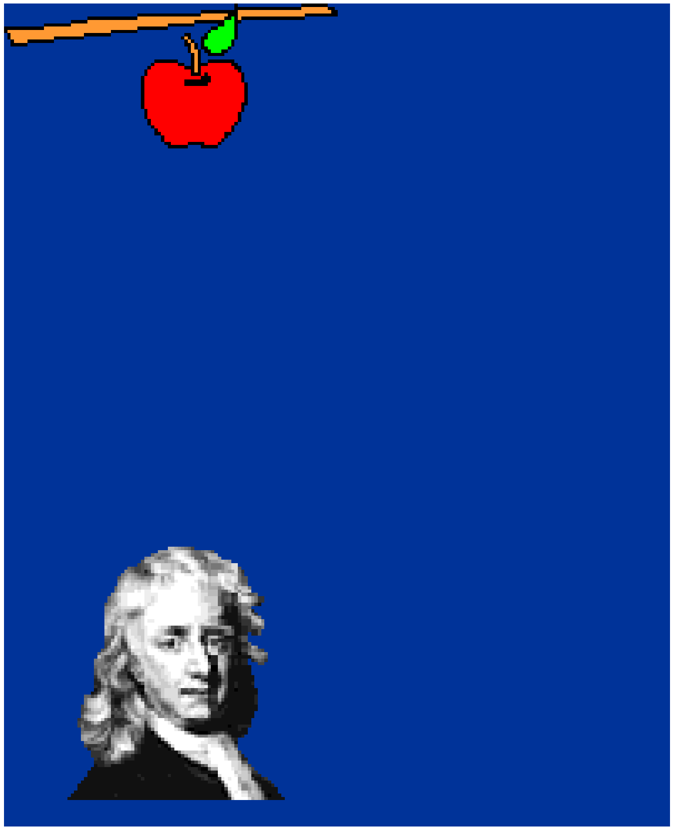
Referenciais Não-Inerciais, Rotação da Terra e Marés

J. A. S. Lima - Departamento de Astronomia - AGA0105

SUMÁRIO

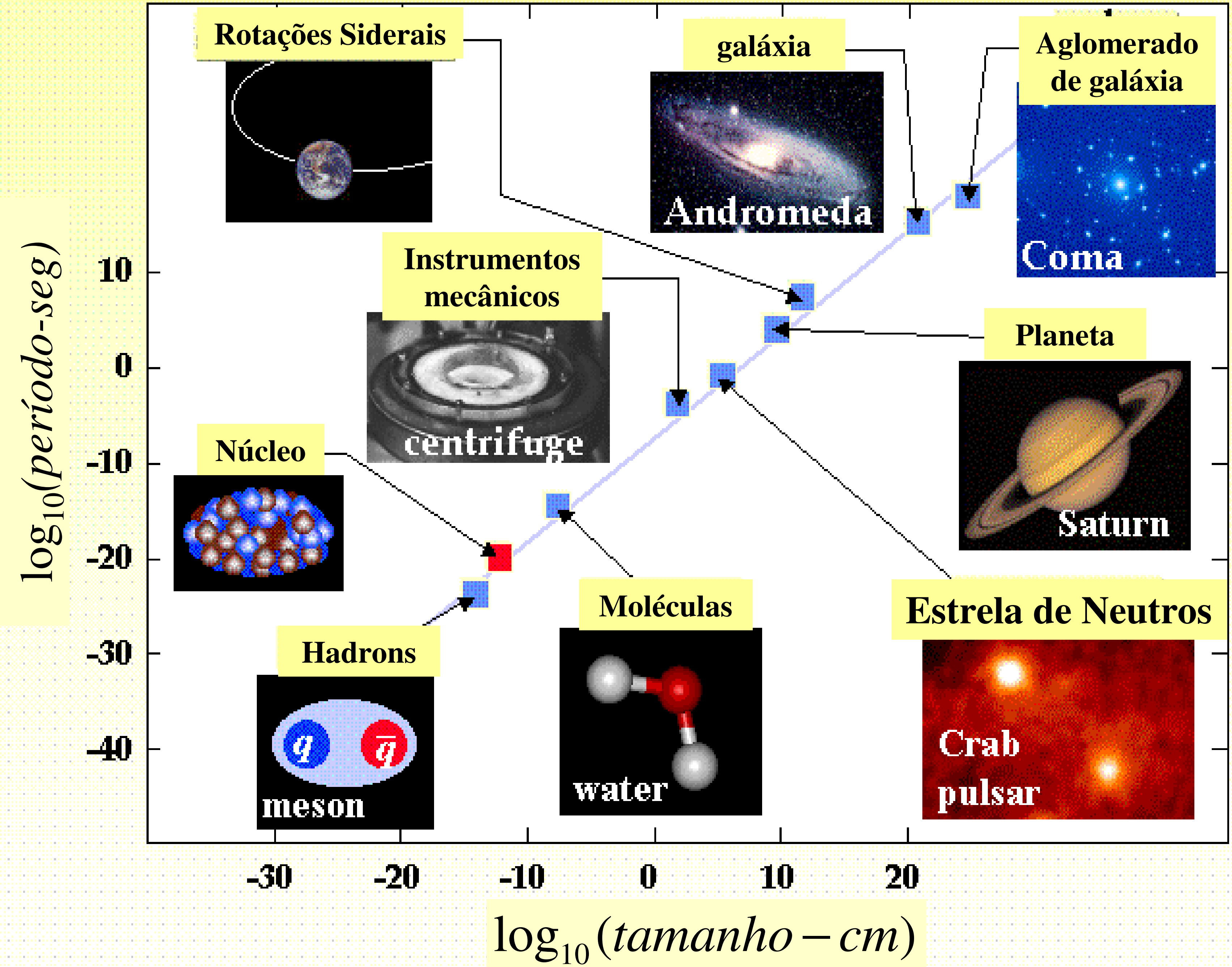
Gravitação Newtoniana

- Três Leis do Movimento mais a Lei da Gravitação explicam os fenômenos mais diversos
  - Movimento dos planetas em torno do Sol
  - Órbita dos cometas
  - Queda dos corpos, Marés,.. etc
- Resolve grande parte dos problemas em astronomia e física "terrestre". Mecânica Celeste virou uma área bem estabelecida da Física
- (Exceção: desvio do Périélio de Mercúrio)



As leis de Newton unificaram os trabalhos de Copérnico, Kepler e Galileu.

