schwarzschild* para ocorrência de convecção, isto é, o gradiente de temperatura deve ser superadiabático.

► EXEMPLO 6.10 - Instabilidade convectiva no Sol

Podemos verificar se a condição de instabilidade convectiva (6.71) é satisfeita em algumas regiões do interior solar. Para isto, vamos considerar duas regiões, uma mais próxima da região central e outra mais afastada. Os valores de dT/dP e $(dT/dP)_{ad}$ podem ser obtidos a partir de modelos numéricos, como relacionado em Cox (2000, p. 342 e 349). Usando dados desta fonte temos para a região mais interna, onde $r = 0.3$ a $0.4 R_{\odot}$, os gradientes

$$\frac{dT}{dP} \simeq \frac{\Delta T}{\Delta P} \simeq \frac{(6.42 - 4.89) \times 10^6}{(5.29 - 2.10) \times 10^{15}} \simeq 4.8 \times 10^{-10} \text{ K}/(\text{dina}/\text{cm}^2) \tag{6.72}$$

$$\frac{dT}{dP}_{ad} \simeq \frac{2}{5} \frac{T}{P} \simeq \frac{(0.4)(5 \times 10^6)}{3 \times 10^{15}} \simeq 6.7 \times 10^{-10} \text{ K}/(\text{dina}/\text{cm}^2) \tag{6.73}$$

onde usamos $\gamma = 5/3$ para a razão dos calores específicos. A condição (6.71) não é satisfeita, e a região mais interna do Sol não é convectiva. Considerando agora uma região mais externa, próxima das camadas fotosféricas, onde $\tau(5000\text{\AA}) \simeq 3$, temos

$$\frac{dT}{dP} \simeq \frac{\Delta T}{\Delta P} \simeq \frac{7590 - 7280}{(1.525 - 1.444) \times 10^5} \simeq \frac{310}{8100} \simeq 3.8 \times 10^{-2} \text{ K}/(\text{dina}/\text{cm}^2) \tag{6.74}$$

$$\frac{dT}{dP}_{ad} \simeq \frac{2}{5} \frac{T}{P} \simeq \frac{(0.4)(7400)}{1.5 \times 10^5} \simeq 2.0 \times 10^{-2} \text{ K}/(\text{dina}/\text{cm}^2) \tag{6.75}$$

ou seja, a condição (6.71) é satisfeita, e a região mais externa do Sol é convectiva.

► EXEMPLO 6.11 - Transporte de energia no Sol

Nas regiões mais internas do Sol, a temperatura é extremamente alta ($T_c \simeq 15 \times 10^6$ K), de modo que os átomos estão ionizados. Nesse caso, como não há elétrons

ligados aos núcleos, o meio é essencialmente transparente à radiação, havendo apenas espalhamentos por parte dos elétrons ou íons. À medida que nos afastamos do núcleo, a temperatura decresce, mais elétrons permanecem ligados, e o gás passa de transparente (opticamente fino) a opaco (opticamente espesso). Em um raio da ordem de 500 000 km, praticamente todos os fótons das regiões internas são absorvidos, ou seja, praticamente não há transporte radiativo. Entretanto, nesta região o gás sofre instabilidade convectiva, e a energia das partes mais internas passa a ser transportada até a superfície pela convecção (figura 6.7).

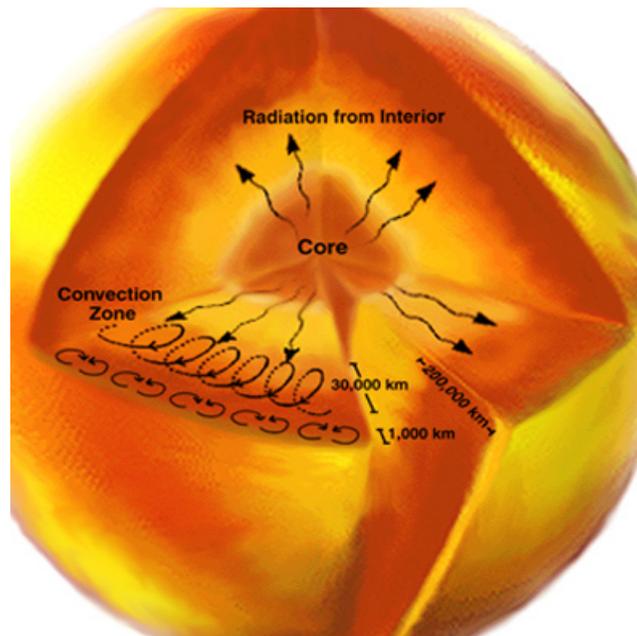


Figura 6.7 - Esquema do transporte de energia no Sol. As células convectivas observadas na superfície tem cerca de 1000 km de extensão (E. Chaisson).

Neste processo, as células mais quentes movem-se para cima, enquanto que as mais frias movem-se para dentro do Sol, de modo que há um transporte de energia de dentro para fora. Este processo continua até a região da fotosfera, onde a baixa densidade de gás impede novos deslocamentos. Por outro lado, fótons produzidos nesta região encontram pouca dificuldade em sua propagação, e a radiação consegue escapar do Sol.

(b) Ocorrência de convecção em estrelas

No caso de uma expansão adiabática de um gás perfeito podemos escrever (ver as equações 5.20)

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0 \tag{6.76}$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{dT}{T} = 0 \tag{6.77}$$

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \tag{6.78}$$

onde γ é a razão dos calores específicos. Estas equações representam as variações adiabáticas em um gás perfeito não degenerado. Aqui γ é a razão dos calores específicos a pressão e volume constantes. Para as estrelas mais massivas ($M \gg M_\odot$), a pressão da radiação P_r pode ser importante com relação à pressão do gás P_g . Considerando a expansão adiabática de um gás ideal, não degenerado, monoatômico, levando em conta os efeitos da pressão da radiação, equações semelhantes podem ser escritas, isto é,

$$\frac{dT}{T} + (\Gamma_3 - 1) \frac{dV}{V} = 0 \tag{6.79}$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{\Gamma_2}{1 - \Gamma_2} \frac{dT}{T} = 0 \tag{6.80}$$

$$\frac{dP}{P} + \Gamma_1 \frac{dV}{V} = 0 \tag{6.81}$$

Nessas equações, em analogia a (6.76), (6.77) e (6.78), são definidos os *expoentes adiabáticos de Chandrasekhar* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, de maneira a conservar a *forma* daquelas equações. De (6.80) temos

$$\left(\frac{dT}{dP}\right)_{ad} = \frac{T}{P} \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \tag{6.82}$$

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} = \frac{T}{P} \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \left(\frac{dP}{dr}\right)_{ad} \tag{6.83}$$

Por exemplo, para um gás monoatômico sem pressão da radiação, $\Gamma_2 = \gamma = 5/3$, $(dT/dP)_{ad} = 2/5 (T/P)$. Usando (6.82), a condição para existência de convecção fica

$$\frac{dT}{dP} > \frac{T}{P} \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \tag{6.84}$$

Usando a equação de equilíbrio hidrostático (6.10), obtemos a relação

$$\frac{dT}{dP} = -\frac{r^2}{GM\rho} \frac{dT}{dr} \tag{6.85}$$

de modo que a condição para haver convecção fica

$$\left| \frac{dT}{dr} \right| > \frac{G\mu m_H}{k} \frac{\beta M}{r^2} \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \tag{6.86}$$

onde $\beta = P_g/P = P_g/(P_g + P_r)$ e usamos a equação de estado. Considerando os efeitos da ionização, o coeficiente Γ_2 diminui, o mesmo ocorrendo com o fator $(\Gamma_2 - 1)/\Gamma_2 = 1 - (1/\Gamma_2)$, isto é, o membro direito de (6.86) diminui, favorecendo a ocorrência da convecção. Por outro lado, aumentando o gradiente de temperatura estaremos em princípio também favorecendo a convecção. Como o fluxo radiativo é $F_{rad}k_R \propto (dT/dr)$ (ver equação 6.65), vemos que fluxos altos ou elevadas opacidades radiativas favorecem em última análise a convecção.

Nas camadas mais externas das estrelas, os efeitos da opacidade (H^- e H) e da ionização (H e He) são especialmente importantes, causando a existência de zonas de convecção, exceto para as estrelas muito quentes e massivas, em que o H já está ionizado, mesmo nas camadas externas. As estrelas muito frias têm também zonas externas convectivas, devido à dissociação da molécula de H_2 . Nessas estrelas, as zonas de convecção de H e He podem estender-se até a região central. Em algumas estrelas, particularmente as mais massivas, em que ocorre o ciclo CNO de produção de energia, as fontes de energia nuclear estão muito concentradas na região central. Como $F \propto r^{-2}$, os fluxos necessários para manter uma configuração estável são muito altos, resultando igualmente em uma zona de convecção central.

A localização das regiões convectivas depende não apenas da massa da estrela, mas também de sua composição química, condições de ionização, fontes de opacidade, e do valor local do gradiente de temperatura. Em princípio, nessas regiões o critério de Schwarzschild é satisfeito. Entretanto, devido à aceleração sofrida pelos elementos convectivos, estes podem adquirir uma velocidade tal que ultrapassam essas regiões, estendendo as dimensões das regiões convectivas (*overshooting*). De modo geral, as estrelas mais massivas são convectivas nas regiões centrais e radiativas nas camadas mais externas, enquanto nas estrelas menos massivas ocorre o inverso. Para estrelas com $M > 1 M_\odot$, aproximadamente, as regiões internas convectivas são progressivamente mais extensas. Por exemplo, para uma estrela com $3 M_\odot$, cerca de 20% da massa total está localizada na região convectiva interna; para uma estrela com $20 M_\odot$ esse valor chega a 50%. No outro extremo, para estrelas com massas abaixo da massa solar, as regiões convectivas localizam-se essencialmente nas camadas mais externas, abaixo das quais praticamente toda a massa da estrela já está localizada. Nas estrelas com massas muito pequenas, da ordem ou abaixo de $0.2 M_\odot$ as regiões convectivas externas aproximam-se do centro, podendo eventualmente ser totalmente convectivas.

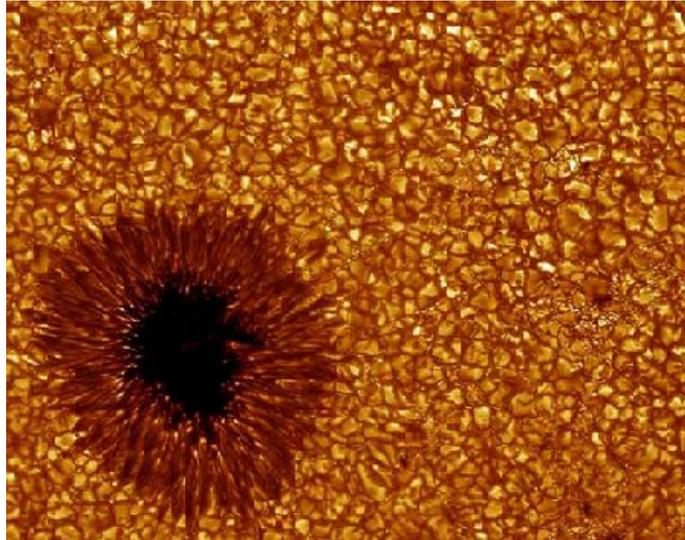


Figura 6.8 - Granulação solar. (Royal Swedish Academy of Sciences)

O Sol encontra-se aproximadamente na região de transição e é essencialmente radiativo no interior e convectivo nas camadas mais externas, o que é indicado pela granulação fotosférica. Isto pode ser visto na figura 6.8, que mostra uma parte da superfície do Sol, destacando uma mancha solar e a granulação típica das células convectivas. A energia é transportada das regiões inferiores da atmosfera para as regiões mais superficiais, e as áreas mais claras indicam o gás que sobe, enquanto que as regiões mais escuras, ou faixas intergranulares, mostram o gás mais frio que se move para baixo na atmosfera. Os grânulos, ou células convectivas, têm dimensões tipicamente de 1000 km, e duração de cerca de 10 a 20 minutos (ver Ahlers 2009).

A figura 6.9 mostra de maneira aproximada a posição das regiões radiativas e convectivas para estrelas da sequência principal de idade zero. A ordenada mostra a fração da massa total da estrela em função da massa total, para estrelas com massas abaixo de $40 M_{\odot}$.

(c) O fluxo convectivo

O cálculo do fluxo convectivo é complexo, não havendo para isso uma teoria completa e geral. É frequentemente usada a *teoria do comprimento de mistura*, uma descrição fenomenológica (ver por exemplo Kippenhahn et al. 2012). De acordo com essa teoria, cada elemento de massa que se desloca para cima ou para baixo viaja uma certa distância média λ (o “comprimento de mistura”) antes de desaparecer, isto é, antes de se misturar com o meio e perder sua identidade.

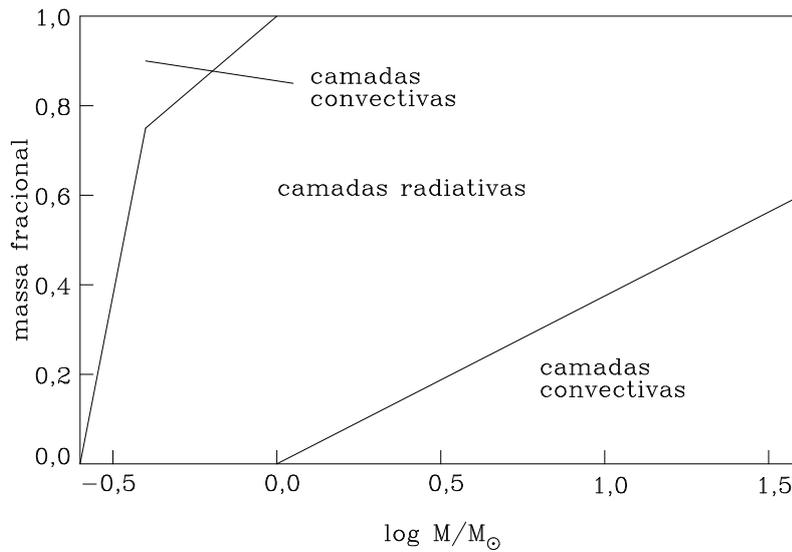


Figura 6.9 - Regiões radiativas e convectivas.

Sejam P, ρ e T os valores de pressão, densidade e temperatura em um certo nível r , e $P, \rho - \delta\rho$ e $T + \delta T$ os valores correspondentes de um elemento de massa convectivo em r . Nesse caso, $\delta\rho > 0$ e $\delta T > 0$ para um elemento subindo, e $\delta\rho < 0$ e $\delta T < 0$ para um elemento descendo. Para fixar idéias, vamos supor que o elemento esteja subindo. O excesso de energia por unidade de volume associado ao elemento é $\rho c_P \delta T$ (erg/cm³), onde c_P é o calor específico a pressão constante, por unidade de massa, $c_P = (\partial Q / \partial T)_P$ (erg g⁻¹K⁻¹). Chamando v a velocidade do elemento ($v > 0$ ao subir, e $v < 0$ ao descer), o fluxo convectivo é:

$$F_c \simeq \rho v c_P \delta T \tag{6.87}$$

com unidades de erg cm⁻² s⁻¹. A força por unidade de volume exercida sobre o elemento é $g\delta\rho$, onde g é a aceleração local da gravidade. Considerando que o elemento viaja uma distância média λ até se dissolver, o trabalho realizado por unidade de volume é, em média,

$$W \simeq \int_0^{\lambda/2} g \delta\rho dx \tag{6.88}$$

onde a coordenada x mede o deslocamento a partir da posição de equilíbrio. W é igual à energia cinética média por unidade de volume, ou $W = (1/2) \rho v^2$. Como $|\delta\rho|/\rho = |\delta T|/T$, pois $\delta P = 0$, integrando a expressão anterior, e usando ordens de grandeza

$$v^2 \simeq \frac{2g}{\rho} \int_0^{\lambda/2} \delta\rho dx \simeq \frac{2g}{T} \int_0^{\lambda/2} \delta T dx \tag{6.89}$$

Chamando agora, $(dT/dr)_{el}$ a taxa de variação de temperatura no elemento, temos, em primeira aproximação:

$$\delta T \simeq \left| \frac{dT}{dr} - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{el} \right| x \tag{6.90}$$

Portanto

$$v^2 \simeq \frac{g\lambda^2}{4T} \left| \frac{dT}{dr} - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{el} \right| \tag{6.91}$$

Da mesma forma, de (6.90) com $x \simeq \lambda/2$,

$$\delta T \simeq \left| \frac{dT}{dr} - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{el} \right| \frac{\lambda}{2} \tag{6.92}$$

Usando (6.87), (6.91) e (6.92), o fluxo convectivo fica

$$F_c \simeq \rho c_P \left(\frac{g}{T} \right)^{1/2} \frac{\lambda^2}{4} \left| \frac{dT}{dr} - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{el} \right|^{3/2} \tag{6.93}$$

Considerando não haver trocas de energia entre o elemento e o meio,

$$F_c \simeq \rho c_P \left(\frac{g}{T} \right)^{1/2} \frac{\lambda^2}{4} \left| \frac{dT}{dr} - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad} \right|^{3/2} \tag{6.94}$$

(d) O comprimento de mistura

Na expressão (6.94), apenas o comprimento de mistura λ não está, aparentemente, ligado às variáveis P, ρ etc. da estrutura estelar. De fato, em princípio, pode-se considerar λ como um parâmetro livre, obtendo-se em geral valores da ordem da escala de altura da pressão. A teoria do comprimento de mistura é bastante complexa, e freqüentemente são usadas aproximações para a determinação desse parâmetro. Da equação de equilíbrio hidrostático, obtemos $dP/P \simeq -(GM\rho/Pr^2) dr$. Tomando λ como a distância em que $|dP|/P \simeq 1$, temos:

$$\lambda \simeq \frac{Pr^2}{GM\rho} \tag{6.95}$$

► EXEMPLO 6.12 - Comprimento de mistura no Sol

Considerando valores típicos para o interior solar, $P \sim 10^{15}$ din/cm², $r \sim 3 \times 10^{10}$ cm, $M \sim 10^{33}$ g, $\rho \sim 1.4$ g/cm³, obtemos $\lambda \sim 10^{10}$ cm. Note que, nesse caso, a condição (6.53) não é satisfeita, e a convecção não ocorre. Para a atmosfera solar, com $P \sim 10^5$ din/cm², $r \sim 7 \times 10^{10}$ cm, $M \sim 2 \times 10^{33}$ g, $\rho \sim 10^{-7}$ g/cm³, e

$\lambda \sim 4 \times 10^7$ cm. Nesse caso, a condição de convecção é satisfeita, pelo menos em algumas camadas da atmosfera solar.

(e) O gradiente de temperatura

Analogamente ao que foi feito na seção anterior para o comprimento de mistura, vamos estimar em ordem de grandeza o fluxo convectivo, a partir da relação (6.94). O comprimento de mistura é dado aproximadamente por $\lambda \sim 1 \times 10^{10} R/R_\odot$ cm. Considerando ainda a densidade média $\bar{\rho} \simeq 1.4 (M/M_\odot)/(R/R_\odot)^3$ g/cm³ e a temperatura no interior das estrelas $T \simeq 1.6 \times 10^7 (M/M_\odot)/(R/R_\odot)$ K, e tomando $c_p \sim 2 \times 10^8$ erg g⁻¹ K⁻¹, obtemos, de (6.94),

$$F_c \simeq 4.8 \times 10^{26} \left| \frac{dT}{dr} - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad} \right|^{3/2} \frac{M/M_\odot}{(R/R_\odot)^{3/2}} \quad (6.96)$$

em unidades de erg cm⁻² s⁻¹. O fluxo total no interior é

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (6.97)$$

Com $L \sim 3.8 \times 10^{33} (L/L_\odot)$ erg/s, usando o gradiente de temperatura médio $dT/dR \simeq -T/R \simeq -2.3 \times 10^{-4} (M/M_\odot)/(R/R_\odot)^2$ K/cm, além das equações (6.96) e (6.97), podemos escrever:

$$\xi \simeq 3.4 \times 10^{-7} \left(\frac{F_c}{F} \right)^{2/3} \frac{(R/R_\odot)^{5/3} (L/L_\odot)^{2/3}}{(M/M_\odot)^{5/3}} \quad (6.98)$$

onde definimos a razão

$$\xi = \frac{\left| \frac{dT}{dr} - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad} \right|}{\left| \frac{dT}{dr} \right|} \quad (6.99)$$

Para uma região típica no interior do Sol,

$$\xi \simeq 3.4 \times 10^{-7} \left(\frac{F_c}{F} \right)^{2/3} \quad (6.100)$$

No interior solar, a razão $\xi \leq 10^{-7} \ll 1$, isto é, mesmo se a convecção transportar toda a energia ($F = F_c$), a diferença entre os gradientes é insignificante. *Em outras palavras, é razoável admitir que o gradiente real dT/dr é essencialmente igual ao adiabático $(dT/dr)_{ad}$.* Isso reflete o fato de que a energia térmica no interior é grande em relação à energia que precisa ser transportada, de modo que pequenos desvios do gradiente adiabático são suficientes para que essencialmente *todo* o fluxo seja transportado pela convecção. Nesse caso, não precisamos da equação (6.94) para o cálculo do fluxo, pois o fluxo total (6.97) é convectivo. Para a atmosfera solar, ao contrário, a constante em (6.100) é muito maior que na região interna, pois nas atmosferas o produto $\rho\lambda^2$ é muito maior que no interior. De fato, valores típicos para

a razão acima são $\xi \sim 10 - 10^2 (F_c/F)^{2/3}$, de modo que dT/dr precisa ser muito maior que $(dT/dr)_{ad}$ para que a fração $F_c/F \simeq 1$. Como $F_{rad} \propto dT/dr$, a maior parte da energia será transportada pela radiação; assim, mesmo em uma zona convectiva na atmosfera, a radiação será provavelmente um mecanismo importante.

Em conclusão, nos cálculos de modelos de interiores estelares, é necessária a verificação da condição de instabilidade convectiva (6.69) ou (6.71). Se a convecção for importante, ela será dominante no transporte, e o fluxo poderá ser calculado por (6.97). Nesse caso, como o gradiente de temperatura é essencialmente igual ao gradiente adiabático, não precisamos calcular o fluxo convectivo por (6.94).

6.5 Condução em estrelas

No equilíbrio radiativo, o fluxo de energia é proporcional ao gradiente de temperatura. A relação entre o fluxo F e o gradiente dT/dr depende do processo de transporte de energia. Na *condução eletrônica*, o transporte de energia é feito pelos movimentos térmicos dos elétrons e átomos. Nos interiores estelares – especialmente em regiões onde os elétrons se encontram degenerados – esse processo pode ser significativo. Vamos examinar esse problema e estimar de maneira muito grosseira o fluxo condutivo (ver por exemplo Swihart 1972, Kippenhahn et al. 2012).

(a) O caminho livre médio

O caminho livre médio dos elétrons para colisões com partículas de tipo i é dado por

$$\frac{1}{\Lambda} = \sum_i n_i \sigma_i \tag{6.101}$$

onde n_i é a densidade das partículas de tipo i e σ_i é a seção de choque de colisão entre os elétrons e essas partículas. Chamando r_c o raio de colisão, temos aproximadamente $\sigma_i \simeq \pi r_c^2$. O raio de colisão é tal que a energia potencial de colisão E_p é

$$|E_p(r_c)| = \frac{3}{2} kT = \frac{e^2}{r_c} \tag{6.102}$$

onde consideramos as interações elétron-elétron e elétron-próton. Obtemos, para r_c ,

$$r_c = \frac{2e^2}{3kT} \tag{6.103}$$

A seção de choque pode então ser escrita

$$\sigma_{ee} \simeq \sigma_{ep} \simeq \sigma \simeq \frac{4\pi e^4}{9k^2 T^2} \simeq 3.9 \times 10^{-6} T^{-2} \text{ cm}^2 \tag{6.104}$$

onde e é a carga do elétron em unidades cgs. Nessas condições, admitindo $n_e \simeq n_p$, o caminho livre médio é $\Lambda \simeq 1/(2n_e\sigma)$. Substituindo (6.104),

$$\Lambda \simeq \frac{9k^2}{8\pi e^4} \frac{T^2}{n_e} \simeq 1.3 \times 10^5 \frac{T^2}{n_e} \text{ cm} \tag{6.105}$$

onde T está em K e n_e em cm^{-3} . Considerando a massa média por elétron μ_e , podemos escrever (ver Exercício 6.2)

$$\mu_e = \frac{\rho}{n_e m_H} = \frac{1}{X + Y/2 + Z/2} \simeq \frac{2}{1 + X} \tag{6.106}$$

onde X, Y, Z são as abundâncias de H, He e elementos pesados por massa. Nesse caso,

$$\Lambda \simeq \frac{9k^2 m_H}{4\pi e^4} \frac{T^2}{\rho(1 + X)} \simeq 4.3 \times 10^{-19} \frac{T^2}{\rho(1 + X)} \tag{6.107}$$

onde Λ está em cm. Por exemplo, em um ponto no interior do Sol, $T \sim 10^7$ K, $\rho \sim 10^2$ g/cm³ e $X \sim 0.70$, de modo que $\Lambda \sim 2.5 \times 10^{-7}$ cm. Esse valor é muito menor que o raio da estrela, $\Lambda \ll R$, o que limita a importância da condução nos interiores estelares. De fato, vimos que o caminho livre médio para interações partícula-partícula $\Lambda_{pp} \sim 10^{-7}$ cm, e para interações fóton-partícula é $\Lambda_{fp} \sim 1$ cm, ou seja, $\Lambda_{pp} \ll \Lambda_{fp}$. Como o fluxo transportado é proporcional a Λ , o fluxo radiativo deve ser em geral muito maior que o condutivo.

(b) O fluxo condutivo

Consideremos um elemento de seção dA perpendicular à direção r em uma região no interior de uma estrela (figura 6.10). Os elétrons, admitidos não degenerados, atravessam dA vindos de todas as direções. Considerando uma direção particular r , as partículas vindas do interior são características de regiões mais quentes que aquelas provenientes da direção oposta. Nesse caso, essas partículas transportam mais energia, havendo então um fluxo resultante na direção de r crescente, que é o fluxo condutivo. Admitindo uma distribuição maxwelliana para os elétrons, a velocidade média é

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} \tag{6.108}$$

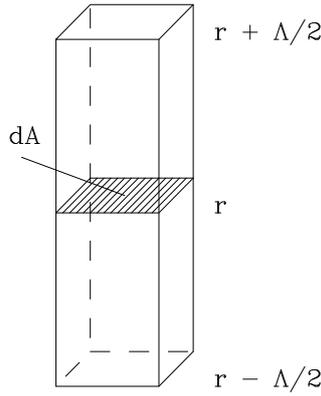


Figura 6.10 - geometria do fluxo condutivo.

Chamando novamente Λ o caminho livre médio dos elétrons, aqueles que atravessam dA vêm, em média, de regiões caracterizadas por $r \pm \Lambda/2$. O fluxo f_e de elétrons movendo-se através de dA no tempo dt , isto é, o número de elétrons que atravessa dA no tempo dt na direção de r crescente é

$$f_e \simeq \frac{1}{6} n_e \bar{v} \simeq n_e \sqrt{\frac{kT}{12 m_e}} \tag{6.109}$$

O fator $1/6$ leva em conta o fato de que, em média, $1/3$ dos elétrons move-se numa certa direção, metade dos quais em cada sentido. Considerando que a energia média por partícula é $3/2 kT$, os elétrons vindos do interior terão energia média $3/2[kT(r - \Lambda/2)]$, enquanto os provenientes da parte mais externa terão energia média $3/2[kT(r + \Lambda/2)]$. Podemos então escrever para o gradiente de temperatura

$$-\Lambda \frac{dT}{dr} \simeq T(r - \Lambda/2) - T(r + \Lambda/2) \tag{6.110}$$

Usando (6.109) e (6.110), o fluxo condutivo será

$$F_{cond} \simeq -\sqrt{\frac{3 k^3}{16 m_e}} \Lambda n_e T^{1/2} \frac{dT}{dr} \tag{6.111}$$

Substituindo o caminho livre médio (6.105), obtemos

$$F_{cond} \simeq -\frac{3^{5/2} k^{7/2}}{2^5 \pi e^4 m_e^{1/2}} T^{5/2} \frac{dT}{dr} \tag{6.112}$$

ou, numericamente, com T em K em dT/dr em K/cm,

$$F_{cond} \simeq -3.0 \times 10^{-6} T^{5/2} \frac{dT}{dr} \text{ erg cm}^{-2}\text{s}^{-1} \quad (6.113)$$

Como exemplo, para $T \sim 10^7$ K e $dT/dr \sim -1.3 \times 10^{-4}$ K/cm, $F_{cond} \sim 1.2 \times 10^8$ erg $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. O fluxo condutivo pode ser escrito na forma usual, $\vec{F}_{cond} = -K \vec{\nabla}T$, ou

$$F_{cond} = -K \frac{dT}{dr} \quad (6.114)$$

onde o coeficiente de condutividade térmica K é dado por

$$K \simeq \frac{3^{5/2} k^{7/2}}{2^5 \pi e^4 m_e^{1/2}} T^{5/2} \simeq 3.0 \times 10^{-6} T^{5/2} \quad (6.115)$$

com unidades $\text{erg cm}^{-1} \text{s}^{-1} \text{K}^{-1}$ ou $\text{g cm s}^{-3} \text{K}^{-1}$. No exemplo acima temos $K \simeq 9.5 \times 10^{11} \text{ erg cm}^{-1} \text{s}^{-1} \text{K}^{-1}$. Comparando a expressão (6.112) para o fluxo condutivo com a expressão (6.65) para o fluxo radiativo, obtemos a relação

$$\frac{F_{rad}}{F_{cond}} \simeq 1.0 \times 10^2 \frac{T^{1/2}}{k_R} \quad (6.116)$$

Por exemplo, se $T \sim 10^7$ K e $k_R \sim 1 \text{ cm}^{-1}$, obtemos a razão $F_{rad}/F_{cond} \simeq 3.2 \times 10^5$. Se $F_{cond} \simeq 1.2 \times 10^8 \text{ erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$, como obtivemos acima, $F_{rad} \simeq 3.8 \times 10^{13} \text{ erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. De modo geral, para as temperaturas e as densidades de interesse, as variações de k_R são tais que $F_{rad} \gg F_{cond}$. Se a opacidade for suficientemente alta, pode ser importante uma correção no fluxo radiativo devida à condução. Da expressão (6.116), vemos que essa correção pode ser feita diretamente na opacidade.

(c) A opacidade condutiva

A expressão (6.65) para o fluxo radiativo pode ser escrita:

$$F_{rad} \simeq -\frac{4ac}{3 \kappa_{rad} \rho} T^3 \frac{dT}{dr} \quad (6.117)$$

onde usamos a opacidade radiativa por massa κ_{rad} . Por analogia, vamos escrever para o fluxo condutivo

$$F_{cond} \simeq -\frac{4ac}{3 \kappa_{cond} \rho} T^3 \frac{dT}{dr} \quad (6.118)$$

onde introduzimos a *opacidade condutiva* κ_{cond} . Comparando (6.118) com (6.114), vemos que a condutividade definida em (6.115) fica

$$K = \frac{4ac T^3}{3 \kappa_{cond} \rho} \quad (6.119)$$

de modo que a opacidade condutiva é

$$\kappa_{cond} = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{K\rho} \quad (6.120)$$

ou $\kappa_{cond} \propto K^{-1}$. Assim como a opacidade radiativa, a opacidade condutiva tem unidades cm^2/g . Nessas condições, o fluxo total, incluindo a radiação e a condução é dado por

$$F_{tot} = F_{rad} + F_{cond} = -\frac{4ac}{3\kappa_{tot}\rho} T^3 \frac{dT}{dr} \quad (6.121)$$

onde introduzimos a *opacidade total* κ_{tot} dada por:

$$\frac{1}{\kappa_{tot}} = \frac{1}{\kappa_{rad}} + \frac{1}{\kappa_{cond}} \quad (6.122)$$

ou seja, κ_{tot} é uma média harmônica entre κ_{rad} e κ_{cond} . Para $\kappa_{cond} \gg \kappa_{rad}$, $\kappa_{tot} \simeq \kappa_{rad}$; para $\kappa_{cond} \ll \kappa_{rad}$, $\kappa_{tot} \simeq \kappa_{cond}$. De (6.120) e (6.115), temos

$$\kappa_{cond} = \frac{2^7 \pi ac e^4 m_e^{1/2}}{(3k)^{7/2}} \frac{T^{1/2}}{\rho} \simeq 10^2 \frac{T^{1/2}}{\rho} \text{ cm}^2/\text{g} \quad (6.123)$$

Como exemplo, para $T \sim 10^7$ K e $\rho \sim 10^2$ g/cm^3 , temos $\kappa_{cond} \sim 3.2 \times 10^3$ cm^2/g . Nessas condições $\kappa_{rad} \sim 1$ cm^2/g , $\kappa_{cond} \gg \kappa_{rad}$, e a condução é pouco importante na opacidade total. Note-se que a condução é favorecida (baixos valores de κ_{cond}), se a densidade for alta ($\rho \sim 10^5$ g/cm^3 para $T \sim 10^7$ K). Nesse caso, o gás está degenerado, e as equações acima não se aplicam estritamente.

A figura 6.11 mostra a variação da opacidade condutiva (cm^2/g) com a densidade para um gás com temperaturas no intervalo $10^8 > T(\text{K}) > 10^5$, usando a expressão aproximada (6.123). Essa figura pode ser comparada com a figura 6.5 para a opacidade radiativa.

A expressão (6.123) pode ser usada para obter estimativas de ordens de grandeza no caso não degenerado. O coeficiente numérico nessa equação é bastante aproximado, uma vez que não foram levados em conta detalhes sobre a composição química do gás. Considerando o transporte condutivo pelos elétrons por meio de colisões com núcleos de carga média Z e massa atômica A , uma expressão mais correta para a opacidade condutiva é

$$\kappa_{cond} \simeq 16 \frac{Z^2/A}{1+X} \frac{T^{1/2}}{\rho} \text{ cm}^2/\text{g} \quad (6.124)$$

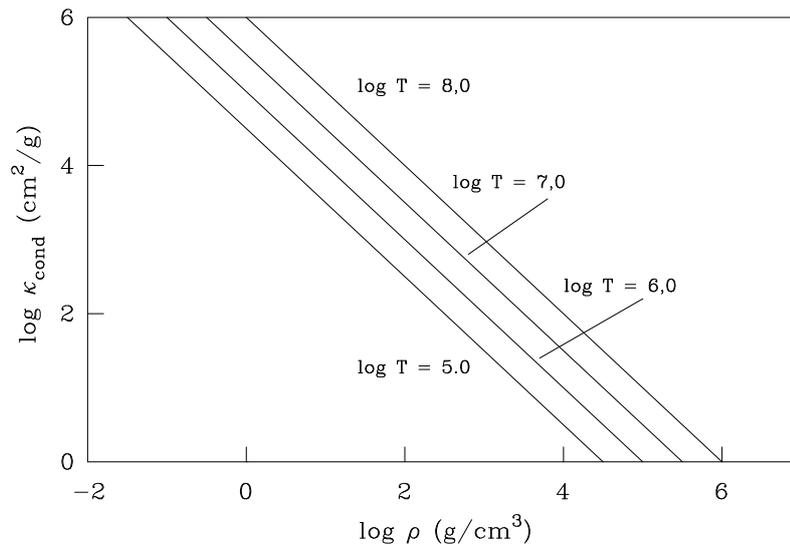


Figura 6.11 - Variação da opacidade condutiva.

► EXEMPLO 6.13 - Condução por elétrons degenerados: o caso das anãs brancas

As mudanças de energia dos elétrons só são possíveis se os estados quânticos associados às novas energias estiverem desocupados. Num gás de elétrons degenerados, a maior parte dos níveis de energia está completamente cheia e as colisões são consideravelmente diminuídas. Nesse caso, os elétrons tendem a ocupar as células do espaço de fase com maior energia, de modo que a velocidade média \bar{v} e o caminho livre médio Λ aumentam, aumentando com eles o fluxo condutivo F_{cond} . Isso pode ser visto na equação (6.111), embora a derivação dessa equação não seja estritamente válida para um gás degenerado. Nesse caso, o processo é tão eficiente que o gradiente de temperatura dT/dr pode ser essencialmente nulo, isto é, a região considerada pode ser essencialmente isotérmica, como ocorre por exemplo no interior de estrelas de nêutrons. Isso se deve ao fato de que o coeficiente de proporcionalidade de (6.118), essencialmente a condutividade K , torna-se muito alto.

Nas regiões densas e degeneradas do interior de estrelas evoluídas e em anãs brancas a condução pelos elétrons pode ser importante. Nesse caso, o caminho livre médio aumenta, decrescendo a opacidade condutiva κ_{cond} e aumentando a condutividade K . Cálculos mais detalhados para elétrons não relativísticos mostram que

$$\kappa_{cond} \simeq \frac{10^{10}}{T f(\eta)} \sum_i \frac{X_i Z_i^2 g(Z_i, \eta)}{A_i} \text{ cm}^2/\text{g} \tag{6.125}$$

onde X_i é a abundância relativa por massa do elemento i , Z_i é a carga nuclear, A_i é a massa atômica, η é o chamado parâmetro de degenerescência, $f(\eta)$ é uma função

monotônica crescente de η , e $g(Z_i, \eta)$ é uma função da ordem da unidade. Podemos considerar dois casos: baixa degenerescência, quando $\eta \ll 1$, e alta degenerescência, quando $\eta \gg 1$. No primeiro caso, é possível mostrar que

$$\kappa_{cond} \simeq 8 \frac{\sum_i X_i Z_i^2 g/A_i}{1 + X} \frac{T^{1/2}}{\rho} \text{ cm}^2/\text{g} \tag{6.126}$$

que é semelhante a (6.124). Por exemplo, para $T \sim 10^7$ K e $\rho \sim 10^2$ g/cm³, obtivemos de (6.123) $\kappa_{cond} \sim 3.2 \times 10^3$ cm²/g. Adotando um valor da ordem de 5 para o termo devido à composição química, obtemos de (6.124) $\kappa_{cond} \sim 2.5 \times 10^3$ cm²/g, e de (6.126) $\kappa_{cond} \sim 1.3 \times 10^3$ cm²/g. No segundo caso, de alta degenerescência, obtemos

$$\kappa_{cond} \simeq 5 \times 10^{-7} \frac{\sum_i X_i Z_i^2 g/A_i}{(1 + X)^2} \left(\frac{T}{\rho}\right)^2 \text{ cm}^2/\text{g} \tag{6.127}$$

Por exemplo, para $T \sim 10^7$ K e $\rho \geq 10^4$ g/cm³, com um valor da ordem da unidade para o termo da composição química, obtemos $\kappa_{cond} < \kappa_{rad}$, uma vez que $\kappa_{rad} \sim 1$ cm²/g. Portanto, a condução eletrônica domina a opacidade.

EXERCÍCIOS

6.1 Mostre que, em ordem de grandeza, $T \propto M/R$ no interior estelar. Obtenha a expressão

$$T \simeq 10^7 \frac{M/M_\odot}{R/R_\odot}$$

Sugestão: use as relações (6.4) para a equação de estado e (6.10) para a equação de equilíbrio hidrostático.

6.2 Definimos a massa média por elétron, ou peso molecular por elétron por

$$\mu_e = \frac{\rho}{n_e m_H}$$

onde ρ é a densidade do gás, n_e a densidade eletrônica e m_H a massa do átomo de H. Mostre que

$$\mu_e \simeq \frac{1}{X + Y/2 + Z/2} = \frac{2}{1 + X}$$

onde X, Y, Z são as frações de H, He e elementos pesados, tomadas por massa. Note que, para o H, ρX é a massa por unidade de volume, e $\rho X/m_H$ é o número de núcleos por unidade de volume; como cada átomo de H fornece 1 elétron, o número de elétrons fornecido pelo H é $n_{eH} = \rho X/m_H$. Para o He e os elementos pesados, o procedimento é semelhante.

- 6.3 Mostre que a energia produzida por grama de matéria pela conversão de H em He corresponde aproximadamente a 70% do total das reações nucleares de fusão nas estrelas. Considere que essas reações processam-se até o ^{56}Fe .
- 6.4 Mostre que a média de Rosseland é uma média direta tomada em relação ao fluxo do campo de radiação, isto é, $k_R = (1/F) \int_0^\infty k_\nu F_\nu d\nu$.
- 6.5 Uma região no interior de uma estrela de $2.5 M_\odot$ tem $T \simeq 1.5 \times 10^7$ K e $P \simeq 6.4 \times 10^{16}$ din/cm². Um modelo para essa estrela obtém um gradiente $dT/dP \simeq 3.0 \times 10^{-10}$ K/(din/cm²). Essa região é convectiva ou radiativa?

