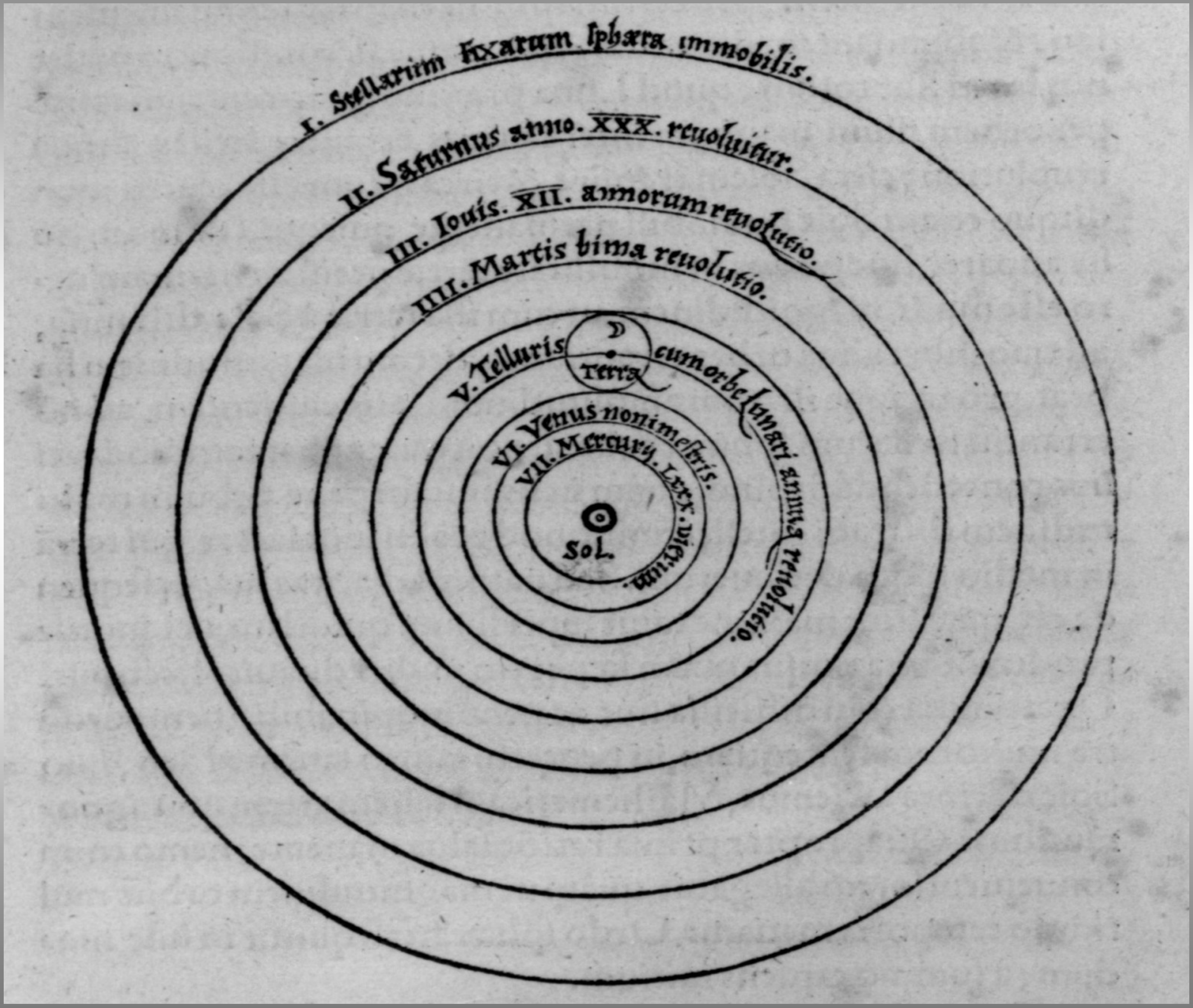
Copérnico e o Modelo Heliocêntrico



HELIOCENTRISMO

1o. Modelo Heliocêntrico:
Aristarco de Samos (310 – 230 A. C.)
(Considerado Absurdo)

2o. Modelo: Nicolau Copérnico (1473 - 1543)
Livro: De Revolutionibus (1543):
1a. Grande Obra do Renascimento Científico Europeu (1453 – tomada de Constantinopla)
Renascença – Início do Humanismo
Thomas Morus, Erasmo de Roterdã..etc.
A revolução Científica foi muito mais difícil.

Principais Contribuições de Copérnico:

1) Terra é um dos 6 planetas girando em torno do Sol.

2) Colocou os planetas em ordem de distância a partir do Sol: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno + Urano, Netuno (01/1847, U. Le Verrier) e Plutão.