Rotações no Universo

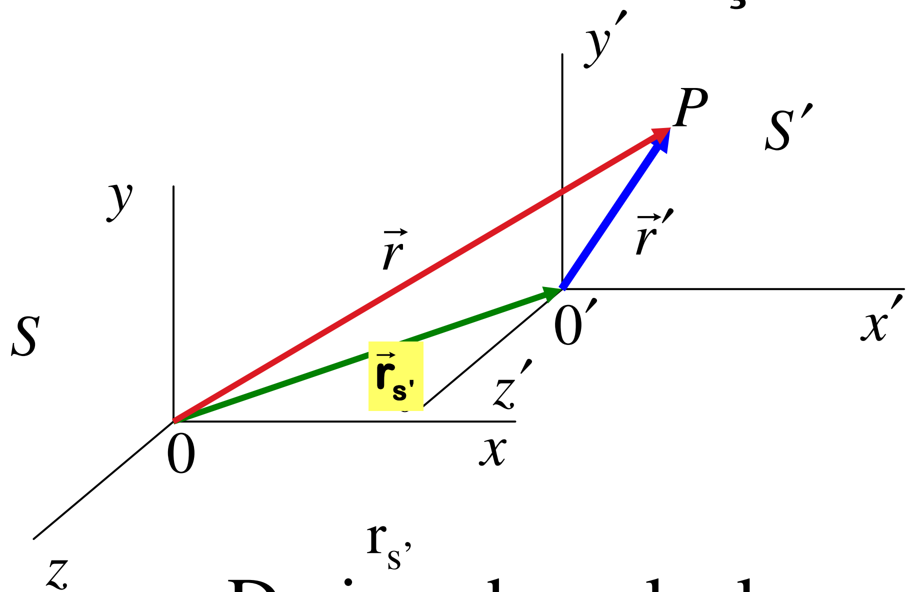


Revisão – Referenciais Acelerados e Forças Inerciais - Rotação

- Em referenciais inerciais as leis de Newton são estritamente válidas (2a. Lei!).
- O que acontece em referenciais não-inerciais?
- Quais as alterações nas equações de movimento em referenciais acelerados?
    - Uniformemente acelerados (translação)
    - Girantes
    - Caso Geral

1 – Referenciais em translação acelerada

- Considerando o referencial S’ com movimento acelerado em relação a S (inercial – suposto fixo):



$$\vec{r} = \vec{r}_{s'} + \vec{r}\,'$$

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_{s'}$$

- Derivando, calculamos a velocidade e aceleração:

$$\vec{v} = \vec{v}_{s'} + \vec{v}\,'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{s'} + \vec{a}\,'$$

- A equação de movimento em S (inercial):

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{(2a. Lei de Newton)}$$

Em S':

$$\vec{a} = \vec{a}_{s'} + \vec{a}'$$

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_{s'} = \vec{F} - m\vec{a}_{s'} = \vec{F} + \vec{F}^*$$

Equivalentemente:

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}^*$$

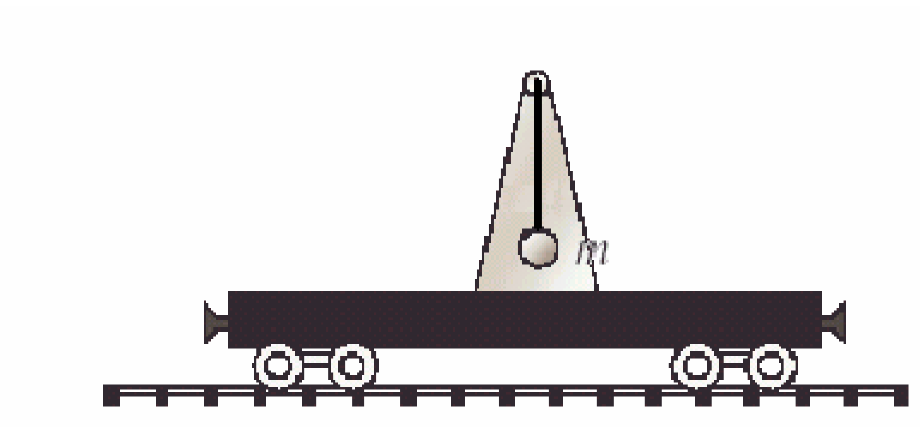
Força Fictícia

É chamada de Força Fíctícia (ou de origem inercial) porque desaparece no referencial não acelerado S (inercial).

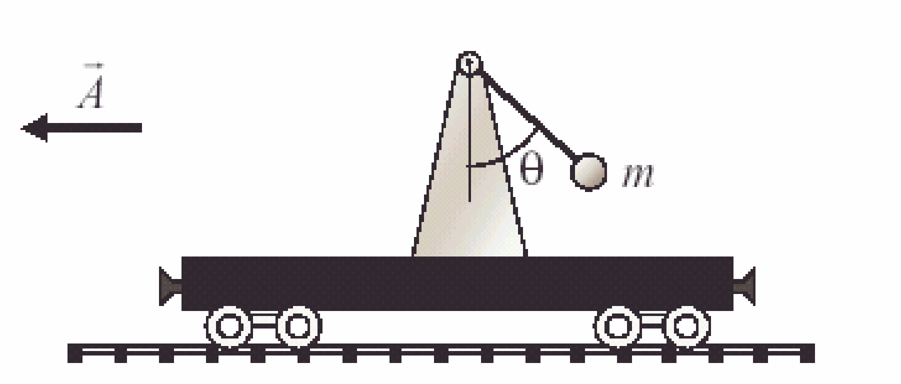
- F^* é chamada força inercial ou fictícia
- Possui dimensão de força, mas não corresponde a uma força de interação
- Não obedece à 3ª lei de Newton

Exemplo: Acelerômetro (pêndulo em ref. acelerado)

Referencial inercial



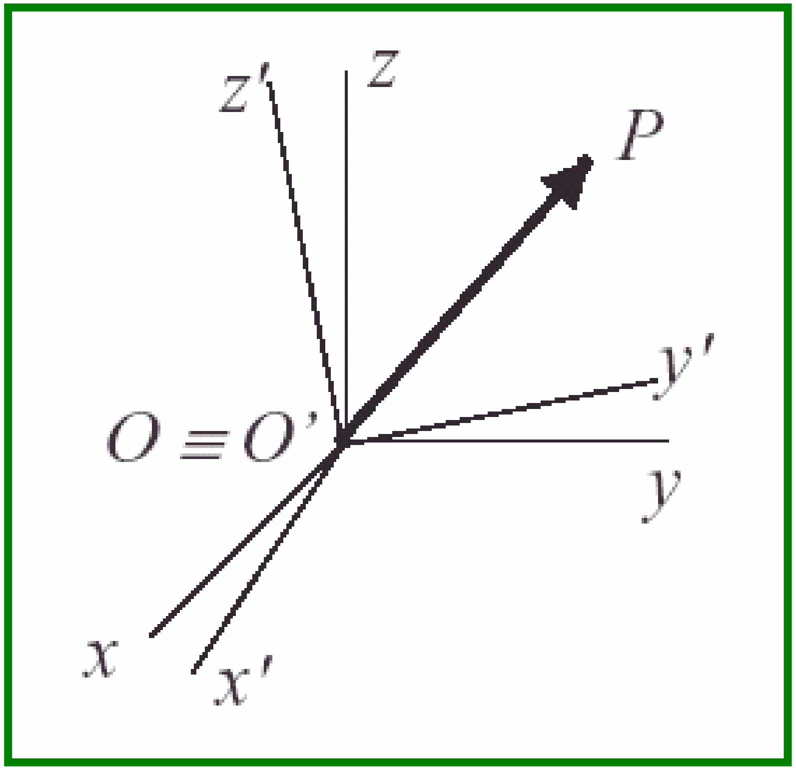
Referencial não-inercial



$$A = g \tan\theta$$

- Debate Newton x Leibniz sobre a origem das forças de inércia ou fictícias.
- Para Newton o espaço absoluto era responsável pelas forças fictícias. O espaço agiria dependendo da escolha do Sistema de Referência.
- Para Leibniz era um absurdo algo que agia (o espaço absoluto) mas que nada agia sobre ele.
- Para Newton, o tempo era mais absoluto do que o espaço! O tempo é absoluto, independente do estado de movimento dos observadores.
- A mecânica Newtoniana não fornece uma explicação convincente para a origem das forças de inércia.