Referências

- Ahlers, G. 2009, *Physics*, 2, 74 [<http://physics.aps.org/articles/v2/74>]
- Carroll, B. W., Ostlie, D. A. 2006, *An Introduction to Modern Astrophysics*, Benjamin Cummings
- Choudhuri, A. R. 2010, *Astrophysics for physicists*, Cambridge University Press
- Kippenhahn, R., Weigert, A., Weiss, A. 2012, *Stellar structure and evolution*, 2a. ed., Springer
- Maciel, W. J. 1999, *Introdução à estrutura e evolução estelar*, Edusp
- Rosseland, S. 1924, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **84**, 525
- Swihart, T. L. 1972, *Physics of stellar interiors*, Pachart

CAPITULO 7 – FENÔMENOS DE TRANSPORTE

7.1 Introdução

Diversos teoremas da Mecânica e Mecânica Estatística têm aplicações em Astrofísica, como por exemplo o teorema do virial, que vimos no capítulo 6. Neste capítulo, vamos considerar este teorema em maiores detalhes, com novas aplicações astrofísicas, e também o teorema de Liouville, com uma aplicação à física do meio interestelar. No próximo capítulo, vamos considerar a equação de transporte de Boltzmann em suas formas mais simples. Algumas referências sobre o material deste capítulo incluem Reif (1965), Maciel (1999), Lima Neto (2000), Collins (2003), Carroll e Ostlie (2006) e Choudhuri (2010).

7.2 O teorema do virial

Na seção 6.2 obtivemos a expressão

$$2E_t + E_g = 0 \quad (7.1)$$

onde E_t é a energia térmica total de uma estrela e E_g sua energia gravitacional. A equação (7.1) é uma forma do *Teorema do virial*, que tem uma série de aplicações em Astrofísica, uma vez que envolve implicitamente processos de transferência de energia nas estrelas e em outras situações astrofísicas. *Este teorema foi proposto originalmente por R. J. E. Clausius em 1870, e é válido, de maneira geral, para sistemas ligados gravitacionalmente em equilíbrio.* Vamos nesta seção explorar um pouco mais este teorema, e analisar sua aplicação em algumas situações de interesse astrofísico.

Na seção 6.2 vimos que o resultado (7.1) mostra que, durante a contração gravitacional de uma estrela, metade de sua energia potencial gravitacional é convertida em energia térmica e que a outra metade é emitida como radiação. Podemos confirmar isto considerando que a energia mecânica total da estrela na fase de contração gravitacional é

$$E_{tot} = E_t + E_g = -\frac{E_g}{2} + E_g = \frac{E_g}{2} \quad (7.2)$$

Chamando L a luminosidade da estrela, pela conservação de energia, temos

$$\frac{dE_{tot}}{dt} + L = 0 \quad (7.3)$$

$$L = -\frac{dE_{tot}}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dE_g}{dt} \quad (7.4)$$

ou seja, metade da energia gravitacional é usada para a emissão de radiação, e a outra metade contribui para aumentar a temperatura e a energia interna da estrela.

► EXEMPLO 7.1 - O movimento de translação da Terra

Vamos considerar o movimento de translação da Terra em torno do Sol (Figura 7.1), e mostrar que, também neste caso, o teorema do virial pode ser aplicado.

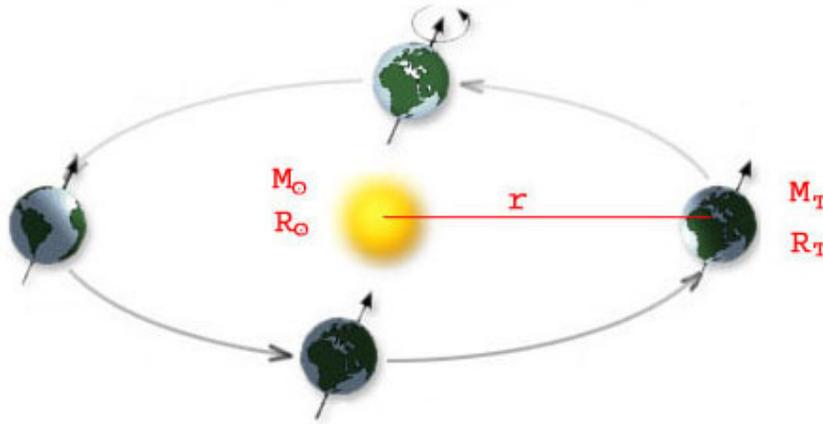


Figura 7.1 - Movimento de translação da Terra.

A Terra move-se em uma órbita estável em torno do Sol a uma distância média $r = 1.5 \times 10^{13}$ cm (uma unidade astronômica, UA) em um período de um ano, $P = 1$ ano = 365 dias = 3.16×10^7 s. Sua velocidade média é $v = 2 \pi r / P = 3.0 \times 10^6$ cm/s = 30 km/s. Com um raio médio $R_T = 6400$ km e uma densidade média $\rho_T \simeq 5.5$ g/cm³, a Terra tem massa $M_T \simeq (4/3) \pi R_T^3 \rho_T \simeq 6.0 \times 10^{27}$ g, enquanto que a massa do Sol é $M_\odot = 1.99 \times 10^{33}$ g. A energia cinética média do movimento de translação é

$$E_c = \frac{1}{2} M_T v^2 \simeq 2.7 \times 10^{40} \text{ erg} \quad (7.5)$$

Por outro lado, a energia potencial gravitacional correspondente é

$$E_p = -\frac{G M_\odot M_T}{r} \simeq -5.3 \times 10^{40} \text{ erg} \quad (7.6)$$

Portanto, a energia total é

$$E_{tot} = E_c + E_p = \frac{1}{2} M_T v^2 - \frac{G M_\odot M_T}{r} \simeq -2.6 \times 10^{40} \text{ erg} \simeq \frac{E_p}{2} \quad (7.7)$$

Naturalmente, a energia total é negativa, uma vez que a Terra tem uma órbita fechada em torno do Sol. Obtemos novamente o teorema do virial envolvendo agora a energia cinética E_c ,

$$E_c = -\frac{E_p}{2} \quad (7.8)$$

$$2 E_c + E_p = 0 \quad (7.9)$$

► EXEMPLO 7.2 - O movimento do Sol em torno do centro galáctico

Vamos agora considerar o movimento do Sol em torno do centro da Galáxia. O Sol está localizado no disco galáctico, e os objetos do disco são de População I, executando um movimento de rotação em torno do centro galáctico, como pode ser observado na curva de rotação galáctica (figura 7.2), que é simplesmente um gráfico da velocidade de rotação $\Theta(R)$ em km/s em função da distância galactocêntrica R (kpc), projetada sobre o disco galáctico.

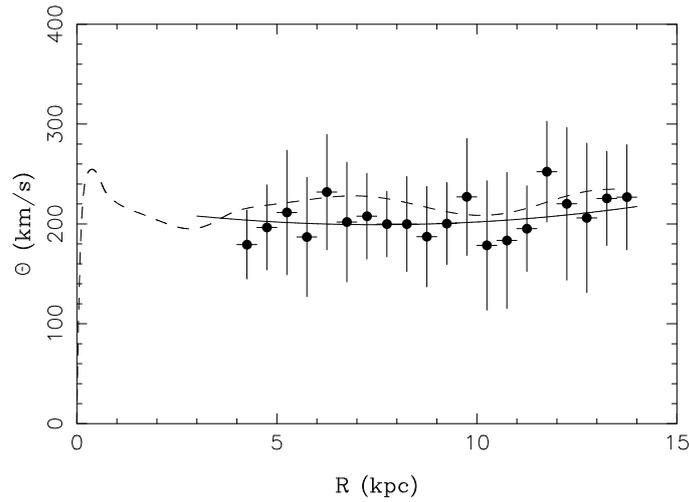


Figura 7.2 - Curva de rotação galáctica. (Maciel e Lago 2005).

Esta curva pode ser obtida a partir de diversos objetos, como as regiões HII, nuvens de CO, nebulosas planetárias, etc. A posição do Sol está em aproximadamente $R_0 = 8.0$ kpc, e a velocidade medida nesta posição é de cerca de $\Theta_0 = 200$ km/s. Considerando novamente a massa do Sol como $M_\odot = 1.99 \times 10^{33}$ g, a energia cinética do movimento de rotação é

$$E_c = \frac{1}{2} M_\odot \Theta_0^2 \simeq 4.0 \times 10^{47} \text{ erg} \tag{7.10}$$

A massa da Galáxia M_G interna ao raio galactocêntrico solar R_0 pode ser estimada considerando que a atração gravitacional desta massa mantém o movimento de rotação do Sol com a velocidade Θ_0 , ou seja

$$\frac{G M_G M_\odot}{R_0^2} = \frac{M_\odot \Theta_0^2}{R_0} \tag{7.11}$$

de modo que

$$M_G = \frac{\Theta_0^2 R_0}{G} \simeq 1.5 \times 10^{44} \text{ g} \simeq 7.5 \times 10^{10} M_\odot \tag{7.12}$$

Portanto a energia potencial gravitacional é

$$E_p = -\frac{G M_G M_\odot}{R_0} \simeq -8.0 \times 10^{47} \text{ erg} \quad (7.13)$$

ou seja

$$E_c = -\frac{E_p}{2} \quad (7.14)$$

$$2 E_c + E_p = 0 \quad (7.15)$$

que é novamente o teorema do virial.

► EXEMPLO 7.3 - O teorema do virial e a formação estelar

No processo de formação estelar a partir de uma nuvem de gás contendo um número N de partículas a uma temperatura T , o teorema do virial pode ser escrito (ver por exemplo Gregory e Zeilik 1997)

$$E_t = -\frac{E_p}{2} \quad (7.16)$$

onde E_t e E_p são novamente as energias térmica e potencial gravitacional, respectivamente, e a energia térmica pode ser escrita

$$E_t \simeq N k T \quad (7.17)$$

onde k é a constante de Boltzmann. Chamando M a massa da nuvem, e R sua dimensão típica, temos, aproximadamente,

$$E_p \simeq -\frac{G M^2}{R} \quad (7.18)$$

Supondo que o gás é composto de moléculas de H, temos

$$M \simeq 2 N m_H \quad (7.19)$$

onde m_H é a massa do átomo de H. Portanto, usando o teorema do virial (7.16), obtemos

$$\begin{aligned} N k T &\simeq \frac{G M^2}{2 R} \simeq \frac{G M}{R} N m_H \\ \frac{k T}{m_H} &\simeq \frac{G M}{R} \end{aligned} \quad (7.20)$$

Chamando agora ρ a densidade média do gás, temos

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \simeq 4 R^3 \rho \quad (7.21)$$

Substituindo esta relação na anterior, temos

$$\frac{kT}{m_H} \simeq 4GR^2\rho \tag{7.22}$$

de onde tiramos

$$R \simeq \left(\frac{k}{4Gm_H}\right)^{1/2} \left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2} \simeq 2 \times 10^7 \left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2} \tag{7.23}$$

onde $k = 1.38 \times 10^{-16}$ erg/K, $G = 6.67 \times 10^{-8}$ cm³ g⁻¹ s⁻², $m_H = 1.67 \times 10^{-24}$ g, e R está em cm, T em K e ρ em g/cm³. Tomando valores típicos para uma nuvem molecular, $T \simeq 10$ K, e $\rho \simeq 10^{-18}$ g/cm⁻³, encontramos $R \sim 10^{17}$ cm = 0.03 pc, o que corresponde a uma massa $M \simeq 10^{33}$ g, da ordem da massa do Sol.

► EXEMPLO 7.4 - O teorema do virial e a pressão do gás

Vamos considerar um objeto - uma estrela por exemplo - em equilíbrio hidrostático, de modo que o teorema do virial possa ser escrito na forma (7.15), $2E_c + E_g = 0$. O gás é constituído de N partículas de massa m e velocidade v , tal que a quantidade de movimento das partículas seja $p = mv$ e sua energia cinética seja $(1/2)mv^2$, isto é, vamos considerar o caso não-relativístico. A pressão do gás, considerado ideal, pode ser escrita como

$$P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} p v = \left(\frac{1}{3} \frac{N}{V}\right) (m v^2) = \left(\frac{2}{3} \frac{1}{V}\right) \left(N \frac{1}{2} m v^2\right) \tag{7.24}$$

A energia cinética total das N partículas é

$$E_c = N \frac{1}{2} m v^2 \tag{7.25}$$

temos então

$$P = \frac{2}{3} \frac{E_c}{V} \tag{7.26}$$

Usando (7.15) obtemos

$$P = -\frac{1}{3} \frac{E_g}{V} \tag{7.27}$$

ou seja, em um sistema em equilíbrio hidrostático, a pressão média necessária para suportar um objeto autogravitante é igual a menos um terço de sua energia potencial gravitacional por unidade de volume. Como a energia potencial gravitacional do objeto é negativa, o sinal (-) garante que a pressão média é positiva. A equação (7.27) pode ser considerada como uma forma do teorema do virial, equivalente à equação (7.15).

► EXEMPLO 7.5 - Pressão média em uma estrela

Vamos considerar uma estrela esférica de massa M e raio R em equilíbrio hidrostático. A pressão média P é dada por (7.27), e a energia potencial gravitacional é, aproximadamente,

$$E_g \simeq -\frac{G M^2}{R} \tag{7.28}$$

de modo que

$$P \simeq \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{G M^2}{R V}\right) \simeq \frac{G M^2}{3 R V} \tag{7.29}$$

Usando a relação $V = (4/3) \pi R^3$,

$$P \simeq \left(\frac{G M^2}{3 R}\right) \left(\frac{3}{4 \pi R^3}\right) = \frac{G M^2}{4 \pi R^4} \tag{7.30}$$

Mais corretamente temos

$$E_g \simeq -\frac{3 G M^2}{5 R} \tag{7.31}$$

e a equação (7.30) fica

$$P = \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{3 G M^2}{5 R}\right) \left(\frac{3}{4 \pi R^3}\right) = \frac{3 G M^2}{20 \pi R^4} \tag{7.32}$$

Para o Sol, com $M_\odot = 1.99 \times 10^{33}$ g, $R_\odot = 6.96 \times 10^{10}$ cm, obtemos

$$P = \frac{(3) (6.67 \times 10^{-8}) (1.99 \times 10^{33})^2}{(20) (3.14) (6.96 \times 10^{10})^4} = 5.37 \times 10^{14} \text{ din/cm}^2 \tag{7.33}$$

► EXEMPLO 7.6 - O teorema do virial e o equilíbrio hidrostático

No exemplo 7.4 usamos o fato de que uma estrela em equilíbrio hidrostático obedece o teorema do virial. Vamos mostrar que este teorema na forma (7.27) pode ser obtido a partir da equação de equilíbrio hidrostático (6.10). Temos

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G M(r) \rho(r)}{r^2} \tag{7.34}$$

Dividindo por $4 \pi r^2 \rho(r)$

$$\frac{dP(r)}{4 \pi r^2 \rho(r) dr} = -\frac{G M(r)}{4 \pi r^4} \tag{7.35}$$

Mas $dM(r) = 4 \pi r^2 \rho(r)$ (ver eq. 5.1 ou 6.6), e

$$\frac{dP(r)}{dM(r)} = -\frac{GM(r)}{4\pi r^4}$$

$$4\pi r^3 dP(r) = -\frac{GM(r)}{r} dM(r) \tag{7.36}$$

Lembrando que $V(r) = (4/3)\pi r^3$,

$$3V(r) dP(r) = -\frac{GM(r)}{r} dM(r)$$

$$3 \int_{r=0}^{r=R_*} V(r) dP(r) = - \int_0^{M_*} \frac{GM(r)}{r} dM(r) \tag{7.37}$$

A segunda integral acima é igual a E_g . A primeira integral pode ser feita por partes,

$$3 \int_{r=0}^{r=R_*} V(r) dP(r) = 3 V(r) P(r) \Big|_{r=0}^{r=R_*} - 3 \int_0^{V_*} P(r) dV(r) = E_g \tag{7.38}$$

A integral da esquerda é nula, portanto,

$$-3 \int_0^{V_*} P(r) dV(r) = -3 \bar{P} V_* = E_g$$

$$\bar{P} = -\frac{1}{3} \frac{E_g}{V} \tag{7.39}$$

onde usamos a notação \bar{P} para enfatizar que se trata do valor médio da pressão total. Esta relação é o teorema do virial na forma (7.27).

► EXEMPLO 7.7 - O teorema do virial e a massa de Jeans

Considerando o processo de contração gravitacional de uma nuvem interestelar, Sir James Jeans (1877-1946) mostrou que a massa mínima necessária para que a nuvem efetivamente leve à formação de estrelas deve ser superior a um valor limite, conhecido como *massa de Jeans* M_J . Vamos generalizar um pouco o tratamento dado no Exemplo 7.3 e mostrar que este limite pode ser estimado a partir da aplicação do teorema do virial (cf. Carroll e Ostlie 2006, cap. 12). Em uma nuvem estável e ligada gravitacionalmente, temos

$$2 E_c + E_p = 0 \tag{7.40}$$

Se o termo $2 E_c$, referente à energia cinética interna total da nuvem, for superior ao valor absoluto da energia potencial gravitacional $|E_p|$, a nuvem se expande. No caso oposto, se $2 E_c < |E_p|$, ocorre um colapso da nuvem, o que pode levar à formação de

estrelas. Portanto, a condição para a formação estelar, que envolve um limite para a massa da nuvem, requer que

$$2 E_c < |E_p| \tag{7.41}$$

Em uma nuvem esférica de massa M , raio R e densidade constante ρ , a energia potencial gravitacional é dada aproximadamente pela equação (7.18), e a energia cinética da nuvem é dada por (7.17). A massa da nuvem pode ser escrita

$$M \simeq N \mu m_H \tag{7.42}$$

onde μ é o peso molecular do gás. Aplicando (7.41) temos

$$\begin{aligned} \frac{2 M k T}{\mu m_H} &< \frac{G M^2}{R} \\ \frac{2 k T}{\mu m_H} &< \frac{G M}{R} \end{aligned} \tag{7.43}$$

Lembrando a relação (7.21) temos

$$\begin{aligned} R^3 &= \frac{3 M}{4 \pi \rho} \\ R &\simeq \left(\frac{M}{4 \rho} \right)^{1/3} \end{aligned} \tag{7.44}$$

Substituindo esta equação em (7.43), temos

$$\frac{2 k T}{\mu m_H} < \frac{G M}{(M/4 \rho)^{1/3}} \tag{7.45}$$

que pode ser colocada na forma

$$M > M_J \simeq \left(\frac{2 k T}{G \mu m_H} \right)^{3/2} \left(\frac{1}{4 \rho} \right)^{1/2} \tag{7.46}$$

ou seja, $M_J \propto T^{3/2} \rho^{-1/2}$, isto é, quanto maior a temperatura da nuvem, maiores massas são necessárias para o colapso, o inverso ocorrendo com a densidade do gás. Em um cálculo mais correto, as constantes que aparecem em (7.46) são um pouco diferentes (cf. Carroll e Ostlie 2006, cap. 12), e esta equação fica

$$M > M_J = \left(\frac{5 k T}{G \mu m_H} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4 \pi \rho} \right)^{1/2} \tag{7.47}$$

Usando os valores numéricos de k , G e m_H , e medindo T em K, ρ em g/cm^3 e M em M_\odot , temos

$$M_J \simeq 1.2 \times 10^{-10} \left(\frac{T^3}{\mu^3 \rho} \right)^{1/2} \tag{7.48}$$

Vamos aplicar (7.48) a uma nuvem de H típica, com $T \simeq 50 \text{ K}$, $\mu \simeq 1$ e uma densidade de partículas $n \simeq 500 \text{ cm}^{-3}$, de modo que $\rho \simeq n m_H \simeq 8.4 \times 10^{-22} \text{ g/cm}^3$. Obtemos $M_J \simeq 1500 M_\odot$. As massas das nuvens difusas são provavelmente muito menores que este valor, de modo que elas são estáveis, isto é, não se fragmentam para formar estrelas. De fato, as estrelas são formadas pelo colapso de nuvens moleculares gigantes, com dimensões maiores que as das nuvens difusas, e muito mais densas. Por exemplo, tomando valores apropriados para as regiões internas dessas nuvens, $T \simeq 10 \text{ K}$, $\mu \simeq 2$ e $n \simeq 10^4 \text{ cm}^{-3}$, temos $\rho \simeq 3.3 \times 10^{-20} \text{ g/cm}^3$, e $M_J \simeq 7 M_\odot$, que é um valor consistente com as estimativas das massas das regiões mais internas das nuvens densas.

► EXEMPLO 7.8 - O teorema do virial no caso ultra relativístico

Vimos que o teorema do virial pode ser expresso pelas relações (7.27) ou (7.15). Admitimos implicitamente que as partículas responsáveis pela pressão P movem-se com velocidades $v \ll c$, isto é, consideramos o caso não relativístico. Vamos agora considerar o caso extremo de um gás *ultra relativístico*, em que as partículas responsáveis pela pressão movem-se com velocidades próximas da velocidade da luz. Neste caso, a relação (7.27) ainda é válida, e a pressão média é

$$P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} p v \tag{7.49}$$

mas temos agora $v \simeq c$, de modo que

$$P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} p c \tag{7.50}$$

A energia cinética de cada partícula é agora igual a $p c$, então

$$E_c \simeq N p c \tag{7.51}$$

ou seja,

$$P = \frac{1}{3} \frac{E_c}{V} \tag{7.52}$$

Combinando esta equação com (7.27) temos

$$\frac{1}{3} \frac{E_c}{V} \simeq -\frac{1}{3} \frac{E_g}{V}$$

ou seja

$$E_c + E_g = 0 \tag{7.53}$$

Vemos que a energia total é $E_t = E_c + E_g = 0$. Neste caso, o sistema se encontra no limite entre o caso ligado, onde $E_t < 0$, e o caso não ligado, onde $E_t > 0$. Por exemplo, se um sistema gravitacionalmente ligado desenvolve velocidades próximas de c , ele eventualmente se torna um sistema não ligado. Assim, um objeto em que o termo de pressão é devido a partículas ultra relativísticas é instável, uma vez que um sistema com energia total nula está no limite entre uma configuração estável e instável. Já no caso não relativístico, quando é válida a relação $2E_c + E_g = 0$, a energia total do sistema é negativa, de modo que o sistema é ligado.

► EXEMPLO 7.9 - Supernovas e transferência de energia

Em estrelas massivas, o colapso final após a exaustão do combustível nuclear libera uma quantidade de energia potencial suficiente para explodir a estrela. Este processo ocorre nas supernovas de tipo Ib e Ic, formadas por estrelas massivas com tempos de vida curtos, que não apresentam evidências de hidrogênio em seus espectros. A subclassificação das supernovas de tipo I depende da presença da linha do SiII em $\lambda 6150 \text{ \AA}$ (Ia), da presença de linhas intensas do He (Ib) ou da ausência das linhas do He (Ic). A liberação de energia ocorre de maneira ainda mais espetacular com as supernovas de tipo II, que apresentam H em seus espectros, e resultam da explosão de estrelas massivas em regiões interestelares ricas em metais.

Por outro lado, a maior parte das supernovas de tipo I, ditas tipo Ia, são formadas por estrelas de massa intermediária em sistemas binários, também sem evidência de hidrogênio, resultando de explosões termonucleares. Neste processo, proposto por F. Hoyle e W. Fowler na década de 1960, a fusão dos núcleos de C e O destas estrelas produz um enorme pulso de energia e o isótopo radioativo ^{56}Ni , que sofre decaimento lento liberando uma quantidade adicional de energia.

As supernovas como as de tipo II, Ib e Ic, são consideradas portanto “supernovas de colapso nuclear”, ou *core collapse supernovae*. Tipicamente, uma supernova de tipo II libera energias da ordem de 10^{53} erg em um evento. Cerca de 1% deste valor, ou cerca de 10^{51} erg, surge como energia cinética do material ejetado. A radiação ocupa uma fração ainda menor, cerca de 0.01%, ou 10^{49} erg, ou menos. A diferença de energia é transferida aos neutrinos produzidos na explosão.

Por exemplo, em uma estrela com $20 M_{\odot}$, o processo de queima nuclear inclui inicialmente a queima de H, seguida pelas queimas de He, C, O e Si, cada uma delas com uma escala de tempo mais curta. A queima de Si leva tipicamente 2 dias ou 1.73×10^5 s. A energia por unidade de tempo dos fótons produzidos neste processo é cerca de $L_{\gamma} \sim 4.4 \times 10^{38}$ erg/s, e a luminosidade dos neutrinos é $L_{\nu} \sim 3.1 \times 10^{45}$ erg/s. Portanto, neste caso temos

$$E_{\gamma} \simeq (4.4 \times 10^{38}) (1.73 \times 10^5) \simeq 7.61 \times 10^{43} \sim 10^{44} \text{ erg} \tag{7.54}$$

$$E_{\nu} \simeq (3.1 \times 10^{45}) (1.73 \times 10^5) \simeq 5.36 \times 10^{50} \sim 10^{51} \text{ erg} \tag{7.55}$$

Podemos também estimar a massa do caroço necessária para produzir uma energia da ordem de 10^{53} erg por colapso gravitacional. Neste caso, a energia liberada deve

ser da ordem da energia potencial gravitacional, $E \sim E_p \propto -GM^2/R$, onde M é a massa do caroço e R o raio do objeto colapsado. Mais corretamente, podemos usar o teorema do virial e obter uma expressão semelhante,

$$E \simeq -\frac{3}{10} \frac{GM^2}{R} \tag{7.56}$$

Tomando um valor $R \simeq 50$ km, com $E \sim 10^{53}$ erg obtemos

$$M \simeq \sqrt{\frac{10}{3} \frac{10^{53} R}{G}} \simeq 5 \times 10^{33} \text{ g} \simeq 2.5 M_{\odot} \tag{7.57}$$

que é um valor típico para um caroço colapsado originando uma supernova.

► EXEMPLO 7.10 - Hipernovas

As supernovas mais comuns são produzidas por estrelas com $20 M_{\odot}$ ou mais, que sofrem estágios sucessivos de queima nuclear, até alcançarem um núcleo de ferro. Neste estágio, o objeto colapsa violentamente, produzindo uma explosão, que dá origem à supernova, e deixando eventualmente um objeto compacto em seu centro. No caso de estrelas muito massivas, com massas da ordem de $140 M_{\odot}$ ou mais, evidências recentes sugerem que o processo pode ser abreviado, de modo que a explosão ocorre ainda na fase em que o núcleo contém oxigênio, ou seja, antes de atingir a fase em que o núcleo é de ferro inerte. Nesse caso, a estrela sofre uma intensa instabilidade, produzindo antimatéria. A colisão de dois fótons produz pares de elétrons (e^-) e pósitrons (e^+), e a consequente perda de pressão produz o colapso, que leva à queima rápida de oxigênio em um processo altamente instável e rápido, durando da ordem de minutos, ocorrendo a explosão. Neste caso, a supernova é chamada “supernova de produção de pares”, “supernova de instabilidade de pares”. Na explosão, a estrela sintetiza uma grande quantidade de isótopos radioativos, como o ^{56}Ni , que termina por decair, produzindo ^{56}Fe . O processo de decaimento, por sua vez, injeta energia no gás em expansão, cujo brilho é significativamente aumentado. Este é o processo que, aparentemente, deu origem à supernova 2007bi, em que uma grande quantidade de ^{56}Ni foi detectada, correspondendo a 5 - 7 M_{\odot} . Supondo que a estrela progenitora tivesse uma massa de $140 M_{\odot}$, isto corresponde a cerca de 4% de sua massa. Em comparação, no Sol, onde a abundância de Ni é de 6.25 dex por número de átomos, o que daria uma massa de 10^{-4} de sua massa, a fração deste elemento seria menor que 0.01%.

► EXEMPLO 7.11 - O teorema do virial e a formação das galáxias

O teorema do virial na forma (7.8) pode ser aplicado à formação de uma galáxia a partir de uma nuvem de gás altamente disperso e em repouso. A energia total da galáxia é

$$E_{tot} = E_c + E_p = -\frac{E_p}{2} + E_p = \frac{E_p}{2} \tag{7.58}$$

No estado inicial, $E_{tot} = E_c = E_p = 0$. À medida que a nuvem colapsa, a energia cinética aumenta (fica mais positiva), enquanto que a energia potencial gravitacional diminui (fica mais negativa). Da equação (7.58) vemos que, no estado final de equilíbrio, quando o sistema está estável (ou virializado), a energia total é negativa (pois $E_p < 0$) e o sistema está ligado, e metade da energia potencial liberada pelo colapso foi convertida em energia cinética, enquanto que a outra metade foi emitida na forma de radiação.

7.3 O teorema de Liouville

Vamos a seguir considerar o teorema de Liouville na mecânica clássica (ver por exemplo Reif 1965; Symon 1971; Goldstein et al. 2006). Na próxima seção iremos analisar uma aplicação deste teorema na determinação do limite de Oort. Nesta seção, vamos adotar a derivação de Reif (1965).

Vamos considerar inicialmente um sistema isolado com apenas duas dimensões, (x, p_x) no espaço de fase. Seja $f(x, p_x, t) dx dp_x$ o número de sistemas em um conjunto estatístico desses sistemas, com posições entre $(x, x + dx)$ e quantidade de movimento entre $(p_x, p_x + dp_x)$ no tempo t . Os sistemas movem-se de acordo com a equação do movimento,

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} \qquad \dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \tag{7.59}$$

onde \mathcal{H} é a hamiltoniana do sistema. Devido a este movimento, a densidade de sistemas $f(x, p_x, t)$ no espaço de fase varia com o tempo, e sua variação pode ser escrita como $(\partial f / \partial t) dt dx dp_x$. Vamos considerar um elemento de volume no espaço de fase caracterizado pelas coordenadas $(x, x + dx)$ e $(p_x, p_x + dp_x)$ (figura 7.3).

O número de sistemas neste volume varia de acordo com a equação (7.59), com uma variação dada por $(\partial f / \partial t) dt dx dp_x$ no tempo t , o que ocorre devido aos sistemas que entram ou saem do elemento de volume considerado neste tempo. O número de sistemas que entram no elemento de volume do espaço de fase através da “face” com $x = \text{constante}$ está contido no volume $(\dot{x} dt) dp_x$ (ver a figura 7.3), sendo igual a

$$f(x, p_x, t) \left[(\dot{x} dt) dp_x \right] \tag{7.60}$$

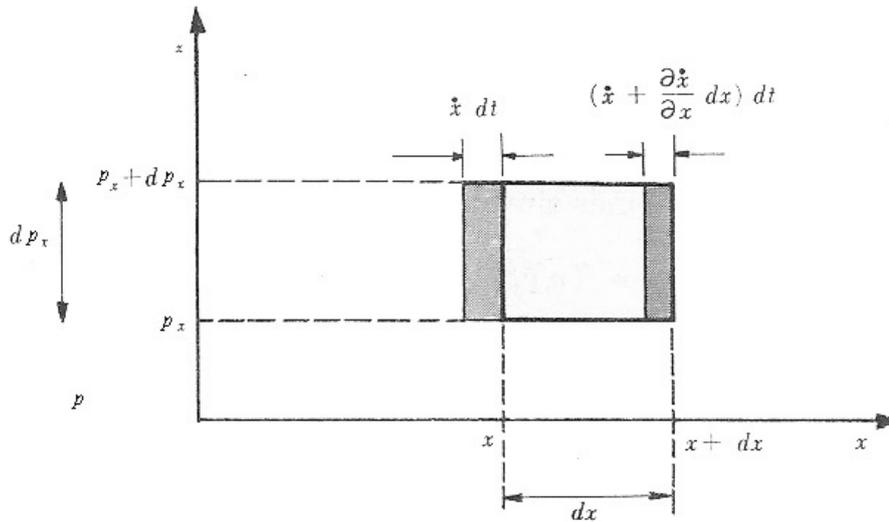


Figura 7.3 - Elemento de volume no espaço de fase.

Analogamente, o número de sistemas que sai do elemento de volume pela face caracterizada pela coordenada $x + dx = \text{constante}$ está contido no volume dado por $\{[\dot{x} + (\partial \dot{x} / \partial x) dx] dt\} dp_x$, sendo igual a

$$\begin{aligned}
 f(x + dx, p_x, t) \left[\left(\dot{x} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} dx \right) dt \right] dp_x &= \left[f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} dx \right] \left[\left(\dot{x} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} dx \right) dt \right] dp_x \\
 = \left[f \dot{x} + f \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} dx + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dx \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} dx \right] dt dp_x &= \left[f \dot{x} + f \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} dx + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} dx \right] dt dp_x \\
 &= \left[f \dot{x} + \frac{\partial}{\partial x} (f \dot{x}) dx \right] dt dp_x \tag{7.61}
 \end{aligned}$$

onde desprezamos o termo de segunda ordem. Portanto, o número “líquido” de sistemas que entram no elemento de volume considerado através das faces $x = \text{constante}$ e $x + dx = \text{constante}$ pode ser escrito, de (7.60) e (7.61),

$$f \dot{x} dt dp_x - \left[f \dot{x} + \frac{\partial}{\partial x} (f \dot{x}) dx \right] dt dp_x = -\frac{\partial}{\partial x} (f \dot{x}) dt dx dp_x \tag{7.62}$$

Em apenas duas dimensões no espaço de fase (x, p_x) , a equação (7.58) dá o número de sistemas que efetivamente entram neste volume. No caso mais geral, havendo n coordenadas generalizadas, q_1, q_2, \dots, q_n , e p_1, p_2, \dots, p_n , a expressão (7.62) fica

$$\begin{aligned}
 f \dot{q}_1 dt dq_2 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n - \left[f \dot{q}_1 + \frac{\partial}{\partial q_1} (f \dot{q}_1) dq_1 \right] dt dq_2 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = \\
 -\frac{\partial}{\partial q_1} (f \dot{q}_1) dt dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n \tag{7.63}
 \end{aligned}$$

Para incluir os sistemas que entram pelas demais “faces” do elemento de volume no espaço de fase, é necessário somar em todas as “faces” possíveis, isto é, a variação total no tempo dt do número de sistemas é

$$\frac{\partial f}{\partial t} dt dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = \left[- \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} (f \dot{q}_i) - \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} (f \dot{p}_i) \right] dt dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n \quad (7.64)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial q_i} (f \dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i} (f \dot{p}_i) \right] \quad (7.65)$$

que pode ser escrita

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_i \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + f \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) \right] \quad (7.66)$$

O último termo do segundo membro de (7.66) se anula, o que pode ser visto considerando a expressão (7.59), escrita na forma generalizada,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad (7.67)$$

que são as equações de Hamilton para um sistema mecânico, de modo que

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_i} = 0 \quad (7.68)$$

Portanto, obtemos a expressão do teorema de Liouville,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \quad (7.69)$$

ou ainda

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0 \quad (7.70)$$

Pelo teorema de Liouville, as partículas do sistema movem-se no espaço de fase como um fluido incompressível, ou que o volume ocupado por um conjunto de partículas é constante. *De acordo com este teorema, em um conjunto de massas pontuais movendo-se sem dissipação em um campo de potencial, a densidade dos pontos no espaço de fase é constante ao longo de uma trajetória dinâmica.*

► EXEMPLO 7.12 - O teorema de Liouville e a área dos detectores

Telescópios ópticos geralmente concentram feixes de luz em pequenos detectores, e em muitos casos a sensibilidade instrumental deve ser concentrada em detectores

com a menor área possível. Vamos considerar uma fonte observada segundo o ângulo sólido Ω , e seja A a área do espelho do telescópio (cf. Harwit 2006). Pelo teorema de Liouville, a densidade de fótons emitidos e recebidos por unidade de área, por unidade de ângulo sólido e por unidade de tempo deve ser constante. Se a luz do objeto sobre um detector de área a pudesse vir de todas as direções, em um ângulo sólido de 4π sr, teríamos

$$\frac{\text{no.fotons}}{A \Omega} = \frac{\text{no.fotons}}{a 4 \pi} \quad (7.71)$$

isto é, a área mínima do detector seria

$$a = \frac{A \Omega}{4 \pi} \quad (7.72)$$

Na prática, apenas os fótons vindos de dentro de um pequeno ângulo sólido $\omega < 4\pi$ podem ser recebidos pelo detector, de modo que a área mínima do detector deve ser

$$a = \frac{A \Omega}{\omega} \quad (7.73)$$

Detectores com áreas menores que este valor não poderiam receber todos os fótons disponíveis, pois isto implicaria um aumento do fluxo, o que contraria a segunda lei da Termodinâmica, uma vez que a densidade de fótons seria maior no detector do que na fonte.

► EXEMPLO 7.13 - O teorema de Liouville e os raios cósmicos

Os raios cósmicos são partículas energéticas (prótons, elétrons, núcleos pesados) que atravessam o espaço interestelar, onde produzem uma série de efeitos, como as reações de espalação (*spallation*), em que são fragmentados pelas colisões com núcleos de H interestelar produzindo os elementos leves Li, Be e B. O fluxo de raios cósmicos pode ser observado e seu espectro de energia determinado com precisão, como pode ser visto na figura 7.4.

Sendo partículas tão energéticas, os raios cósmicos podem eventualmente escapar dos campos magnéticos galácticos. Pelo teorema de Liouville, a densidade de raios cósmicos no espaço de fase deve então ser aproximadamente constante. Neste caso, a densidade de raios cósmicos na região externa da Galáxia deve ser aproximadamente a mesma daquela observada na nossa vizinhança. Em outras palavras, medidas locais da intensidade dessas partículas podem ser usadas para obter informações sobre as densidades de partículas em outras regiões do Universo.

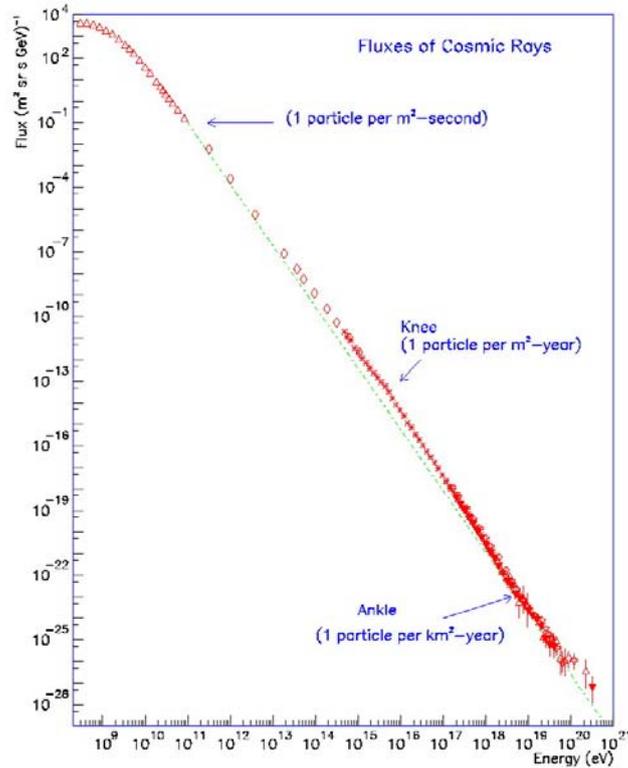


Figura 7.4 - Espectro de energia dos raios cósmicos. (NASA)

► EXEMPLO 7.14 - Raios cósmicos e supernovas

Uma das principais fontes das partículas cósmicas são as supernovas, cuja enorme energia pode ser parcialmente transferida aos raios cósmicos, acelerando-os até velocidades relativísticas. Este é um fenômeno interessante de transferência, ou transporte de energia, pois parte da energia inicialmente armazenada nas supernovas é transferida para a aceleração das partículas cósmicas. Vamos mostrar, usando argumentos simples, que a energia requerida para este processo de aceleração dos raios cósmicos é uma pequena fração da energia total disponível nas supernovas. Admitindo que uma supernova libere uma energia da ordem de $\Delta E_{sn} \sim 10^{49}$ erg e que a taxa de supernovas na Galáxia seja $\tau \sim 1/30$ por ano, a energia produzida por unidade de tempo seria $\Delta E_{sn} \tau \sim 3 \times 10^{47}$ erg/ano. Em uma escala de tempo da ordem da idade da Galáxia, $t_G \sim 10^{10}$ ano, teremos uma energia total $E_{sn} \sim \Delta E_{sn} \tau t_G \sim 3 \times 10^{57}$ erg. Os raios cósmicos tem uma densidade de energia $\rho_{rc} \sim 1 \text{ eV/cm}^3 \sim 1.6 \times 10^{-12}$ erg/cm³, e podemos considerar que estão confinados ao disco da Galáxia, em uma região com raio $R \sim 30 \text{ kpc}$ e altura $h \sim 500 \text{ pc}$, de modo que o volume ocupado seria $V \sim \pi R^2 h \sim 4 \times 10^{67} \text{ cm}^3$. Portanto, a energia contida nos raios cósmicos seria $E_{rc} \sim \rho_{rc} V \sim 6 \times 10^{55}$ erg. Assim, a fração da energia das supernovas necessária para acelerar os raios cósmicos seria $f \sim E_{rc}/E_{sn} \sim 0.02$, ou seja, apenas 2%.

