Resolução Exercício 3 Lista 2

3) Considere um modelo cosmológico do tipo Friedmann com matéria e seção espacial euclidiana (universo plano). Calcule a idade do modelo para $H_0 = 100$ km s^{-1} Mpc^{-1}. 1 Mpc $= 3 \times 10^{19}$ km.

O parâmetro de Hubble é definido como a taxa de expansão do universo, que em termos do fator de escala pode ser escrito como

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}. \tag{1}$$

Podemos reescrever a expressão acima da seguinte forma:

$$dt = \frac{1}{H}\frac{da}{a}, \tag{2}$$

sendo a idade do universo obtida integrando desde o instante inicial do universo: $t = 0$ e $a = 0$, at a hoje: $t = t_0$ e $a = a_0$, o que nos leva a

$$t_0 = \int_0^{a_0} \frac{1}{H}\frac{da}{a}. \tag{3}$$

O próximo passo reside em determinarmos a dependência do parâmetro de Hubble com o fator de escala. Como estamos considerando um universo plano, $k = 0$, a equação de Friedmann para H é expressa por

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho. \tag{4}$$

A única componente que preenche o universo é a matéria, onde sua densidade é inversamente proporcional ao volume:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3. \tag{5}$$

O fato do universo ser plano implica que a densidade hoje ρ_0 é igual a densidade crítica $\rho_{crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$. A idade então é dada por:

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^{a_0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{da}{a} = \frac{2}{3}\frac{1}{H_0}. \tag{6}$$