2. Referenciais Girantes (S fixo e S'girante)



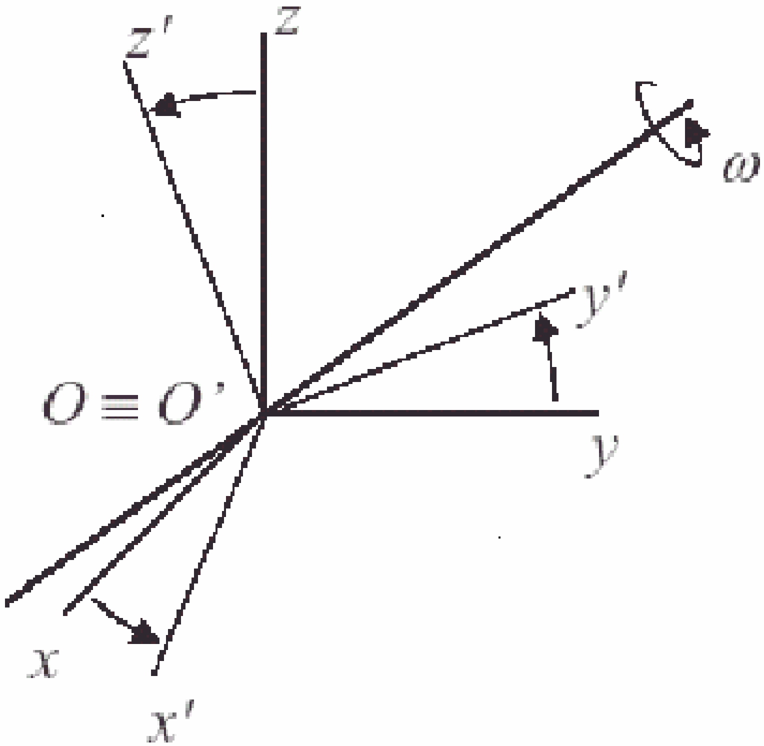
- A origem dos sistemas coincidem.
- O vetor do ponto P escrito nos dois sistemas:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

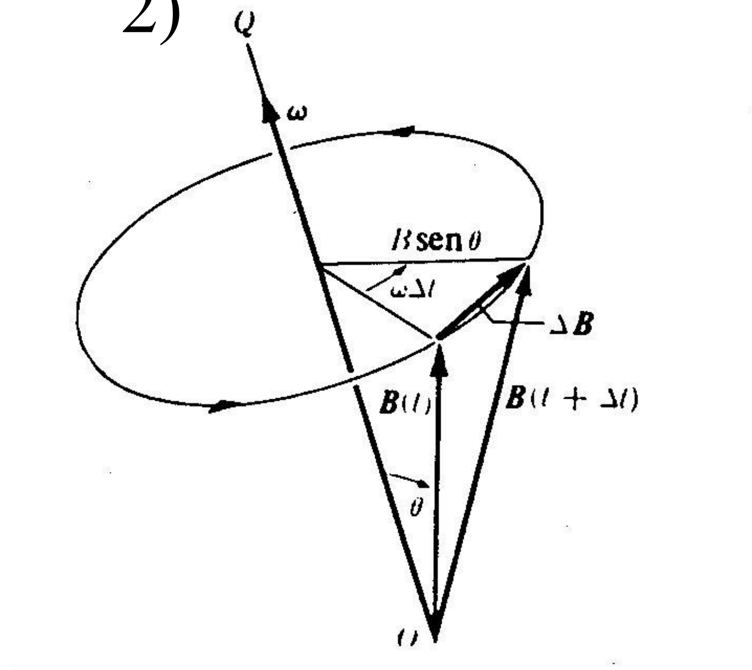
$$\vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'$$

- O sistema S' está girando como indica a figura 1:

1)



2)



- Da figura 2, derivada temporal de um vetor girante (visto de S) – suposto fixo em S' é dada por:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{B}$$ e móvel: $$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{d\vec{B}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{B}$$

- Para o vetor posição temos: $$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Derivando novamente e usando a equação acima (2 vezes!)

$$\vec{a} = \vec{a}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$$

$$\textbf{definindo}: \vec{F}' = m\vec{a}'$$

$$\vec{F}' = m\vec{a} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$$

$$\vec{F}' = \vec{F} + \underbrace{\vec{F}_{transversal} + \vec{F}_{Coriolis} + \vec{F}_{centrifuga}}_{\text{Forças Inerciais}}$$

- Forças inerciais são efeitos sobre a partícula quando analisamos seu movimento em referenciais acelerados
- Com a introdução das forças inerciais as leis de movimento têm a mesma forma que num RI

Referenciais Acelerados - Translação e Rotação

- Sendo $\mathbf{a}_{s'}$ a aceleração linear do referencial girante é suficiente somar os efeitos:

$$\vec{F}' = m\vec{a} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) - m\,\vec{a}_{s'}$$

Efeitos:

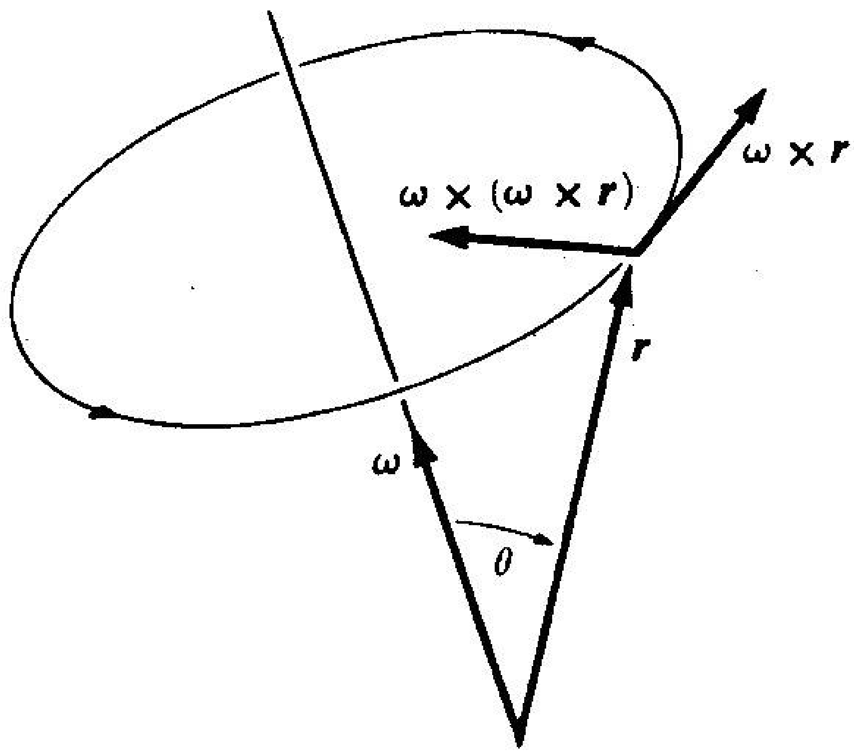
1. **Força Transversal**

$$\vec{F}_{transversal} = -m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}$$