7.4 O limite de Oort

Diversos componentes da Galáxia, como átomos em elevados estados de ionização, algumas moléculas e partículas sólidas de grandes dimensões, são de difícil detecção pelos métodos astrofísicos usuais, que envolvem a observação de algum tipo de radiação. Portanto, é interessante determinar limites para a contribuição desta matéria não detectável, o que pode ser feito através da estimativa da atração gravitacional total na direção perpendicular ao plano galáctico. Como mostrado inicialmente por Jan Hendrik Oort (1900–1992), este método pode também produzir limites para a contribuição da matéria interestelar na Galáxia (cf. Spitzer 1978).

Considerando-se a Galáxia como um disco achatado, a determinação da aceleração gravitacional g_z na direção z , perpendicular ao disco, fornece uma estimativa da massa total na vizinhança solar, incluindo gás e estrelas. A determinação de g_z é feita utilizando-se medidas da velocidade v_z e do gradiente de densidade na direção z de grupos de estrelas homogêneos e suficientemente brilhantes (cf. Maciel 2002).

Para simplificar, vamos considerar um disco galáctico unidimensional, isto é, vamos desprezar os movimentos das estrelas nas direções r e θ , considerando coordenadas cilíndricas, ficando apenas com os movimentos na direção z , perpendicular ao plano. Neste caso, admitindo estado estacionário, podemos definir uma função de distribuição $f(z, p_z) dp_z dV$, ou seja, o número de estrelas no volume dV com quantidades de movimento entre p_z e $p_z + dp_z$.

Um grupo de estrelas movendo-se na direção perpendicular ao plano galáctico não constitui um “fluido” no sentido usual, como por exemplo a camada de gás em uma atmosfera estelar. Assim, em vez das equações usuais da hidrodinâmica, devemos aplicar o *teorema de Liouville*. Como vimos, por este teorema, em um conjunto de massas pontuais movendo-se sem dissipação em um campo de potencial, a densidade f dos pontos no espaço de fase é constante ao longo de uma trajetória dinâmica. Em outras palavras, a diferença entre as estrelas movendo-se para *dentro* de um elemento do espaço de fase e aquelas movendo-se para *fora* do elemento deve ser igual ao acréscimo de f no elemento considerado. Mais geralmente, podemos escrever

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0 \tag{7.74}$$

como vimos na equação (7.66), e onde usamos as coordenadas generalizadas q_i e p_i . No nosso caso, temos

$$\frac{\partial f}{\partial z} v_z + \frac{\partial f}{\partial p_z} m g_z = 0 \tag{7.75}$$

ou

$$\frac{p_z}{m} \frac{\partial f}{\partial z} - m \frac{d\phi}{dz} \frac{\partial f}{\partial p_z} = 0 \tag{7.76}$$

onde m é a massa das estrelas, admitida constante, $p_z = m v_z$, e $\phi(z)$ é o potencial gravitacional do disco, função apenas de z . Usamos em (7.76) o fato de que

$$g_z = -\frac{d\phi}{dz} \tag{7.77}$$

Podemos escrever

$$p_z \frac{\partial f}{\partial z} = -m^2 g_z \frac{\partial f}{\partial p_z} \tag{7.78}$$

A densidade n de estrelas é

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} f(z, p_z) dp_z \tag{7.79}$$

e a quantidade de movimento quadrática média é

$$\langle p_z^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(z, p_z) p_z^2 dp_z}{\int_{-\infty}^{\infty} f(z, p_z) dp_z} = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} f(z, p_z) p_z^2 dp_z \tag{7.80}$$

Multiplicando esta equação por n e derivando com relação a z ,

$$\begin{aligned} \frac{d(n\langle p_z^2 \rangle)}{dz} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(z, p_z)}{\partial z} p_z^2 dp_z \\ &= -m^2 g_z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(z, p_z)}{\partial p_z} p_z dp_z \end{aligned} \tag{7.81}$$

onde foi usada (7.78). Integrando (7.81) por partes, e usando (7.79) obtemos

$$\frac{1}{n} \frac{d(n\langle v_z^2 \rangle)}{dz} = g_z \tag{7.82}$$

onde usamos o fato de que $p_z = m v_z$. A densidade de massa total $\rho(z)$ pode ser obtida pela equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 4\pi G \rho(z) \tag{7.83}$$

Considerando (7.77), podemos escrever

$$\rho(z) = -\frac{1}{4\pi G} \frac{dg_z}{dz} \tag{7.84}$$

Por meio das observações das velocidades v_z e densidades n de grupos homogêneos de estrelas, admitidas com a mesma massa, podemos determinar g_z em função de z por (7.82) e a densidade de massa total $\rho(z)$ por (7.84). Isto foi feito por Oort para um grupo de gigantes de tipo espectral K. As primeiras análises de Oort datam de 1932, mas o trabalho na forma final é de 1960. A função g_z obtida por Oort para a vizinhança solar está mostrada na figura 7.6.

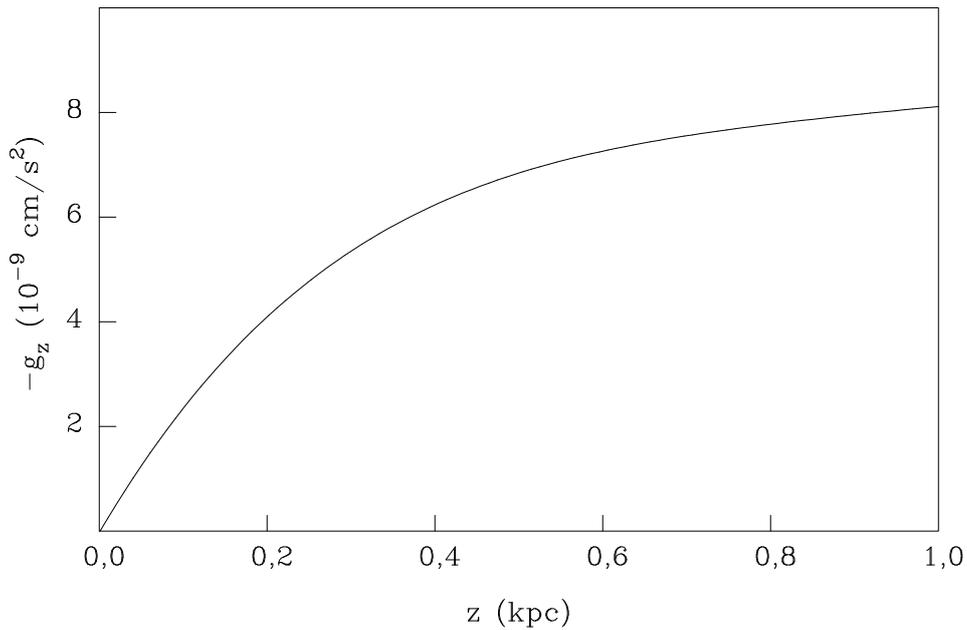


Figura 7.5 - Determinação do limite de Oort.

Para o plano galáctico, $z = 0$ e a densidade de massa total é $\rho_t \simeq 10 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3 = 0.15 M_\odot/\text{pc}^3$, onde $M_\odot = 1.99 \times 10^{33} \text{ g}$ é a massa solar. A parte deste material relativa às estrelas é conhecida independentemente, sendo $\rho_* \simeq 4 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3 = 0.06 M_\odot/\text{pc}^3$. Portanto, a densidade total da matéria interestelar na vizinhança solar deve ser $\rho_{mi} \lesssim 6 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3 = 0.09 M_\odot/\text{pc}^3$. Isto corresponde a 2.6 átomos de H por centímetro cúbico, adotando-se uma abundância He/H = 0.1 por número de átomos. Este limite é conhecido como o *limite de Oort*. Naturalmente, este valor está sujeito a incertezas, não só devido a deficiências observacionais como também a aproximações no processo de cálculo. Entretanto, trabalhos mais recentes produzem essencialmente os mesmos resultados.

O valor da densidade do meio interestelar por medidas diretas do gás e da poeira na vizinhança solar é da mesma ordem de grandeza que o limite de Oort. Desta forma, as estrelas, o meio interestelar e a matéria não detectada parecem ter densidades comparáveis. A maior parte da massa do meio interestelar, cerca de 90%, está concentrada no gás, restando aproximadamente 10% aos grãos interestelares.

Embora aparentemente baixa, a densidade do meio interestelar corresponde a uma massa total considerável, uma vez que está espalhada por todo o disco galáctico. Para ilustração, vamos considerar que o disco tem um diâmetro da ordem de $2R \simeq 30 \text{ kpc}$, e espessura $h \simeq 500 \text{ pc}$. Com uma densidade $\rho_{mi} \simeq 3 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3$, a massa é $M_{mi} \simeq \pi R^2 h \rho_{mi} \sim 10^{43} \text{ g}$, suficiente para formar cerca de 10^{10} estrelas com massas iguais à do Sol.

EXERCÍCIOS

7.1 Júpiter tem uma massa 318 vezes maior que a Terra, e gira em torno do Sol a uma distância média de 5.2 UA com um período de cerca de 11.86 anos. Mostre que o teorema do virial aplica-se também a este movimento.

7.2 Considere uma nuvem molecular esférica com densidade média ρ , temperatura T e massa M . Usando apenas relações de proporcionalidade, mostre que a nuvem poderá se condensar se

$$M > M_J \propto T^{3/2} \rho^{-1/2}$$

7.3 Considere o núcleo denso de uma nuvem molecular gigante, com temperatura $T = 10$ K, composto de H molecular, com uma densidade $n_{H_2} = 10^4 \text{ cm}^{-3}$. Qual seria a massa de Jeans desta nuvem? Qual seria seu tempo de queda livre?

7.4 Por meio de um tratamento teórico dos movimentos oscilatórios perpendiculares ao plano galáctico, F. House e D. Kilkenny (*Astron. Astrophys.* vol. 81, p.251, 1980) derivaram uma expressão analítica para a aceleração gravitacional g_z , válida para $|z| \leq 1$ kpc:

$$g_z = A_0 \operatorname{sen} \left(\frac{2z}{R} + B_0 \right) + C_0 \exp(-\alpha z)$$

onde A_0 , B_0 e C_0 são constantes, R é a distância ao eixo galáctico e $\alpha = 1/h$, sendo h a espessura efetiva da camada de gás e estrelas acima do plano galáctico. As constantes foram determinadas por medidas das velocidades radiais de estrelas OB na vizinhança solar, sendo $A_0 = 9.6 \times 10^{-9} \text{ cm/s}^2$, $B_0 = 5 \text{ rad}$ e $C_0 = 9.0 \times 10^{-9} \text{ cm/s}^2$. Considere um valor médio $2h \simeq 800 \text{ pc}$ e $R \simeq 8.5 \text{ kpc}$ e determine a densidade de massa total no plano galáctico para a vizinhança solar. Compare seu resultado com o valor obtido por Oort, baseado na análise das gigantes K.

7.5 Determinações da distribuição da densidade de massa na forma de estrelas na vizinhança solar produzem os seguintes valores: $0.038 M_\odot/\text{pc}^3$ para as estrelas anãs de tipos espectrais G, K e M; $0.020 M_\odot/\text{pc}^3$ para as anãs brancas e $0.006 M_\odot/\text{pc}^3$ para as demais estrelas. Qual é a massa total na forma de estrelas, em M_\odot/pc^3 e em g/cm^3 ? Compare seu resultado com o limite de Oort.

Referências

- Carroll, B. W., Ostlie, D. A. 2006, *An Introduction to Modern Astrophysics*, Benjamin Cummings
- Choudhuri, A. R. 2010, *Astrophysics for physicists*, Cambridge University Press
- Collins, G. W. 2003, *The virial theorem in stellar astrophysics*, Internet ed.,
<http://ads.harvard.edu/books/1978vtsa.book/>
- Goldstein, H., Poole, C. P., Safko, J. L. 2001, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 3a. ed.
- Gregory, S. A., Zeilik, M. 1997, *Introductory Astronomy and Astrophysics*, Brooks Cole, 4a. ed.
- Harwit, M. 2006, *Astrophysical Concepts*, Springer, 4a. ed.
- Lima Neto, G. 2000, *Introdução à dinâmica estelar*, IAG/USP
- Maciel, W. J. 1999, *Introdução à estrutura e evolução estelar*, Edusp
- Maciel, W. J. 2002, *Astrofísica do meio interestelar*, Edusp
- Maciel, W. J., Lago, L. G. 2005, *Rev. Mexicana Astron. Astrof.* **41**, 383
- Reif, F. 1965, *Fundamentals of statistical and thermal physics*, McGraw-Hill [reedição Waveland Press 2008]
- Spitzer Jr., L. 1978, *Physical processes in the interstellar medium*, Wiley [student edition 1998]
- Symon, K. R. 1971, *Mechanics*, Addison-Wesley, 3a. ed.

CAPITULO 8 – ELEMENTOS DE DINÂMICA ESTELAR

8.1 Introdução

No capítulo 7 vimos algumas aplicações do teorema do virial e em seguida o teorema de Liouville, em particular a aplicação deste na determinação do limite de Oort. As equações correspondentes ao teorema do virial, teorema de Liouville e equação de Boltzmann têm aplicações diretas na Dinâmica Estelar, estando em última análise relacionadas com a energia dos sistemas físicos e sua transferência. No presente capítulo, vamos apresentar uma discussão simplificada da equação de transporte de Boltzmann na ausência de colisões, que é um caso particular do teorema de Liouville, estender um pouco mais as aplicações no estudo da Dinâmica Estelar, e apresentar novas aplicações, em particular no que se refere à relaxação colisional dos sistemas e às equações de Jeans. A referência básica para este capítulo é o trabalho de Choudhuri (2010), em particular o capítulo 7. Outras referências incluem Carroll e Ostlie (2006) e Lima Neto (2000), e textos mais avançados são Binney e Merrifield (1998) e Binney e Tremaine (2008), essencialmente versões mais modernas e completas do trabalho anterior de Mihalas e Binney (1981).

8.2 Dinâmica estelar

De acordo com a classificação de Hubble, as galáxias podem ser espirais, espirais barradas, elípticas e irregulares (figura 8.1), o que inclui a maior parte das galáxias conhecidas. Em nossa própria Galáxia, aglomerados de estrelas podem ser abertos e globulares (figura 8.2), sendo suas propriedades físicas geralmente bastante diferentes. Uma vez que esses sistemas são compostos basicamente de estrelas e gás, e suas massas luminosas estão essencialmente concentradas nas estrelas, é interessante investigar porque conjuntos de estrelas assumem formas e tamanhos tão diferentes. As estrelas podem, em primeira aproximação, ser consideradas como partículas que se atraem mutuamente de acordo com a lei de Newton, em que a força de atração é inversamente proporcional ao quadrado da separação entre os pontos. A *Dinâmica Estelar* tem como objetivo estudar os processos dinâmicos que ocorrem nesses sistemas, que são geralmente autogravitantes. Em outras palavras, podemos em primeira aproximação desprezar o gás no espaço entre as estrelas, e considerar apenas as interações gravitacionais entre elas para analisar a estrutura dinâmica do sistema. Como veremos, o estudo da estrutura galáctica é muito mais complexo que o estudo da estrutura interna das estrelas, e basicamente estaremos limitados à comparação dos efeitos combinados da atração gravitacional e do movimento das estrelas, analisados a partir de hipóteses básicas, como os teoremas do virial e de Liouville, além da distribuição maxwelliana de velocidades. Análises mais profundas estão além dos objetivos deste curso, e o leitor interessado poderá consultar textos mais avançados como o de Binney e Tremaine (2008).

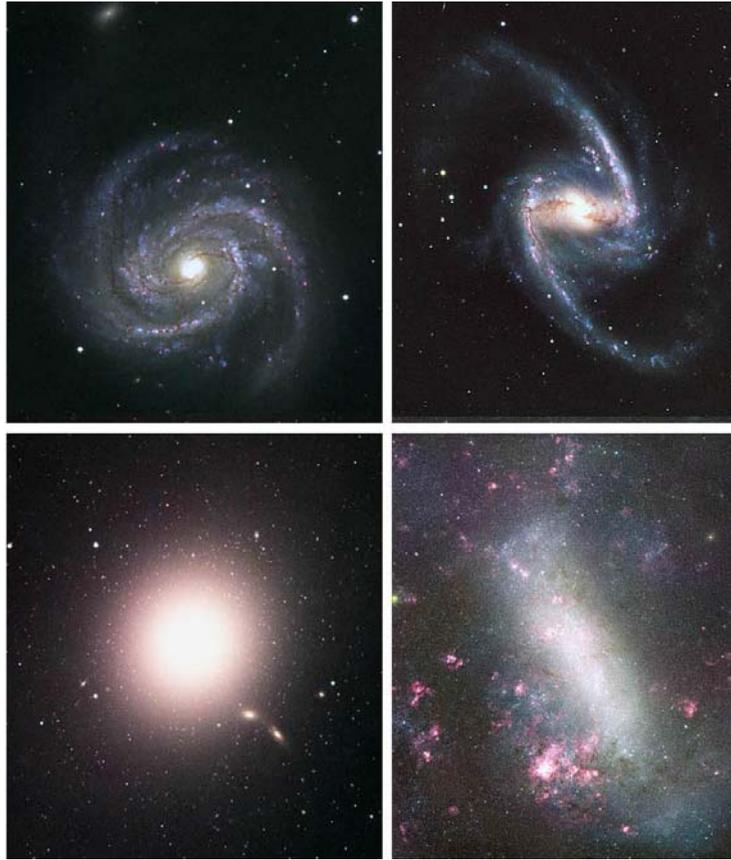


Figura 8.1 - Tipos de galáxias segundo a classificação de Hubble. (a) espiral, NGC 4321 (M100); (b) espiral barrada, NGC 1365; (c) elíptica, NGC 4486 (M87); (d) irregular, Grande Nuvem de Magalhães. (AAO)



Figura 8.2 - Aglomerados de estrelas. (a) Globular, NGC 5139, Omega Centauri; (b) aberto, NGC 4755, Caixa de Joias. (AAO)

Vamos considerar um gás composto de partículas idênticas com uma certa distribuição maxwelliana de velocidades. Uma vez perturbado, de modo que a distribuição sofra modificações, após um certo tempo a distribuição maxwelliana tende a se reestabelecer novamente, em razão das colisões entre as partículas. Neste caso, o gás sofre uma *relaxação*, alcançando novamente uma distribuição de equilíbrio. No caso de um sistema estelar, a separação entre as “partículas” é normalmente muito grande, de modo que não ocorrem estritamente colisões entre as estrelas, mas suas órbitas podem ser afetadas e modificadas pelo campo gravitacional das demais estrelas. Portanto, essas interações funcionam como colisões, e tendem a produzir uma relaxação da distribuição de velocidades das estrelas. Em um sistema como um aglomerado globular (figura 2a), o tempo de relaxação é relativamente curto, de modo que a relaxação colisional é importante, e o sistema é relaxado. Já no caso de uma galáxia típica, o tempo de relaxação é maior que a idade do universo, de modo que essas galáxias não são sistemas relaxados. No primeiro caso, as colisões são importantes, e devem ser levadas em conta na análise dinâmica, enquanto que no segundo caso as colisões podem ser ignoradas em primeira aproximação. Em outras palavras, em sistemas relaxados, como alguns aglomerados globulares, devemos empregar um formalismo colisional de dinâmica estelar, enquanto que em sistemas não relaxados, como galáxias típicas, podemos usar uma dinâmica estelar sem colisões. Na realidade, uma distribuição maxwelliana só pode ser obtida se houver equilíbrio termodinâmico, como vimos no capítulo 2, seção 2.4. Entretanto, os sistemas auto-gravitantes não são estritamente compatíveis com o equilíbrio termodinâmico. Em um gás contido em um recipiente, as colisões entre as partículas do gás terminarão por estabelecer uma distribuição maxwelliana de velocidades ajustada ao equilíbrio termodinâmico. Em um sistema estelar relaxado isso não ocorre, e em equilíbrio termodinâmico a exigência de uma solução auto-consistente para um sistema auto-gravitante leva a resultados fisicamente inaceitáveis, de modo que um sistema estelar com um número finito de estrelas não pode relaxar a uma distribuição de velocidades característica do equilíbrio termodinâmico. Esta pode ser a razão da existência de buracos negros no interior das galáxias. Portanto, a análise rigorosa dos sistemas estelares dinâmicos é mais complexa do que pode ser tratado neste texto. Uma discussão deste problema pode ser encontrada em Choudhuri (2010, capítulo 7).

► EXEMPLO 8.1 - Fricção dinâmica

Um efeito importante da evolução colisional de sistemas dinâmicos é a chamada *fricção dinâmica*, que pode ser entendida a partir de conceitos simples. Para que uma estrela penetre o poço de potencial no centro de um sistema estelar, ela deve perder parte de sua energia cinética por algum processo friccional. Uma vez que colisões reais entre estrelas são improváveis, outro processo foi proposto inicialmente por Chandrasekhar (1943), segundo o qual a estrela sofre um arraste, ou fricção dinâmica, ao mover-se no conjunto das estrelas do sistema. Isto pode ser ilustrado pela figura 8.3 (Choudhuri 2010). Uma estrela movendo-se de P para Q atrai as estrelas próximas mais fortemente que as estrelas mais distantes. Assim, a densidade

de estrelas ao longo da trajetória PQ deve ser um pouco maior que nas regiões mais à frente, além do ponto Q. Portanto, ao mover-se de P para Q, a estrela sofre uma atração gravitacional mais intensa que tende a interromper seu movimento, o que constitui a *fricção dinâmica*.

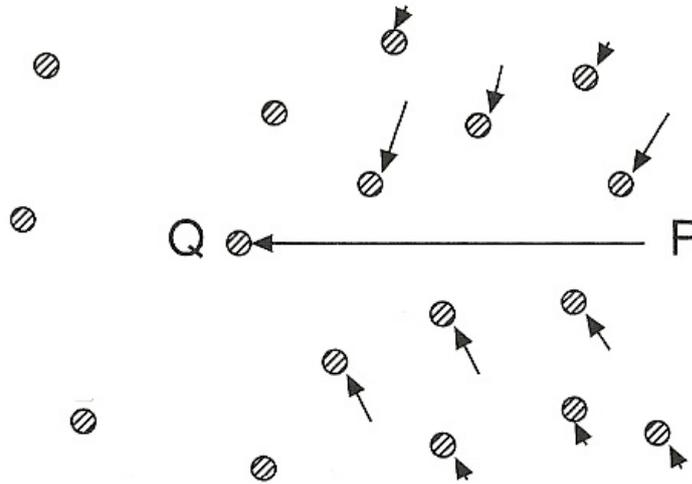


Figura 8.3 - Fricção dinâmica. (Choudhuri 2010)

8.3 O teorema do virial na dinâmica estelar

Vamos considerar agora o teorema do virial para descrever estatisticamente o comportamento dinâmico de um sistema composto por muitas partículas, ou seja, não vamos considerar partículas individuais, mas valores adequados para descrever o comportamento médio do sistema de partículas (cf. Harwit 2006). Para isso, vamos considerar um sistema composto por partículas de massa m_i situadas na posição \vec{r}_i e sob a ação da força \vec{F}_i . A força pode ser escrita como

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \dot{\vec{p}}_i \tag{8.1}$$

onde \vec{p}_i é a quantidade de movimento da partícula i . A energia cinética E_c do sistema é

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \tag{8.2}$$

Podemos então escrever a relação

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i + \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i = 2 E_c + \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \tag{8.3}$$

Vamos tomar as médias de ambos os membros de (8.3) em uma escala de tempo τ

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left[\frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i \right] dt = \langle 2 E_c + \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle \quad (8.4)$$

Vamos admitir que o sistema é isolado e estável, isto é, todos os seus membros permanecem indefinidamente membros do sistema, de modo que o vetor de posição \vec{r}_i é sempre finito. Da mesma forma, \vec{p}_i também é sempre finito, pois a energia total do sistema é finita. Portanto, a somatória $\sum \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$ é finita, assim como a integral em (8.4). Nesta equação o primeiro membro é uma quantidade finita dividida pela escala de tempo τ , que pode ser tão grande quanto se queira, ou seja, $\tau \rightarrow \infty$, de modo que o primeiro membro de (8.4) tende a zero. Nesse caso, podemos escrever

$$\langle 2 E_c + \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle = 2 \langle E_c \rangle + \langle \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle = 0 \quad (8.5)$$

O “virial”, ou “virial de Claussius” é definido como a metade do segundo termo do segundo membro desta equação, ou seja, $(1/2)\langle \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle$. Podemos considerar a força como derivável de um potencial

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla} E_p(\vec{r}_i) \quad (8.6)$$

onde $E_p(\vec{r}_i)$ é a energia potencial da massa m_i na posição \vec{r}_i . A equação (8.5) pode então ser escrita

$$2 \bar{E}_c + \langle - \sum_i \vec{\nabla} E_p(\vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i \rangle = 2 \bar{E}_c - \langle \sum_i \vec{\nabla} E_p(\vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i \rangle = 0 \quad (8.7)$$

onde usamos a notação \bar{E}_c para a energia cinética média. Para uma lei do tipo $F \propto r^{-2}$, temos que $E_p \propto r^{-1}$ e o vetor gradiente da energia potencial $\vec{\nabla} E_p$ é paralelo ao vetor de posição \vec{r}_i , de modo que

$$\sum_i \vec{\nabla} E_p(\vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i = \sum_i \frac{\partial E_p(\vec{r}_i)}{\partial \vec{r}_i} \vec{r}_i = - \sum_i \left[\frac{E_p(r_i)}{r_i} \right] r_i = - \sum_i E_p(r_i) \quad (8.8)$$

Chamando agora E_p a energia potencial total, tal que

$$E_p = \sum_i E_p(r_i) \quad (8.9)$$

$$\bar{E}_p = \langle \sum_i E_p(r_i) \rangle \quad (8.10)$$

podemos escrever, de (8.7)-(8.8)

$$2 \bar{E}_c + \bar{E}_p = 0 \quad (8.11)$$

que é a expressão do teorema do virial para um sistema de partículas, com aplicações importantes na Mecânica, Mecânica Estatística e Teoria Cinética dos Gases, como por exemplo na derivação da equação de estado de gases perfeitos e reais. Vemos que a forma do teorema do virial para a dinâmica estelar, equação (8.11), é idêntica à forma deste teorema para a estrutura estelar, dada pela equação (6.18), onde a energia térmica substitui a energia cinética. Como a energia térmica é essencialmente a energia cinética das partículas do gás nas estrelas, vemos que as duas relações têm basicamente o mesmo significado.

Uma dedução equivalente pode ser encontrada em Choudhuri (2010, seção 7.2), onde se mostra que, para um sistema de partículas em estado estacionário, existe uma relação entre a energia potencial gravitacional total \bar{E}_p e a energia cinética total \bar{E}_c do sistema dada por 8.11. Esta relação é válida tanto para sistemas colisionalmente relaxados ou não relaxados, desde que estejam ligados gravitacionalmente em um estado estacionário, isto é, suas dimensões não sofrem modificações com o tempo.

► EXEMPLO 8.2 - O teorema do virial e a massa dos aglomerados estelares

Vamos considerar uma aplicação do teorema do virial a um aglomerado estelar. Seja N o número de estrelas de massa m em um aglomerado. O número de pares de estrelas do sistema é

$$N_p = \frac{N(N - 1)}{2} \simeq \frac{N^2}{2} \tag{8.12}$$

A energia potencial gravitacional dos pares de estrelas do sistema é

$$\bar{E}_p \simeq -\frac{G m^2}{\bar{R}} N_p \tag{8.13}$$

onde \bar{R} é a distância média entre as estrelas do par, tal que

$$\bar{R} \simeq R \tag{8.14}$$

onde R é o raio do aglomerado. A energia cinética média total do aglomerado é

$$\bar{E}_c \simeq \frac{1}{2} N m \bar{v}^2 \tag{8.15}$$

onde \bar{v}^2 é a velocidade quadrática média das estrelas do aglomerado. Usando (8.11)-(8.15) obtemos

$$N m \bar{v}^2 \simeq \frac{N^2 G m^2}{2 R}$$

de modo que

$$\bar{v}^2 \simeq \frac{N G m}{2 R} \simeq \frac{G M}{2 R} \tag{8.16}$$

onde $M \simeq N m$ é a massa total do aglomerado. Esta massa pode ser obtida de (8.16) conhecendo (i) a dispersão de velocidades das estrelas do aglomerado, geralmente por meio da aplicação do efeito Doppler em linhas espectrais, e (ii) o tamanho do aglomerado, que pode ser obtido a partir de sua distância e de suas dimensões angulares.



Figura 8.4 - O aglomerados globular M13 = NGC 6205 em Hercules. (M. Burali/T. Capecchi/M. Mancini)

Como exemplo, vamos considerar o aglomerado globular M13 = NGC 6205 em Hercules (figura 8.4). Este aglomerado tem um tempo de relaxação médio da ordem de 1 Gano, bem abaixo da idade da Galáxia. A dispersão de velocidades é da ordem de $v \simeq 8$ km/s, e o aglomerado está a uma distância de 8 kpc, com um diâmetro angular de cerca de 8 minutos de arco. Portanto, seu raio é aproximadamente,

$$R \simeq \left(\frac{4}{60} \frac{\pi}{180} \right) (8 \times 10^3 \times 3.09 \times 10^{18}) \simeq 2.9 \times 10^{19} \text{ cm} = 9.3 \text{ pc}$$

Aplicando a equação (8.16) obtemos para a massa total do aglomerado

$$M \simeq \frac{2 R \bar{v}^2}{G} \simeq \frac{(2) (2.9 \times 10^{19}) (8 \times 10^5)^2}{6.67 \times 10^{-8}} \simeq 5.6 \times 10^{38} \text{ g} = 2.8 \times 10^5 M_{\odot}$$

Podemos agora inverter o raciocínio e considerar o aglomerado com raio 9.3 pc e massa $2.8 \times 10^5 M_{\odot}$. Se sua dispersão de velocidade fosse menor que cerca de 8 km/s, a gravidade dominaria e o aglomerado iria encolher. Com isto, a energia potencial gravitacional diminuiria, aumentando a energia cinética das estrelas do aglomerado. Assim, a dispersão de velocidade aumentaria, até atingir o valor de 8 km/s suficiente para satisfazer a equação (8.16) e interromper a contração. Vemos que a aplicação desta equação só produz resultados corretos se o sistema estiver ligado gravitacionalmente, ou virializado.

► EXEMPLO 8.3 - O teorema do virial e a massa dos aglomerados de galáxias

Aglomerados ricos em galáxias têm tipicamente algumas centenas de galáxias, e dimensões da ordem de 1–3 Mpc, como no caso do Aglomerado de Hydra (figura 8.5). Podemos estimar a massa dinâmica de um aglomerado de galáxias e a massa média das galáxias do aglomerado a partir do teorema do virial (ver por exemplo Schneider 2006).



Figura 8.5 - O Aglomerado de Hydra. (David Malin, AAO)

Vamos admitir que o aglomerado é gravitacionalmente isolado e estável, ou seja, está em equilíbrio dinâmico. A primeira hipótese implica na ausência de massas invisíveis, por exemplo na forma de matéria intergaláctica, galáxias anãs invisíveis, poeira, etc. Os aglomerados são ligados gravitacionalmente, pois a escala de tempo dinâmica dos aglomerados, definida como o tempo médio para que uma galáxia possa cruzar todo o aglomerado (também chamado “tempo de cruzamento”, é menor que a idade do Universo. Se os aglomerados não fossem ligados, eles teriam sido dissolvidos em uma escala de tempo da ordem da escala de tempo dinâmica. Os aglomerados ricos têm dimensões típicas de 2 Mpc, e as velocidades típicas das galáxias são da ordem de 1000 km/s. Portanto, a escala de tempo desses aglomerados pode ser estimada por $\tau \sim 2 \times 10^9$ anos, menor que a idade estimada para o Universo, que é da ordem de 14 Gano.

A energia cinética média \bar{E}_c do aglomerado depende das massas e velocidades das galáxias que compõem o aglomerado,

$$\bar{E}_c \simeq \frac{1}{2} M \sigma_v^2 \quad (8.17)$$

onde M é agora a massa total do aglomerado e σ_v^2 é a dispersão de velocidades quadrática média das galáxias componentes. A energia potencial média \bar{E}_p depende das massas e posições das galáxias,

$$\bar{E}_p \simeq -\frac{G M^2}{R} \quad (8.18)$$

onde R é o raio gravitacional do aglomerado. As posições e dispersões das velocidades radiais dos objetos do aglomerado podem ser obtidas a partir das observações, de modo que a massa total do aglomerado pode ser obtida aplicando o teorema do virial (8.11), ou seja,

$$M \sigma_v^2 \simeq \frac{G M^2}{R} \quad (8.19)$$

$$M \simeq \frac{\sigma_v^2 R}{G} \quad (8.20)$$

Considerando o número N de galáxias do aglomerado, a massa média dessas galáxias pode ser obtida por

$$m \simeq \frac{M}{N} \simeq \frac{\sigma_v^2 R}{N G} \quad (8.21)$$

As dispersões de velocidades dos aglomerados ricos são tipicamente de 400–1400 km/s, e seus raios gravitacionais são da ordem de 1–3 Mpc. Com $\sigma_v \simeq 1000$ km/s e $R \simeq 2$ Mpc, as massas totais dos aglomerados são da ordem de $M \simeq 9.3 \times 10^{47}$ g $\simeq 4.7 \times 10^{14} M_\odot$. Se o aglomerado tiver cerca de $N \simeq 100$ galáxias, a massa média de cada uma delas será $m \simeq M/N \simeq 4.7 \times 10^{12} M_\odot$.

8.4 Relaxação colisional

Uma determinação rigorosa do tempo de relaxação em sistemas estelares pode ser encontrada em Binney e Tremaine (2008, capítulo 4). Vamos aqui obter uma estimativa simples desta escala de tempo, considerando um sistema estelar (galáxia ou aglomerado) contendo n estrelas por unidade de volume, cada uma delas com massa m , movendo-se com velocidade v (cf. Choudhuri 2010, capítulo 7).

Cada estrela move-se segundo o campo gravitacional produzido pelas demais estrelas. Se houver uma outra estrela suficientemente próxima, a órbita da estrela considerada sofrerá uma deflexão causada pelo campo gravitacional da estrela vizinha, o que constitui uma “colisão”, embora as estrelas sejam pequenas em relação às distâncias de separação entre elas para haver realmente uma colisão, como no caso de bolas de bilhar. Considerando que uma estrela 1 de massa m e velocidade v tem

quantidade de movimento $p = m v$, podemos considerar que uma outra estrela 2 está suficientemente próxima para haver uma “colisão” quando sua distância até a trajetória original da estrela 1 seja igual ou menor a uma certa escala de distância b , tal que a deflexão causada na estrela 1 produza uma modificação na sua quantidade de movimento dada por $\Delta p \simeq m v$, ou seja, a variação na quantidade de movimento da estrela 1 deve ser da ordem da sua quantidade de movimento original.

Quando as duas estrelas estão próximas, a uma distância b uma da outra, a força gravitacional entre elas é da ordem de $G m^2/b^2$. Esta força atua por um intervalo de tempo da ordem de b/v . Portanto, a variação da quantidade de movimento da estrela 1 deve ser aproximadamente

$$\Delta p \simeq \frac{G m^2}{b^2} \frac{b}{v} = \frac{G m^2}{b v} \tag{8.22}$$

Como devemos ter $\Delta p \simeq m v$, obtemos

$$\frac{G m^2}{b v} \simeq m v \tag{8.23}$$

ou seja, a distância limite para haver colisões deve ser

$$b \simeq \frac{G m^2}{m v^2} \simeq \frac{G m}{v^2} \tag{8.24}$$

Movendo-se à velocidade v , a estrela 1 varre um volume dado por $\pi b^2 v$ por unidade de tempo. Havendo n estrelas por unidade de volume, o número total de colisões por unidade de tempo é $n \pi b^2 v$, de modo que o tempo médio entre as colisões é o inverso deste valor, ou seja,

$$t_r \simeq \frac{1}{n \pi b^2 v} \tag{8.25}$$

Esta escala de tempo caracteriza uma modificação na distribuição de velocidades original, ou seja, t_r é essencialmente o *tempo de relaxação colisional* procurado. Considerando (8.24), temos

$$t_r \simeq \frac{1}{n \pi b^2 v} \simeq \frac{v^4}{n \pi v G^2 m^2}$$

$$t_r \simeq \frac{v^3}{\pi G^2 n m^2} \tag{8.26}$$

Para obter estimativas numéricas, vamos considerar $m = M_\odot$, medir v em km/s, n em parsec⁻³ e t_r em anos. Obtemos

$$t_r \simeq 1.7 \times 10^{10} \frac{v^3}{n} \tag{8.27}$$

► EXEMPLO 8.4 - O tempo de relaxação para a Galáxia

Vamos considerar alguns exemplos de sistemas estelares e estimar o tempo de relaxação usando a expressão simplificada (8.27). Para a nossa Galáxia, temos velocidades aproximadamente de $v \simeq 100$ km/s, da ordem das velocidades de rotação no disco galáctico. Tomando $N \simeq 200 \times 10^9$ estrelas concentradas essencialmente no disco espesso, com raio $R \simeq 30$ kpc e altura $h \simeq 1$ kpc, temos um volume

$$V \simeq \pi R^2 h \simeq (3.14) (30 \times 10^3 \times 3.09 \times 10^{18})^2 (10^3 \times 3.09 \times 10^{18}) \simeq 8.3 \times 10^{67} \text{ cm}^3$$

$$n \simeq \frac{200 \times 10^9}{8.3 \times 10^{67}} \simeq 2.4 \times 10^{-57} \text{ cm}^{-3} \simeq 0.07 \text{ pc}^{-3} \simeq 0.1 \text{ pc}^{-3}$$

Com $v \simeq 100$ km/s e $n \simeq 0.1 \text{ pc}^{-3}$ em (8.27) obtemos $t_r \simeq 1.7 \times 10^{17}$ ano. Vemos que esta escala é muito mais longa que a idade da Galáxia, estimada em 14 Gano. Portanto, nosso sistema estelar não é um sistema relaxado colisionalmente.

► EXEMPLO 8.5 - O tempo de relaxação para aglomerados abertos

Vamos agora considerar um aglomerado aberto como M11 (figura 8.6). O aglomerado tem cerca de 7000 estrelas, e seu raio é de aproximadamente $R \simeq 3$ pc, de modo que

$$n \simeq \frac{N}{4 R^3} \simeq \frac{7000}{(4) (27)} \simeq 65 \text{ pc}^{-3} \tag{8.28}$$

Adotando velocidades $v \simeq 1.2$ km/s, temos de (8.27)

$$t_r \simeq 1.7 \times 10^{10} \frac{(1.2)^3}{65} \simeq 4.5 \times 10^8 \text{ ano}$$

Esta escala é menor que a idade da Galáxia, de modo que um aglomerado com estas condições pode estar relaxado. Para um aglomerado com $v \simeq 0.5$ km/s e $n \simeq 1.0 \text{ pc}^{-3}$, temos $t_r \simeq 10^9$ ano.



Figura 8.6 - O Aglomerado aberto M11 (NGC 6705). (CFHT)

► EXEMPLO 8.6 - O tempo de relaxação para aglomerados globulares

Para um aglomerado globular típico, temos $v \simeq 10$ km/s e $n \simeq 10^3$ pc⁻³, de modo que o tempo de relaxação é $t_r \simeq (1.7 \times 10^{10})(10^3/10^3) \simeq 1.7 \times 10^{10}$ ano. Assim, o aglomerado poderá estar relaxado, pelo menos parcialmente. A tabela 8.1 mostra os tempos de relaxação estimados para diversos aglomerados globulares usando um procedimento mais rigoroso que o delineado acima. Esses tempos foram estimados na posição R_h , onde metade da massa do aglomerado está contida (Cox 2000).

Nome	$\log t_r$ (ano)
NGC 104	9.24
NGC 288	8.99
NGC 362	8.43
NGC 2419	10.28
NGC 2298	8.36
NGC 5272	9.02

Tabela 8.1 - Tempos de relaxação para aglomerados globulares.