3) Determinou as distâncias dos planetas ao Sol, em termos da distância Terra-Sol.

4) Deduziu que quanto mais perto do Sol está o planeta, maior a sua velocidade orbital → O movimento retrógrado foi explicado sem precisar dos Epiciclos!

Configurações Planetárias

<u>Planetas Inferiores:</u>

Órbitas Menores do que a Terra: **Mercúrio e Vênus**.

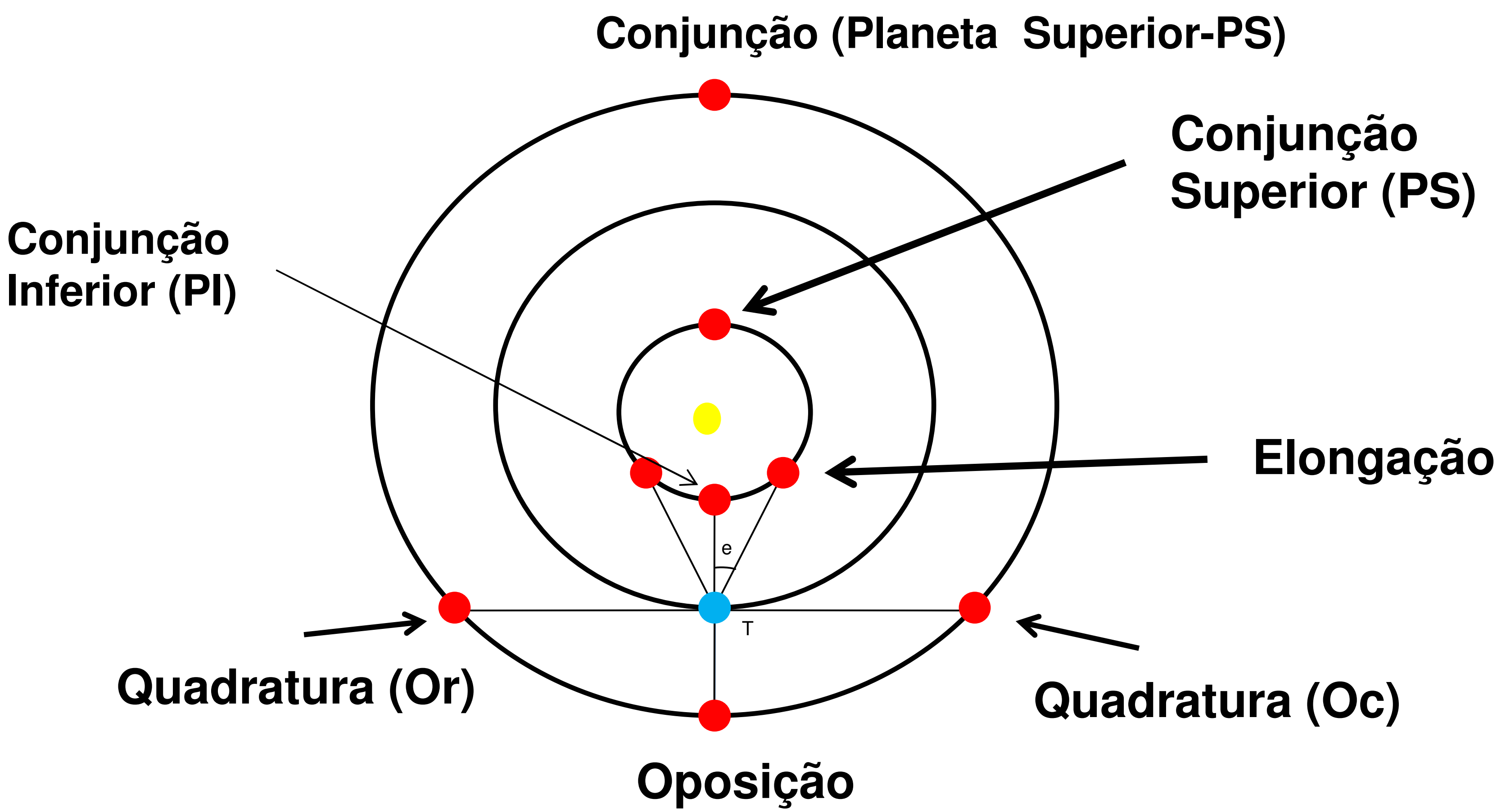
<u>Planetas Superiores:</u>

Órbitas Maiores do que a Terra:

Marte, Júpiter, Saturno **(+ Urano, Netuno e Plutão**).

Elongação (e) : Distância angular do planeta ao Sol vista da <u>Terra</u>!