- Só aparece para o caso de rotações não-uniformes
- É pouco considerada => pequena perturbação

2. Força Centrífuga

- Uma partícula movendo-se em círculo (ou fazendo uma curva) está sujeita a uma força centrípeta



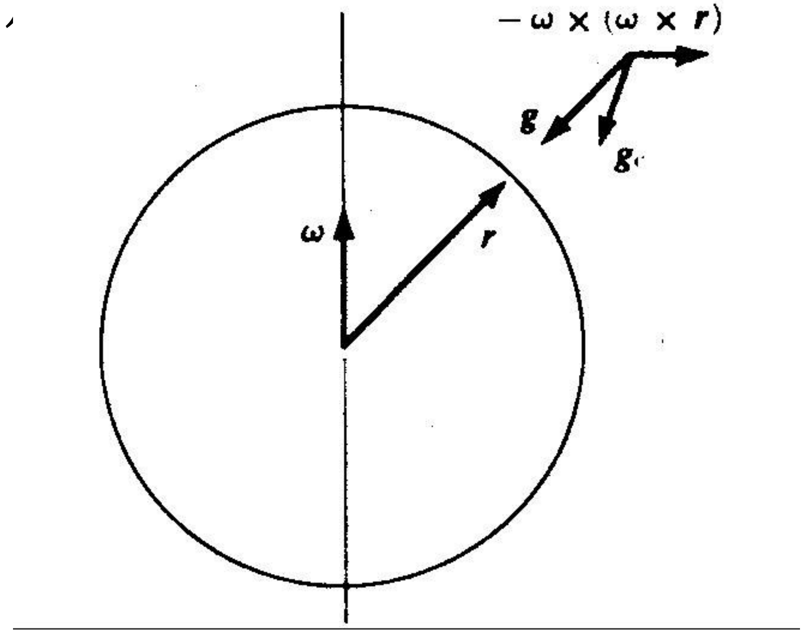
Exemplos:

- Bola amarrada por barbante
- Centrífuga de roupas
- Etc.

- No referencial da partícula, a força centrípeta será contrabalançada pela força centrífuga

- Interessante: A “força centrífuga” é responsável por ‘criar’ uma aceleração gravitacional efetiva

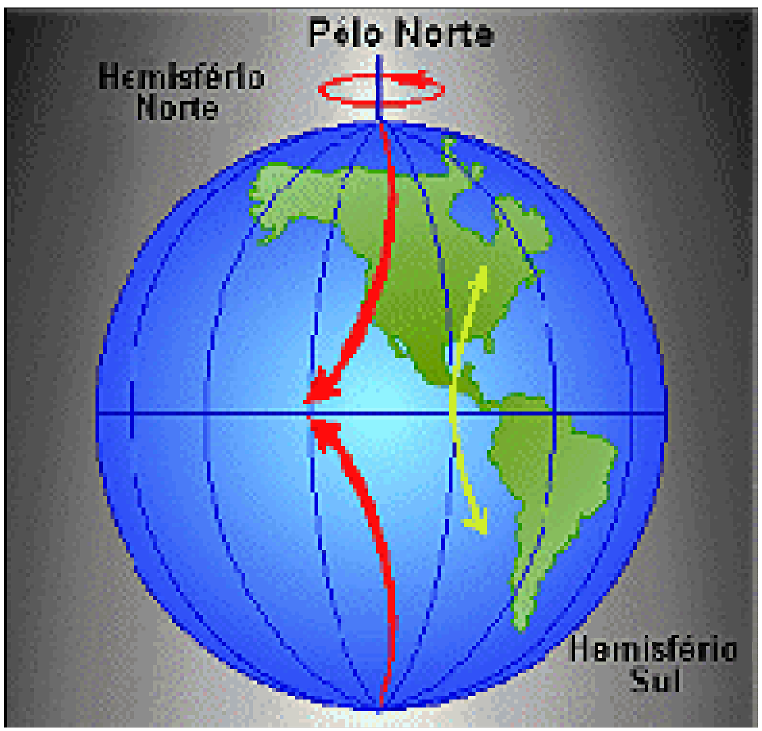
$$\vec{g}_e = \vec{g} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$



Outras Conseqüências da Rotação: Efeito Coriolis

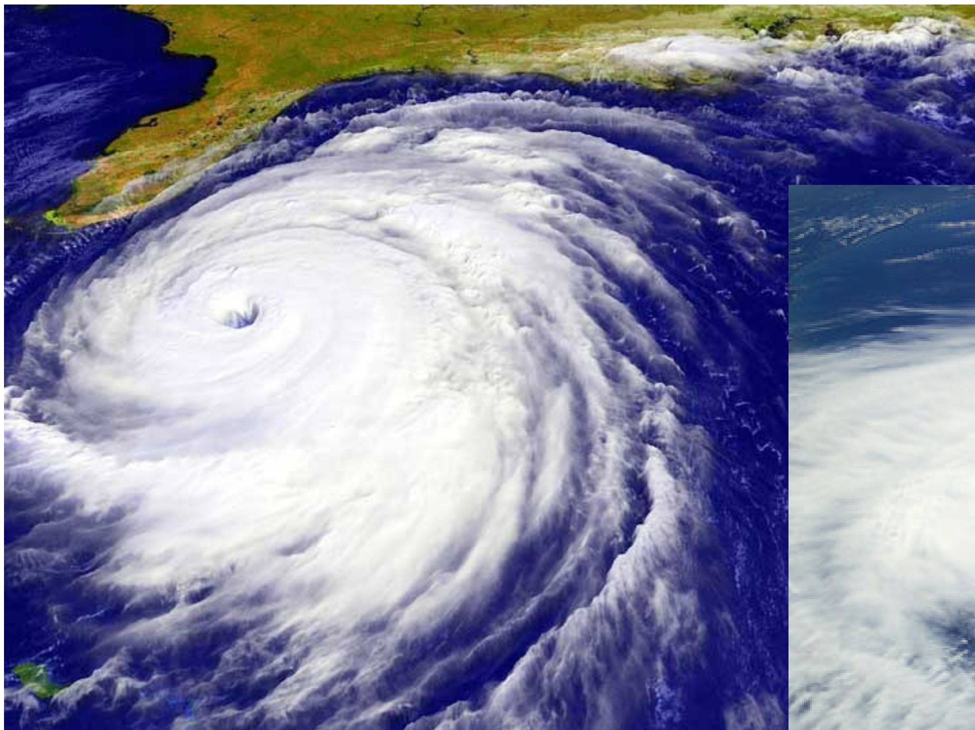
Em 1835, Gustave-Gaspard de Coriolis (1792–1843) estudou o efeito da força inercial que desvia o movimento dos corpos situados sobre uma superfície que está em rotação (Força de Coriolis).