8.5 Tempo de cruzamento e tempo de relaxação

Vamos considerar uma estrela de massa m movendo-se com velocidade v em um sistema estelar de raio R contendo N estrelas. Podemos definir o *tempo de cruzamento* por

$$t_c \simeq \frac{R}{v} \tag{8.29}$$

Usando (8.26), temos

$$\frac{t_r}{t_c} \simeq \frac{v^3}{\pi G^2 n m^2} \frac{v}{R} \simeq \frac{v^4}{\pi G^2 n m^2 R} \tag{8.30}$$

Se o sistema estiver virializado, podemos usar uma relação como (8.16), ou seja,

$$v^2 \simeq \frac{GM}{R} \simeq \frac{GNm}{R} \tag{8.31}$$

De (8.30) e (8.31)

$$\frac{t_r}{t_c} \simeq \left[\frac{G^2 N^2 m^2}{R^2} \right] \left[\frac{1}{\pi G^2 n m^2 R} \right] \simeq \frac{N^2}{\pi n R^3} \tag{8.32}$$

Em ordem de grandeza

$$N \simeq n \pi R^3 \tag{8.33}$$

temos

$$\frac{t_r}{t_c} \simeq N \tag{8.34}$$

Isto é, em um sistema estelar virializado com N estrelas, o tempo de relaxação colisional é cerca de N vezes maior que o tempo de cruzamento para uma estrela típica do sistema. Por exemplo, no caso do aglomerado globular do Exemplo 8.6, temos $v \simeq 10$ km/s e $t_r \simeq 1.7 \times 10^{10}$ ano. Podemos obter uma densidade $n \simeq 10^3$ pc⁻³ com $N \simeq 10^5$ em um raio R dado por

$$R \simeq \left(\frac{N}{4n} \right)^{1/3} \simeq \left[\frac{10^5}{(4)(10^3)} \right]^{1/3} \simeq 2.9 \text{ pc}$$

Portanto,

$$t_c \simeq \frac{R}{v} \simeq \frac{2.9 \text{ pc}}{10 \text{ km/s}} = \frac{(2.9)(3.09 \times 10^{18})}{(10)(10^5)(3.16 \times 10^7)} \simeq 2.9 \times 10^5 \text{ ano}$$

$$\frac{t_r}{t_c} \simeq \frac{1.7 \times 10^{10}}{2.9 \times 10^5} \simeq 5.9 \times 10^4$$

que é cerca de 70% abaixo do valor considerado, $N \simeq 10^5$, um resultado razoável, considerando que a expressão (8.34) é aproximada.

8.6 A equação de transporte de Boltzmann

(a) A equação de Boltzmann na ausência de colisões

Vamos considerar a equação de transporte de Boltzmann em sua forma mais simples, na ausência de colisões. Veremos que esta equação é um caso especial do teorema de Liouville, que analisamos na seção 7.3. Nesta seção vamos adotar o tratamento dado por Reif (1965, capítulo 13).

A teoria dos processos de transporte supõe que seja conhecida a função de distribuição das partículas do sistema, $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, tal que $f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{r} d^3\vec{v}$ represente o número médio de partículas localizadas entre \vec{r} e $\vec{r} + d\vec{r}$, com velocidades entre \vec{v} e $\vec{v} + d\vec{v}$, no tempo t . Esta função dá uma descrição completa do estado macroscópico do gás, de modo que qualquer problema de transporte possa ser resolvido a partir do conhecimento desta função. Vamos admitir que cada partícula de massa m esteja sob a ação de uma força $\vec{F}(\vec{r}, t)$, a qual não depende da velocidade das partículas. Esta força pode ser, por exemplo, de origem gravitacional ou devida a campos elétricos. Vamos também desprezar as colisões ou outras interações que poderiam ocorrer entre as partículas do gás. Vamos considerar as partículas que, no tempo t , têm posições e velocidades nos intervalos $(\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r})$ e $(\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v})$, respectivamente, ou seja, no intervalo designado por $d^3\vec{r} d^3\vec{v}$. Em um tempo $t' = t + dt$ após um intervalo de tempo dt , as posições e velocidades das partículas seriam

$$\vec{r}' = \vec{r} + \dot{\vec{r}} dt = \vec{r} + \vec{v} dt \tag{8.35}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} + \dot{\vec{v}} dt = \vec{v} + \frac{\vec{F}}{m} dt \tag{8.36}$$

Na ausência de colisões, temos

$$f(\vec{r}', \vec{v}', t') d^3\vec{r}' d^3\vec{v}' = f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{r} d^3\vec{v} \tag{8.37}$$

Nas condições admitidas, os elementos de volume são essencialmente os mesmos, em uma primeira aproximação,

$$d^3\vec{r}' d^3\vec{v}' = d^3\vec{r} d^3\vec{v} \tag{8.38}$$

Portanto, temos

$$f(\vec{r}', \vec{v}', t') = f(\vec{r}, \vec{v}, t) \tag{8.39}$$

$$f(\vec{r} + \dot{\vec{r}} dt, \vec{v} + \dot{\vec{v}} dt, t + dt) - f(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0 \tag{8.40}$$

Em um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z , temos

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial v_x} \dot{v}_x + \frac{\partial f}{\partial v_y} \dot{v}_y + \frac{\partial f}{\partial v_z} \dot{v}_z \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \right] dt = 0 \quad (8.41)$$

que pode ser escrita

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (8.42)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (8.43)$$

$$Df = 0 \quad (8.44)$$

onde definimos

$$Df = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \quad (8.45)$$

Os termos $\partial f / \partial \vec{r}$ e $\partial f / \partial \vec{v}$ denotam os gradientes com relação a \vec{r} e \vec{v} , respectivamente. As relações (8.40)–(8.45) são formas da *Equação de transporte de Boltzmann na ausência de colisões*, também chamada Equação de Vlasov na física de plasmas, mostrando que a função de distribuição f permanece inalterada ao longo de uma trajetória no espaço de fase. Vemos que esta equação representa um caso particular do teorema de Liouville. De fato, ela pode ser obtida usando o mesmo procedimento da seção 7.3 para obter o teorema de Liouville (ver Reif 1965, capítulo 13).

► EXEMPLO 8.7 - A equação de Boltzmann na presença de um campo magnético

Na presença de um campo magnético, as forças têm uma dependência com a velocidade; por exemplo, a força de Lorentz pode ser escrita como $F_L = (q/c) \vec{v} \times \vec{B}$, onde q denota a carga elétrica da partícula e \vec{B} a intensidade do campo. Para generalizar a equação de Boltzmann na ausência de colisões para incluir essas forças, podemos introduzir uma função de distribuição $f'(\vec{r}, \vec{p}, t)$, envolvendo a quantidade de movimento \vec{p} das partículas, em vez de sua velocidade. Pelo teorema de Liouville, a função f deve satisfazer a equação

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{p}} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (8.46)$$

onde definimos a quantidade de movimento como

$$\vec{p} = m \vec{v} + \frac{q}{c} \vec{A} \quad (8.47)$$

em termos de um potencial vetor \vec{A} .

(b) A equação de Boltzmann com colisões

Vamos agora relaxar a hipótese de ausência de colisões, que levou à derivação da equação de Boltzmann na forma (8.40)–(8.45). Vamos considerar novamente as partículas que, no tempo t , têm posições e velocidades no intervalo $d^3\vec{r} d^3\vec{v}$ em torno de \vec{r} e \vec{v} . Vamos então considerar a situação em um intervalo de tempo dt após o tempo t . Se não houver colisões, as partículas irão se mover sob a ação das forças externas aplicadas, alcançando uma posição no entorno de $\vec{r}' = \vec{r} + \dot{\vec{r}}dt$ e $\vec{v}' = \vec{v} + \dot{\vec{v}}dt$ de acordo com a equação (8.37). Levando em conta as colisões, o número de partículas no intervalo considerado de posição e velocidade é também afetado pelas colisões, pois algumas partículas fora deste intervalo podem ser lançadas nele pelas colisões, da mesma forma que partículas do intervalo podem ser retiradas dele pelas colisões. Seja $D_c f d^3\vec{r} d^3\vec{v}$ o aumento do número de partículas no intervalo $d^3\vec{r} d^3\vec{v}$ por unidade de tempo devido a esse processo. Nesse caso, podemos dizer que o número de partículas após $t + dt$ deve ser igual ao número das partículas que se deslocaram para o novo intervalo pela ação da força externa *somado* ao número líquido de partículas que o fizeram devido às colisões. Portanto, podemos escrever

$$f(\vec{r} + \dot{\vec{r}}dt, \vec{v} + \dot{\vec{v}}dt, t + dt) d^3\vec{r}' d^3\vec{v}' = f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{r} d^3\vec{v} + D_c f d^3\vec{r} d^3\vec{v} dt \quad (8.48)$$

Lembrando (8.38), temos

$$Df = D_c f \quad (8.49)$$

que pode também ser escrita

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = D_c f \quad (8.50)$$

que é a equação de Boltzmann na presença de colisões, que pode ser comparada com a equação (8.43). Naturalmente, a forma explícita desta equação é muito mais complexa, pois a expressão para $D_c f$ deve incluir as integrais envolvendo a função f que descrevem como as moléculas entram ou saem do intervalo considerado devido às colisões.

► **EXEMPLO 8.8** - A equação de Boltzmann na aproximação do tempo de relaxação

Vamos considerar o caso simples em que o efeito das colisões é o de restaurar uma situação de equilíbrio local preexistente, caracterizada pela função de distribuição $f^o(\vec{r}, \vec{v}, t)$. Vamos admitir que, uma vez estabelecida uma nova função de distribuição $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, as colisões tendem a restaurar a distribuição original de equilíbrio $f^o(\vec{r}, \vec{v}, t)$ exponencialmente em uma escala de tempo de relaxação τ , que é da ordem do tempo médio entre as colisões. Nesse caso temos

$$D_c f = -\frac{f - f^o}{\tau} \tag{8.51}$$

Se $f = f^o$, temos de (8.51) que $D_c f = 0$, e caímos no caso anterior, sem colisões. Substituindo (8.49) em (8.50), temos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = -\frac{f - f^o}{\tau} \tag{8.52}$$

que é a equação de Boltzmann na presença de colisões com a aproximação do tempo de relaxação.

8.7 A equação de Boltzmann sem colisões em sistemas estelares

Na seção anterior analisamos a equação de Boltzmann na ausência de colisões, obtendo a expressão (8.45). No caso de um sistema estelar composto de partículas (estrelas) idênticas, com a mesma massa, caracterizadas pelos vetores de posição \mathbf{x} e velocidade \mathbf{v} , com uma função de distribuição $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, podemos escrever, de (8.45)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \dot{v}_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0 \tag{8.53}$$

que é novamente a equação de Boltzmann na ausência de colisões, válida se a dinâmica no espaço de fase pode ser obtida a partir de uma Hamiltoniana da forma $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$. Isto acontece se as estrelas movem-se ao longo de um campo gravitacional “suave”, produzido pelo conjunto das demais estrelas, isto é, se não são afetadas por colisões que alteram significativamente a Hamiltoniana do sistema. Se isto não for verdadeiro, o segundo termo de (8.53) será diferente de zero.

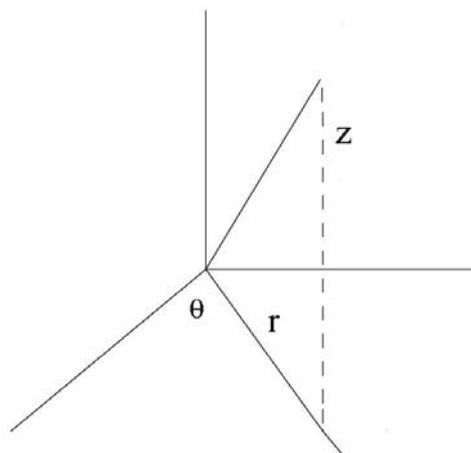


Figura 8.7 - Coordenadas cilíndricas.

► EXEMPLO 8.9 - A equação de Boltzmann em coordenadas cilíndricas

Vamos obter a equação de Boltzmann sem colisões (8.53) em um sistema de coordenadas cilíndricas (figura 8.7), aplicável, por exemplo, a uma galáxia de disco como a nossa. Definindo $\Pi = \dot{r}$, $\Theta = r \dot{\theta}$, $Z = \dot{z}$, temos de (8.53),

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \Pi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\Theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + Z \frac{\partial f}{\partial z} + \dot{\Pi} \frac{\partial f}{\partial \Pi} + \dot{\Theta} \frac{\partial f}{\partial \Theta} + \dot{Z} \frac{\partial f}{\partial Z} = 0 \quad (8.54)$$

Levando em conta a Lagrangiana do sistema, esta equação pode ser escrita como

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \Pi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\Theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + Z \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\Theta^2}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial \Pi} - \left(\frac{\Pi \Theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial \Theta} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial Z} = 0 \quad (8.55)$$

onde $\Phi(r, \theta, z)$ é o potencial gravitacional do sistema na posição r, θ, z . Uma discussão detalhada da obtenção da equação (8.55) pode ser encontrada em Choudhuri (2010, capítulo 7) e Goldstein et al. (2001).

Conhecendo a função de distribuição f podemos obter informações sobre a dinâmica do sistema a partir da equação (8.55), mas precisamos ainda conhecer as condições iniciais, ou alguma constante do movimento, que sejam independentes da trajetória. Por exemplo, no caso considerado, essas constantes poderiam ser a energia total E e a componente z da quantidade de movimento angular, L_z , de modo que a função de distribuição tenha a forma $f(E, L_z)$, que deve satisfazer (8.55). Uma vez que diversas funções de E e L_z podem satisfazer as condições de auto-consistência, a equação (8.55) não terá uma solução única.

A equação (8.55) pode também ser aplicada a uma galáxia axisimétrica como a nossa, considerada em estado estacionário. Isto leva a uma simplificação nesta equação, que se reduz às *equações de Jeans*, usadas para analisar o movimento das estrelas na vizinhança solar. Por exemplo, o limite de Oort, que vimos na seção 7.4 como uma aplicação do teorema de Liouville, pode também ser obtido a partir das equações de Jeans. Uma discussão dessas equações com algumas aplicações aos objetos da vizinhança solar pode ser encontrada em Choudhuri (2010, capítulo 7).

EXERCÍCIOS

8.1 Mostre que o teorema do virial pode também ser escrito na forma

$$\bar{E}_c = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

8.2 O Aglomerado de Coma Berenicis está a uma distância de cerca de 99 Mpc, e seu diâmetro aparente é de cerca de 3 graus. A dispersão de velocidades radiais

do aglomerado de Coma Berenicis, dada por $\sigma_v \simeq (1/M) \sum m_i v_i^2 \simeq 1000$ km/s, onde M é a massa total do aglomerado, m_i a massa das galáxias componentes, e v_i sua velocidade. (a) Estime seu raio em Mpc. (b) Estime a massa total do aglomerado. (c) O aglomerado tem aproximadamente 1000 galáxias. Estime a massa média dessas galáxias.

8.3 Prove a equação (8.27).

8.4 Considere o aglomerado NGC 104, e suponha que ele contenha cerca de 10^5 estrelas em um raio da ordem de $R \simeq 3$ pc. Admitindo que as velocidades das estrelas são da ordem de $v \simeq 5$ km/s, qual seria seu tempo de relaxação? Compare seu resultado com os dados da tabela 8.1.

8.5 O aglomerado aberto Trumpler 37 tem um raio da ordem de 5.7 pc e a dispersão de velocidades das estrelas é de 1.4 km/s. Estime o tempo de cruzamento do aglomerado e sua massa total. Compare seu tempo de cruzamento com o valor mais correto determinado na literatura, $t_c \simeq 3.5 \times 10^6$ ano e com uma estimativa da idade do aglomerado, $t \simeq 5.0 \times 10^6$ ano.

Referências

- Binney, J., Merrifield, M. 1998, *Galactic Astronomy*, Princeton University Press
- Binney, J., Tremaine, S. 2008, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press, 2a. ed.
- Carroll, B. W., Ostlie, D. A. 2006, *An Introduction to Modern Astrophysics*, Benjamin Cummings
- Chandrasekhar, S. 1943, *Astrophys. J.* **97**, 255
- Choudhuri, A. R. 2010, *Astrophysics for physicists*, Cambridge University Press
- Cox, A. N., 2000, *Allen's Astrophysical Quantities*, AIP
- Goldstein, H., Poole, C. P., Safko, J. L. 2001, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 3a. ed.
- Harwit, M. 2006, *Astrophysical Concepts*, Springer, 4a. ed.
- Lima Neto, G. B. 2000, *Introdução à Dinâmica estelar*, Notas de aulas, IAG/USP
- Mihalas, D., Binney, J. 1981, *Galactic Astronomy*, Freeman
- Reif, F. 1965, *Fundamentals of statistical and thermal physics*, McGraw-Hill [reedição Waveland Press 2008]
- Schneider, P. 2006, *Extragalactic astronomy and cosmology: An introduction*, Springer

CAPITULO 9 – TRANSPORTE DE ENERGIA NO MEIO INTERESTELAR

9.1 Introdução

Imagens detalhadas da Via Láctea mostram algumas características interessantes na estrutura de nossa Galáxia, como a região central em Sagittarius, que aparece brilhante, e uma faixa escura ao longo do plano, constituída de nuvens contendo gás e poeira interestelar (figura 9.1).

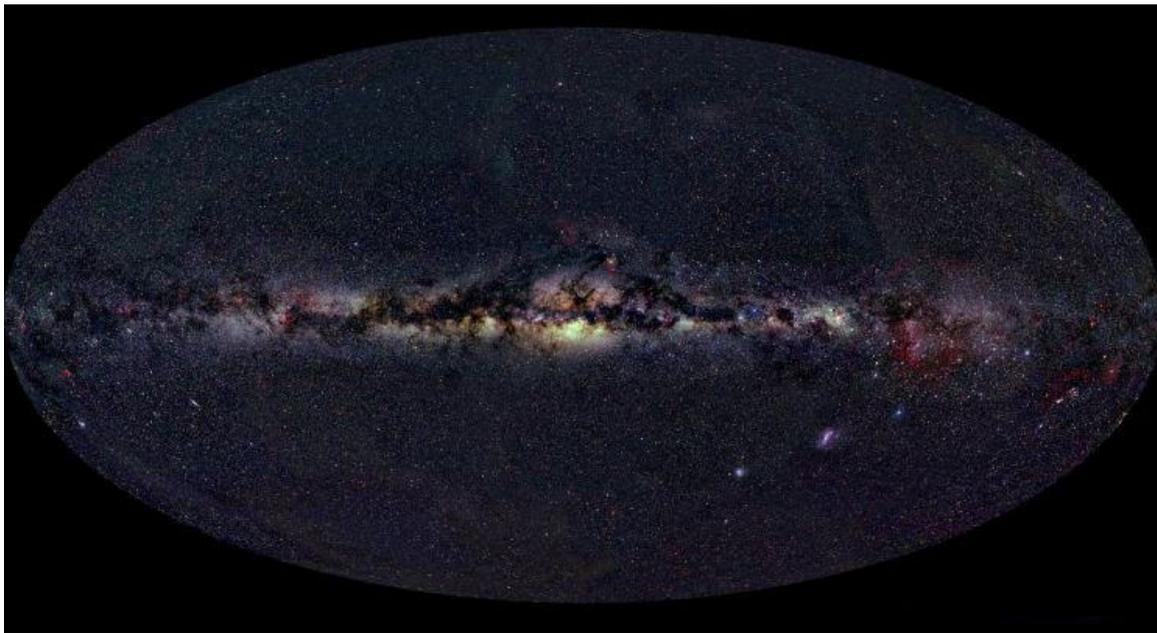


Figura 9.1 - A Via Láctea. (Axel Mellinger)

Nossa concepção da Galáxia inclui 3 componentes principais: o *bojo*, que contém em seu interior um núcleo, o *disco*, onde estão localizados os braços espirais, e que se subdivide em um disco fino e um disco espesso, e o *halo*, onde se distribuem os aglomerados globulares mais velhos (figura 9.2). Pode também conter uma *barra* central com dimensões da ordem de 4 kpc. O disco da Galáxia tem dimensões aproximadas da ordem de 30 kpc, e o sistema solar está localizado a uma distância entre 7 e 8 kpc do centro. O disco fino tem espessura variável, com cerca de 100 pc na região interna e até 400 pc nas regiões mais externas, caracterizando uma distorção (*warp*) nesta região. O disco espesso pode alcançar alturas da ordem de até 1 kpc. O Sol, a vizinhança solar, e todo o material incluído no disco fino constituem o *plano galáctico*.

Os principais elementos componentes da Galáxia são: as *estrelas*, o *campo de radiação* a elas associado, o *meio interestelar*, compreendendo gás e poeira, o *campo magnético* galáctico, e os *raios cósmicos*.

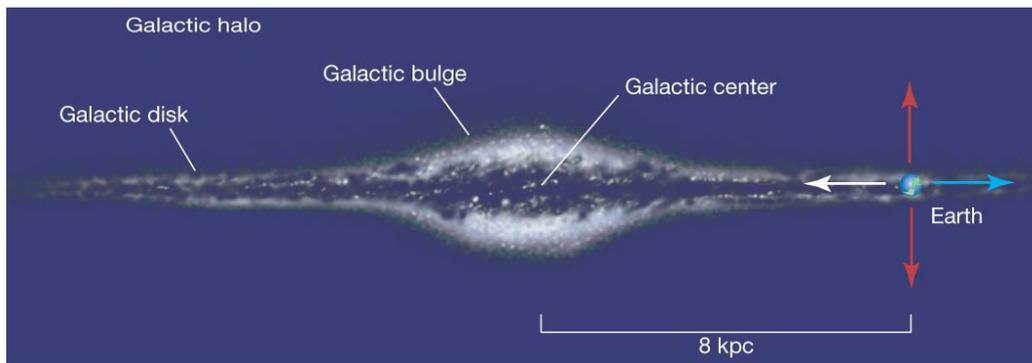


Figura 9.2 - Componentes da Galáxia. (Pearson Education)

Neste capítulo estaremos interessados em algumas propriedades do meio interestelar, principalmente na estrutura das nuvens interestelares, seus processos de aquecimento e resfriamento, ou seja, o transporte de energia envolvendo outras fontes, bem como nas instabilidades que levam à sua formação e à formação de estrelas. Estas regiões concentram-se essencialmente no disco galáctico, onde uma taxa lenta de formação estelar ainda persiste, em contraposição a outras regiões galácticas, como o halo, onde a exaustão do gás praticamente interrompeu a formação estelar. No disco galáctico podemos mapear a taxa de formação estelar (SFR de *star formation rate*) ao longo do disco, como pode ser visto por exemplo na figura 9.3.

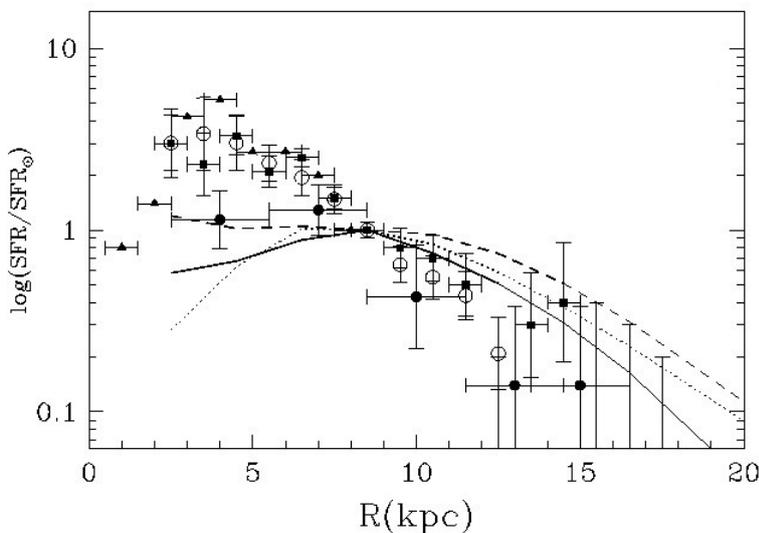


Figura 9.3 - Formação estelar ao longo do disco galáctico. (L. Portinari, C. Chiosi)

Partes deste capítulo são discutidas em maiores detalhes em Maciel (2002) e Maciel (2011). Referências básicas sobre a física do meio interestelar incluem Spitzer (1978), Dyson e Williams (1997), Scheffler e Elsässer (1988), Kwok (2007), Lequeux (2004), Tielens (2005), Dopita e Sutherland (2003). Textos mais elementares são Wynn-Williams (1992) e Carroll e Ostlie (2006).

9.2 Estrutura do meio interestelar

Embora concentrado principalmente no disco, o material interestelar tem uma distribuição heterogênea e fragmentária. Vastas regiões do disco são preenchidas por um gás difuso, no qual pode-se observar a existência de condensações de muitos tipos diferentes. Algumas destas condensações estão associadas a estrelas jovens e aos braços espirais, mostrando o vínculo entre o meio interestelar e a formação das estrelas (figura 9.4). Outras ocorrem nas vizinhanças de estrelas evoluídas, tanto estrelas de massa intermediária como as de grande massa, indicando o estágio final de sua evolução.

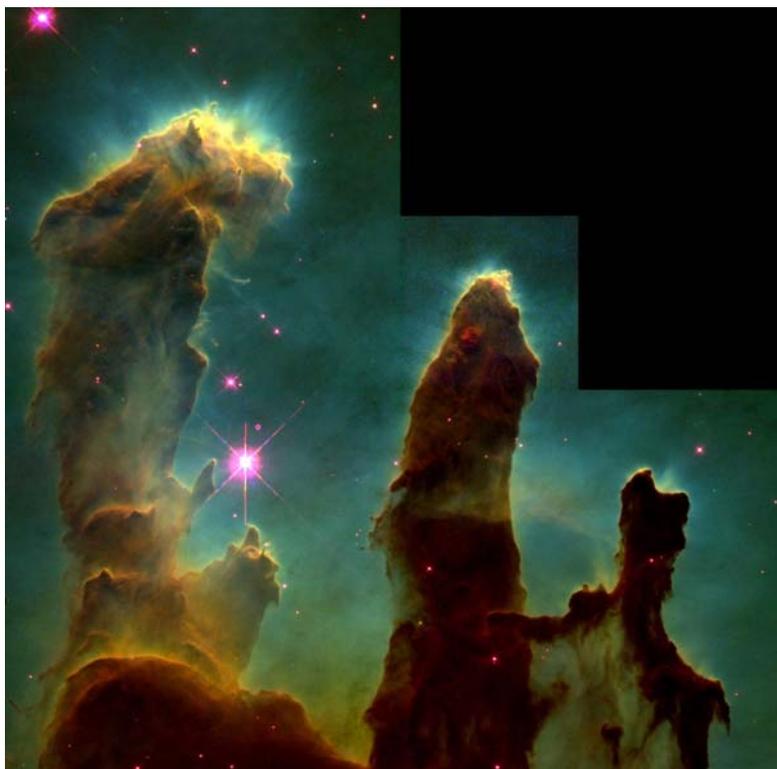


Figura 9.4 - Nebulosa da Águia, com regiões de formação estelar e nebulosas escuras. (Hubble Space Telescope)

(a) A fauna interestelar

As estrelas da nossa Galáxia ocupam um volume esférico maior que 10^{68} cm^3 , no qual está imerso um *disco* achatado com um volume da ordem de 10^{67} cm^3 . O meio interestelar também ocupa este volume, mas a maior parte de sua massa está concentrada em um disco mais fino, como observado em galáxias externas, com volume da ordem de 10^{66} cm^3 e uma espessura da ordem de 300 pc. Nesta região

existem muitas estrelas brilhantes, especialmente de tipo espectral O e B. Portanto, o componente mais óbvio do meio interestelar é o *fóton*, em especial o fóton ultravioleta produzido por estas estrelas. Desta forma, existe um *campo de radiação* associado ao meio interestelar geral, que pode aquecer e ionizar o gás, interagindo também com os demais ocupantes do espaço interestelar. Já vimos algumas propriedades deste campo na seção 1.5.

O gás interestelar está geralmente associado a uma componente sólida, os *grãos interestelares*. Caso uma nuvem contendo gás e grãos não esteja associada a estrelas brilhantes, os grãos absorverão a radiação do campo interestelar, apresentando-se a nós como *nebulosas escuras*. É o caso do Saco de Carvão, ou da Nebulosa da Cabeça de Cavalo, na constelação de Órion.

Caso a nuvem de grãos esteja associada a estrelas moderadamente quentes, com temperaturas efetivas $T_{ef} \simeq 25\,000\text{ K}$, os grãos poderão espalhar a radiação estelar, formando uma *nebulosa de reflexão*. Quando a nebulosa está associada a estrelas muito quentes ($T_{ef} \gtrsim 25\,000\text{ K}$), o gás em torno encontra-se fotoionizado, e a nebulosa é uma *nebulosa difusa* ou *região H II* (ver por exemplo a figura 1.1). Geralmente associadas a regiões H II, mas invisíveis em fotografias ópticas, estão as *nuvens moleculares*, essencialmente nuvens de gás e poeira com densidades relativamente altas ($n \gtrsim 10^4\text{ cm}^{-3}$) e temperaturas cinéticas relativamente baixas, $T_c \simeq 10 - 100\text{ K}$. A detecção dessas nuvens só foi possível a partir do desenvolvimento de técnicas radioastronômicas, como a detecção em microondas das moléculas de CO, OH e NH₃.

Estrelas com massas da ordem de uma massa solar ou pouco mais terminem sua vida após ejetar suas camadas externas. A estrela torna-se uma anã branca e, posteriormente, uma anã negra, e sua antiga atmosfera torna-se uma *nebulosa planetária* (cf. figura 2.11). As estrelas centrais destas nebulosas são objetos muito quentes ($T_{ef} \gtrsim 30\,000\text{ K}$). Iluminada por ela, a nebulosa é também fotoionizada como uma região H II, e suas propriedades são semelhantes.

► EXEMPLO 9.1 - Transporte de energia e formação de nebulosas planetárias

Vamos considerar uma nebulosa planetária típica, como NGC 6853 = M27 (figura 9.5). Estes objetos têm temperaturas da ordem de $T \simeq 10^4\text{ K}$, densidades eletrônicas $n_e \simeq 10^4\text{ cm}^{-3}$ e dimensões $R \simeq 0.1\text{ pc}$, de modo que a energia térmica total armazenada é

$$E_t \sim \frac{4}{3} \pi R^3 \epsilon n k T \sim 4 n k T R^3 \epsilon$$

onde ϵ é o fator de preenchimento, isto é, a fração do volume que é efetivamente preenchido pelo gás ionizado. Tipicamente temos $\epsilon \simeq 0.1$, de modo que

$$E_t \sim (4) (10^4) (1.38 \times 10^{-16}) (10^4) (0.1 \times 3.09 \times 10^{18})^3 (0.1) \sim 1.6 \times 10^{44}\text{ erg}$$

Admitindo que a nebulosa tenha se originado a partir de uma estrela gigante vermelha típica, com luminosidade $L_* \sim 10^3 L_\odot$, podemos estimar a escala de tempo

$$\Delta t \sim \frac{E_t}{L_*} \sim \frac{1.6 \times 10^{44}}{(10^3)(3.85 \times 10^{33})} \sim 4.2 \times 10^7 \text{ s} = 1.3 \text{ ano}$$

A energia térmica armazenada na nebulosa, originalmente parte da energia da estrela central, corresponde portanto à energia emitida pela estrela em apenas um ano, ou seja, é uma pequena fração da energia total contida na estrela.



Figura 9.5 - A nebulosa planetária NGC 6853. (NOT/IAC)

Quando a densidade da nuvem interestelar é muito baixa (ver a tabela 9.1 a seguir), sua detecção é possível principalmente pela emissão em rádio do H neutro em 21 cm, ou pela absorção da radiação de estrelas distantes na direção da nuvem. Esta foi a maneira inicial de estudar este tipo de nuvem e, na verdade, a única durante muito tempo. Mais tarde, a extensão do espectro observado ao ultravioleta permitiu a análise de muitas linhas importantes do meio interestelar, antes inacessíveis.

Embora o conceito de “nuvem” interestelar não seja muito preciso, certamente ocorrem contrastes de densidade no meio interestelar. As regiões menos densas e quentes ($T_c \sim 10^4$ K), ou *meio internuvens*, são previstas teoricamente, embora sua detecção seja mais difícil. Existe também um gás muito diluído e quente ($T_c \sim 10^5$ K) que preenche o espaço interestelar, o chamado *gás coronal*, detectado a partir de observações de algumas linhas de absorção de íons como o O VI.

Estrelas com massas maiores do que cerca de 9 massas solares terminam suas vidas ejetando toda ou parte de sua massa, em uma explosão de supernova. O material estelar espalha-se pelo espaço interestelar formando uma nebulosa gasosa brilhante, chamada *resto de supernova*. O gás nesta região é ionizado basicamente

pelas colisões entre o material ejetado e o meio interestelar. A emissão da radiação ocorre principalmente por processos não térmicos, como a emissão síncrotron.

Os grãos interestelares são os principais responsáveis pela polarização da radiação das estrelas, para o que devem apresentar alguma anisotropia e estar alinhados segundo uma direção preferencial. Isto pode ser feito por um *campo magnético*, de modo que os grãos constituem também uma evidência da existência deste campo no meio interestelar. Trata-se de um campo fraco com intensidade $B \sim 10^{-6}$ Gauss, associado ao disco galáctico, interagindo com as demais componentes e com um papel importante na dinâmica do meio interestelar e na formação das estrelas.

Finalmente, o espaço interestelar contém também *raios cósmicos*, partículas de alta energia como prótons, elétrons e núcleos de elementos pesados, que atravessam o disco com velocidades próximas à da luz. A detecção e análise dos raios cósmicos permite estudar os processos de aceleração que tenham sofrido e, portanto, as condições físicas de seus locais de origem.

(b) Densidade do meio interestelar

A característica mais marcante do meio interestelar é, provavelmente, sua densidade. Embora facilmente observado em grandes distâncias, o material que preenche o espaço entre as estrelas é extremamente tênue, em comparação com as densidades comuns de laboratório e mesmo com relação a outros objetos astronômicos. Para uma primeira idéia, podemos considerar que o meio interestelar é composto de regiões densas e difusas, além de um meio ainda mais rarefeito permeando estas regiões. Na tabela 9.1 estão relacionadas a densidade típica n , medida em número de partículas por cm^3 e o número total de partículas contidas em um “copo” de material interestelar. Para comparação, a tabela mostra essas quantidades em diferentes situações astronômicas, além de dois exemplos cotidianos (água, ar).

Região	n (cm^{-3})	partículas/copo
Interior solar	7×10^{26}	1×10^{29}
Água	3×10^{22}	8×10^{24}
Ar	2×10^{19}	6×10^{21}
Fotosfera solar	1×10^{17}	3×10^{19}
Atmosfera (M5 III)	2×10^{15}	6×10^{17}
Envelope circumstelar (M)	1×10^8	2×10^{10}
Região IS densa	1×10^4	2×10^6
Região IS difusa	10	2×10^3
Meio internuvem	0.1	20
Gás coronal/MIG	10^{-4}	2×10^{-2}

Tabela 9.1 - Densidades no meio interestelar.

Como vemos na tabela 9.1, mesmo as regiões interestelares (IS) densas são muitas ordens de grandeza mais diluídas do que as atmosferas típicas das estrelas ou os envelopes extensos em torno de gigantes vermelhas de tipo espectral M (classe de luminosidade III). As nuvens moleculares gigantes podem eventualmente alcançar densidades uma ou duas ordens de grandeza acima do valor das regiões interestelares indicadas na tabela, porém em regiões localizadas. O limite inferior é alcançado por um gás coronal, que envolve toda a Galáxia, e não apenas o disco, e cuja densidade se assemelha à do meio intergaláctico (MIG). Note-se que os melhores vácuos obtidos em laboratório correspondem a pressões da ordem de 10^{-9} Torr $\sim 10^{-12}$ atm $\sim 10^{-6}$ dina/cm², ou seja, a densidades de cerca de 10^7 partículas por cm³. Assim, um copo de *vácuo* contém cerca de 2×10^9 partículas, muito mais do que qualquer situação usual no meio interestelar!

► EXEMPLO 9.2 - Densidade e pressão nas nuvens interestelares

Vamos considerar uma nuvem interestelar composta de hidrogênio atômico, com uma densidade de 10 partículas por centímetro cúbico e uma temperatura cinética de 100 K. A densidade da nuvem em g/cm³ pode ser estimada por

$$\rho \sim n m_H \sim 1.67 \times 10^{-23} \text{ g/cm}^3$$

onde $m_H = 1.67 \times 10^{-24}$ g é a massa do átomo de H. A pressão no interior da nuvem pode ser estimada por

$$P \sim n k T \sim 1.38 \times 10^{-13} \text{ din/cm}^2 \sim 1.36 \times 10^{-19} \text{ atm}$$

Onde k é a constante de Boltzmann. Podemos comparar este resultado com a pressão de um vácuo típico de laboratório,

$$P_v \sim 10^{-5} \text{ din/cm}^2 \sim 10^{-11} \text{ atm} \sim 7.5 \times 10^{-9} \text{ Torr}$$

$$P/P_v \sim 10^{-8} \implies P \ll P_v$$

► EXEMPLO 9.3 - Temperatura média do meio internuvens

Suponha que uma nuvem interestelar com uma densidade $n_1 = 10$ partículas por centímetro cúbico e temperatura $T_1 = 100$ K esteja em equilíbrio de pressão com o meio internuvens, cuja densidade é $n_2 = 0.1$ partículas por centímetro cúbico, segundo a tabela 9.1. Em ordem de grandeza, a temperatura do meio internuvens pode ser estimada por

$$n_1 T_1 \simeq n_2 T_2$$

$$T_2 \sim \frac{n_1 T_1}{n_2} \sim 10^4 \text{ K}$$

(c) Equilíbrio no meio interestelar

As cinco principais regiões interestelares são: (I) as *nuvens difusas*, (II) as *nuvens moleculares densas*, (III) o *meio internuvens*, (IV) as *regiões de hidrogênio ionizado* e (V) o *gás coronal*. A tabela 9.2 relaciona valores médios para a densidade de partículas n (cm^{-3}), a temperatura T (K) e a pressão P (dina/cm^2) nessas regiões. Vemos que as “regiões de baixa pressão” I, III e V têm pressões semelhantes, ocupando todo o espaço interestelar, enquanto que as “regiões de alta pressão” II e IV estão imersas no espaço interestelar geral.

Região	n (cm^{-3})	T (K)	P (dina/cm^2)
nuvens difusas	10	100	10^{-13}
nuvens moleculares densas	10^4	<100	10^{-11}
meio internuvens	10^{-1}	10^4	10^{-13}
regiões de H ionizado	10^2	10^4	10^{-10}
gás coronal	10^{-2}	10^5	10^{-13}

Tabela 9.2 - Equilíbrio no meio interestelar.

Uma versão gráfica desta tabela pode ser vista na figura 9.6, onde as linhas retas indicam regiões em que o produto nT é constante, isto é, regiões em que existe equilíbrio de pressão.

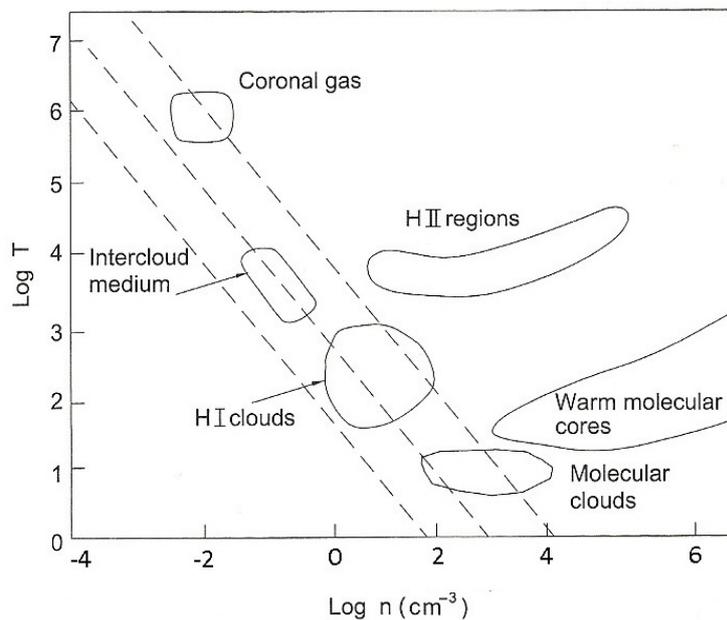


Figura 9.6 - Fases do meio interestelar. (Choudhuri 2010)

A semelhança da pressão revela outra característica do meio interestelar, isto é, a densidade de energia média de seus constituintes é similar. De fato, a densidade de

energia dessas regiões, incluindo o campo de radiação, os raios cósmicos e o campo magnético, é da ordem de $0.5 - 1.0 \text{ eV/cm}^3$. As regiões de baixa pressão podem trocar algum material entre si. Por exemplo, quando partes do meio internuvens sofrem choques sob a ação de supernovas, podem converter-se em um gás coronal. Estas regiões estão aproximadamente em equilíbrio de pressão e, de fato, gradientes de pressão são removidos em uma escala de tempo dada pelo tempo necessário para uma perturbação atravessar a região com a velocidade do som. Por exemplo, em uma nuvem difusa (I) com $R \sim 5 \text{ pc}$, $P \sim 10^{-13} \text{ dina/cm}^2$ e $\rho \sim 10^{-23} \text{ g/cm}^3$, obtemos uma escala de tempo $t_p \sim R/c_s \sim 5 \times 10^6 \text{ anos}$. Porém, as nuvens difusas colidem com uma escala de tempo entre as colisões $t_c \sim 2 \times 10^7 \text{ anos}$. A escala de tempo para atingir o equilíbrio t_{eq} deve ser, em princípio, menor que este valor. Como $t_{eq} \simeq t_p$, a escala de tempo para que uma perturbação movendo-se com a velocidade do som atravesse a região considerada, temos $t_{eq} < t_c$. No tempo t_p as ondas sonoras viajam cerca de 40 pc no meio internuvens e 130 pc no gás coronal, distâncias muito superiores às dimensões e separações médias das nuvens, de modo que existe uma forte tendência ao equilíbrio de pressão nessas regiões.