Aceleração de Coriolis $\Rightarrow \vec{a}_{Coriolis} = 2(\vec{v} \times \vec{\omega})$



Efeito Coriolis

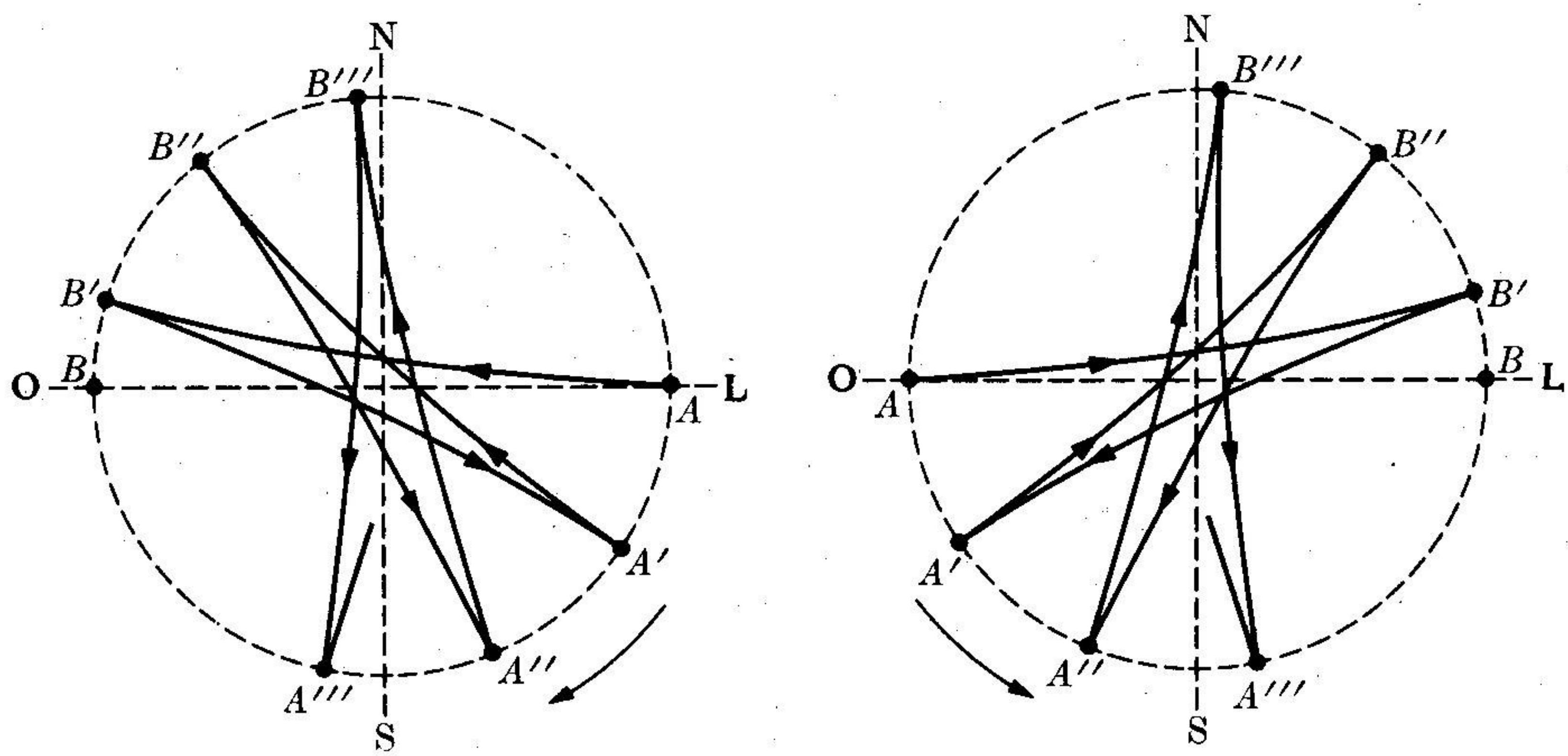
Em qual sentido giram os Furacões?



Furacão Hemisfério Norte

Furação no Hemisfério Sul

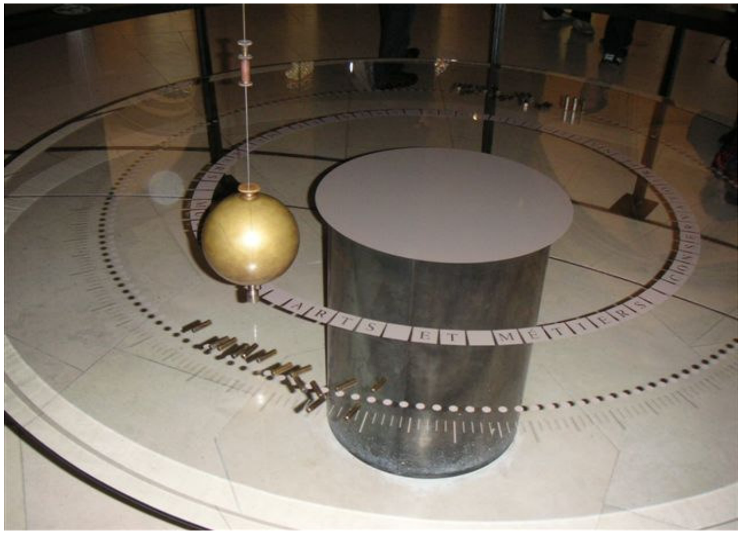
- <u>Pêndulo de Foucault</u> : prova da rotação da Terra
- Devido a rotação da Terra, a força de Coriolis faz o plano de oscilação do pêndulo mudar continuamente



(a) Hemisfério norte (b) Hemisfério sul

Prova da Rotação da Terra

Em 1851, Léon Foucault (1810-1868) apresentou uma prova incontestável da rotação da Terra.



Pêndulo Foucault

O período de rotação do pêndulo, por dia, depende da latitude do local.