9.3 A temperatura de equilíbrio das nuvens interestelares

Vamos considerar o problema do equilíbrio térmico no meio interestelar. Seja $\Gamma_{\xi\eta}$ a contribuição das partículas de tipos ξ e η ao aquecimento do gás, isto é, $\Gamma_{\xi\eta}$ é a energia por unidade de volume e tempo acrescentada ao gás pela interação das partículas ξ e η . Analogamente, seja $\Lambda_{\xi\eta}$ a contribuição destas partículas ao resfriamento do gás. Vamos então definir a *função aquecimento* Γ por

$$\Gamma = \sum_{\xi\eta} \Gamma_{\xi\eta} \tag{9.1}$$

Analogamente, a *função resfriamento* Λ é definida por

$$\Lambda = \sum_{\xi\eta} \Lambda_{\xi\eta} \tag{9.2}$$

De acordo com esta definição,

$$\Delta = \Gamma - \Lambda = \sum_{\xi\eta} (\Gamma_{\xi\eta} - \Lambda_{\xi\eta}) \tag{9.3}$$

Onde Δ é a diferença entre a energia introduzida e a retirada do gás. No caso mais geral, os processos de aquecimento e resfriamento dependem do tempo e a função Δ é diferente de zero, podendo haver um ganho ou perda de energia do gás, de modo que sua temperatura se modificará com o tempo. Portanto, no caso geral, a temperatura T e também a densidade n do gás, medida em número de partículas por centímetro cúbico, variam com o tempo, sendo a taxa de variação determinada pelas funções de aquecimento e resfriamento. No estado estacionário temos

$$\Delta = 0 \quad \text{ou} \quad \Gamma = \Lambda \tag{9.4}$$

As funções Γ e Λ dependem em geral da temperatura. Portanto, no estado estacionário é possível definir uma *temperatura de equilíbrio* T_E , correspondendo à temperatura onde (9.4) é satisfeita. Nestas condições, para a determinação da temperatura de equilíbrio em uma região do meio interestelar, é necessário conhecer todos os processos de aquecimento (que determinam Γ) e resfriamento (que determinam Λ), aplicando-se então a condição (9.4). Neste capítulo, consideraremos apenas processos estacionários de aquecimento e resfriamento do gás interestelar. Entretanto, processos transientes podem eventualmente ser importantes, aquecendo o gás em uma escala de tempo relativamente curta, processando-se o resfriamento e a recombinação em uma escala de tempo maior.

► EXEMPLO 9.4 - Ganho de energia e as leis da Termodinâmica

Pela primeira lei da termodinâmica, quando um sistema sofre uma interação em um processo infinitesimal, temos

$$dE = dQ - dW \tag{9.5}$$

onde dE é a variação de energia interna, dQ é o calor absorvido pelo sistema e dW é o trabalho realizado pelo sistema, medidos, por exemplo, em ergs. Se o processo for quase-estático, o calor absorvido dQ pode ser colocado em termos da variação da entropia do sistema dS (segunda lei da termodinâmica),

$$dQ = T dS \tag{9.6}$$

onde dS é medida em erg/K. Chamando dV a variação de volume do sistema,

$$dW = p dV \tag{9.7}$$

onde p é a pressão do gás (dina/cm²). Substituindo (9.7) e (9.6) em (9.5),

$$T dS = dE + p dV \tag{9.8}$$

Para um gás ideal, a energia interna depende apenas da temperatura, $E = E(T)$ e a equação de estado é $p = n k T$, onde k é a constante de Boltzmann e n é o número de partículas do gás por unidade de volume, ou $n = N/V$, sendo N o número total de partículas do gás em um volume V . Desta forma, o calor absorvido por unidade de volume (erg/cm³) pode ser escrito

$$\frac{dQ}{V} = n d\left(\frac{3}{2} k T\right) - k T dn \tag{9.9}$$

onde usamos o fato de que a energia interna de um gás perfeito e monoatômico é a sua energia cinética, $E \simeq (3/2) N k T$. Desta relação, o ganho total de energia por unidade de volume e por unidade de tempo é

$$\Delta = n \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} k T \right) - k T \frac{dn}{dt} \tag{9.10}$$

dado em $\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$. Desta equação vemos que, no estado estacionário, dT/dt e dn/dt são nulas, e obtemos as relações (9.4). Nas equações acima despreza-se a condução térmica, a qual não é importante para as temperaturas interestelares típicas, $T \lesssim 2 \times 10^4 \text{ K}$. Para temperaturas mais altas, como no caso do gás coronal, a condutividade térmica K é alta, e deve ser explicitamente considerada. A presença de um campo magnético na região de alta temperatura pode também afetar a condutividade térmica K . Considerando a condução eletrônica, temos

$$\Delta = n \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} k T \right) - k T \frac{dn}{dt} + \nabla \cdot (K \nabla T) \tag{9.11}$$

► EXEMPLO 9.5 - O tempo de resfriamento

Vamos considerar um processo em que a temperatura varia de um valor T até o valor de equilíbrio T_E , sendo dT/dt a taxa de variação. Neste caso, podemos definir o *tempo de resfriamento* do gás t_T como

$$t_T = - \frac{T - T_E}{dT/dt} = - \frac{\Delta T}{dT/dt} \tag{9.12}$$

Se houver resfriamento, $\Delta T > 0$, $dT/dt < 0$ e $t_T > 0$; se houver aquecimento, $\Delta T < 0$, $dT/dt > 0$ e $t_T > 0$. Podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} k T \right) = - \frac{3k(T - T_E)}{2t_T} \tag{9.13}$$

ou seja, o tempo de resfriamento corresponde à razão entre o excesso de energia do gás em relação ao valor no equilíbrio e a função aquecimento líquida $\Gamma - \Lambda$. Se t_T e T_E forem constantes no tempo,

$$\frac{dT}{T - T_E} = - \frac{dt}{t_T} \tag{9.14}$$

Considerando $T = T_0$ em $t = 0$, obtemos as relações

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T - T_E} = - \frac{1}{t_T} \int_0^t dt \tag{9.15}$$

$$T - T_E = (T_0 - T_E) e^{-t/t_T} \tag{9.16}$$

ou seja, se t_T e T_E forem constantes, T tende a T_E segundo a função $\exp(-t/t_T)$. Para $t/t_T \rightarrow 0$, $T \rightarrow T_0$, para $t/t_T \simeq 1$, $T - T_E \simeq (T_0 - T_E)/e$. Geralmente, o tempo de resfriamento t_T definido por (9.12) é positivo. Pode, entretanto, acontecer que este tempo seja negativo em determinadas regiões, onde ocorrem instabilidades.

Veremos mais tarde alguns processos de formação de nuvens interestelares, que se originam a partir de instabilidades no gás interestelar.

9.4 Aquecimento e resfriamento de nuvens interestelares

Vamos a seguir considerar alguns dos principais processos de aquecimento e resfriamento que ocorrem no gás interestelar. Uma discussão mais detalhada pode ser encontrada em Maciel (2002).

(a) Processos de aquecimento no meio interestelar

(i) Fotoionização de átomos neutros - Um dos mecanismos mais importantes para o aquecimento do gás interestelar decorre da fotoionização de átomos neutros. Neste processo, um fóton com energia $h\nu$ dá origem a um elétron com energia E_2 . Esse elétron pode colidir com outras partículas do gás, repartindo o excesso de energia e causando um aquecimento. Neste processo, portanto, energia radiativa das estrelas ou do campo de radiação difuso é transferida para o gás, na forma de energia cinética. Naturalmente, o ganho de energia pelo gás no processo é menor ou igual a E_2 , pois parte dessa energia é perdida na recombinação entre o elétron e o íon resultante. A equação de equilíbrio de ionização entre fotoionizações e recombinações radiativas é

$$\sum_j n_j(X^r) \beta_{jf} = \sum_j n(X^{r+1}) n_e \alpha_j \quad (9.17)$$

onde $n_j(X^r)$, $n_j(X^{r+1})$ são as densidades de partículas do átomo X nos estados de ionização r e $r+1$, respectivamente, e no estado de excitação j ; β_{jf} (s^{-1}) é a taxa de ionizações a partir do estado j , n_e é a densidade eletrônica, e α_j o coeficiente de recombinação para o estado j . Substituindo $n(X^{r+1})$ por n_i (cm^{-3}), a densidade de átomos ionizados, admitidos idênticos e no estado fundamental, tomando $\alpha = \sum_j \alpha_j$ e considerando que $\alpha_j = \langle \sigma_{cj} v \rangle$, onde σ_{cj} é a seção de choque de recaptura e é tomada a média com relação a uma distribuição maxwelliana de velocidades para os elétrons, podemos escrever para a função aquecimento

$$\Gamma_{ei} = n_e n_i \sum_j \left[\langle \sigma_{cj} v \rangle \bar{E}_2 - \langle \sigma_{cj} v E_1 \rangle \right] \quad (9.18)$$

onde E_1 é a energia cinética perdida pelo elétron na recombinação. Nesta equação, Γ_{ei} (medida em $\text{erg cm}^{-3} \text{s}^{-1}$) é a função aquecimento para a interação das partículas $\xi = e$ (elétrons) e $\eta = i$ (íons) e \bar{E}_2 é a energia média dos fotoelétrons, calculada com relação ao fluxo de fótons ionizantes. Considerando que as fotoionizações são feitas essencialmente a partir do estado fundamental, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{ei} &= n_e n_i \left[\bar{E}_2 \sum_j \langle \sigma_{cj} v \rangle - \sum_j \langle \sigma_{cj} v \frac{1}{2} m_e v^2 \rangle \right] \\ &= n_e n_i \left[\alpha \bar{E}_2 - \frac{1}{2} m_e \sum_j \langle \sigma_{cj} v^3 \rangle \right] \end{aligned} \quad (9.19)$$

Nas equações (9.18) e (9.19), Γ_{ei} não depende de β_{jf} , pois, de acordo com a equação (9.17), no estado estacionário o número total de fotoionizações deve contrabalançar o número total de recombinações por unidade de volume e tempo.

No processo de fotoionização dos elementos pesados em regiões HI pelo campo de radiação estelar integrado, há produção de um elétron com uma certa energia cinética. Os elétrons transferem esta energia ao gás circundante por meio de colisões. Naturalmente, parte desta energia é reutilizada no processo de recombinação, mas a distribuição de energia pelas colisões ocorre rapidamente, de modo que a termalização é alcançada antes da remoção dos elétrons pela recombinação. O campo de radiação acima de 13.6 eV é absorvido nas proximidades das fontes. Portanto, a energia do elétron é sempre muito menor que este valor, sendo da ordem de 2 eV (correspondente a um potencial de ionização da ordem de 11 eV, semelhante ao do C I) para fotoionização de um gás com abundância cósmica.

A correção para a energia perdida pelo elétron no processo de recombinação, isto é, a energia não termalizada, depende da somatória $\sum_j \langle \sigma_{ej} v^3 \rangle$ que aparece no segundo membro de (9.19). A seção de choque de captura, neste caso, depende da frequência da radiação ou da velocidade do elétron de uma maneira complexa. Vamos obter uma expressão para a função aquecimento desprezando a correção acima. De (9.19) podemos escrever

$$\begin{aligned} \Gamma_{eX^r} &\simeq n_e n(X^r) \alpha(X^r) \bar{E}_2 \\ &\simeq n_e n(X^r) A(X^r) \left[\frac{T}{10^4 \text{K}} \right]^{-\eta(X^r)} \bar{E}_2 \end{aligned} \quad (9.20)$$

onde substituímos i por X^r e usamos uma aproximação para o coeficiente de recombinação do elemento X^r . De modo geral, os estados excitados comportam-se como átomos hidrogenóides, aproximadamente, o que não ocorre com o estado fundamental. Os coeficientes de recombinação calculados podem então ser aproximados por

$$\alpha(X^r) = A(X^r) \left[\frac{T}{10^4 \text{K}} \right]^{-\eta(X^r)} \quad (9.21)$$

sendo os parâmetros $A(X^r)$ e $\eta(X^r)$ tabelados na literatura. O erro cometido pelo uso desta relação depende do íon considerado, e também da temperatura eletrônica, sendo em média da ordem de 10%. Considerando $\eta(X^r) \simeq 1/2$, $A(X^r) \simeq 10^{-13} \text{ cm}^3/\text{s}$, $\bar{E}_2 \simeq 2 \text{ eV} = 3.2 \times 10^{-12} \text{ erg}$, temos

$$\Gamma_{eX^r} \simeq 3.2 \times 10^{-23} n_e n(X^r) T^{-1/2} \quad (9.22)$$

dado em $\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$. Considerando agora que $n(X^r) \simeq a(X^r) n_H$, com a abundância cósmica $a(X^r) \simeq 4 \times 10^{-4}$, apropriada ao C, temos

$$\Gamma_{eX^r} \simeq 1.3 \times 10^{-26} n_e n_H T^{-1/2} \quad \text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (9.23)$$

ou, em termos da ionização fracional $x = n_e/n_H$,

$$\Gamma_{eX^r} \simeq 1.3 \times 10^{-26} x n_H^2 T^{-1/2} \quad \text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (9.24)$$

► EXEMPLO 9.6 - Ca em nuvens interestelares

Vamos aplicar as relações desta seção e estimar as abundâncias dos diversos íons de Ca em nuvens interestelares. Vamos considerar os íons Ca II e Ca III em uma nuvem com $T = 100\text{ K}$ e $n_e = 10^{-4}\text{ cm}^{-3}$, considerando apenas a fotoionização e a recombinação radiativa. Vamos utilizar a seguinte notação: $n(\text{CaII}) = n_2$; $n(\text{CaIII}) = n_3$; $\beta(\text{CaII}) = \beta_2$; $\alpha_2 = \sum \alpha_j(\text{CaII})$. Vamos adotar os valores $\beta(\text{CaII}) = 4.0 \times 10^{-12}\text{ s}^{-1}$ e $\alpha(\text{CaII}) = 2.6 \times 10^{-11}\text{ cm}^3\text{ s}^{-1}$. Neste caso, de (9.17) podemos escrever a equação de equilíbrio de ionização

$$n_2 \beta_2 = n_3 n_e \alpha_2$$

e temos ainda

$$n_2 + n_3 = n$$

Vamos definir a razão $R_{3,2}$ por

$$R_{3,2} = \frac{n(\text{CaIII})}{n(\text{CaII})} = \frac{n_3}{n_2}$$

Podemos então escrever para o grau de ionização x

$$x_2 = x(\text{CaII}) = \frac{n(\text{CaII})}{n(\text{Ca})} = \frac{n_2}{n_2 + n_3} = \frac{1}{1 + n_3/n_2} = \frac{1}{1 + R_{3,2}}$$

$$x_3 = x(\text{CaIII}) = \frac{n(\text{CaIII})}{n(\text{Ca})} = \frac{n_3}{n_2 + n_3} = \frac{1}{1 + n_2/n_3} = \frac{1}{1 + 1/R_{3,2}}$$

Da equação de equilíbrio de ionização temos

$$R_{3,2} = \frac{\beta_2}{n_e \alpha_2} = \frac{4.0 \times 10^{-12}}{(10^{-4})(2.6 \times 10^{-11})} = 1.54 \times 10^3$$

Portanto

$$x_2 = \frac{1}{1 + R_{3,2}} = 6.5 \times 10^{-4}$$

$$x_3 = \frac{1}{1 + 1/R_{3,2}} = 0.9999 \simeq 1.0$$

Ou seja, nas condições dadas, praticamente todos os íons de Ca estão na forma CaIII, ou Ca^{++} . A taxa de aquecimento devido à ionização do Ca^+ para Ca^{++} pode ser estimada por

$$\Gamma_{e,\text{Ca}} \simeq n_3 n_e \alpha_2 \bar{E} \simeq a(\text{Ca}) n_H n_e \alpha_2 \bar{E}$$

onde $a(Ca) \sim 10^{-6}$ é a abundância interestelar do Ca. Tomando $n_H \simeq 1.0 \text{ cm}^{-3}$, $n_e \sim 10^{-4} \text{ cm}^{-3}$, $\alpha_2 \sim 3 \times 10^{-11} \text{ cm}^3/\text{s}$ e $\bar{E} \simeq 2 \text{ eV} \simeq 3 \times 10^{-12} \text{ erg}$, obtemos $\Gamma_{e,Ca} \sim 10^{-32} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$, ou ainda $\Gamma_{e,Ca}/n_H^2 \sim 10^{-32} \text{ erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$.

(ii) Aquecimento pelos raios cósmicos - Raios cósmicos podem ionizar o H (e também o He) produzindo elétrons energéticos. Parte da energia destes elétrons é termalizada, resultando em uma função aquecimento $\Gamma_{H,RC}$ ou $\Gamma_{He,RC}$. A energia do elétron ejetado depende da energia da partícula cósmica. No caso de prótons com 2 MeV, a energia média do elétron é da ordem de 32 eV. Para prótons com 10 MeV, a energia é de 36 eV. Naturalmente, apenas parte desta energia pode ser usada para o aquecimento. Em um gás fracamente ionizado, onde o grau de ionização $x = n_e/n_H \ll 1$, a maior parte da energia do elétron é usada em excitações e novas ionizações, e cálculos detalhados indicam uma energia \bar{E} entre 3.4 eV e 8.5 eV, disponível para o aquecimento do gás, por meio de colisões. Considerando a taxa de ionizações pelos raios cósmicos ζ_H , o número de elétrons ejetados por cm^3 por segundo é $\zeta_H n_H$, e a função aquecimento pode ser escrita

$$\Gamma_{H,RC} \simeq n_H \zeta_H \bar{E} \quad (9.25)$$

Estimativas para os limites de ζ_H estão entre cerca de 7×10^{-18} a 10^{-15} s^{-1} . Com os limites de \bar{E} acima, obtemos

$$\Gamma_{H,RC}(\text{min}) \simeq 3.8 \times 10^{-29} n_H \quad (9.26a)$$

$$\Gamma_{H,RC}(\text{max}) \simeq 1.4 \times 10^{-26} n_H \quad (9.26b)$$

em unidades de $\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$, com n_H em cm^{-3} . Por exemplo, para $n_H \simeq 1 - 10^2 \text{ cm}^{-3}$, este processo produz taxas máximas de $10^{-26} - 10^{-24} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$.

Além dos raios cósmicos foi também proposto o aquecimento do meio interestelar pelos raios X. Devido essencialmente ao seu fluxo relativamente baixo, este mecanismo tem as mesmas dificuldades que o aquecimento pelos raios cósmicos.

(iii) Aquecimento pela formação de moléculas H_2 - H_2 é a molécula mais abundante em nuvens interestelares densas, onde a temperatura é relativamente baixa e a opacidade alta o suficiente para que os fótons ultravioletas energéticos não consigam penetrar, o que aumentaria a taxa de destruição desta molécula. Sendo uma molécula homopolar, suas transições rovibracionais para radiação de dipolo elétrico são proibidas, e a associação radiativa de dois átomos de H para formar a molécula tem baixa probabilidade. Há um consenso de que esta molécula é formada pela associação de dois átomos de H na superfície de um grão sólido, que funciona como um catalisador. A

presença dessas moléculas pode ainda produzir aquecimento do gás por meio de fotodissociação do H_2 e distribuição da energia cinética dos átomos produzidos, assim como pela sua formação, com liberação de energia.

No processo de formação de uma molécula de H_2 , há liberação de uma energia $\bar{E}(H_2) \simeq 4.5 \text{ eV}$, correspondendo à energia de ligação dos átomos de H. A partição desta energia entre o aquecimento do grão, excitação da molécula formada, compensação da energia de adsorção à superfície do grão e energia cinética da molécula pode ser relativamente complexa. A função aquecimento devida a este processo pode ser escrita aproximadamente

$$\begin{aligned} \Gamma_{Hd} &= n_H^2 R z_H \bar{E}(H_2) \\ &\simeq 7.2 \times 10^{-12} n_H^2 R z_H \end{aligned} \quad (9.27)$$

onde z_H a fração da energia liberada na forma de energia cinética da molécula H_2 , ou seja, a energia disponível para o aquecimento do gás, e R é um coeficiente que depende da probabilidade por unidade de tempo de formação de uma molécula de H_2 pela colisão de um átomo de H com um grão. Em (9.27) a taxa é dada em $\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$. O coeficiente R pode ser determinado a partir de observações da molécula H_2 , e um valor médio é $R \simeq 3 \times 10^{-17} \text{ cm}^3/\text{s}$. Neste caso,

$$\Gamma_{Hd} = 2.2 \times 10^{-28} z_H n_H^2 \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (9.28)$$

Tomando $z_H \simeq 1$ e $n_H \simeq 1 - 10^2 \text{ cm}^{-3}$, temos $\Gamma_{Hd} \sim 10^{-28} - 10^{-24} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$, ou $\Gamma_{Hd}/n_H^2 \sim 10^{-28} \text{ erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$.

(iv) Aquecimento por fotoelétrons ejetados por grãos - Quando um grão absorve um fóton com energia relativamente alta, pode ejetar um elétron com uma certa energia cinética (efeito fotoelétrico), constituindo um processo de aquecimento do gás interestelar. Desprezando a energia perdida pelo elétron na recombinação, a energia fornecida ao gás por unidade de volume e tempo é

$$\Gamma_{ed} = \int \left[\frac{c U_\lambda d\lambda}{h \nu} \sigma_d n_d \right] y_e E_2 \quad (9.29)$$

onde σ_d é a seção de choque de fotoabsorção para um grão e n_d é o número de grãos por unidade de volume. O produto dos parâmetros entre colchetes, integrado em um certo intervalo de comprimentos de onda, é o número de fótons absorvidos pelos grãos por cm^3 por segundo, e U_λ é a densidade de energia do campo. Multiplicando por y_e , a eficiência fotoelétrica (*quantum yield*), ou seja, a razão entre o número de elétrons ejetados e o número de fótons absorvidos, obtemos o número de elétrons ejetados por cm^3 por segundo. Finalmente, multiplicamos pela energia do fotoelétron E_2 , para obter a função aquecimento em $\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$. Temos ainda

$$\sigma_d = \sigma_g Q_a(\lambda) \quad (9.30)$$

onde σ_g é a seção geométrica do grão e $Q_a(\lambda)$ é o fator de eficiência do grão para absorção de radiação com comprimento de onda λ . Chamando Σ_d a razão entre a área total projetada dos grãos e o número de núcleos de H, temos

$$\Sigma_d = \frac{\sigma_g n_d}{n_H} \quad (9.31)$$

de modo que

$$\sigma_d n_d = n_H \Sigma_d Q_a(\lambda) \quad (9.32)$$

e (9.29) fica

$$\Gamma_{ed} = n_H \Sigma_d \int \frac{c Q_a(\lambda) y_e U_\lambda E_2}{h\nu} d\lambda \quad (9.33)$$

Podemos considerar a integral em (9.33) como $\bar{E}_2 F_e$, onde consideramos a energia média do fotoelétron e definimos o fluxo de fotoelétrons produzidos pelos grãos por área projetada dos grãos, F_e ($\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$):

$$\Gamma_{ed} = n_H \Sigma_d \bar{E}_2 F_e \quad (9.34)$$

A eficiência y_e não é bem conhecida e depende do tamanho e da natureza dos grãos, como também da frequência do fóton absorvido. Para radiação ultravioleta, y_e pode ser da ordem de 0.1 a 1.0, sendo geralmente desprezível para maiores comprimentos de onda. Usando uma estimativa do campo de radiação estelar integrado, o fluxo de fotoelétrons é da ordem de

$$F_e \simeq 2 \times 10^7 y_e Q_a e^{-\tau} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (9.35)$$

onde o termo exponencial leva em conta a atenuação da radiação dentro da nuvem. Adotando valores típicos para os grãos que ocorrem nas nuvens interestelares, $Q_a \simeq 1$, $\Sigma_d \simeq 1.1 \times 10^{-21} \text{ cm}^2$ por átomo de H, $\bar{E}_2 \simeq 5 \text{ eV}$, obtemos

$$\Gamma_{ed} \simeq 1.8 \times 10^{-25} y_e n_H e^{-\tau} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (9.36)$$

Por exemplo, com $y_e \simeq 1$, $\tau \ll 1$ e $n_H \simeq 1 - 10^2 \text{ cm}^{-3}$, temos $\Gamma_{ed} \sim 10^{-25} - 10^{-23} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$ e $\Gamma_{ed}/n_H^2 \sim 10^{-25} - 10^{-27} \text{ erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$. Neste caso, o fluxo de fotoelétrons é $F_e \simeq 2 \times 10^7 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Se a eficiência y_e tiver valores menores, ou se a profundidade óptica for muito alta, a importância deste mecanismo será menor, embora continue como um dos processos mais importantes no aquecimento do gás interestelar.

Modelos recentes para nuvens densas e regiões de fotodissociação consideram a ejeção fotoelétrica por grãos contendo moléculas de hidrocarbonetos aromáticos policíclicos (PAH, de *polycyclic aromatic hydrocarbon*). Regiões com temperaturas no intervalo $10 \lesssim T(\text{K}) \lesssim 10^4$ e densidades eletrônicas $10^{-3} \lesssim n_e(\text{cm}^{-3}) \lesssim 10^2$ são aquecidas por grãos com dimensões entre 15 e 100 Å. Para $T \lesssim 10^4 \text{ K}$, a taxa de aquecimento depende do fluxo ultravioleta incidente, da temperatura e da densidade da nuvem. Valores típicos para a função aquecimento são $\Gamma_{ed}/n_H \sim 10^{-26} - 10^{-25}$

erg/s, ou $\Gamma_{ed}/n_H^2 \sim 10^{-28} - 10^{-25} \text{ erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$ para $n_H \sim 1 - 10^2 \text{ cm}^{-3}$. O resfriamento correspondente à recombinação eletrônica foi também obtido, sendo da ordem de $\Lambda_{ed}/n_e n_H \sim 10^{-27} - 10^{-24} \text{ erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$ para $10^2 \lesssim T(\text{K}) \lesssim 10^4$. O fator de eficiência obtido é menor que 0,1, tipicamente $y_e \simeq 0,03$.

O papel dos grãos na determinação da temperatura das nuvens interestelares é, na realidade, mais complexo do que foi visto acima. Além da energia perdida no processo de recombinação elétron-grão, os grãos podem atuar como resfriadores. Átomos de H podem colidir com os grãos e sofrer coalescência, transferindo sua energia cinética ao grão, a qual será posteriormente emitida na forma de radiação infravermelha. Taxas típicas $\Lambda_{dH} \sim 10^{-31} n_H^2 \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$ são obtidas em nuvens com $T \simeq 100 \text{ K}$.

(b) Processos de resfriamento no meio interestelar

(i) Excitação colisional elétron-íon - Os mecanismos de resfriamento mais importantes no meio interestelar envolvem colisões entre partículas (elétrons, íons e átomos neutros) com a excitação de níveis de energia próximos ao estado fundamental. Uma vez excitado, o átomo tende a voltar ao estado fundamental com a emissão de radiação, a qual pode escapar da região, correspondendo a uma perda de energia e, portanto, a um resfriamento do gás. Vamos considerar a colisão de elétrons (densidade n_e) com íons. Seja n_{ij} o número de íons i por unidade de volume no nível j . Neste caso, o número de excitações $j \rightarrow k$ por cm^3 por segundo é $n_e n_{ij} \gamma_{jk}$, onde $\gamma_{jk} = \langle u \sigma_{jk} \rangle$ é o coeficiente ou taxa de colisões, dado em cm^3/s . A energia perdida por um elétron no processo de excitação colisional é simplesmente $E_k - E_j = E_{jk}$. No processo de desexcitação colisional, parte dessa energia é recuperada, de modo que a função resfriamento para as interações elétron-íon é

$$\Lambda_{ei} = n_e \sum_j \sum_{k>j} E_{jk} (n_{ij} \gamma_{jk} - n_{ik} \gamma_{kj}) . \tag{9.37}$$

Se todos os íons estiverem no estado fundamental ($j = 1$), a somatória em j é eliminada, e obtemos

$$\begin{aligned} \Lambda_{ei} &= n_e \sum_{k>1} E_{1k} (n_{i1} \gamma_{1k} - n_{ik} \gamma_{k1}) \\ &= n_e \sum_{k>1} E_{1k} (n_i \gamma_{1k} - n_{ik} \gamma_{k1}) \end{aligned} \tag{9.38}$$

Neste caso, os íons importantes são C II, Si II, O I, Fe II, N II, C I etc. Por exemplo, para a transição $^2P_{1/2} - ^2P_{3/2}$ do C II temos $E_{jk} = 0.0079 \text{ eV} = 1.3 \times 10^{-14} \text{ erg}$, correspondendo a uma temperatura $E_{jk}/k \simeq 90 \text{ K}$, da ordem da temperatura cinética das nuvens interestelares difusas. Outras transições podem ser: Si II ($^2P_{1/2} - ^2P_{3/2}$), com $E_{jk}/k \simeq 400 \text{ K}$ e O I ($^3P_2 - ^3P_{1,0}$), com $E_{jk}/k \simeq 200 - 300 \text{ K}$.

O coeficiente γ_{kj} pode ser relacionado com a força de colisão $\Omega(j, k)$ e as taxas de excitação e desexcitação estão relacionadas entre si. Vamos escrever a equação

(9.38) para uma transição $j \rightarrow k$, desprezando a correção correspondente ao ganho, $E_{jk} n_{ik} \gamma_{kj}$, pois, em geral, $n_{ij} \gamma_{jk} > n_{ik} \gamma_{kj}$. Neste caso,

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{ei} &\simeq n_e E_{jk} n_{ij} \gamma_{jk} \\
 &= n_e n_{ij} E_{jk} \frac{g_k}{g_j} \frac{h^2 \Omega(j, k)}{g_k (2\pi m_e)^{3/2} (kT)^{1/2}} e^{-E_{jk}/kT} \\
 &= \frac{h^2}{(2\pi m_e)^{3/2} k^{1/2}} n_e n_{ij} T^{-1/2} e^{-E_{jk}/kT} \frac{E_{jk} \Omega(j, k)}{g_j} \\
 &= 8.6 \times 10^{-6} n_e n_{ij} T^{-1/2} e^{-E_{jk}/kT} \frac{E_{jk} \Omega(j, k)}{g_j}
 \end{aligned}
 \tag{9.39}$$

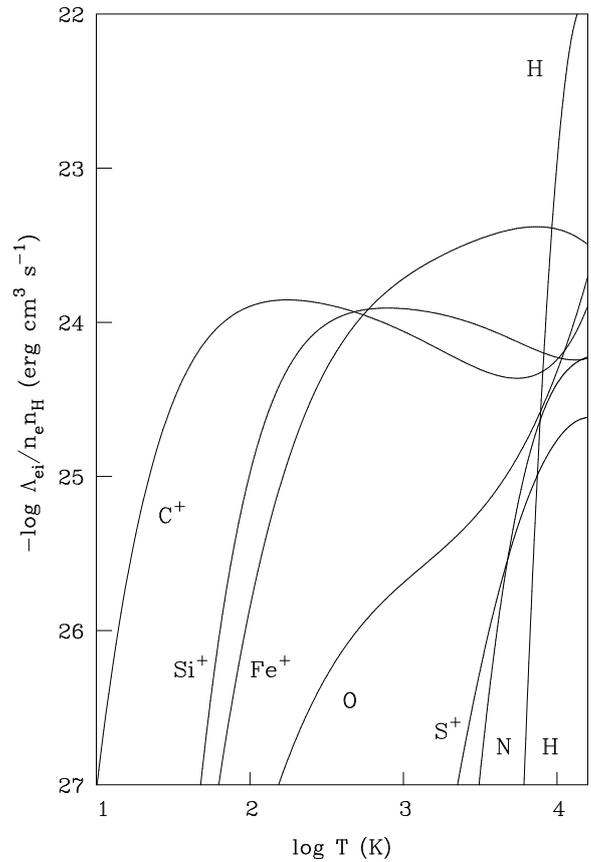


Figura 9.7 - Função resfriamento por excitação elétron-fon em regiões HI. (Dalgarno e McCray 1972)

Na última relação a função resfriamento é dada em $\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$. Os resultados das contribuições dos diversos íons para o resfriamento estão mostrados na figura 9.7, para $T \lesssim 10^4 \text{ K}$, onde a ordenada é a razão $\Lambda_{ei}/n_e n_H$, dada em $\text{erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$. As abundâncias usadas são médias para o sistema solar. Vemos que, para $T \lesssim 100 \text{ K}$, a contribuição mais importante é a do C II, seguido pelo Si II e Fe II. Podemos estimar

a função resfriamento para o C II, considerando uma nuvem com $T \simeq 100$ K e $n_i \simeq 10^{-4} n_H$. Para a transição ${}^2P_{1/2} - {}^2P_{3/2}$, temos $E_{jk} \simeq 0.0079$ eV, $\Omega(j, k) \simeq 1.33$ e $g_J = 2$, de modo que (9.37) fornece $\Lambda_{ei}/n_e n_H \simeq 2.9 \times 10^{-25}$ erg cm³ s⁻¹, ou $\log(\Lambda_{ei}/n_e n_H) \simeq -24.5$, em bom acordo com a figura 9.7.

(ii) Resfriamento pela excitação colisional elétron-H - Para valores altos da temperatura, $T \gtrsim 10^3$ K, pode ser importante o mecanismo de perda de energia pela excitação de níveis do H neutro, especialmente $n = 2$, devido às colisões com elétrons térmicos. Para $12\,000 \gtrsim T(\text{K}) \gtrsim 4\,000$, a função resfriamento pode ser aproximada por

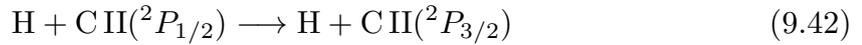
$$\Lambda_{eH} \simeq 7.3 \times 10^{-19} n_e n_H e^{-118\,400/T} \quad (9.40)$$

dada em erg cm⁻³ s⁻¹, onde o termo exponencial leva em conta essencialmente as excitações para o segundo nível. Cálculos mais detalhados diferem de (9.40) no máximo por 3%. Após a excitação para o nível $n = 2$, o átomo voltará ao estado fundamental emitindo um quantum L_α , que será provavelmente absorvido pelos grãos. Na figura 9.7 está também indicada a variação de $\Lambda_{eH}/n_e n_H$ com a temperatura. Para $T \simeq 10\,500$ K o resfriamento é controlado essencialmente pelo H. Nesta temperatura, de (9.40) obtemos $\log(\Lambda_{ei}/n_e n_H) \simeq -23.0$.

(iii) Resfriamento pela excitação colisional H-íon - A excitação colisional de íons como CI, CII, OI, FeII pelo H neutro pode ser um dos processos de resfriamento mais importantes no meio interestelar, principalmente quando a ionização fracional n_e/n_H é baixa. De maneira geral, a função resfriamento é dada pela equação (9.37), substituindo agora n_e por n_H :

$$\Lambda_{Hi} = n_H \sum_j \sum_{k>j} E_{jk} (n_{ij} \gamma_{jk} - n_{ik} \gamma_{kj}) \quad (9.41)$$

Taxas colisionais para diversos íons podem ser encontradas na literatura. Vamos obter a função resfriamento para excitação do íon CII, que é provavelmente o íon positivo mais abundante nas regiões HI. O processo de excitação pode ser escrito



Neste caso, desprezando a correção para as desexcitações, a equação (9.41) fica

$$\Lambda_{H,CII} \simeq n_H \sum_j \sum_{k>j} E_{jk} n_{CIIj} \gamma_{jk} \quad (9.43)$$

Admitindo agora que as excitações são feitas a partir do nível fundamental, podemos eliminar a somatória em j ,

$$\Lambda_{H,CII} \simeq n_H \sum_{k>j_f} E_{jfk} n_{CII} \gamma_{jfk} \quad (9.44)$$

onde representamos o nível fundamental por j_f . Vamos eliminar também a somatória em k , considerando uma única transição, do nível ${}^2P_{1/2}$ para o ${}^2P_{3/2}$. Neste caso,

$$\begin{aligned}\Lambda_{H,CII} &\simeq n_H n_{CII} E({}^2P_{3/2} - {}^2P_{1/2}) \gamma({}^2P_{1/2} - {}^2P_{3/2}) \\ &= n_H n_{CII} E_{jk} \gamma_{jk}\end{aligned}\quad (9.45)$$

Considerando que praticamente todos os átomos estão na forma C II, pois os potenciais de ionização são $\phi(\text{CI}) = 11.26$ eV e $\phi(\text{CII}) = 24.38$ eV, e chamando $a(\text{C})$ a abundância de C, temos

$$n_{CII} \simeq n_C = a(\text{C}) n(\text{H}) \simeq a(\text{C}) n_H \quad (9.46)$$

isto é, admitimos que a densidade de átomos de H é essencialmente igual à densidade de núcleos de H. Levando em conta a depleção do carbono, caracterizada pelo parâmetro d_C , definido por

$$d_C = \frac{a(\text{C})}{a_c(\text{C})} = 10^{f_a(\text{C})} \quad (9.47)$$

onde $a_c(\text{C})$ é a abundância cósmica do carbono, temos

$$n_{CII} = d_C a_c(\text{C}) n_H \quad (9.48)$$

Substituindo em (9.45),

$$\Lambda_{H,CII} = n_H^2 d_C a_c(\text{C}) E_{jk} \gamma_{jk} \quad (9.49)$$

O valor cósmico da abundância do carbono é definido como $\log a_c(\text{C}) = \epsilon_c(\text{C}) - \epsilon_c(\text{H})$, de modo que $a_c(\text{C}) \simeq 10^{-3.4} = 4.0 \times 10^{-4}$. A diferença de energia dos níveis ${}^2P_{1/2}$ e ${}^2P_{3/2}$ é $E_{jk} = 0.0079$ eV. Para temperaturas $T \lesssim 100$ K, temos $\gamma_{kj} \simeq 7.8 \times 10^{-10}$ cm³/s, de modo que $\gamma_{jk} = (g_k/g_j) \gamma_{kj} e^{-E_{jk}/kT} \simeq 1.6 \times 10^{-9} e^{-92.0/T}$ cm³/s. Substituindo $a_c(\text{C})$, E_{jk} e γ_{jk} em (9.49),

$$\Lambda_{H,CII} \simeq 7.9 \times 10^{-27} n_H^2 d_C e^{-92.0/T} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (9.50)$$

Para $T \simeq 80$ K,

$$\Lambda_{H,CII} \simeq 2.5 \times 10^{-27} n_H^2 d_C \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (9.51)$$

Para a linha de visada até a estrela ζ Oph a depleção é da ordem de $d_C \simeq 10^{-0.7} \simeq 0.2$. Outras estrelas menos avermelhadas têm $d_C \simeq 1$. Taxas de desexcitação colisional H-C II foram determinadas em função da temperatura, assim como para outros íons, como Fe II, CI e OI.

(iv) Resfriamento pela excitação colisional H-H₂ - Em nuvens interestelares densas, a molécula H₂ pode ser uma fonte de resfriamento por meio da excitação colisional pelo H dos níveis rotacionais $J = 0 \rightarrow J = 2$ (correspondente a uma temperatura

$E/k \simeq 500 \text{ K}$) e $J = 1 \rightarrow J = 3$ (transições de quadrupolo elétrico). Por outro lado, as desexcitações colisionais produzem um ganho de energia. Se os níveis rotacionais mais altos forem povoados pela radiação, esse ganho pode ser intensificado. A função resfriamento é novamente (9.41), substituindo agora n_i por n_{H_2} ou simplesmente n . Uma taxa típica para uma nuvem interestelar com $T \simeq 100 \text{ K}$ é $\Lambda_{H,H_2}/n_{H_2} \simeq 3 \times 10^{-26} \text{ erg/s}$. Em uma nuvem muito densa, com $n_{H_2} \simeq 10^4 \text{ cm}^{-3}$, $\Lambda_{H,H_2}/n_{H_2}^2 \simeq 3 \times 10^{-30} \text{ erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$.

Outros processos físicos podem também ser importantes no resfriamento do meio interestelar. Entre eles, podemos destacar (v) o resfriamento pela ação de grãos interestelares; (vi) o resfriamento por outras moléculas, além de H_2 e HD, em particular o CO, que tem abundâncias típicas $n_{CO} \sim 10^{-4} n_{H_2}$, OH e H_2O e (vii) o resfriamento pela excitação colisional entre prótons e íons.

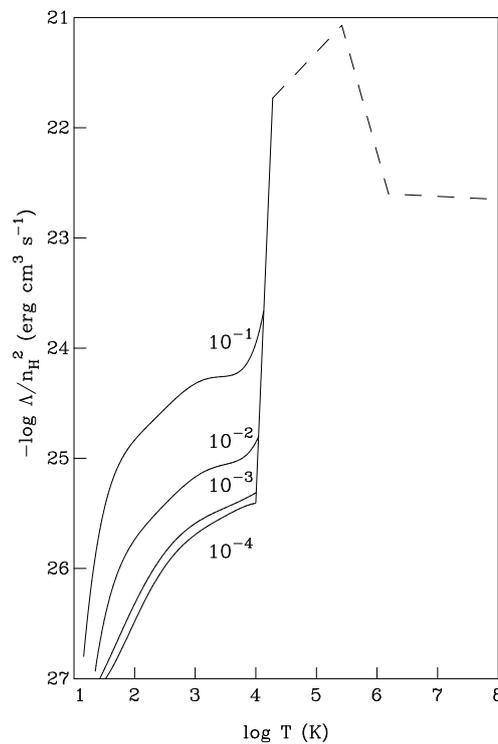


Figura 9.8 - Função resfriamento em regiões HI. (Dalgarno e McCray 1972)

A função total de resfriamento, incluindo os processos colisionais elétron-íon e H-íon está mostrada na figura 9.8 em função da temperatura. A ordenada é a função Λ/n_H^2 , dada em $\text{erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$, e as diferentes curvas referem-se a diferentes valores da ionização fracional, $x = n_e/n_H$. Nesta figura não estão incluídos processos envolvendo grãos ou moléculas. Para $T \lesssim 10^4 \text{ K}$, o resfriamento depende sensivelmente da ionização fracional n_e/n_H . Para $n_e/n_H \lesssim 10^{-3}$ a função resfriamento é devida essencialmente ao impacto de átomos de H, e não depende da razão n_e/n_H . As regiões mais quentes estão indicadas de maneira aproximada pela linha tracejada.

(c) Determinação da temperatura de equilíbrio

A temperatura de equilíbrio pode ser determinada igualando a função resfriamento com a função aquecimento. Isto está representado na figura 9.9, onde as duas curvas superiores correspondem à função resfriamento da figura 9.8 para $x = n_e/n_H = 0.1$ e 0.01 , enquanto que as retas no canto inferior esquerdo representam a função Γ_{eXr} dada por (9.23).

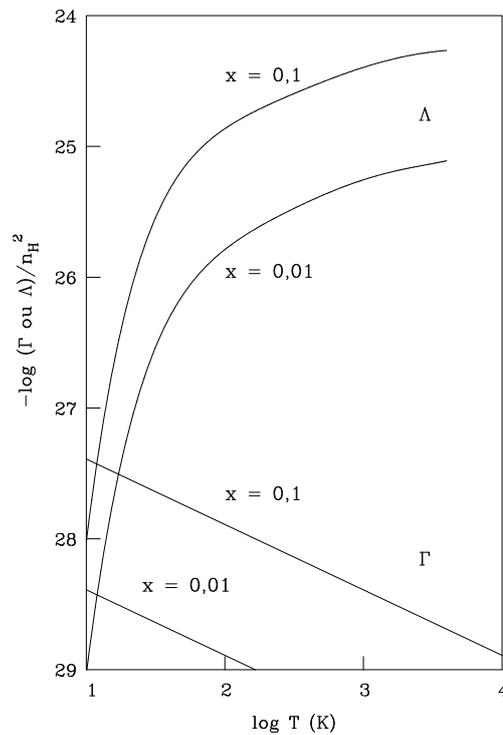


Figura 9.9 - Funções resfriamento em regiões HI para $x = 0.1$ e 0.01 (curvas). As retas correspondem à função aquecimento dada pela eq. 9.23.

Vemos que, mesmo para valores relativamente altos da ionização fracional ($x \simeq 0.1$) as temperaturas de equilíbrio são baixas, da ordem de $T_E \simeq 13$ K. Este valor é ainda um limite superior, pois foi desprezada a perda de energia pela recombinação. Sabemos que a análise de linhas espectrais em rádio ou no visível e ultravioleta indicam a presença de nuvens difusas no meio interestelar, com temperaturas da ordem de $80 - 100$ K, além de um meio internuvens de baixa densidade e temperatura $T \gtrsim 1000$ K. Portanto, são necessários outros mecanismos de aquecimento, além da fotoionização.

Para os raios cósmicos, os valores dados em (9.26) correspondem a valores da função aquecimento superiores aos mostrados na figura 9.9. Note-se que não foi incluída a ionização do He pelos raios cósmicos, o que pode aumentar a taxa acima. A

comparação de (9.26) com as funções de resfriamento das figuras 9.8 e 9.9 mostra que, se a taxa de ionização pelos raios cósmicos estiver próxima do limite superior $\zeta_H \simeq 10^{-15} \text{ s}^{-1}$, a temperatura de equilíbrio poderá atingir os valores da ordem de 100 K para nuvens com $n_H \gtrsim 10 \text{ cm}^{-3}$. Vários problemas entretanto existem com relação a este mecanismo, em particular a dificuldade na obtenção de uma taxa realística próxima do limite superior e dificuldades encontradas no estudo da propagação dos raios cósmicos através do meio interestelar.

No caso da molécula de H_2 , o valor obtido em (9.28) é novamente da ordem dos valores da função aquecimento mostrados na figura 9.9. Portanto, Γ_{Hd} pode eventualmente contrabalançar o resfriamento pela excitação colisional de C II pelo H se $d_C \simeq 0.1$, $z_H \simeq 1$ e $n(\text{HI}) \simeq n_H$. Entretanto, os valores dos parâmetros d_C e z_H são incertos, e cálculos mais detalhados mostram que este mecanismo pode manter temperaturas da ordem de 80 K apenas em situações restritas.

No caso do aquecimento fotoelétrico por grãos, para $\tau \ll 1$ e $y_e \simeq 1$, a função aquecimento Γ_{ed} pode contrabalançar $\Lambda_{H,CII}$ na temperatura de equilíbrio $T_E \simeq 80 \text{ K}$, mesmo se $d_C \simeq 1$ ($n_H \simeq 100 \text{ cm}^{-3}$).

► EXEMPLO 9.7 - O tempo de resfriamento em regiões HI

O tempo de resfriamento t_T pode ser estimado a partir da figura 9.8 para o caso $T \gg T_E$. De (9.13), temos

$$\begin{aligned} t_T &\simeq -\frac{\frac{3}{2} k (T - T_E)}{\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} k T \right)} \simeq -\frac{(3/2) k T}{(\Gamma - \Lambda)/n} \\ &\simeq \frac{3}{2} \frac{n k T}{\Lambda} \quad (\Gamma \ll \Lambda) \end{aligned} \quad (9.52)$$

onde usamos (9.3) e (9.10) com n constante e consideramos que, para $T \gg T_E$, temos $\Gamma \ll \Lambda$. Podemos escrever ainda, para $n_e/n_H \ll 1$,

$$\begin{aligned} t_T &\simeq \frac{3 k T}{2} \frac{n/n_H}{(\Lambda/n_H^2) n_H} \simeq \frac{3 k T}{2} \frac{1 + n_e/n_H}{(\Lambda/n_H^2) n_H} \\ &\simeq \frac{3 k T}{2} \frac{1}{n_H (\Lambda/n_H^2)} \quad (n_e/n_H \ll 1) \end{aligned} \quad (9.53)$$

Considerando $T \simeq 100 \text{ K}$ e $n_e/n_H \simeq 10^{-4}$, da figura 9.8 obtemos $\Lambda/n_H^2 \simeq 3 \times 10^{-27} \text{ erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$, de modo que

$$t_T \simeq \frac{2,2 \times 10^5}{n_H} \text{ ano} \quad (9.54)$$

Com $n_H \simeq 10 \text{ cm}^{-3}$ isto corresponde a $t_T \simeq 2 \times 10^4 \text{ ano}$, que é um valor pequeno com relação à escala de tempo de vida das nuvens interestelares, $t_n \gtrsim 10^6 \text{ ano}$. Analogamente, em uma região mais quente, com $T \sim 10^4 \text{ K}$ e $n_e/n_H \sim 10^{-1}$, temos

$\Lambda/n_H^2 \simeq 6 \times 10^{-25} \text{ erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$ e $t_T \simeq 1.1 \times 10^5/n_H$ ano. A precisão destas estimativas é da ordem de 30% para densidades $1 \lesssim n_H \text{ (cm}^{-3}\text{)} \lesssim 300$ e temperaturas $50 \lesssim T(\text{K}) \lesssim 600$. Alternativamente, podemos estimar o tempo de resfriamento para uma nuvem HI com $T = 100 \text{ K}$, $n_H = 10 \text{ cm}^{-3}$ e $n_e/n_H = 10^{-3}$. De (9.53),

$$t_T \simeq \frac{3}{2} kT \frac{1}{n_H (\Lambda/n_H^2)} \tag{9.55}$$

Da figura 9.9, com $T = 100 \text{ K}$ e $n_e/n_H = 10^{-3}$, temos $\Lambda/n_H^2 \simeq 4 \times 10^{-27} \text{ erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$ e $t_T \simeq 5.2 \times 10^{11} \text{ s} = 1.6 \times 10^4$ anos.

► EXEMPLO 9.8 - Estimativa da temperatura de equilíbrio de nuvens interestelares

Vamos considerar uma nuvem interestelar com $n_H = 20 \text{ cm}^{-3}$ aquecida por partículas cósmicas pela ionização do H, segundo a taxa $\zeta_H = 10^{-15} \text{ s}^{-1}$. Vamos estimar a energia por cm^3 por segundo fornecida ao gás, admitindo que a energia média dos elétrons ejetados pelos raios cósmicos é de 3.4 eV. Temos

$$\Gamma_{H,RC} \simeq n_H \zeta_H \bar{E} = 6.8 \times 10^{-14} \text{ eV cm}^{-3} \text{ s}^{-1} = 1.1 \times 10^{-25} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

Vamos admitir que a nuvem interestelar é resfriada apenas pela excitação colisional do CII por átomos de H, com um parâmetro de depleção do carbono $d_C = 0.2$, para obter a temperatura de equilíbrio da nuvem. De (9.54), a função resfriamento é dada por

$$\Lambda_{H,CII} \simeq 7.9 \times 10^{-27} n_H^2 d_C e^{-92.0/T}$$

em unidades cgs. Neste caso,

$$\Lambda_{H,CII} \simeq 7.9 \times 10^{-27} n_H^2 d_C e^{-92.0/T} \simeq 6.4 \times 10^{-25} e^{-92.0/T} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

A tabela abaixo relaciona alguns valores da função resfriamento para valores típicos da temperatura da nuvem.

$\log T$	$\log \Lambda$	$\log T$	$\log \Lambda$
1.0	-28.2	1.8	-24.8
1.2	-26.7	2.0	-24.6
1.4	-25.8	2.2	-24.4
1.6	-25.2	2.4	-24.4

Considerando $\Gamma_{H,RC} \simeq \Lambda_{C,HII}(T_E)$, vemos que $T_E \simeq 53 \text{ K}$.

9.5 Instabilidades no gás interestelar

Neste capítulo, consideramos processos estacionários para o aquecimento e resfriamento do gás interestelar. Uma das conseqüências deste tipo de tratamento é a ocorrência de duas fases distintas no gás, isto é, uma região fria e densa, identificada com as *nuvens interestelares*, e uma fase diluída e quente, identificada com o *meio internuvens*, como ilustrado na figura 9.10.

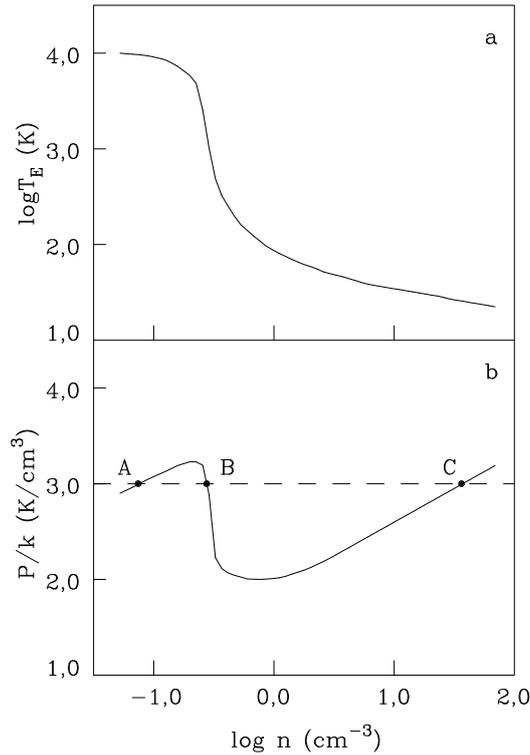


Figura 9.10 - Fases do meio interestelar: (a) temperatura, (b) pressão. (Scheffler e Elsässer 1988)

Esta figura pode ser obtida a partir da identificação dos processos de aquecimento e resfriamento do gás interestelar e da conseqüente determinação da temperatura de equilíbrio, como visto nas seções anteriores. As fases podem ser compreendidas em termos de *instabilidades térmicas* no meio interestelar. Para um dado conjunto de mecanismos de aquecimento e resfriamento, podemos obter a variação da temperatura T do gás (figura 9.10a) e da pressão do gás P/k (figura 9.10b) com a densidade total de partículas n . Vemos que há duas regiões distintas: (i) uma região com baixa densidade ($n \lesssim 1 \text{ cm}^{-3}$) e temperatura elevada ($T \simeq 10^4 \text{ K}$), identificada com o *meio internuvens*, e (ii) uma região com densidades mais altas ($n > 1 \text{ cm}^{-3}$) e temperaturas mais baixas ($T \lesssim 10^2 \text{ K}$), identificada com as *nuvens interestelares*. Entre as duas regiões a temperatura cai rapidamente com o aumento da densidade,

o que é uma conseqüência da maior eficiência do resfriamento do gás. Quando o gás é comprimido (n aumenta), as perdas de energia aumentam proporcionalmente a n^2 (ver por exemplo a equação 9.49), enquanto que os ganhos de energia aumentam menos rapidamente, pois $\Gamma \propto n$ (ver, por exemplo, a equação 9.25). Portanto, a temperatura do gás diminui. Nesta região intermediária, a temperatura diminui tão rapidamente que não pode contrabalançar o aumento da densidade e, portanto, a pressão diminui, pois $p \propto nT$.

Isto pode ser observado na figura 9.10b. Nesta figura, vemos que as fases identificadas como nuvens e meio internuvens estão em equilíbrio de pressão. Na região caracterizada pelo ponto A (meio internuvens), a pressão aumenta com a densidade, o mesmo ocorrendo na região caracterizada pelo ponto C (nuvens). Na região intermediária, porém, para densidades acima do valor característico do ponto B, a pressão *diminui* com o aumento da densidade, o que caracteriza uma região de *instabilidade térmica*. Portanto, a figura 9.9b pode ser interpretada de forma qualitativa, considerando inicialmente um gás diluído e quente com $T \simeq 10^4$ K. Este gás pode sofrer uma compressão mantendo o equilíbrio térmico, até atingir a região em que a temperatura cai tão rapidamente que não pode contrabalançar o aumento da densidade, de modo que a pressão diminui. Para densidades ainda mais altas a temperatura chega a uma nova região de equilíbrio, em que a pressão volta a aumentar.

Os trabalhos básicos sobre as instabilidades térmicas e formação de nuvens interestelares a partir do meio internuvens foram desenvolvidos basicamente a partir da década de 1960. Vamos considerar brevemente os principais aspectos físicos relacionados à interpretação das instabilidades em um meio interestelar infinito, uniforme e estático, com uma densidade ρ_o e temperatura T_o . Em equilíbrio térmico podemos escrever

$$\mathcal{L}(\rho_o, T_o) = \Lambda - \Gamma = 0 \tag{9.56}$$

onde \mathcal{L} é uma função de perdas-ganhos generalizada, definida como a perda líquida de energia por grama de material e por segundo (ver equação 9.4). Para obter esta função podemos considerar processos como fotoionização, aquecimento pelos raios cósmicos, resfriamento por excitação colisional etc. Como vimos, este equilíbrio pode ser instável para perturbações de densidade ou temperatura.

A partir da definição da função generalizada de perdas \mathcal{L} em (9.56) é fácil concluir que, para haver equilíbrio térmico, devemos ter $\partial\mathcal{L}/\partial T > 0$, e para haver instabilidade é necessário que $\partial\mathcal{L}/\partial T < 0$. Vamos considerar um gás em equilíbrio térmico, isto é, $\mathcal{L} = 0$. Se alguma perturbação ocorrer no gás de modo a diminuir sua temperatura, teremos $\partial T < 0$. Se $\partial\mathcal{L}/\partial T < 0$, podemos concluir que $\partial\mathcal{L}$ será positiva, ou seja, as perdas de energia aumentarão e a temperatura continuará baixando, o que constitui uma instabilidade, ou ausência de equilíbrio. Se, ao contrário, $\partial\mathcal{L}/\partial T > 0$, ao decréscimo da temperatura causado pela flutuação corresponderá uma $\partial\mathcal{L}$ negativa, isto é, as perdas de energia vão diminuir, o que leva a um aumento da temperatura e ao reestabelecimento do equilíbrio. Podemos ilustrar esta situação de maneira esquemática, como mostrado na figura 9.11.

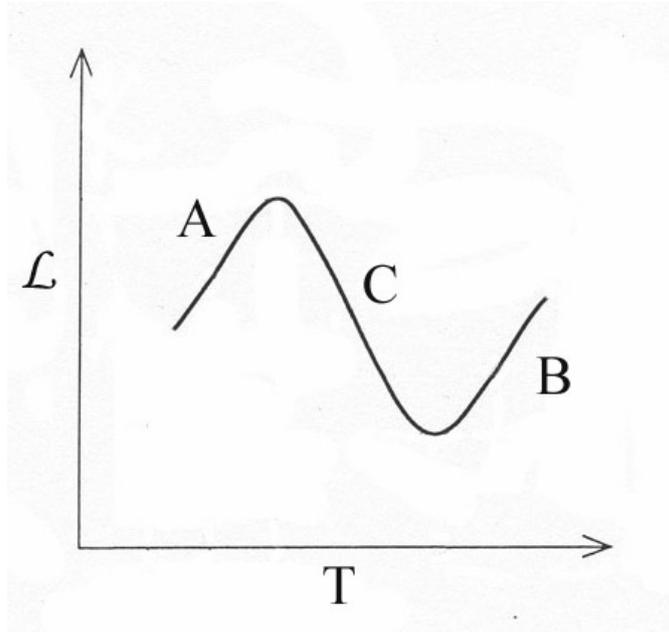


Figura 9.11 - Variação esquemática da função generalizada de perdas-ganhos.

Vemos que as regiões A e B são regiões estáveis, em equilíbrio térmico, pois $\partial\mathcal{L}/\partial T > 0$ e enquanto que na região C temos uma região de instabilidade, onde $\partial\mathcal{L}/\partial T < 0$. Naturalmente, a figura 9.11 mostra esquematicamente a mesma conclusão da figura 9.10. O trabalho pioneiro sobre a aplicação deste formalismo ao meio interestelar deve-se a Field (1965) e Field et al. (1969).

Mais especificamente, considerando uma perturbação *isocórica* da temperatura, T' , temos

$$T = T_o + T' \tag{9.57}$$

$$dQ = c_V dT \tag{9.58}$$

$$c_V \frac{dT}{dt} = -\mathcal{L} \tag{9.59}$$

onde dQ é o calor absorvido por grama em um processo infinitesimal, c_V é o calor específico a volume constante, e d/dt representa a derivada total, $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$. Como $\mathbf{v}_o = 0$, temos

$$c_V \frac{\partial T'}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_\rho T' = -\mathcal{L}_T T' \tag{9.60}$$

O gás será instável se a variação em \mathcal{L} tiver sinal oposto à variação da entropia do gás. O critério de *instabilidade para perturbações isocóricas* da temperatura é

$$\mathcal{L}_T = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_\rho < 0 \tag{9.61}$$

Por exemplo, para $T' > 0$ haverá instabilidade se $\partial T'/\partial t > 0$. Vamos agora considerar uma perturbação *isobárica*. Chamando c_p o calor específico a pressão constante, temos

$$dQ = c_p dT \tag{9.62}$$

$$c_p \frac{\partial T'}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_p T' \tag{9.63}$$

Haverá *instabilidade para uma perturbação isobárica* se

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_p < 0 \tag{9.64}$$

Mas

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_\rho + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \right)_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \tag{9.65}$$

Introduzindo a equação de estado dos gases perfeitos, o critério de instabilidade para uma perturbação isobárica toma a forma

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_\rho - \frac{\rho_o}{T_o} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \right)_T < 0 \tag{9.66}$$

Usando a equação de estado e a condição (9.56) obtemos

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right)_\rho \left(\frac{\partial \log p}{\partial \log \rho} \right)_{\mathcal{L}=0} < 0 \tag{9.67}$$

Admitindo também que $(\partial \mathcal{L}/\partial T)_\rho > 0$, obtemos

$$\left(\frac{\partial \log p}{\partial \log \rho} \right)_{\mathcal{L}=0} < 0 \tag{9.68}$$

que é a condição para instabilidade térmica para uma perturbação isobárica. Com esta relação, pode-se entender o resultado mostrado na figura 9.10, com relação ao plano $p \times \rho$ ou $p \times n$.

Além dos processos estacionários de aquecimento e resfriamento, o meio interestelar sofre também outros processos dinâmicos não estacionários, que levam ao aquecimento do gás, freqüentemente com temperaturas superiores à do meio inter-nuvens, ou $T \gtrsim 10^4$ K. Estes processos incluem a expansão de regiões H II, explosões de supernovas e ação de ventos estelares associados com estrelas quentes. Alguns deles envolvem choques com altas velocidades, onde energia mecânica é transformada em energia térmica, levando a temperaturas da ordem de 10^6 K, em que linhas de O VI etc., e emissão em raios X podem ser produzidas.



Figura 9.12 - Emissão de CO em nuvens moleculares. (DRAO/NRC)

9.6 Instabilidades e formação de estrelas

As nuvens moleculares gigantes (GMC, de *Giant Molecular Clouds*) são verdadeiros “berçários” de estrelas, onde objetos jovens e brilhantes estão imersos em nuvens de gás e poeira. A figura 9.12 mostra a emissão de CO em comprimentos de onda de rádio, característica de nuvens moleculares associadas com a formação de estrelas. Entretanto, a teoria da formação estelar a partir do colapso e fragmentação dessas nuvens ainda tem muitos pontos obscuros, e a formação estelar é, de fato, o estágio menos conhecido no estudo da evolução das estrelas.

(a) Colapso e fragmentação

A complexidade do problema da formação estelar pode ser avaliada pela simples comparação das dimensões e massas das nuvens moleculares e das estrelas. As GMC têm dimensões maiores ou da ordem de 5 pc e massas acima de $10^4 M_{\odot}$, enquanto que uma estrela tem raios da ordem de 10^{11} cm e massas da ordem da massa solar, isto é, as densidades médias das estrelas são 20 ordens de grandeza maiores do que as das nuvens.

A idéia básica da formação estelar, proposta na década de 1950, considera que estágios sucessivos de fragmentação e colapso são eficientes para reduzir as massas das nuvens moleculares até as dimensões estelares. Este processo é denominado *fragmentação hierárquica*, e é influenciado pelas condições físicas da nuvem, como sua massa e dimensões, pela presença de campos magnéticos, rotação, não-homogeneidades, emissão de radiação e pelos diversos processos de aquecimento e resfriamento do gás interestelar. A emissão da radiação tem um papel essencial, uma vez que durante o colapso a temperatura das regiões centrais aumenta e parte do excesso de energia deve ser perdida sob a forma de radiação para que o colapso

prossiga. A fragmentação da nuvem torna esse processo mais eficiente, de modo que as subunidades menores são capazes de colapsar em escalas de tempo mais curtas. O processo continua até a formação de uma estrutura muito densa e opaca, na qual a temperatura é suficientemente alta para a ignição de reações termonucleares. A energia produzida é, em última análise, responsável pelo gradiente de pressão que equilibra a atração gravitacional da massa de gás, formando um objeto em equilíbrio hidrostático. Do ponto de vista observacional, diversos objetos estelares jovens (YSO, de *young stellar objects*) são identificados, geralmente associados com o gás e a poeira interestelares. Além das estrelas O, B jovens, outros exemplos são as *T Tauri* e os objetos *Herbig-Haro*, com a presença de jatos e outras estruturas dinâmicas.

Observações da emissão de CO revelam a existência de aglomerações (*clumps*) dentro das nuvens moleculares gigantes, com massas abaixo de $100 M_{\odot}$, identificadas como novas estrelas em processo de formação. O processo de colapso gravitacional e fragmentação leva à formação de objetos estelares com massas dentro do intervalo observado, desde $M \sim 100 M_{\odot}$ até $M \sim 0,01 M_{\odot}$, aproximadamente. Estas estrelas, em escalas de tempo que variam de milhões a vários bilhões de anos, completam suas trajetórias evolutivas e devolvem, finalmente, parte ou toda a matéria de que são constituídas ao meio interestelar de onde vieram.

(b) Instabilidade e formação estelar

As estrelas se formam a partir de nuvens interestelares, por um processo de instabilidade gravitacional que leva à contração da nuvem, até que as regiões centrais atinjam densidades e temperaturas suficientes para a ignição das reações nucleares. Para uma nuvem homogênea, infinita e em repouso, as instabilidades levam à contração gravitacional, se as perturbações aplicadas tiverem um comprimento de onda λ superiores ao *comprimento de Jeans*,

$$\lambda_J \simeq \left(\frac{\pi}{G\rho} \right)^{1/2} c_s \tag{9.69}$$

onde ρ é a densidade do gás e c_s é a velocidade isotérmica do som no meio, dada por

$$c_s = \left(\frac{\gamma k T}{\mu m_H} \right)^{1/2} \tag{9.70}$$

Aplicando essa condição a uma nuvem esférica, podemos mostrar que a massa envolvida deve ser superior à *massa de Jeans*,

$$M_J \simeq 1.4 \times 10^{-10} \frac{T^{3/2}}{\rho^{1/2} \mu^{3/2}} M_{\odot} \tag{9.71}$$

onde T é a temperatura do gás em K, ρ é a densidade em g/cm^3 , e μ é o peso molecular médio. Já obtivemos uma forma semelhante desta equação como aplicação do teorema do virial (cf. Exemplo 7.4).

Nesse caso, a instabilidade se propaga, havendo a formação de um objeto colapsado em uma escala de tempo da ordem do tempo de queda livre t_{ql} , isto é, o colapso é essencialmente controlado pela gravidade. Esse tempo pode ser estimado por

$$t_{ql}^2 \sim \frac{2 R_J}{g} \quad (9.72)$$

onde a gravidade é

$$g \simeq \frac{G M_J}{R_J^2} \quad (9.73)$$

ou seja, $t_{ql} \propto 1/\sqrt{\rho}$, e

$$t_{ql} \simeq \sqrt{\frac{3}{4\pi G \rho}} \quad (9.74)$$

que pode ser escrita

$$t_{ql} \simeq 6 \times 10^{-5} \frac{1}{\sqrt{\rho}}, \quad (9.75)$$

onde ρ está em g/cm^3 e t_{ql} em anos. Em uma nuvem interestelar com $T \simeq 100 \text{ K}$, $\mu \simeq 1$ e $n \simeq 1 \text{ cm}^{-3}$, obtemos $M_J \sim 10^5 M_\odot$ e $t_{ql} \sim 10^8$ anos, isto é, as massas são da ordem das massas dos aglomerados globulares e das nuvens moleculares gigantes. À medida que o colapso se processa, a densidade aumenta e tanto M_J como t_{ql} decrescem. Por exemplo, considerando uma região com $T \simeq 50 \text{ K}$, $\mu \simeq 1$ e $n \simeq 10^6 \text{ cm}^{-3}$, obtemos $M_J \sim 40 M_\odot$ e $t_{ql} \sim 10^4$ anos. Neste caso, a região que sofre um colapso pode tornar-se, efetivamente, uma única estrela.

A aplicação das equações (9.69) e (9.71) às condições interestelares mostra que as nuvens que se condensam têm massas muito superiores às massas das estrelas normais. Portanto, foram desenvolvidos modelos de formação estelar que incluem a fragmentação das nuvens originais, para levar à formação de objetos com as massas estelares usuais. Nesse caso, à medida que a nuvem colapsa, fragmentos dessa nuvem tornam-se instáveis e colapsam mais rapidamente que a nuvem original. A fragmentação termina quando a massa dos fragmentos é da ordem da massa das estrelas.

(c) Rotação e momento angular

Uma nuvem interestelar que sofre colapso para formar estrelas deve conservar seu momento angular. Vamos supor uma nuvem com um raio da ordem de $R_1 = 0.1$ pc e massa da ordem de uma massa solar, $M = 1 M_\odot$, condição necessária para formar uma estrela do tipo do Sol. Supondo que a nuvem tinha uma velocidade baixa no equador, da ordem de $v_1 = 1 \text{ km/s}$, pela conservação do momento angular temos

$$M v_1 R_1 = M v_2 R_2 \quad (9.76)$$

ou seja, $v_2 = v_1 R_1/R_2 = 5 \times 10^{11}$ km/s, que é maior que a velocidade da luz. Portanto, a protoestrela deve perder parte do momento angular antes de chegar até a fase de sequência principal. Uma solução para este problema é a hipótese de formação de discos e anéis, que se condensam formando estruturas que transportem parte do momento angular original. Um problema semelhante ocorre com o campo magnético. Considerando um campo original como vimos na parte 7 do curso, pela conservação do fluxo magnético pela estrela em colapso o campo magnético resultante seria também muito alto, cerca de 10^9 gauss para o caso do Sol. Portanto, a solução do problema envolve também a difusão do campo magnético, assim como do momento angular. Evidências observacionais de objetos estelares jovens confirmam essas características.

(d) Difusão ambipolar

As nuvens interestelares difusas são mantidas em equilíbrio de pressão pelo gás mais diluído e quente que as envolve. Nas nuvens mais densas, opticamente espessas, a gravidade da própria nuvem tem um papel importante, levando ao colapso da nuvem e eventual formação de uma proto-estrela. Se a nuvem estiver imersa em um campo magnético, o campo pode contrabalançar a ação da gravidade, aumentando a massa de Jeans necessária para o colapso. O resultado é uma estrutura quase estática, em que o colapso é dificultado nas direções perpendiculares às linhas do campo. O colapso ocorre inicialmente ao longo das linhas do campo, estendendo-se para direções perpendiculares a elas somente quando a densidade da nuvem for muito alta.

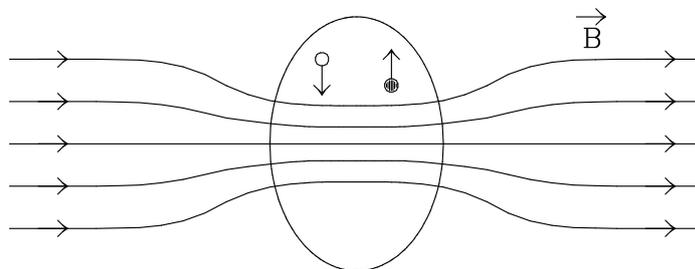


Figura 9.13 - Difusão ambipolar.

Na estrutura formada, a força magnética na região em que o colapso é impedido é paralela e com sentido contrário à força da gravidade (figura 9.13). O campo magnético afeta as partículas carregadas, que tendem a se afastar da região central da nuvem (círculo fechado na figura 9.13), enquanto que os átomos neutros, atraídos apenas pela gravidade, seguem uma trajetória oposta (círculo aberto na figura 9.13), constituindo a *difusão ambipolar*. Esta difusão produz uma fricção entre as partículas carregadas e as neutras, reduzindo sua velocidade. O resultado é um retardamento do colapso gravitacional, além de um aquecimento friccional da nuvem. A escala de tempo de difusão ambipolar depende da ionização fracional do gás, sendo da ordem

de $t_d \sim 4 \times 10^5$ anos para um grau de ionização $x \sim 10^{-8}$ e $t_d \sim 4 \times 10^6$ anos para $x \sim 10^{-7}$. Após este período, o colapso prossegue até a formação da proto-estrela.

Neste capítulo consideramos processos de aquecimento e resfriamento envolvendo nuvens interestelares de H neutro ou molecular, como exemplos de transporte de energia no meio interestelar. Igualmente interessantes são os processos envolvendo regiões de H ionizado, como as regiões HII e as nebulosas planetárias. Nesses casos, temperaturas da ordem de 10000 K são mantidas por estrelas centrais cujas temperaturas efetivas são muito mais altas, isto é, apenas parte da energia da estrela é usada para manter o gás aquecido e ionizado. Um tratamento detalhado dos processos de aquecimento e resfriamento nestas regiões e determinação de sua temperatura eletrônica pode ser encontrado em Osterbrock e Ferland (2005).

EXERCÍCIOS

- 9.1 Suponha que a função resfriamento para as temperaturas características do meio internuvens seja dada por $\Lambda/n_H^2 \simeq 3 \times 10^{-26} \text{ erg cm}^3 \text{ s}^{-1}$. O modelo de Bakes e Tielens (1994) prediz uma taxa de aquecimento por átomo de hidrogênio da ordem de $7 \times 10^{-27} \text{ erg/s}$. Qual é a densidade desta região interestelar?
- 9.2 Uma nuvem interestelar é aquecida por dois processos: (i) pela ionização do H pelos raios cósmicos a uma taxa de $5 \times 10^{-16} \text{ s}^{-1}$, correspondendo a fotoelétrons com energia média de 5 eV e (ii) pela radiação estelar, por meio da fotoionização do carbono. O resfriamento da nuvem é feito exclusivamente pela excitação colisional do C pelos elétrons. A nuvem tem uma densidade $n_H = 1 \text{ cm}^{-3}$ e uma ionização fracional $n_e/n_H = 0.1$. (a) Estime a função aquecimento ($\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$) pelos raios cósmicos. (b) Estime a função aquecimento pela radiação estelar para as temperaturas típicas das nuvens. Considere o intervalo $10 \leq T(\text{K}) \leq 100$. Qual dos processos é dominante? (c) A função resfriamento pelos íons de C é dada aproximadamente por $\Lambda \simeq 7.23 \times 10^{-25} T^{-1/2} e^{-91.59/T}$, com unidades de $\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$. Estime a temperatura da nuvem.
- 9.3 Admita que os grãos sólidos de uma nuvem interestelar são esféricos, com raio $a = 100 \text{ \AA}$ e densidade interna $s = 3 \text{ g/cm}^3$. (a) Qual é a seção de choque geométrica dos grãos? (b) Qual é a massa dos grãos relativamente à massa do átomo de H? (c) Estime a área projetada dos grãos por núcleo de hidrogênio Σ_d , admitindo que a razão entre a massa total de grãos e a massa total de gás (razão grão-gás) é da ordem de 1/200. (d) Estime a energia fornecida para aquecer a nuvem por emissão fotoelétrica, considerando uma nuvem com $n_H = 1 \text{ cm}^{-3}$. Admita que o fluxo dos fotoelétrons é $F_e = 2 \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$, e a energia média do fotoelétron é de 5 eV.

- 9.4 Uma nuvem interestelar tem uma temperatura de 80 K e uma densidade $n \sim 10^5 \text{ cm}^{-3}$. Considerando que a nuvem é composta somente de H e H_2 , na proporção 1 para 1, qual seria a massa de Jeans da nuvem?
- 9.5 Considere uma nuvem esférica de raio $R = 100 \text{ pc}$ composta de H, com uma densidade numérica $n_H = 1 \text{ cm}^{-3}$. (a) Qual é a massa da nuvem? (b) Qual é o tempo de queda livre?

Referências

- Carroll, B. W., Ostlie, D. A. 2006, *An Introduction to Modern Astrophysics*, Benjamin Cummings
- Choudhuri, A. R. 2010, *Astrophysics for physicists*, Cambridge University Press
- Dopita, M. A., Sutherland, R. S. 2003, *Astrophysics of the diffuse universe*, Springer
- Dyson, J. E., Williams, D. A. 1997, *The physics of the interstellar medium*, IOP
- Field, G. B. 1965, *Astrophys. J.* **142**, 531
- Field, G. B., Goldsmith, D. W., Habing, H. J. 1969, *Astrophys. J.* **155**, 149
- Kwok, S. 2007, *Physics and chemistry of the interstellar medium*, University Science Books
- Lequeux, J. 2004 *The interstellar medium*, Springer (paperback 2010)
- Maciel, W. J. 2002, *Astrofísica do meio interestelar*, Edusp
- Maciel, W. J. 2011, *Evolução química da Galáxia*, Notas de aulas, IAG/USP
- Osterbrock, D. E., Ferland, G. J. 2005, *Astrophysics of gaseous nebulae and active galactic nuclei*, University Science Books
- Scheffler, H., Elsässer, H. 1988, *Physics of the Galaxy and Interstellar Matter*, Spitzer Jr., L. 1978, *Physical processes in the interstellar medium*, Wiley [student edition 1998]
- Tielens, A. G. G. M. 2005, *The physics and chemistry of the interstellar medium*, CUP (paperback 2010)
- Wynn-Williams, G. 1992, *The fullness of space*, CUP

CAPITULO 10 – ELEMENTOS DE ASTROFÍSICA DE PLASMAS

10.1 Introdução: plasmas em astrofísica

Nos exemplos analisados até agora, consideramos geralmente sistemas gasosos essencialmente neutros, como por exemplo no caso das nuvens interestelares difusas. Em muitas situações astrofísicas, temos íons positivos e negativos, sensíveis à ação de campos elétricos e magnéticos, de modo que as equações dos plasmas devem ser aplicadas. Neste capítulo, vamos reexaminar algumas equações básicas da dinâmica dos fluidos, procurando generalizar essas equações para os plasmas, em particular, em suas aplicações magnetohidrodinâmicas. Nossa ênfase estará nos processos que envolvem transporte de energia, em especial na presença de campos magnéticos.

Diversos textos tratam da astrofísica de plasmas, desde o nível introdutório até livros mais especializados. Vamos aqui seguir em linhas gerais o tratamento dado por Choudhuri (2010, capítulo 8). Outras referências incluem Choudhuri (1998), Shu (1992) e Parker (1979). Uma descrição simplificada da atmosfera solar em termos da astrofísica de plasmas pode ser encontrada em Carroll e Ostlie (2006, capítulo 11).

Na realidade, muitas das situações que analisamos em capítulos anteriores envolvem plasmas. Por exemplo, na atmosfera do Sol e da maior parte das estrelas temos íons de muitos elementos pesados. Nos interiores estelares, onde a temperatura é muito mais alta que na fotosfera, praticamente todos os elementos estão ionizados. Nas regiões HII, como vimos, o próprio hidrogênio está ionizado, assim como o hélio, pelo menos parcialmente. Na nuvens interestelares “neutras”, a interação dos raios cósmicos com o gás pode também ionizar e aquecer a nuvem, como vimos no capítulo 9. De fato, os próprios raios cósmicos são partículas carregadas de alta energia, movendo-se a velocidades próximas da velocidade da luz, e seus processos de aceleração a rigor envolvem interações de plasmas. Além disto, a interação destas partículas com os campos magnéticos galácticos dão origem a importantes processos de perda de energia, como no caso da radiação síncrotron.

► EXEMPLO 10.1 - Linhas de ferro no espectro solar

A temperatura da fotosfera do Sol é de aproximadamente 5800 K, de modo que a energia média das partículas nesta região é de

$$E \simeq kT \simeq (1.38 \times 10^{-16})(5800) = 8.0 \times 10^{-13} \text{ erg} \simeq 0.5 \text{ eV}$$

Portanto, devemos esperar que o Fe esteja essencialmente neutro nesta região, ou seja, na forma FeI, como pode ser visto pelo potencial de ionização mostrado na tabela 10.1.

Ion	PI (eV)	T	Ion	PI (eV)	T (K)
Fe I	7.9	9.2×10^4	Fe XI	290	3.4×10^6
Fe II	16.2	1.9×10^5	Fe XII	331	3.8×10^6
Fe III	30.6	3.6×10^5	Fe XIII	361	4.2×10^6
Fe IV	54.8	6.4×10^5	Fe XIV	392	4.6×10^6
Fe V	75.0	8.7×10^5	Fe XV	457	5.3×10^6
Fe VI	99.1	1.2×10^6	Fe XVI	489	5.7×10^6
Fe VII	125	1.5×10^6	Fe XVII	1266	14.7×10^6
Fe VIII	151	1.8×10^6	Fe XVIII	1358	15.8×10^6
Fe IX	234	2.7×10^6	Fe XIX	1456	16.9×10^6
Fe X	262	3.0×10^6	Fe XX	1582	18.4×10^6

Tabela 10.1 - Potenciais de ionização do Fe.