Nos Pólos (90°) => $P = 24^h$

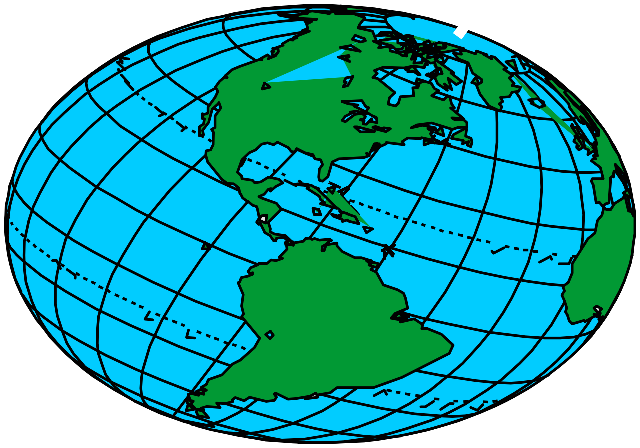
No Equador (0°) => $P = \infty$

No São Paulo (23,5°) => $P \sim 60{,}2^h$

$$\omega = 2\pi / P \Rightarrow \omega sen(\varphi)$$

$$P = 24^h / sen(\varphi)$$

Conseqüência da Rotação: Terra é oblata



$$R_{Pólo} = 6.356,8\,km$$

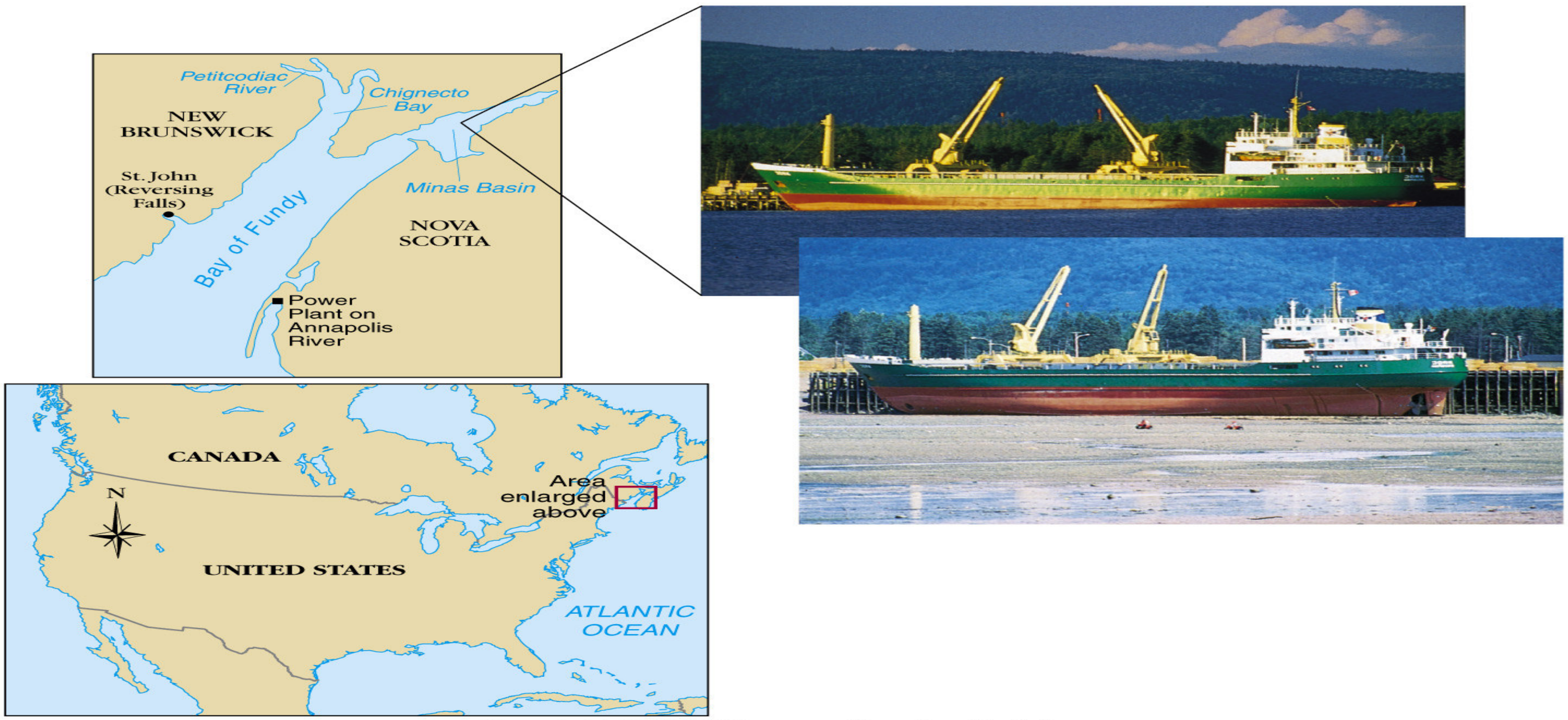
$$R_{Equador} = 6.378,2\,km$$

$$\varepsilon = (R_{Equador} - R_{Pólo}) / R_{Equador} = 1/300$$

Se um corpo é fluido sua forma provará sua rotação sabendo que um fluido deve ajustar sua forma a todas as forças externas.

A Terra é elástica!

5. MARÉS



Petitcodiac River
Chignecto Bay
NEW BRUNSWICK
St. John (Reversing Falls)
Minas Basin
Bay of Fundy
NOVA SCOTIA
Power Plant on Annapolis River
CANADA
N
Area enlarged above
UNITED STATES
ATLANTIC OCEAN

O que são as Marés?

- O fenômeno das marés continuamente levanta e baixa a superfície do mar.
- Marés são ondas de longos períodos.
  - Maré alta está associada com a crista da onda e a maré baixa com os vales.
  - Em algumas áreas, o movimento vertical pode ser levantar a superfície do mar entre 10m-15m, duas vezes ao dia.

Alguns Efeitos das Marés

- Marés provocam fortes correntes (> 5 m/s) na costa oceânica.
- Correntes de Maré geram ondas internas no relevo do mar.
- A crosta elástica da terra se curva sob a influência do potencial de Maré (± 10 m)

Alguns Efeitos….Cont….

- As Marés influenciam fortemente o sistema Terra - Lua.
  - Diminue lentamente a rotação da terra (viscosidade) e portanto altera a própria duração do dia.
  - Faz a Lua se afastar lentamente da terra (**Conservação do Momento Angular**)
  - Foi o mecanismo responsável pelo fato da Lua ficar com sempre com a mesma face voltada para a terra (Rotacão sincronizada – PR=PT – O mesmo ocorre com os 2 satélite de Marte e alguns de Júpiter)
- Marés influenciam as órbitas dos satélites.

O que causa as Marés?

- Força Gravitacional atuando entre os corpos celestes é a principal força geradora das marés.

- Para corpos em Rotação, as forças de Inércia também provocam marés.

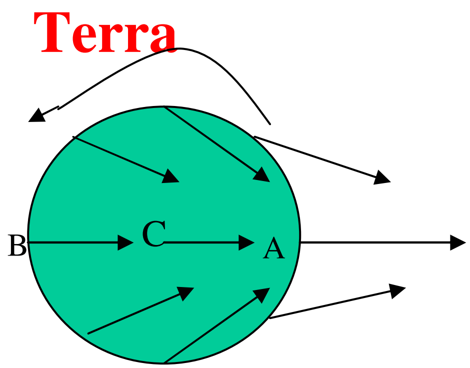
Forças Gravitacionais Diferenciais: Como surgem as forças de Marés?

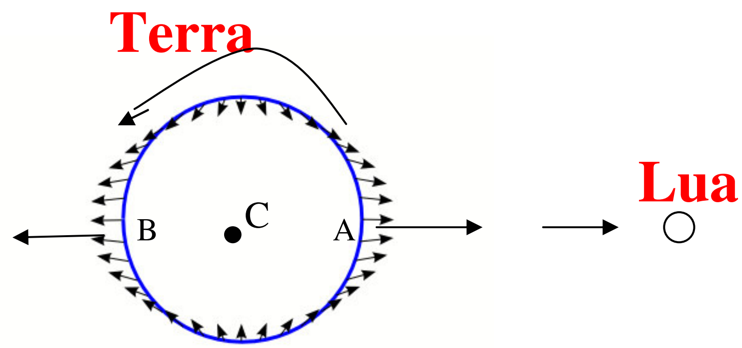
Contexto Básico: Corpos com simetria esférica agem gravitacionalmente como massas pontuais. Mas a maioria dos corpos celestes não são esfericamente simétricos e/ou são dotados de algum grau de elasticidade, ou ainda, estão na presença de vários outros corpos. Para tais corpos as chamadas Forças Gravitacionais Diferenciais se tornam importantes.