A tabela também mostra valores típicos da temperatura necessária para a existência do íon considerado, obtida da equação acima. Vemos que a energia térmica média na fotosfera solar não é suficiente para ionizar os átomos de Fe, que devem portanto estar na forma Fe I. Este íon pode ser observado em absorção, isto é, os átomos de Fe da fotosfera podem absorver a radiação em comprimentos de onda característicos do íon Fe I vinda das regiões mais profundas, e portanto mais quentes, da atmosfera solar. De fato, o espectro solar analisado por Joseph Von Fraunhofer em 1814 apresenta diversas linhas do Fe, como pode ser visto na figura 10.1 (ver também a figura 4.1).

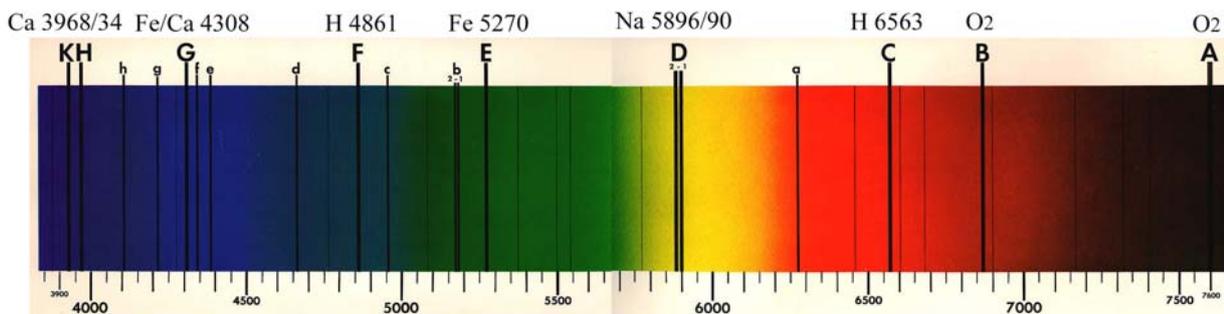


Figura 10.1 - Linhas de absorção no espectro solar.

Algumas das linhas estão identificadas, do Fe e de outros elementos. Outras linhas de absorção fotosféricas do Fe podem ser observadas, como as linhas nos comprimentos de onda 3860 Å, 4046 Å, 4384 Å, 5250 Å, 5380 Å, 5576 Å, 6302 Å, e 8689 Å. Linhas do Fe em altos estágios de ionização são também observadas no espectro da coroa solar, como pode ser visto nas figuras 10.2 e 10.3.

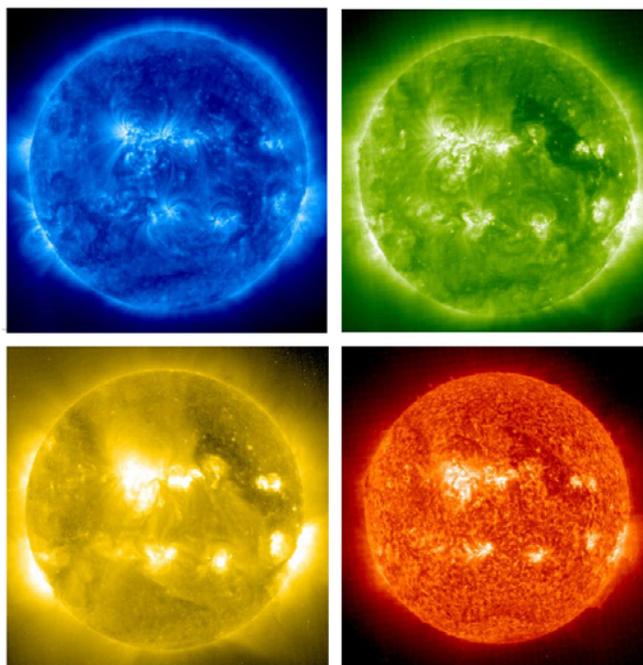


Figura 10.2 - Imagens da coroa solar em linhas do Fe e He. (a) Fe X, 171 Å, (b) Fe XII, 195 Å, (c) Fe XV, 284 Å, (d) He II, 304 Å. (SOHO)

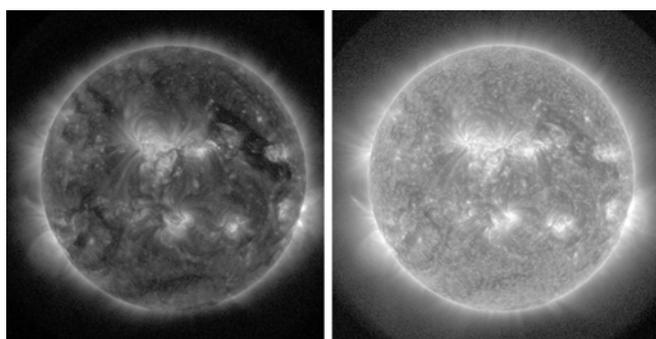


Figura 10.3 - Imagens da coroa solar em linhas do Fe. (a) Fe XVIII, 94 Å, (b) Fe XX, 131 Å. (Solar Dynamics Observatory)

Considerando os potenciais de ionização mostrados na tabela 10.1, podemos estimar a energia necessária para a existência desses íons na coroa solar, usando o mesmo procedimento anterior. Por exemplo, para o íon Fe XV, observado pela linha em 284 Å, tomando $E \simeq PI \simeq kT$, temos

$$T \simeq \frac{PI}{k} \simeq \frac{(457) (1.60 \times 10^{-12})}{(1.38 \times 10^{-16})} \simeq 5.3 \times 10^6 \text{ K}$$

ou seja, uma temperatura da ordem de milhões de K é necessária para que o gás contenha esses íons com emissão em 284 Å, o que dá uma estimativa da temperatura

da coroa solar. Temperaturas semelhantes podem ser estimadas para a linha 304 Å do He, cujos potenciais de ionização são 24.6 eV (He I) e 54.4 eV (He II). É interessante notar que a abundância de Fe – incluindo todas os seus íons – é muito pequena na atmosfera solar. O valor médio desta abundância é $\epsilon(Fe)_{\odot} \simeq 7.50$, ou seja,

$$\epsilon(Fe)_{\odot} = \log\left(\frac{n_{Fe}}{n_H}\right)_{\odot} + 12 = 7.5$$

Portanto,

$$\left(\frac{n_{Fe}}{n_H}\right)_{\odot} \simeq 10^{7.5-12} = 10^{-4.5} = 3.2 \times 10^{-5}$$

ou seja, há cerca de 30000 átomos de H para cada átomo de Fe na fotosfera solar.

► EXEMPLO 10.2 - Metais ionizados em supernovas e remanescentes

Em ejeções de supernovas ou em restos de supernovas (SNR) podem ser também identificadas muitas linhas de emissão de metais ionizados. Na figura 10.4 estão mostrados alguns espectros da supernova 1987A na faixa do ultravioleta até o infravermelho próximo, onde podem ser observadas linhas de N V, Ca II, Mg II, Fe II, etc. As figuras 10.5 e 10.6 mostram o remanescente de supernova Cas A na faixa de raios X moles, destacando linhas de emissão de Ne X, Mg XI, Mg XII, Si XIII a XV, S XV, Ar XVII, Ca XIX e Fe XXV. A faixa de energias de 1 keV a cerca de 10 keV corresponde a comprimentos de onda de

$$\lambda \simeq \frac{hc}{E} \simeq \frac{(6.63 \times 10^{-27})(3 \times 10^{10})}{(1-10)(10^3)(1.6 \times 10^{-12})} \simeq 1.2 \times 10^{-8} \text{ a } 1.2 \times 10^{-7} \text{ cm} = 1.2 \text{ a } 12\text{Å}$$

Estas linhas estão superpostas a um espectro contínuo (a curva sob as linhas) produzido pela emissão livre-livre, ou *Bremsstrahlung* (radiação de freiamento, ou desaceleração), gerada pela aceleração de elétrons ao serem defletidos pelos íons positivos. Os elétrons não estão ligados aos íons nem antes nem depois da emissão, correspondendo classicamente a uma modificação de suas trajetórias abertas.

► EXEMPLO 10.3 - Linhas de metais ionizados em early type galaxies

Galáxias elípticas do tipo *early type* mostram em seus espectros também muitas linhas de elementos altamente ionizados, indicativas de plasmas. A figura 10.7 mostra linhas de Fe II, Ar III, Ne IV, S III, etc. nos espectros de várias dessas galáxias na faixa do infravermelho.

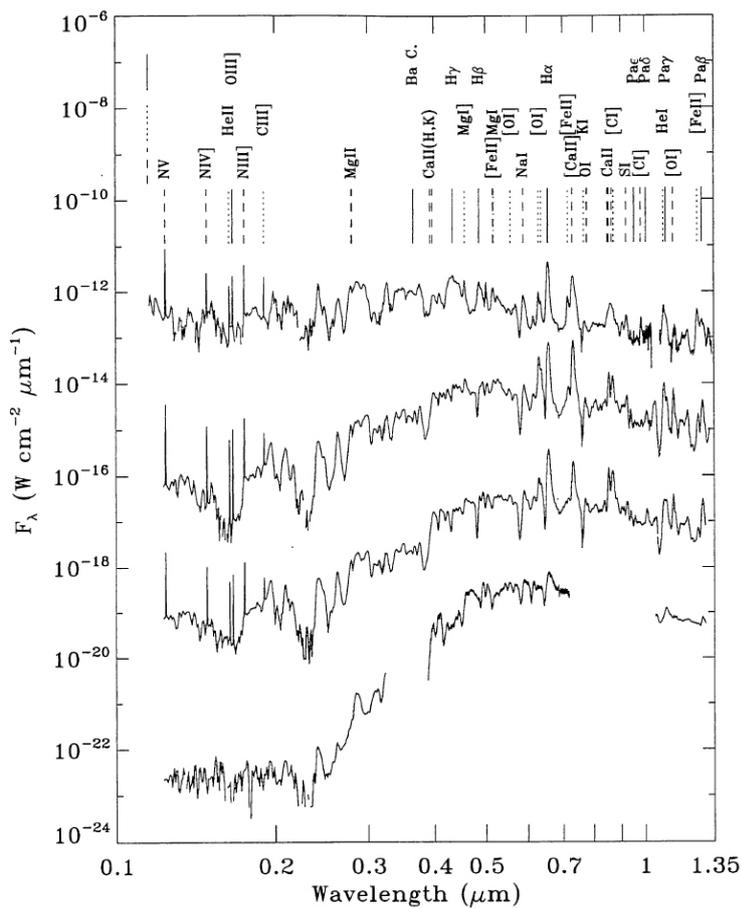


Figura 10.4 - Espectro da supernova 1987A. (R. McCray)

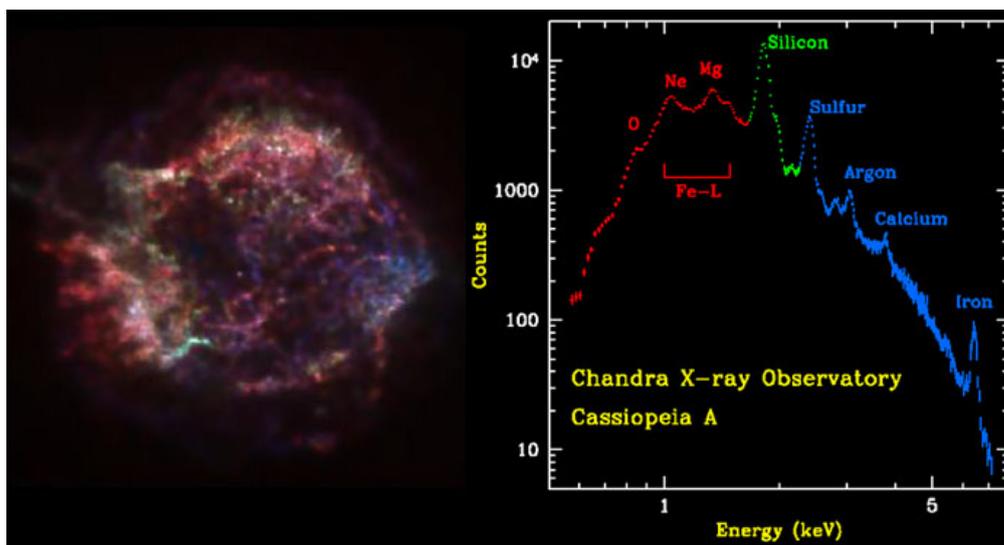


Figura 10.5 - O remanescente de supernova Cas A e espectro em altas energias. (CHANDRA)

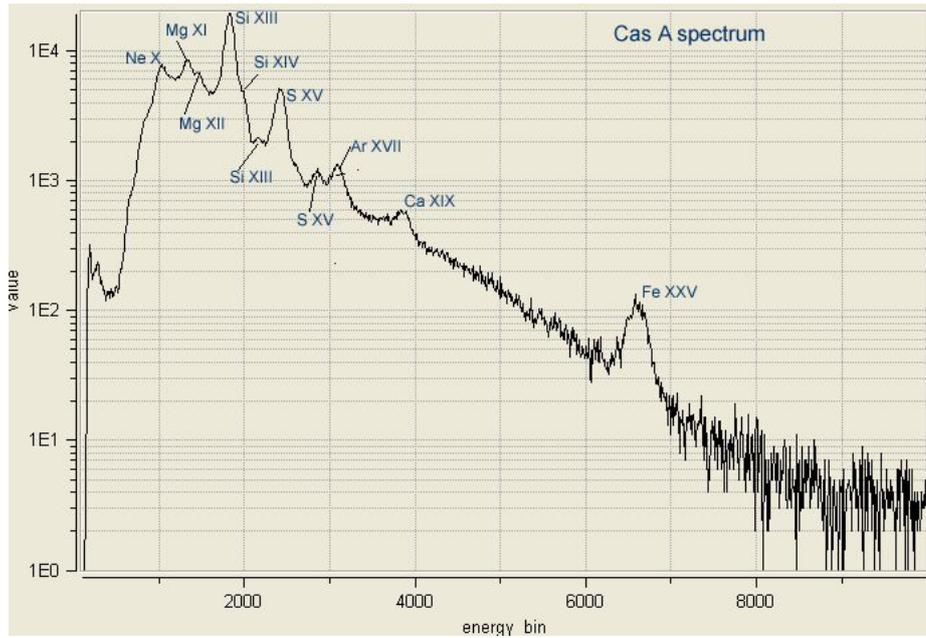


Figura 10.6 - Detalhamento do espectro de Cas A na faixa de raios X moles, com linhas de emissão de Ne X, Mg XI, Mg XII, Si XIII a XV, S XV, Ar XVII, Ca XIX e Fe XXV. (CHANDRA)

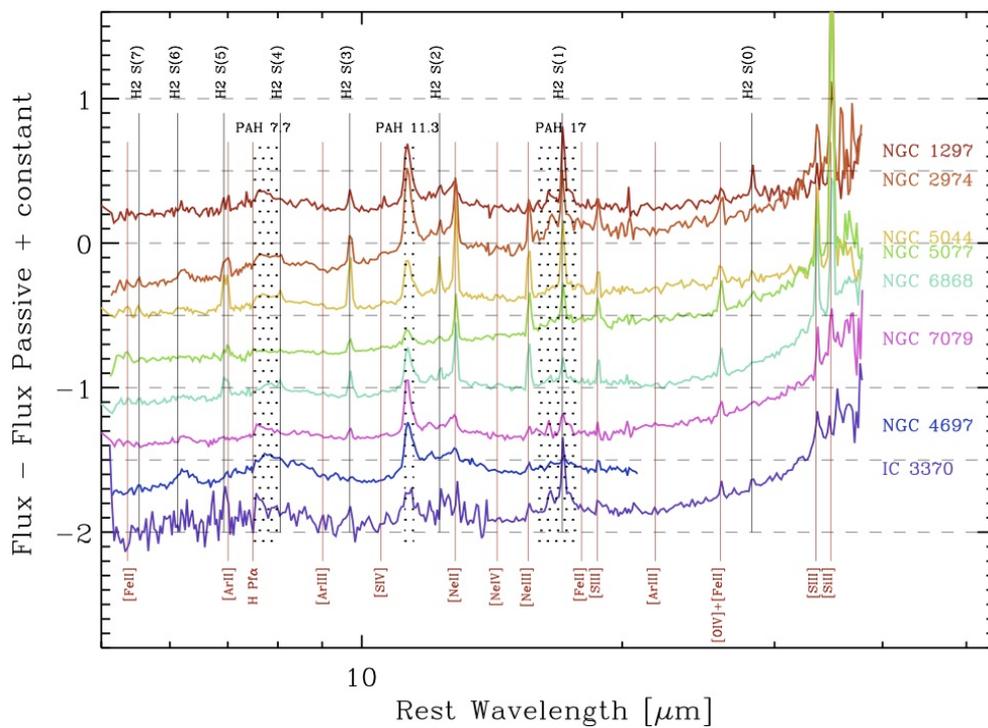


Figura 10.7 - Espectros de ETG (early type galaxies). (SPITZER)

10.2 Equações básicas da dinâmica de fluidos

Para estudar os principais fenômenos envolvendo campos magnéticos em plasmas necessitamos das equações da Magnetohidrodinâmica (MHD), que são essencialmente as mesmas equações da dinâmica dos fluidos com a adição dos fenômenos eletromagnéticos. Vamos inicialmente reexaminar as equações da dinâmica dos fluidos, que já vimos ao estudar os ventos estelares na seção 5.3. Algumas referências sobre as equações da mecânica dos fluidos e aplicações astrofísicas são Batchelor (2000), Battaner (1996) e Trefil (1975).

De modo geral, uma substância é considerada como um fluido se o menor elemento de volume a ser considerado contém um número suficiente de partículas (átomos, moléculas, estrelas, etc.) para que as propriedades médias da substância variem de maneira contínua. Em outras palavras, o que se convencionou chamar ponto ou elemento de volume em um fluido contém na realidade um grande número de partículas. A hipótese do contínuo pode também ser formulada em termos do caminho livre médio das moléculas do fluido. De fato, o caminho livre médio de uma molécula é inversamente proporcional à densidade numérica das partículas na substância considerada. Portanto, para que um determinado elemento de volume seja considerado contínuo, a densidade das moléculas deve ser suficientemente alta, isto é, o caminho livre médio λ precisa ser pequeno com relação a uma dimensão característica do sistema.



Figura 10.8 - Copo com água: exemplo de um fluido.

► EXEMPLO 10.4 - Copo de água

Vamos considerar um exemplo simples de um fluido: um copo contendo água (figura 10.8). Considerando a densidade da água nas condições usuais $\rho \simeq 1 \text{ g/cm}^3$ e a massa de uma molécula $m \simeq 18m_H$, onde $m_H = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$ é a massa do átomo de H, a densidade numérica de moléculas de água no copo é

$$n \simeq \frac{\rho}{m} \simeq \frac{\rho}{18 m_H} \simeq 3 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$$

Em ordem de grandeza, o caminho livre médio das moléculas pode ser aproximado pela separação média entre as moléculas,

$$\lambda \sim n^{-1/3} \simeq 3 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

Uma dimensão característica do sistema (o copo) é o seu raio médio, $R \simeq 5 \text{ cm}$. Portanto, temos $\lambda \ll R$, de modo que a hipótese do contínuo é satisfeita.

► EXEMPLO 10.5 - Grãos em um envelope estelar

As estrelas gigantes vermelhas perdem massa para o meio interestelar de maneira contínua, de modo que possuem um envelope circunstelar situado além de suas camadas fotosféricas (cf. a seção 5.7). Os grãos de poeira são provavelmente responsáveis por pelo menos parte dessa perda de massa, estando localizados no envelope juntamente com o gás. Vamos considerar o envelope circunstelar de uma estrela gigante vermelha, onde coexistem grãos sólidos e gás. A densidade numérica das partículas de gás é tipicamente $n \sim 10^8 \text{ cm}^{-3}$. Por outro lado, podemos considerar os grãos como partículas esféricas com raio $a \simeq 1000 \text{ \AA} = 10^{-5} \text{ cm}$. A seção de choque para colisões grãos-gás, admitida da ordem da seção geométrica dos grãos, é dada por

$$\sigma \sim \pi a^2 \sim 3 \times 10^{-10} \text{ cm}^2$$

Portanto, o caminho livre médio dos grãos para estas colisões é

$$\lambda \sim \frac{1}{n \sigma} \sim 30 \text{ cm}$$

Uma dimensão característica de um envelope circunstelar é o seu raio, tipicamente da ordem de vários raios estelares, ou $R \sim 10^{14} \text{ cm}$. Vemos que $\lambda \ll R$, o que justifica o tratamento do envelope de gás e grãos como um fluido.

Considerando novamente um fluido não viscoso em movimento, na ausência de campos magnéticos, vimos que este fluido pode ser caracterizado por cinco quantidades, como as três componentes da velocidade \vec{v} , a pressão P e densidade ρ . Se o fluido possuir viscosidade, componentes tangenciais das forças entre duas superfícies consideradas devem ser levadas em conta, e a equação do movimento de Euler deve ser substituída pelas equações de Navier-Stokes. Para uma discussão simplificada dessas equações ver Maciel (2004, capítulo 7).

As cinco equações que determinam essas quantidades são a equação de continuidade da massa, a equação de Euler (três componentes), e uma equação exprimindo a conservação da energia no fluido. Esta descrição corresponde ao “modelo contínuo”, em que as equações hidrodinâmicas são escritas em termos de variáveis macroscópicas, como P , ρ e \vec{v} em função da posição \vec{r} .

A equação de continuidade pode ser escrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{10.1}$$

A equação do movimento pode ser escrita em termos da derivada total (descrição lagrangiana), ou considerando separadamente os dois termos (descrição euleriana). A equação do movimento, ou Equação de Euler, pode ser escrita

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \tag{10.2}$$

Se o fluido se encontra sob a ação de um campo de forças externas \vec{F} (dina/cm³), isto é, \vec{F} é a força que atua em um volume unitário, como no caso de um campo gravitacional, temos

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \frac{1}{\rho} \vec{F} \tag{10.3}$$

A equação de energia é geralmente a mais complexa, a não ser que alguma hipótese simplificadora seja feita. Por exemplo, no caso de fluidos isotérmicos, esta equação é substituída por uma expressão mais simples, $T = \text{constante}$, e no caso de movimentos adiabáticos temos

$$P = \text{constante} \times \rho^\gamma \tag{10.4}$$

ou $T = \text{constante} \times \rho^{\gamma-1}$, onde γ é novamente a razão dos calores específicos. Versões mais completas da equação de energia podem ser escritas como

$$\frac{\partial[\rho(v^2/2 + e)]}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\rho \vec{v}(v^2/2 + e + P/\rho) + \vec{q}_c] = \vec{v} \cdot \vec{F} + Q_A + Q_R \tag{10.5}$$

onde e é a energia interna por unidade de massa (erg/g), \vec{q} é o *fluxo de energia* transportada (erg cm⁻² s⁻¹), tal que $\vec{\nabla} \cdot \vec{q}$ é a energia transportada por centímetro cúbico por segundo; Q_A é a taxa de deposição de energia acústica ou mecânica (unidades: erg cm⁻³ s⁻¹); Q_R é a taxa de deposição de energia radiativa (erg cm⁻³ s⁻¹); \vec{q}_c é o fluxo de energia transportado pela condução (unidades erg cm⁻² s⁻¹), como vimos na seção 5.3.

10.3 Critério de instabilidade de Jeans

No Exemplo 7.7 fizemos uma estimativa da massa necessária para uma nuvem protoestelar se condensar e formar estrelas, obtendo a massa de Jeans M_J (equação 7.47). Vamos agora examinar em maiores detalhes os critérios de instabilidade requeridos de um fluido para que isto aconteça.

Vamos considerar uma perturbação em uma nuvem de gás, que produza uma compressão localizada. O excesso de pressão gera ondas acústicas que se propagam no gás, tendendo a reverter à situação de equilíbrio, mas a atração gravitacional da região comprimida tende a atuar no sentido oposto, atraindo mais gás para a

região comprimida e favorecendo a formação estelar. Em outras palavras, se a perturbação crescer com o tempo o gás afasta-se do equilíbrio, mas se ela decrescer, o gás permanece estável. No primeiro caso, ocorre uma instabilidade dinâmica no gás, conhecida como *instabilidade de Jeans*, após seu estudo pioneiro em 1902. Vamos considerar um gás que, no estado não perturbado, é caracterizado pelas quantidades P_0 (pressão), ρ_0 (densidade) e ϕ_0 (potencial gravitacional), denotando as quantidades perturbadas por $P_0 + P_1$, $\rho_0 + \rho_1$ e $\phi_0 + \phi_1$, e uma velocidade v_1 . Vamos considerar a relação entre a força \vec{F} e o potencial dada por

$$\vec{F} = -\rho \vec{\nabla} \phi \tag{10.6}$$

Examinando a equação de continuidade (10.1) e a equação de energia no caso adiabático, equação (10.4), é fácil ver que essas equações se anulam no estado estacionário. De fato, a única equação não trivial é a equação de Euler. No estado estacionário, temos $\vec{\nabla} P \rightarrow \vec{\nabla} P_0$ e $\vec{F} \rightarrow \vec{F}_0 = -\rho_0 \vec{\nabla} \phi_0$, e esta equação pode ser escrita

$$\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} P_0 = \frac{1}{\rho_0} \vec{F}_0 = -\vec{\nabla} \phi_0 \tag{10.7}$$

$$\vec{\nabla} P_0 = -\rho_0 \vec{\nabla} \phi_0 \tag{10.8}$$

O potencial deve ainda satisfazer a equação de Poisson, de modo que

$$\nabla^2 \phi_0 = 4 \pi G \rho_0 \tag{10.9}$$

As equações (10.8) e (10.9) não podem ser satisfeitas em um gás infinito em repouso. Se P_0 é constante, de (10.8) o potencial ϕ_0 deve também ser constante, o que requer $\rho_0 = 0$ em (10.9). Apesar disto, podemos *admitir* que essas equações sejam satisfeitas, o que leva a uma dedução simplificada do critério de instabilidade de Jeans (ver Choudhuri 2010, capítulo 8, para maiores detalhes). Soluções mais rigorosas podem ser encontradas em Spitzer (1978).

Para verificar como as perturbações variam com o tempo, vamos linearizar as equações dos fluidos, mantendo portanto somente os termos lineares de primeira ordem. Da equação de energia (10.4) temos

$$dP \simeq \gamma k \rho^{\gamma-1} d\rho = \gamma k \rho^\gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{dP}{P} \simeq \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

que pode ser escrita na forma linearizada

$$\frac{P_1}{P_0} \simeq \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0} \tag{10.10}$$

Introduzindo a velocidade de propagação das perturbações c_s ,

$$c_s^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \tag{10.11}$$

$$P_1 \simeq c_s^2 \rho_1 \tag{10.12}$$

Substituindo as perturbações na equação de continuidade (10.1)

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [(\rho_0 + \rho_1) \vec{v}_1] = 0 \tag{10.13}$$

Linearizando esta equação obtemos

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0 \tag{10.14}$$

Usando o potencial ϕ temos

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} P - \rho \vec{\nabla} \phi \tag{10.15}$$

que fica

$$(\rho_0 + \rho_1) \left[\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 \right] = -\vec{\nabla} (P_0 + P_1) - (\rho_0 + \rho_1) \vec{\nabla} (\phi_0 + \phi_1) \tag{10.16}$$

Linearizando esta equação e mantendo apenas os termos de primeira ordem, temos

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla} P_1 - \rho_0 \vec{\nabla} \phi_1 \tag{10.17}$$

Considerando a equação (10.12), podemos escrever

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -c_s^2 \vec{\nabla} \rho_1 - \rho_0 \vec{\nabla} \phi_1 \tag{10.18}$$

Escrevendo a equação (10.9) na forma linearizada, temos

$$\nabla^2 \phi_1 = 4 \pi G \rho_1 \tag{10.19}$$

As equações (10.14), (10.18) e (10.19) mostram como as perturbações ρ_1 , ϕ_1 e \vec{v}_1 variam com o tempo.

► EXEMPLO 10.6 - Atração gravitacional desprezível

Vamos examinar o caso simples em que o excesso de atração gravitacional produzido pela perturbação seja desprezível, como no caso da propagação de ondas sonoras na atmosfera. Nesse caso, de (10.18),

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \simeq -c_s^2 \vec{\nabla} \rho_1 \tag{10.20}$$

Tomando a divergência,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left[\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \right] &\simeq -c_s^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \rho_1) \\ -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1) &\simeq c_s^2 \nabla^2 \rho_1 \end{aligned} \tag{10.21}$$

De (10.14), temos

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} \simeq -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1) \tag{10.22}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} \simeq c_s^2 \nabla^2 \rho_1 \tag{10.23}$$

Ou seja,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \right) \rho_1 = 0 \tag{10.24}$$

que é a equação para a propagação de ondas sonoras, onde c_s é identificada com a velocidade do som no meio considerado.

Para obter uma solução mais geral, vamos considerar perturbações na forma de componentes de Fourier, de modo que as variáveis ρ_1 , \vec{v}_1 e ϕ_1 sejam proporcionais a $\exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]$, onde \vec{k} é o número de onda e ω é a frequência, como por exemplo em $\rho_1 = \text{constante } e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$. Da equação (10.14) obtemos

$$-\omega \rho_1 + \rho_0 \vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0 \tag{10.25}$$

De (10.18) obtemos

$$-\rho_0 \omega \vec{v}_1 = -c_s^2 \vec{k} \rho_1 - \rho_0 \vec{k} \phi_1 \tag{10.26}$$

De (10.19),

$$-k^2 \phi_1 = 4 \pi G \rho_1 \tag{10.27}$$

A partir das relações (10.25) a (10.27) obtemos a relação de dispersão

$$\omega^2 = c_s^2 (k^2 - k_J^2) \tag{10.28}$$

onde definimos

$$k_J^2 = \frac{4 \pi G \rho_0}{c_s^2} \tag{10.29}$$

Vamos examinar o caso em que o número de onda $k < k_J$. De (10.28) vemos que ω deve ser imaginária, podendo ser escrita na forma

$$\omega = \pm i \alpha \tag{10.30}$$

onde o parâmetro α é real e positivo, dado por

$$\alpha = c_s \sqrt{k_J^2 - k^2} \tag{10.31}$$

Uma vez que as componentes de Fourier são proporcionais a $e^{i\omega T}$, podemos esperar um modo em que a perturbação crescerá proporcionalmente a $e^{\alpha T}$. *Este é precisamente o caso em que a perturbação tem como consequência uma instabilidade, ou seja, $k < k_J$ é uma condição para a existência da instabilidade.* Se $k > k_J$, teremos uma perturbação oscilatória, que não levará a uma instabilidade. No caso $k < k_J$ podemos então obter um valor *mínimo* para o tamanho necessário da perturbação, dado por

$$\lambda > \lambda_J = \frac{2 \pi}{k_J}$$

Este comprimento é o *comprimento de Jeans*, e a massa correspondente é a *massa de Jeans*,

$$M_J = \frac{4}{3} \pi \lambda_J^3 \rho_0 \tag{10.32}$$

Escrevendo (10.11) na forma

$$c_s^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} = \frac{\gamma k T}{\mu m_H} \simeq \frac{k T}{\mu m_H} \tag{10.33}$$

onde μ é novamente o peso molecular médio, $m_H = 1.67 \times 10^{-24}$ g é a massa do átomo de H, $k = 1.38 \times 10^{-16}$ erg/K é agora a constante de Boltzmann e tomamos $\gamma \simeq 1$, apropriado por exemplo a um gás isotérmico, (10.29) fica

$$M_J = \frac{4 \pi^{5/2}}{3} \left(\frac{k T}{G \mu m_H} \right)^{3/2} \frac{1}{\rho_0^{1/2}} \tag{10.34}$$

Esta equação pode ser comparada com a massa de Jeans estimada anteriormente (ver equações 7.47 e 9.71). Em ambos os casos, temos $M_J \propto T^{3/2} \mu^{-3/2} \rho^{-1/2}$. Substituindo as constantes em (10.34), medindo T em K, ρ em g/cm³ e M_J em massas solares, obtemos uma expressão semelhante a (7.48) e (9.71):

$$M_J \simeq 5.1 \times 10^{-10} \left(\frac{T^3}{\mu^3 \rho} \right)^{1/2} \tag{10.35}$$

► EXEMPLO 10.7 - Estimativa do comprimento e da massa de Jeans

Vamos aplicar a equação (10.35) a uma nuvem com uma temperatura de 100 K e uma densidade de 1 partícula por cm^3 . Obtemos $M_J \simeq 4 \times 10^5 M_\odot$, apropriada a um aglomerado estelar, e $\lambda_J \simeq 160 \text{ pc}$.

10.4 Equações básicas da MHD

A hipótese do contínuo pode ser aplicada a diversas situações astrofísicas, em particular quando o caminho livre médio das partículas – estabelecido essencialmente por meio de colisões – é pequeno com relação às dimensões típicas do sistema. Podemos então dizer que as colisões favorecem o comportamento de um sistema como um fluido contínuo. Campos magnéticos em um plasma podem também manter partículas carregadas confinadas localmente por um tempo suficientemente longo para que o sistema se comporte como um fluido, mesmo que os processos colisionais não sejam eficientes. As equações da magnetohidrodinâmica (MHD) devem ser usadas em fluidos que são bons condutores de eletricidade.

Um tratamento detalhado das aplicações astrofísicas da MHD está além dos objetivos deste texto, e o leitor interessado poderá consultar alguns dos livros relacionados na bibliografia. A equação de continuidade (10.1) reflete essencialmente a conservação da massa, e não sofre modificações com a inclusão de um campo magnético, e a equação de energia na forma (10.4) pode em princípio ser mantida de forma aproximada, mas uma análise mais completa da equação de energia na forma (10.5) está além dos objetivos deste texto. Nesta seção, vamos nos limitar a enunciar as principais modificações introduzidas na equação de Euler (10.3) pela presença de um campo magnético. Nesse caso, além das duas variáveis termodinâmicas usuais (geralmente P e ρ) e das três componentes da velocidade, é necessário especificar o vetor campo magnético \vec{B} para que o plasma possa ser descrito em um modelo magnetohidrodinâmico. Esse tipo de modelo é freqüentemente útil nas aplicações astrofísicas, em particular em processos não relativísticos em que os movimentos do plasma são essencialmente constantes ou variam lentamente com o tempo, ou seja, quando a escala de tempo τ dos processos físicos é muito maior que o inverso da freqüência do plasma, ω_p , isto é, $\tau \gg 1/\omega_p$. Por exemplo, essas condições se aplicam geralmente aos ventos estelares, nos casos em que os movimentos do plasma devem-se à ação de forças mecânicas e magnéticas. A equação de Euler (10.3) pode ser escrita

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \frac{1}{\rho} \vec{F} + \frac{1}{\rho c} \vec{J} \times \vec{B} \tag{10.36}$$

onde \vec{B} é o campo magnético e \vec{J} é a densidade de corrente elétrica. Como nas demais aplicações deste texto, usamos o sistema de unidades gaussiano, onde as quantidades elétricas estão em u.e.s. e as magnéticas em u.e.m. Uma derivação da equação (10.36) a partir de processos microscópicos pode ser encontrada em Choudhuri (1998, capítulo 13). No modelo MHD podemos escrever a equação de Maxwell sem o termo

da corrente de deslocamento na forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \tag{10.37}$$

ou seja, a densidade de corrente \vec{J} pode ser obtida a partir do campo magnético \vec{B} e vice-versa. Substituindo (10.37) em (10.36) temos

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \frac{1}{\rho} \vec{F} + \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} \tag{10.38}$$

Usando a identidade vetorial

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \tag{10.39}$$

e tomando $\vec{A} = \vec{B}$, é fácil mostrar que

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2} \right) \tag{10.40}$$

Substituindo esta equação em (10.38) obtemos a forma alternativa da equação de Euler,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{\rho} \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}}{4\pi\rho} \tag{10.41}$$

De (10.41) vemos que o termo $B^2/8\pi$ corresponde à *pressão magnética*, introduzida pela presença do campo magnético. O último termo em (10.41) está relacionado com a *tensão magnética* ao longo das linhas de força magnéticas, isto é, o campo magnético está associado a uma pressão isotrópica e além disso a uma tensão ao longo das linhas de campo.

► EXEMPLO 10.8 - Pressão magnética na atmosfera solar

Como exemplo, podemos comparar a pressão magnética $B^2/8\pi$ com a pressão do gás em alguns pontos da atmosfera solar. Na fotosfera, a pressão varia por diversas ordens de grandeza, mas podemos considerar um ponto médio onde a densidade total de partículas é da ordem de 10^{17} cm^{-3} e a temperatura é da ordem de 6 000 K, de modo que a pressão total é de 10^5 dina/cm^2 . Pressões equivalentes são obtidas por campos magnéticos da ordem de 1 500 Gauss. Valores semelhantes são observados em regiões da atmosfera solar como as praias e fáculas solares, e valores ainda mais altos, $B \sim 3\,000 \text{ Gauss}$, são associados às regiões umbrais das manchas solares (ver figura 6.8). Nestas, a temperatura tende a ser um pouco mais baixa que na fotosfera, mas as densidades mais altas levam a pressões também da ordem de 10^5 dina/cm^2 ou

superiores. Nas regiões mais externas, associadas ao vento solar, o campo é provavelmente mais baixo por algumas ordens de grandeza, atingindo valores próximos ao do campo magnético terrestre, $B \sim 1$ Gauss. Nesse caso, as pressões magnéticas são da ordem de 10^{-2} dina/cm², o que pode ser comparado com o valor da pressão do gás em uma região coronal a cerca de 2 raios solares da superfície do Sol, na qual a densidade $n \sim 10^6$ cm⁻³, $T \sim 10^6$ K e a pressão $P \sim 10^{-3}$ dina/cm².

Campos magnéticos são também associados às atmosferas e envelopes de estrelas gigantes vermelhas, embora sua intensidade seja incerta. Por exemplo, no envelope de uma gigante vermelha com $T \sim 10^3$ K e $n \sim 10^8$ cm⁻³, a pressão do gás é da ordem de 10^{-5} dina/cm², valor equivalente à pressão magnética de um campo de apenas $B \sim 10^{-2}$ Gauss, sugerindo que os campos magnéticos têm efetivamente algum efeito na dinâmica dos envelopes circunstelares.

► EXEMPLO 10.9 - Densidade de energia magnética no Sol

Tomando o valor médio do campo magnético solar como $B \simeq 10^3$ G = 0.1 T, podemos estimar a densidade de energia magnética do sol por

$$u_B \simeq \frac{B^2}{8\pi} \simeq 4.0 \times 10^4 \text{ erg/cm}^3 \tag{10.42}$$

Comparando com a densidade de energia gravitacional,

$$u_g \simeq \frac{GM_\odot^2}{R_\odot^4} \simeq 1.1 \times 10^{16} \text{ erg/cm}^3 \tag{10.43}$$

obtemos a relação

$$\frac{u_B}{u_g} \simeq \frac{B^2 R_\odot^4}{8\pi GM_\odot^2} \simeq 3.5 \times 10^{-12} \tag{10.44}$$

► EXEMPLO 10.10 - Flares solares e reconexão magnética

Os *flares* solares são intensas ejeções de partículas carregadas da superfície do Sol, que podem afetar significativamente as telecomunicações em nosso planeta. A figura 10.9 mostra um exemplo de uma ejeção observada em novembro de 2003.

A idéia básica para explicar a natureza dos *flares* é a *reconexão magnética*, ou seja, um súbito rearranjo das linhas do campo magnético solar. Os *flares* estão associados com as manchas solares, onde o campo magnético é mais intenso nas regiões ativas do Sol. Assim, a energia que é liberada em um *flare* estava originalmente armazenada no campo magnético solar. Imagens ultravioletas das regiões ativas, como na figura 10.10, mostram *loops* de gás, que seguem as linhas do campo magnético.