O efeito aparece porque no caso de corpos extensos, as diferentes partes do corpo experimentam diferentes acelerações gravitacionais. Esta é a força predominante no fenômeno das

MARÉS

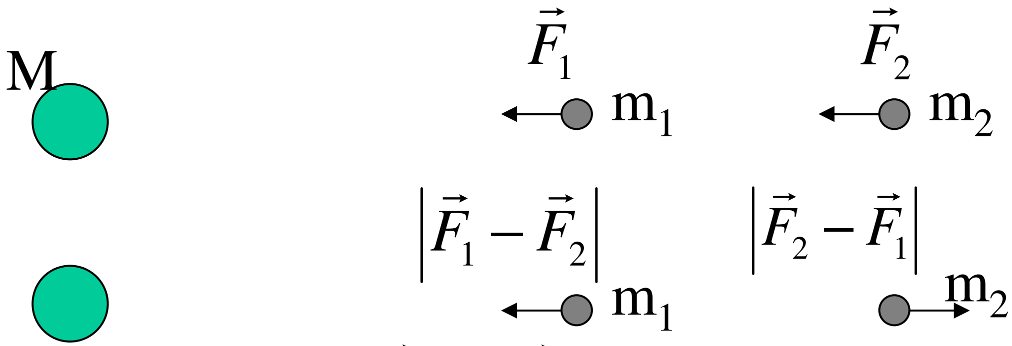
Forças de Maré





- (A) Atração gravitacional da lua sobre a terra e os respectivos vetores de força (aceleração).
- (B) O vetor aceleração do centro da terra (C) é subtraído das acelerações de superfície. Os vetores resultantes são as forças diferenciais ou forças de marés.
- **As forças de maré tendem a distender o corpo na direção do centro atrator e comprimí-lo na direção ortogonal.**

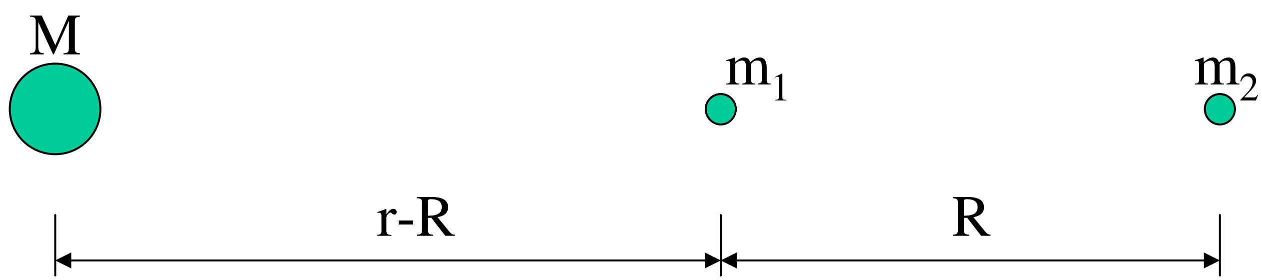
Cálculo da força diferencial



$$\vec{F} = \vec{F}_{centro\ de\ massa} + \Delta\vec{F}$$

$\Delta\vec{F}$ tende a separar as partículas $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$ pois, em relação ao centro de massa, elas se afastam. Se o corpo for elástico, a força diferencial provocará uma elongação e pode chegar mesmo a romper o corpo.

Para calcular a força resultante de maré vamos considerar uma situação bastante simples que fornece o mesmo resultado de cálculos mais rigorosos.



$$F_1 = \frac{GMm_1}{(r-R)^2} \qquad F_2 = \frac{GMm_2}{r^2}$$

$$F_1 - F_2 = GM\left[\frac{m_1}{(r-R)^2} - \frac{m_2}{r^2}\right]$$

Para m_1=m_2 (elementos de mesma massa do corpo!)

$$F_1 - F_2 = GMm\left[\frac{r^2-(r-R)^2}{r^2(r-R)^2}\right] \qquad \Delta F = F_1 - F_2 = GMm\left[\frac{2rR-R^2}{r^4(1-\frac{2R}{r}-\frac{R^2}{r^2})}\right]$$

Supondo r >> R

$$\boxed{\Delta F = \frac{2GMmR}{r^3}}$$

Note que $\Delta F \propto \dfrac{1}{r^3}$ Mais fraca do que a força gravitacional Newtoniana!

Outra dedução simples da Força de Maré

Diferenciando a força gravitacional entre 2 massas M e m:

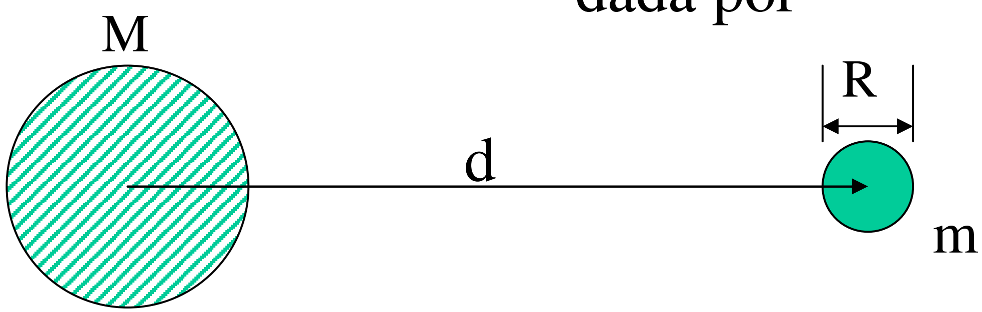
$$F = -\frac{GMm}{r^2} \quad \text{temos} \quad \Delta F = \frac{dF}{dr}\Delta r$$

$$\frac{dF}{dr} = \frac{2GMm}{r^3} \qquad \Delta F = \frac{2GMm}{r^3}\Delta r$$

Que é basicamente a mesma expressão anterior com

$$\Delta r = R$$

Resumindo: A força de maré sobre um corpo de dimensão R exercida por um outro corpo de massa M a uma distância d é dada por



$$\Delta F = \frac{2GMmR}{d^3} \xrightarrow[\text{Unidade de massa}]{\text{Força}} \Delta f \propto \frac{MR}{d^3}$$

M é a massa do corpo que provoca a maré!

(no caso da Terra, o Sol ou a Lua! De fato, as marés devido aos outros planeta são desprezíveis!)

Maré Solar X Maré Lunar

A massa do sol é muito maior do que a da lua, contudo, a distância da Lua é muito menor.

Q1. Quem exerce maior força de Maré na Terra? Sol ou Lua?

$$\Delta F \propto \frac{M}{d^3} x\mathrm{Dimens\tilde{a}o}$$

$$\frac{\Delta F_\Theta}{\Delta F_L} = \frac{M_\Theta}{M_L}\left(\frac{d_L}{d_\Theta}\right)^3 = \frac{5}{11} = 0{,}45$$

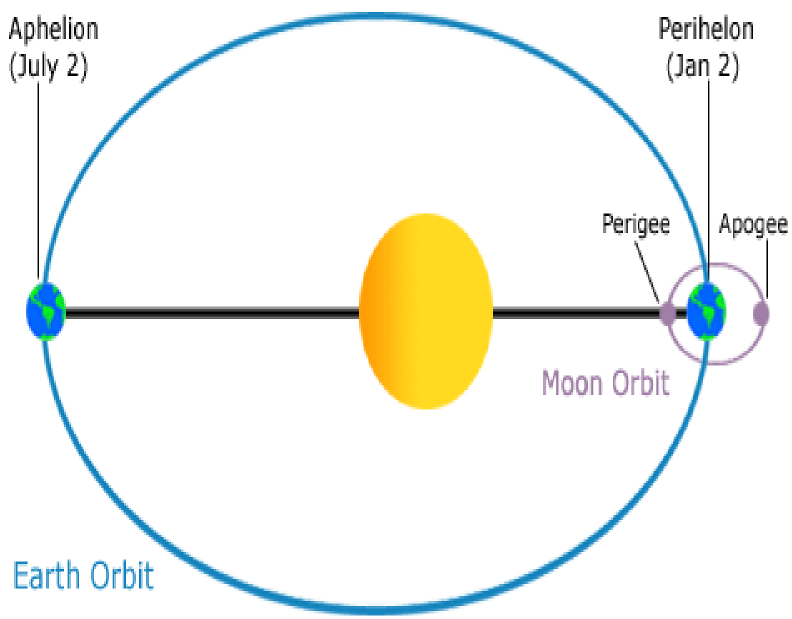
Q2. Para o Sistema terra-lua: Quem é maior? A maré da Terra sobre a Lua ou a maré da Lua sobre a Terra?

$$\Delta F \propto \frac{MR}{d^3}$$

$$\Delta F_{T\rightarrow L} \cong 20 \Delta F_{L\rightarrow T}$$

Efeitos Orbitais Adicionais

- Existem alguns efeitos orbitais que numa descrição mais completa das marés terrestres devem ser considerados.
  - A Terra tem uma órbita ligeiramente elíptica. No hemisfério norte as marés são mais intensas em Janeiro (inverno). No hemisfério sul no verão.
  - A órbita da Lua também, é Elíptica (distância varia de 8%) e também produz variações nas marés lunares.



Limite de Roche:

Uma consequência física importante das forças de maré é que um satélite ou um meteoro em geral não pode se aproximar arbitrariamente de um planeta sem se romper! Nem se afastar demasiadamente (instabilidades!).

Em 1850, o matemático francês Edonard Roche calculou a distância mínima que um satélite fluido (auto-gravitante) pode se aproximar sem correr o risco de romper.

Para um satélite de raio R e densidade ρ_m, nas proximidades de um planeta de densidade ρ_M

Roche obteve a seguinte distância limite:

$$\boxed{d = 2{,}44\left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{1/3} R}$$

Limite de Roche!

Em 1974, Aggarwald & Oberbeck estudaram o limite de ruptura para corpos esferoidais sólidos, rochosos ou gelados, mantidos coesos por forças intrínsicas do seu material. Para satélites com diâmetros maiores do que 40 km obtiveram:

$$d = 1{,}38 \left(\frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{1/3} R \quad < \quad d_{Roche}$$

Questão 3: Qual a menor distância que a lua pode se aproximar da terra sem se romper?

$$\bar{\rho}_{Terra} = 5.514\, kg/m^3$$

$$\bar{\rho}_{Lua} = 3.342\, kg/m^3$$

$$R_{Lua} = 1.738\, km$$

$$d_L = 1{,}38 \left(\frac{\rho_{Terra}}{\rho_{Lua}} \right)^{1/3} R_L$$

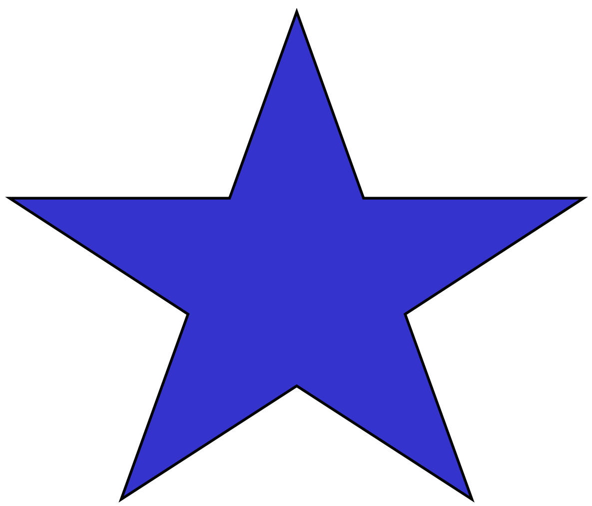
$$d_L = 7.527\, km$$

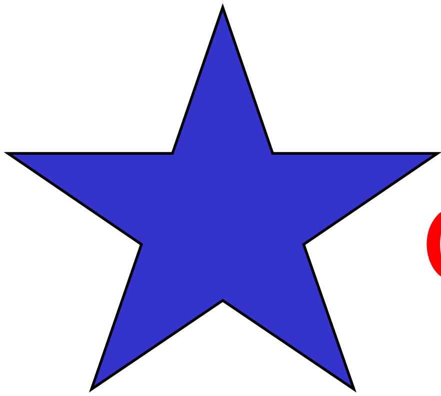
COMENTÁRIOS FINAIS

1. **Marés são explicadas pela Mecânica Celeste**
2. **Rotação: dias, noites, força de Coriolis, forma da Terra**
3. **Estações: inclinação de 23,5° do eixo + translação**
4. **Marés: influências marcantes, forças diferenciais.**
5. **Maré Lunar X Maré Solar**
6. **limite de Roche**

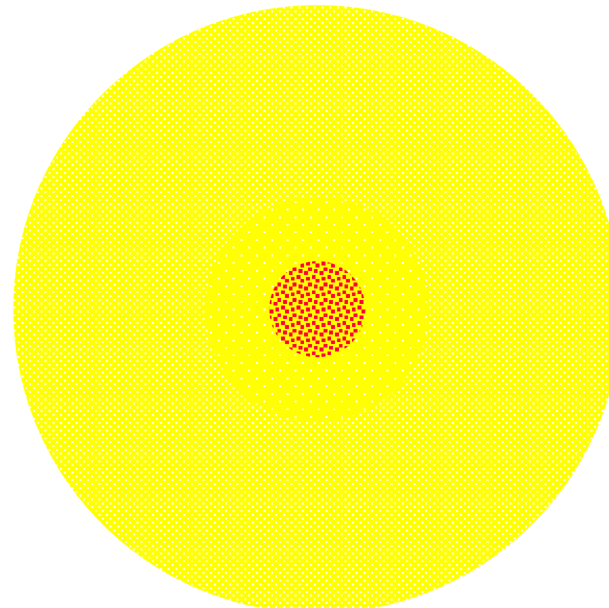
FIM

ESTRELAS!





O que é uma estrela?



É um plasma, um corpo gasoso formado por prótons, elétrons, elementos leves, pesados e radiação no interior do qual ocorrem reações, físicas, químicas, etc.

Nascimento, vida e morte de estrelas