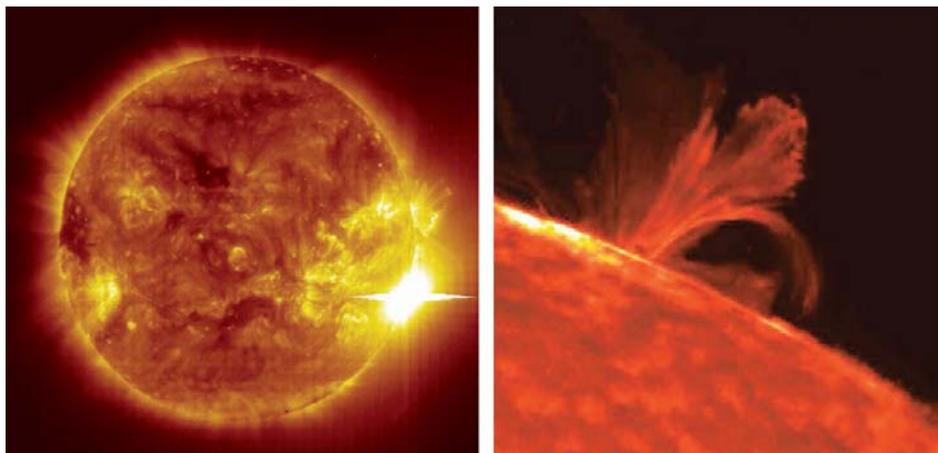


Figura 10.9 - Flare solar observado na faixa ultravioleta em 4 de novembro de 2003 (SOHO).

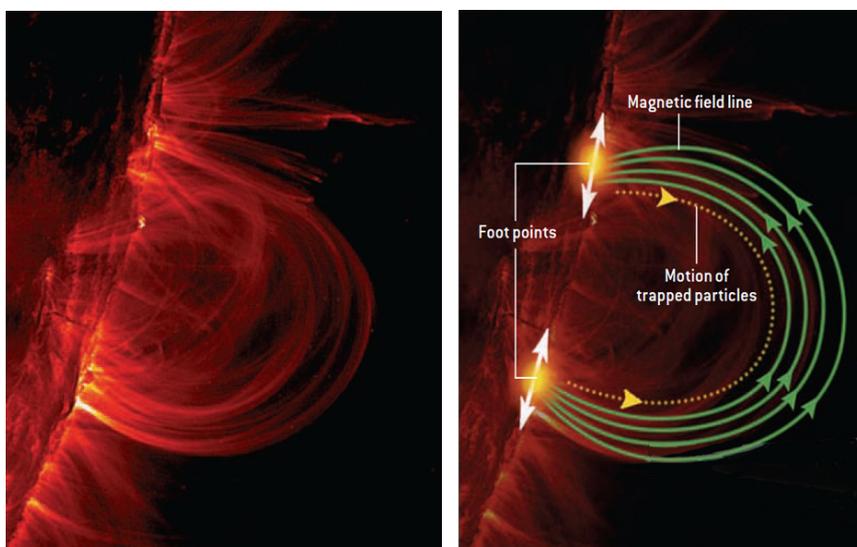


Figura 10.10 - (a) Imagem ultravioleta de “loops” de gás na superfícies solar; (b) Esquema dos movimentos das partículas do rearranjo das linhas do campo magnético (G. D. Holman).

As partículas carregadas do plasma seguem as linhas do campo magnético e giram em torno delas. Devido às variações do campo magnético, o movimento das partículas é invertido, como indicado pela linha tracejada na figura 10.10. O rearranjo súbito das linhas aquece as partículas a temperaturas muito altas, da ordem de 10^6 K, ejetando-as da superfície do Sol.

10.5 Choques hidromagnéticos

Em um fluido compressível, a taxa com que uma perturbação se propaga é determinada pela velocidade do som no fluido. Se o escoamento for suficientemente

rápido, de modo que sua velocidade seja maior do que a velocidade do som, o fluido não consegue se ajustar pela propagação de ondas sonoras, e suas propriedades podem variar acentuadamente em distâncias pequenas. Em outras palavras, se o gradiente de pressão imposto pela onda for muito grande, isto é, se as condições físicas do gás variam em uma escala de distância da ordem do caminho livre médio das moléculas do gás, processos microscópicos atuarão, dando origem a forças viscosas, que agem no sentido de diminuir o gradiente de pressão. Uma vez que o caminho livre médio das partículas do fluido é pequeno em relação às dimensões típicas do sistema, podemos imaginar que a variação da pressão nesta região seja descontínua, isto é, podem ocorrer regiões em que as propriedades físicas do fluido variam de forma essencialmente descontínua, constituindo uma *onda de choque* (cf. Maciel 2004, Dyson e Williams 1997).

Diversos exemplos astrofísicos podem ser mencionados em que há indícios de ocorrência de ondas de choque. Estrelas pulsantes, como as variáveis cefeidas e as estrelas do tipo RR Lyrae produzem, nas camadas mais internas de suas fotosferas, ondas que se propagam a velocidades supersônicas nas regiões externas mais difusas, produzindo choques. A explosão de supernovas é um evento extremamente energético, envolvendo uma energia da ordem de 10^{50} erg, que é comunicada ao gás circundante pela expansão das camadas externas da estrela a velocidades supersônicas, gerando choques intensos no meio interestelar.

Vamos considerar a propagação de uma onda de choque em um meio não viscoso sujeito a um campo magnético \vec{B} . A equação de Euler na forma (10.3) sem o termo de forças externas pode ser escrita

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P - \frac{1}{8\pi\rho} \vec{\nabla} B^2 + \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (10.45)$$

Em um campo magnético uniforme, perturbações normais ao campo (ondas hidromagnéticas, ou ondas de Alfvén) propagam-se ao longo de \vec{B} com a velocidade de Alfvén,

$$v_A = \left(\frac{B^2}{4\pi\rho} \right)^{1/2} \quad (10.46)$$

Em condições de laboratório, a velocidade v_A é geralmente pequena com relação à velocidade do som. Em algumas situações astrofísicas, isto não ocorre, em particular em regiões onde a densidade do gás é baixa. Por exemplo, em uma região cromosférica de uma estrela gigante fria, onde $\rho \sim 10^{-13}$ g/cm³, obtemos $v_A \simeq 90$ km/s com um campo magnético $B \sim 10$ G, enquanto que $c_s \simeq 100$ km/s para uma temperatura cromosférica $T \sim 10^4$ K. Ondas hidromagnéticas são observadas no vento solar, e provavelmente participam do processo de transferência de quantidade de movimento ao gás em expansão.

Considerando um problema unidimensional, vamos admitir que as linhas de força do campo são paralelas à frente de choque, tomadas perpendiculares ao eixo x . Neste caso, o termo $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$ em (10.45) se anula, e a equação do movimento pode ser escrita

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P - \frac{1}{8\pi\rho} \vec{\nabla} B^2 \quad (10.47)$$

Integrando (10.47) na zona de choque, é fácil ver que

$$P_0 + \rho_0 u_0^2 + \frac{B_0^2}{8\pi} = P_1 + \rho_1 u_1^2 + \frac{B_1^2}{8\pi} \quad (10.48)$$

O fluxo magnético permanece constante através de qualquer circuito movendo-se em um fluido condutor, de modo que, no caso unidimensional, temos

$$\frac{B_0}{\rho_0} = \frac{B_1}{\rho_1} \quad (10.49)$$

► EXEMPLO 10.11 - Choque interestelar adiabático

No caso de um choque intenso sem emissão de radiação (choque “adiabático”), o fator de compressão deve ser $\rho_1/\rho_0 \simeq 4$. Neste caso, a pressão magnética varia de $P_{m0} = B_0^2/8\pi$ para $P_{m1} = B_1^2/8\pi$, ou seja,

$$P_{m1} = \frac{B_1^2}{8\pi} = \frac{B_0^2}{8\pi} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^2 = 16 P_{m0}$$

Por exemplo, em condições interestelares típicas, temos $B_0 \simeq 3 \times 10^{-6}$ G, $u_0 \simeq 10$ km/s e $\rho_0 \simeq n m_H \simeq 2 \times 10^{-23}$ g/cm³, com cerca de $n \simeq 10$ cm⁻³. Neste caso, $P_{m0} \simeq 3.6 \times 10^{-13}$ dina/cm² e $P_{m1} \simeq 5.7 \times 10^{-12}$ dina/cm². A pressão do gás é da ordem de $P_1 \simeq (3/4) \rho_0 u_0^2 \simeq 2 \times 10^{-11}$ dina/cm², ou seja, $P_1 \gg P_{m1}$. Portanto, se o campo magnético na região não perturbada for menor ou da ordem de 3μ G, a pressão magnética na região pós-choque será desprezível em relação à pressão do gás em condições típicas das nuvens interestelares.

► EXEMPLO 10.12 - Choque interestelar isotérmico

Vamos considerar agora o efeito de um campo magnético em um choque isotérmico intenso. Da equação (10.48), considerando as condições de contorno na superfície do choque, obtemos

$$c_s^2 + u_0^2 + \frac{1}{2} v_{A0}^2 = \frac{\rho_1}{\rho_0} c_s^2 + \frac{u_0^2}{(\rho_1/\rho_0)} + \frac{1}{2} v_{A0}^2 \left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^2 \quad (10.50)$$

onde adotamos os índices “0” e “1” para as condições antes e depois do choque. Em princípio, esta equação deve ser resolvida para obter a razão de compressão ρ_1/ρ_0 . Admitindo o caso limite em que $\rho_1/\rho_0 \gg 1$ e $v_{A0} \gg c_s$, obtemos

$$u_0^2 \simeq \left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^2 \frac{v_{A0}^2}{2} \quad (10.51)$$

ou seja, a razão de compressão fica

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} \simeq \sqrt{2} \frac{u_0}{v_{A0}} \tag{10.52}$$

Considerando novamente os valores interestelares do Exemplo anterior, $\rho_0 \simeq 2 \times 10^{-23} \text{ g/cm}^3$ e $B_0 \simeq 3 \mu\text{G}$, obtemos $v_{A0} \simeq 1.9 \text{ km/s}$. A velocidade do som está próxima deste valor, $c_s \simeq (kT/m_H)^{1/2} \simeq 0.9 \text{ km/s}$, onde $T \sim 100 \text{ K}$, isto é, para valores do campo magnético da ordem ou menores que $3 \mu\text{G}$, a condição $v_A \gg c_s$ não é completamente satisfeita, e a razão de compressão deve ser menor do que o valor correto. Embora os valores numéricos obtidos sejam apenas aproximados, podemos observar que a introdução do campo magnético tende a decrescer a razão de compressão no caso de um choque isotérmico. Neste caso, parte da energia do choque é usada para aumentar a pressão magnética, pois o aumento da densidade na região pós-choque concentra as linhas de força do campo magnético.

10.6 Instabilidade de Parker

Na seção 9.2 vimos que o meio interestelar galáctico tem uma natureza fragmentada, dividindo-se em nuvens difusas, densas, moleculares, regiões HII, etc. Isto pode ser visto em levantamentos feitos a partir de medidas da linha de emissão em 21 cm do H, como mostrado na figura 10.11 para a nossa Galáxia. Sequências de perfis de emissão de H podem ser obtidas para uma dada longitude galáctica, variando a latitude, ou vice-versa, de modo que as estruturas das nuvens de H do disco galáctico podem ser mapeadas, como visto na figura 10.11. Nesta figura, as emissões vêm de regiões próximas ao plano equatorial galáctico, e o fluxo está dado em termos da temperatura de antena, essencialmente proporcional à temperatura de brilho, ou intensidade da radiação.

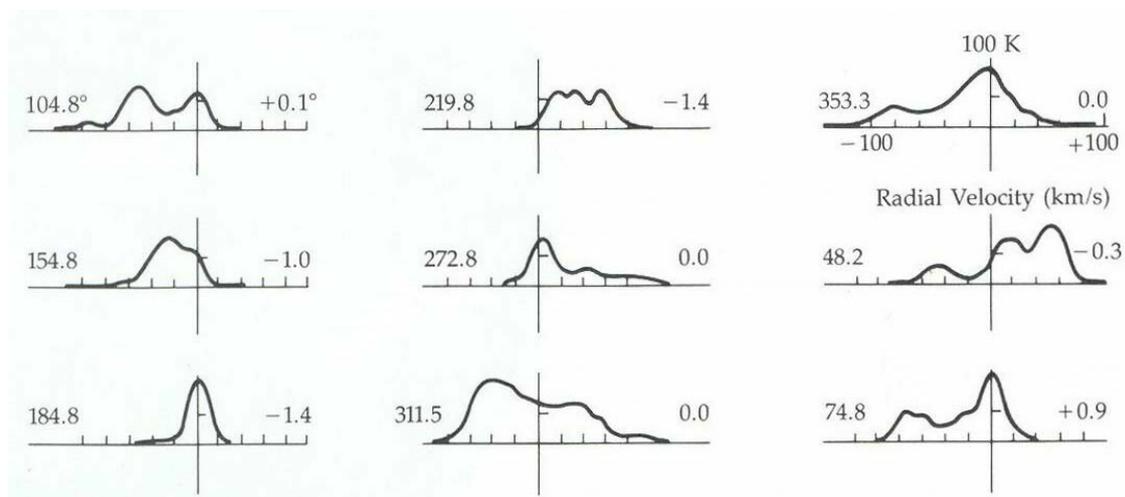


Figura 10.11 - Distribuição das nuvens interestelares no plano galáctico em diversas longitudes galácticas a partir de dados da linha de 21 cm do H. (F. J. Kerr, G. Westerhout)

Outro exemplo está mostrado na figura 10.12 para a galáxia M81. Nesse caso, o gás interestelar de H atômico está em azul, enquanto que em verde e vermelho são mostrados resultados obtidos no infravermelho próximo.

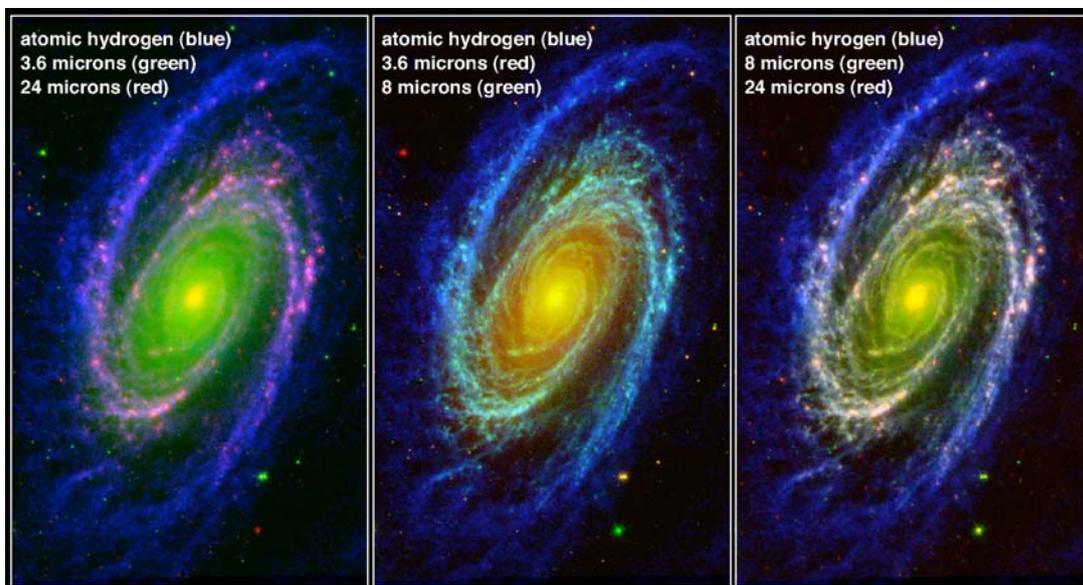


Figura 10.12 - Distribuição do gás interestelar na galáxia M81 a partir de dados do H neutro em emissão incluindo dados no infravermelho médio. (VLA-SPITZER)

A origem das condensações é atribuída a um processo de instabilidade que impede uma distribuição homogênea do gás interestelar. Este tipo de instabilidade é chamado *instabilidade de Parker*, pelo trabalho desenvolvido por E. N. Parker, principalmente na década de 1960 (ver por exemplo Parker 1966, 1979). A instabilidade de Parker está ligada a fenômenos magnéticos, como veremos em uma discussão qualitativa (cf. Choudhuri 2010 capítulo 8). Já vimos na seção 9.6 que a difusão ambipolar causada pela presença de um campo magnético pode também retardar o colapso gravitacional no processo de formação estelar.

Nossa galáxia (e outras galáxias com discos) mantém um campo magnético associado com o plano galáctico e os braços espirais, com intensidade da ordem de alguns μG , $B \sim 1 - 10 \times 10^{-6} G$. A origem deste campo é vivamente debatida, assim como sua influência na formação e equilíbrio das nuvens interestelares. O campo pode ser medido a partir do estudo da polarização dos grãos interestelares, entre outros processos. Acredita-se que, para produzir uma polarização, os grãos devem estar alinhados por um campo magnético, de modo que o estudo da polarização nos dá informações sobre a distribuição galáctica do campo. Por esta razão sabemos que o campo está associado ao disco, como visto na figura 10.13.

Mais recentemente, estudos detalhados em galáxias externas têm sido capazes de mapear os campos magnéticos nestes objetos, como pode ser visto na figura 10.14 para a galáxia M51. Provavelmente, estes resultados podem também ser aplicados à nossa

própria Galáxia. Nesta figura estão superpostas as imagens no infravermelho em $15 \mu m$ (gradações de cinza), intensidade total no contnuo rádio (contornos), vetores do campo magnético B determinados a partir da polarização, e observações em 6 cm.

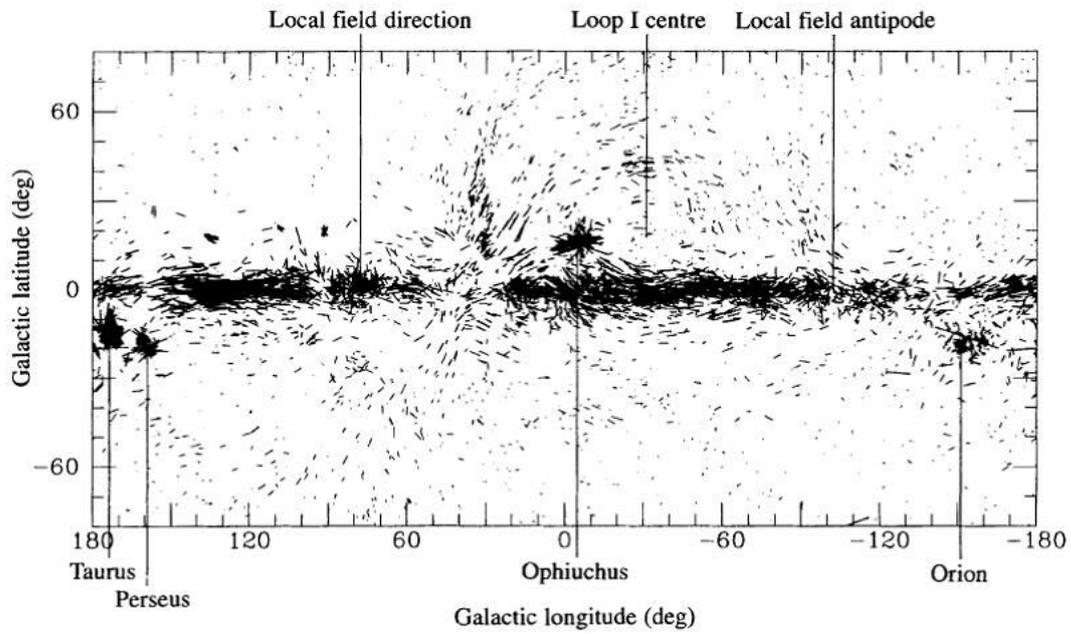


Figura 10.13 - O campo magnético galáctico indicado por medidas da polarização interestelar em grãos de poeira. (D. S. Mathewson, V. L. Ford)

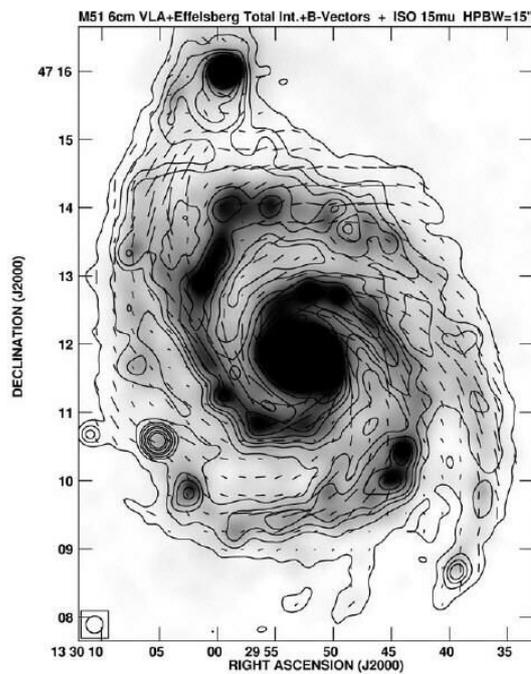


Figura 10.14 - Distribuição dos vetores do campo magnético em M51. (R. Beck)

Mapas da intensidade total não térmica mostram a intensidade total do campo magnético no plano do céu, com um valor médio de $15 \mu\text{G}$. Pode-se notar a associação do campo magnético com a emissão infravermelha da poeira interestelar.

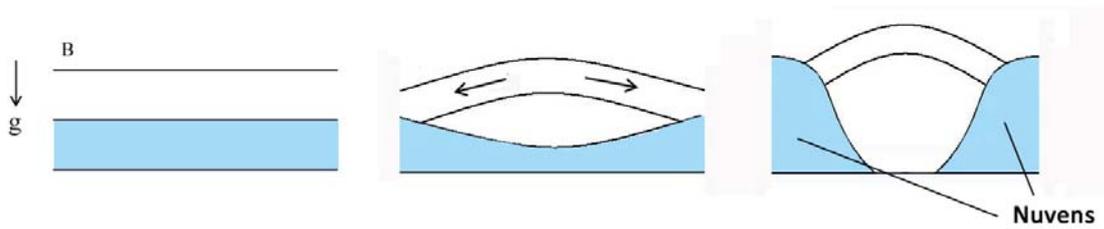


Figura 10.15 - Ilustração da instabilidade de Parker.

O campo magnético galáctico pode ser considerado como “congelado” no gás do meio interestelar. Vamos considerar camadas do meio interestelar inicialmente homogêneas sob a ação da gravidade na presença de um campo magnético (figura 10.15a). Uma perturbação pode “entortar” as linhas do campo magnético, como ilustrado na figura 10.15b. O campo gravitacional atua na direção vertical da figura, causado pelas estrelas e gás no disco galáctico. O congelamento do campo magnético no gás requer que o deslocamento das linhas mantenha esta torção. Contudo, o plasma pode fluir livremente ao longo das linhas do campo, como indicado pelas setas na figura 10.15b. O resultado é que são formadas “condensações” nas extremidades (faixa azul), enquanto que a região central, com menos gás e mais leve, pode “flutuar” mais livremente. Assim, esta região tende a se afastar ainda mais da posição original, intensificando as condensações laterais que, eventualmente, se tornam nuvens interestelares (figura 10.13c). Portanto, a perturbação original se acentua, o que constitui uma instabilidade. O processo termina quando a tensão magnética atinge um valor suficientemente alto, como pode ser confirmado em cálculos mais detalhados.

EXERCÍCIOS

- 10.1 Mostre que a hipótese do contínuo é verificada pelo ar em uma sala de aula.
- 10.2 (a) Escreva a equação de Euler (10.3) em coordenadas esféricas, admitindo simetria esférica. (b) Como fica a equação obtida em (a) admitindo estado estacionário? (c) Mostre que a relação obtida em (b) se reduz à equação de equilíbrio hidrostático admitindo que esteja em repouso.
- 10.3 Uma estrela Ap tem um campo magnético com intensidade de 10^3 G . Considere uma região na atmosfera desta estrela onde $\rho \simeq 10^{-9} \text{ g/cm}^3$ e $T \simeq 10000 \text{ K}$, e compare a pressão magnética com a pressão do gás nesta região.
- 10.4 O valor médio da intensidade do campo magnético no meio interestelar difuso é de $5 \mu\text{G}$. Mostre que a densidade de energia magnética do gás difuso (em

eV/cm^3) é semelhante à densidade de energia térmica deste gás, considerando uma densidade numérica $n \simeq 50 \text{ cm}^{-3}$ e $T \simeq 100 \text{ K}$.

10.5 Prove a equação (10.35).

Referências

- Batchelor, G. K. 2000, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press
- Battaner, E. 1996, *Astrophysical fluid dynamics*, Cambridge University Press
- Carroll, B. W., Ostlie, D. A. 2006, *An Introduction to Modern Astrophysics*, Benjamin Cummings
- Choudhuri, A. R. 1998, *The physics of fluids and plasmas: an introduction for astrophysicists*, Cambridge University Press
- Choudhuri, A. R. 2010, *Astrophysics for physicists*, Cambridge University Press
- Dyson, J. E., Williams, D. A. 1997, *The physics of the interstellar medium*, IOP
- Maciel, W. J. 2004, *Hidrodinâmica e ventos estelares: uma introdução*, Edusp
- Parker, E. N. 1966, *Astrophysical J.* **145**, 811
- Parker, E. N. 1979, *Cosmical magnetic fields*, Oxford University Press
- Shu, F. H. 1992, *The physics of astrophysics Volume II: Gas dynamics*, University Science Books
- Spitzer Jr., L. 1978, *Physical processes in the interstellar medium*, Wiley [student edition 1998]
- Trefil, J. S. 1975, *Introduction to the physics of fluids and solids*, Pergamon

CONSTANTES

Velocidade da luz no vácuo:

$$c = 2.9979 \times 10^{10} \text{ cm/s} = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Constante de Planck:

$$h = 6.6261 \times 10^{-27} \text{ erg s} = 6.6261 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

Constante de Boltzmann:

$$k = 1.3807 \times 10^{-16} \text{ erg/K} = 1.3807 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

Carga do elétron:

$$e = 4.8032 \times 10^{-10} \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1} = 1.6022 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Massa do elétron:

$$m_e = 9.1094 \times 10^{-28} \text{ g} = 9.1094 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

Massa do próton:

$$m_p = 1.6726 \times 10^{-24} \text{ g} = 1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Massa do átomo de H:

$$m_H = 1.6734 \times 10^{-24} \text{ g} = 1.6734 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Constante de Stefan-Boltzmann:

$$\begin{aligned} \sigma &= 5.6704 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4} \\ &= 5.6704 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \end{aligned}$$

Constante de radiação:

$$\begin{aligned} a &= 7.5658 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4} \\ &= 7.5658 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4} \end{aligned}$$

Constante de Rydberg: $R_\infty = 3.2898 \times 10^{15} \text{ Hz}$

Constante gravitacional:

$$\begin{aligned} G &= 6.6726 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad [\text{dina cm}^2 \text{ g}^{-2}] \\ &= 6.6726 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \end{aligned}$$

Massa solar: $M_\odot = 1.9891 \times 10^{33} \text{ g} = 1.9891 \times 10^{30} \text{ kg}$

Raio solar: $R_\odot = 6.9551 \times 10^{10} \text{ cm} = 6.9551 \times 10^8 \text{ m}$

Luminosidade solar:

$$L_\odot = 3.8458 \times 10^{33} \text{ erg/s} = 3.8458 \times 10^{26} \text{ W}$$

Ano sideral = $3.1558 \times 10^7 \text{ s}$

1 eV = $1.6022 \times 10^{-12} \text{ erg} = 1.6022 \times 10^{-19} \text{ J}$

1 pc = $3.0857 \times 10^{18} \text{ cm} = 3.0857 \times 10^{16} \text{ m}$
 = 3.2616 anos-luz = $2.0626 \times 10^5 \text{ UA}$

1 UA = $1.4960 \times 10^{13} \text{ cm} = 1.4960 \times 10^{11} \text{ m}$

1 atm = $1.0133 \times 10^6 \text{ dina/cm}^2 = 1.0133 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 760 \text{ Torr}$

ÍNDICE

Aglomerados estelares

- NGC 104, 198, 205
- NGC 288, 198
- NGC 362, 198
- NGC 2244, 101
- NGC 2298, 198
- NGC 2419, 198
- NGC 4755, 188
- NGC 5139, ω Cen, 188
- NGC 5272, 198
- NGC 6205, M13, 193
- NGC 6705, M11, 197, 198
- Trumpler 37, 205

Aproximação de Eddington, 61–65

Aproximação de Kramers, 75, 76

Aproximação de Schuster, 17

Aproximação de Sobolev, 128, 129

Atmosferas estelares, 11, 27, 28, 40, 44, 51–78, 80, 89, 98, 99, 131, 265

- Cinza, 59–63, 65–68, 73, 98
- Plano-paralela, 42, 51–57, 60
- Relação $T(\tau)$, 62, 63, 66, 73

Caminho livre médio, 15, 43, 44, 77, 142, 143, 156–158, 161, 249, 250, 256, 260

Campo de radiação, 1, 10, 15, 20, 51, 60, 70, 75, 141, 143, 163, 207, 210, 215, 218, 219, 223

- Caso isotrópico, 10, 11, 31
- Conceitos, 1–11
- Interestelar, 15, 20, 51
- Interior estelar, 141
- Momentos, 10, 60

Campo magnético, 32, 109, 119, 122, 123, 207, 212, 215, 217, 236, 239, 243, 249, 250, 256–265

Choques, 259–262

Coefficiente de absorção, 12, 13, 16, 21, 59, 70–76, 83, 84, 98, 144, 145

Coefficientes de Einstein, 37, 70, 71, 77, 84, 88, 89, 96, 99

Coefficiente de emissão, 12, 13, 16, 19, 45, 59, 70, 71

- Comprimento de Jeans, 237, 255, 256
- Condução, 111, 141, 146, 156–162
 - Caminho livre médio, 156–161
 - Fluxo, 111, 156–161
 - Opacidade, 159–162
- Convecção, 119, 141, 146–156
 - Comprimento de mistura, 152–155
 - Critério de Schwarzschild, 148, 151
 - Fluxo, 146, 151–156
 - Instabilidade, 146–149, 156
- Coordenadas cilíndricas, 203, 204
- Coordenadas esféricas, 2, 3, 51, 57, 58, 114, 142
- Corpo negro, 23, 25, 28, 29, 31, 44–48, 68, 73, 77, 98
- Curva de crescimento, 93–97, 100
- Curva de rotação, 167
- Difusão ambipolar, 239, 240
- Dinâmica estelar, 187–205
 - Fricção dinâmica, 189, 190
 - Relaxação colisional, 187, 189, 195, 196
- Distribuição de Rayleigh-Jeans, 15, 26, 28, 41
- Distribuição de velocidade de Maxwell, 33, 34, 40, 42, 85, 96, 97, 187, 189
- Distribuição de Wien, 26, 28
- Emissão infravermelha, 29
 - Corpo humano, 29
 - Poeira interestelar, 29, 46
- Energia de Gamow, 136, 137
- Energias estelares, 131–141
 - Gravitacional, 131, 133–136, 165, 168–172
 - Nuclear, 131, 135–140, 151
 - Térmica, 131–137, 155, 165, 168
- Equação de Boltzmann, 33, 37–41, 70, 77
- Equação de Einstein, 135
- Equação de Euler, 109–115, 250–252, 256, 257, 260, 265
- Equação de Navier-Stokes, 250
- Equação de Poisson, 182

Equação de Saha, 33, 39, 40, 48, 70

Equação de Stefan-Boltzmann, 27, 41

Equação de transporte de Boltzmann, 109, 165, 200–204

Aproximação do tempo de relaxação, 202, 203

Campo magnético, 201, 202

Com colisões, 202

Coordenadas cilíndricas, 203, 204

Em sistemas estelares, 203

Sem colisões

Equação de Vlasov, 109, 201

Equações de Hamilton, 176

Equações de Jeans, 187, 204

Equilíbrio hidrostático, 114, 115, 132, 133, 136, 150, 154, 162, 169, 170

Equilíbrio radiativo, 60, 141–146, 156

Equilíbrio termodinâmico ET, ETL, 23–27, 31–33, 36–45, 47, 53, 55, 70, 77, 143

Desvios, 40–42

Espalhamento Thomson, 74–77

Estrelas

AGB, 41, 44, 45

Anãs brancas, 136, 161

Betelgeuse, 4, 55

Envelopes, 41, 42, 55, 102–127

Gigantes vermelhas, 4, 41, 44, 51, 55, 101, 104–109, 117–128

Hipernovas, 179, 180

P Cyg, 102–104, 124, 130

Supernovas, 101, 128, 178–180, 215, 246, 247, 260

TT Cyg, 44, 45

Wolf-Rayet, 103, 104, 121, 122

α Sco, 130

ϵ Ori, 129

ζ Oph, 80, 81, 97

Expoentes adiabáticos de Chandrasekhar, 150

Extinção, 6, 16, 19, 21, 29, 93

Fator de Gaunt, 76

Fluxo de Eddington, 5

Fórmula de Reimers, 120, 127, 130

Função de Hjerting, 89

Função de Planck, 23–26, 40, 41, 45, 66, 98, 143

Função fonte, 12–15, 17, 19, 52, 53, 60–62

Galáxias, 81, 82, 187, 188

 Aglomerados, 194, 204

 Andromeda, M31, 4

 Early type, 246–248

 Grande Nuvem de Magalães, 188

 M51, 263

 M81, 263

 NGC 1052, 82

 NGC 1365, 188

 NGC 4321, M100, 188

 NGC 4486, M87, 188

 NGC 6240, 30

 Seyfert, 81, 82

 Via Láctea, Galáxia, 30, 167, 178, 180, 181, 187, 197, 207, 213, 262, 264

Grãos interestelares, poeira, 15, 16 29, 30, 46, 102, 104, 118, 120, 122, 125–127, 130, 210, 212, 221–224, 226, 228, 230, 240

 Emissão infravermelha 29, 46

Hidrogênio

 Linha $H\alpha$, 79, 83, 90, 91, 99, 104

 Linha de 21 cm, 37, 38, 262

 Linha Lyman- α , 81, 83, 92, 93, 96

Instabilidades, 208, 218, 219, 232–238

 Formação de estrelas, 236–240

 Jeans, 251–256

 Parker, 262–265

 Térmicas, 232–236

Interiores estelares, 58, 75, 131–163

Integrais exponenciais, 66

Lei de Kirchhoff, 23, 47, 141

Lei de Stefan-Boltzmann, 27, 31–33, 62

Lei de Wien, 25, 28–30

Limite de Eddington, 75

Limite de Oort, 174, 180–184, 187, 204

Linhas espectrais, 1, 45, 47, 51, 56, 68, 79–100, 102, 117, 128

 Alargamento, 82–90

 Formação, 79, 89, 98, 99

- Largura Doppler, 86, 87, 90
- Largura equivalente, 91–93, 96–100, 124, 130
- Perfil Doppler, 85–90, 95–99
- Perfil Lorenz, 88–90, 99
- Perfil Voigt, 89, 90

- masers, 41, 42

- Massa de Jeans, 171–173, 184, 237, 239, 241, 251, 255, 256

- Média de Rosseland, 144, 145, 163

- Meio interestelar, 20, 37, 49, 57, 79, 80, 96, 97, 101, 102, 104, 127, 128, 165, 183, 207–241
 - Densidade, 212, 213
 - GMC, 236
 - Equilíbrio, 214, 215
 - Instabilidades, 232–240
 - Linhas espectrais, 79–83, 87, 92–97
 - Meio internuvens, 211–215, 229, 232–235, 240
 - Tempo de resfriamento, 217, 218, 230, 231

- MHD, 249, 256

- Nebulosa planetária, 45, 46, 79, 83, 92, 103, 105, 107, 108, 121, 127, 167, 210, 211, 240
 - He2-99, 107, 108
 - NGC 2346, 45, 46
 - NGC 2392, 92, 93
 - NGC 6853, M27, 210, 211
 - Pe1-15, 83

- Neutrinos, 56, 139, 139, 141

- Nuvens interestelares, 34–38, 80, 87, 93, 96, 97, 171, 207–241
 - Aquecimento pela formação de moléculas, 221, 222
 - Aquecimento por fotoelétrons, 224–224
 - Aquecimento por raios cósmicos, 221
 - Fotoionização de átomos neutros, 218–221
 - Instabilidades, 232–238
 - Resfriamento por excitação colisional elétron-íon, 224–226
 - Resfriamento por excitação colisional elétron-H, 226
 - Resfriamento por excitação colisional H-íon, 226, 227
 - Resfriamento por excitação colisional H-H₂, 227, 228
 - Temperatura de equilíbrio, 215, 229–231

- Opacidade, 68–76, 144–146, 151, 159–163
 - Aproximação de Kramers, 75, 76
 - Condutiva, 159–162

- Espalhamento Thomson, 74–77
 - Ion H^- , 72, 77, 151
 - Média de Rosseland. 144, 145, 163
- Plasmas, 109, 243–266
- Potenciais de ionização, 37, 39, 72, 77, 243–246
- Princípio de incerteza de Heisenberg, 85, 88
- Profundidade óptica, 12–16, 41, 52, 55–59, 62, 63, 68, 70, 73, 85, 87, 88, 94, 95, 98
- Raios cósmicos, 177, 178, 180, 207, 212, 215, 221, 229–233, 240
- Regiões HII, 15, 167, 210, 235, 240, 243, 262
 - Emissão rádio, 15
 - Nebulosa de Orion, 1, 4, 15
 - RCW 79, 101, 102
 - Rosette, NGC 2237, 101
- Relaxação colisional, 187, 189, 193, 195–200
 - Aglomerados estelares, 187, 189, 195, 197, 198
 - Galáxia, 189
 - Tempo de relaxação, 189, 193, 195–200
- Restos de supernovas, 211, 246–248
- Rotação e momento angular, 238
- Sol
 - Atmosfera, 1, 4, 31, 39, 47, 73, 90, 152–156, 243–246, 256–258
 - Campo magnético, 32, 119, 257–259
 - Convecção, 148, 149, 152–155
 - Conversão de energia solar, 6
 - Coroa, 31, 32, 55, 56, 106, 115, 119, 123, 244–246
 - Cromosfera, 31, 56, 106, 119
 - Densidade de energia magnética, 258
 - Energia gravitacional, 134, 135
 - Energia nuclear, 135, 136, 140
 - Energia térmica, 131–133
 - Escurecimento do limbo, 64, 65
 - Espectro solar, 5, 6, 46, 47, 79, 243–246
 - Fluxo na fotosfera solar, 5, 6, 31, 48
 - Fluxo na Terra, 6
 - Fotosfera, 31–36, 39, 43, 44, 55–57, 72, 73, 77, 90, 91, 243–246, 257
 - Heliosismologia, 56, 138
 - Modelo padrão, 145–148
 - Movimento, 107, 108
 - Neutrinos solares, 56, 138, 139

- Opacidade pelo íon H^- , 72, 77
- Pressão magnética, 257, 258
- Reconexão magnética, 258, 259
- Região de transição, 31, 56
- Taxa de perda de massa, 106, 119
- Taxa de perda de massa termonuclear, 119
- Vento solar, 106, 119, 127

- Temperatura cinética, 36, 40–42
- Temperatura de brilho, 41
- Temperatura de cor, 40
- Temperatura de excitação, 40, 42
- Temperatura de ionização, 40
- Temperatura de radiação, 40
- Temperatura efetiva, 27, 31, 36, 40, 41, 44, 48, 55, 63, 69, 73
- Tempo de cruzamento, 194, 199, 200, 205
- Tempo de Kelvin-Helmholtz, 134, 136
- Tempo de queda livre, 136, 241
- Tempo de relaxação, 189, 193, 195–200
- Tempo de resfriamento, 217, 218, 230, 231

- Teorema de Liouville, 165, 174–177, 187, 200, 201, 204
 - Área dos detectores, 177
 - Limite de Oort, 180–183
 - Raios cósmicos, 177, 178

- Teorema do virial, 134, 165–174, 179, 184, 187, 190–195, 204, 237
 - Caso ultra relativístico, 173
 - Equilíbrio hidrostático, 170, 171
 - Formação de galáxias, 174
 - Formação estelar, 168, 169, 171, 174
 - Massa de Jeans, 171–173
 - Massa dos aglomerados de galáxias, 194, 195
 - Massa dos aglomerados estelares, 192, 193
 - Movimento de translação da Terra, 166
 - Movimento do Sol, 167, 168
 - Na dinâmica estelar, 190–195
 - Pressão do gás, 169, 170
 - Virial de Clausius, 191

- Termodinâmica, 32, 33

- Transporte radiativo, 1, 10–13, 15, 16, 109, 128, 141, 149
 - Caso opticamente espesso, 14, 15, 46, 141, 149
 - Caso opticamente fino, 14, 15, 45, 141, 149
 - Equação, 1, 11–13, 15, 16, 51, 57–59, 70, 92, 94, 109, 141, 142
 - Fluxo radiativo, 145–146, 151, 157, 159
 - Solução, geral 13
 - Ventos estelares, 101–130
- Ventos estelares 101–130
 - Equações, 109–115
 - Fórmula de Reimers, 120, 127, 130
 - Interação com o meio interestelar, 101, 127
 - Lei beta de velocidades, 112–114
 - Mecanismos, 119–123
 - Ondas de Alfvén, 122, 123
 - Perfis P Cyg, 102–104, 124, 130
 - Transferência de energia, 115
 - Transporte radiativo, 109, 128, 129
 - Velocidade de escape, 117, 118