Definições Básicas



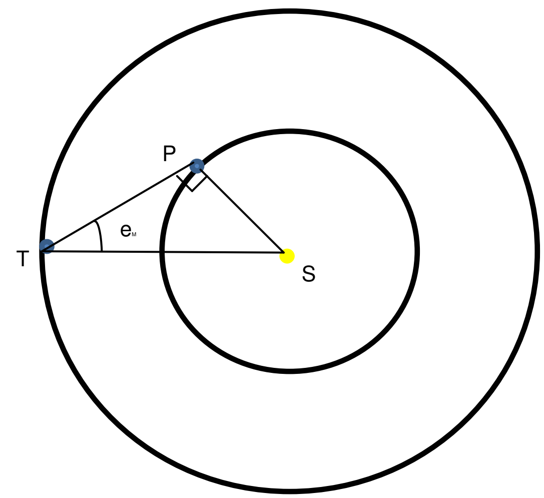
Configurações Planetárias Básicas (Heliocêntricas)

- **Conjunção:** o planeta na mesma direção do Sol (**e=0°**)
- **Oposição:** Planeta na direção oposta ao Sol (**e=180°**)
- **Quadratura:** O planeta está ortogonal (**e=90°**)

Distâncias no Sistema Solar

Copérnico determinou as distâncias dentro do sistema solar em termos da distância Terra-Sol

$D_{T\text{-}S}$ = 1 Unidade Astronômica (UA)



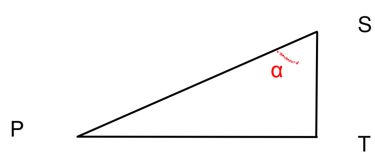
Quando um planeta (Inferior) está em elongação máxima TPS = 90° (visto do planeta)

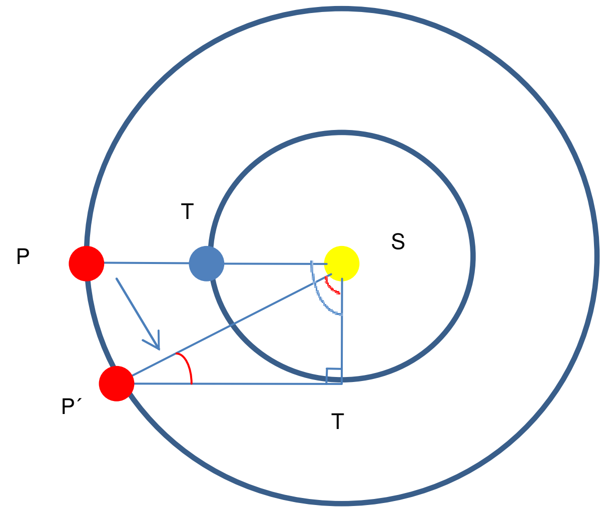
$$sen(e_M) = \frac{D_{PS}}{D_{TR}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_{PS} = sen(e_M) \times 1UA}$$

Mercúrio: $\approx 28° \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_{PS} \approx 0.376 \text{ UA}}$

Planetas Superiores

Marte:





$$\cos(\alpha) = \frac{D_{TS}}{D_{PS}} \therefore D_{PS} = \frac{D_{TS}}{\cos\alpha}$$

$$\boxed{D_{MS} = \frac{1UA}{\cos 49°} = 1.52UA}$$

Tempo entre oposição e quadratura = 106 dias

Nesse tempo a Terra descreve um ângulo de (106/365)x360°=104.8°

Enquanto Marte (106/687)x360°=55.5° → α = 104.5° - 55.5° = 49°

Distância dos Planetas (UA)
Copérnico X Valor Atual

PLANETA	Valor obtido por Copérnico	Valor Atual
Saturno	9.174	9.539
Júpiter	5.219	5.203
Marte	1.520	1.524
Terra	1.000	1.000
Vênus	0.719	0.723
Mercúrio	0.376	0.387

Os resultados são excelentes ao se comparar com os valores atuais. De qualquer forma, com os excêntricos, deferentes e epiciclos, o cálculo é muito mais elaborado!

Previsão!

REAÇÕES AO DE REVOLUTIONIBUS (1543)

Astrônomos receberam bem.

Aos poucos as teses copernicanas foram saindo do círculo de iniciados

Reação mais violenta viria dos Religiosos: Devido a Reforma Protestante a Europa atravessava um momento díficil (Barril de Pólvora)

Concílio de Trento – 1545

Luteranos: ...Tem-se dado ouvidos a um astrólogo que tenta mostrar que a terra gira, e não os Céus, o Firmamento, o Sol e a Lua. Mas a sacra escritura diz (Josué 10:13) que: **Josué ordenou ao sol que parasse e não a terra.**

Calvino: Citando o o primeiro verso do Salmo 93 – a terra também é estável não podendo mover-se! Quem se atreverá a colocar a autoridade de Copérnico acima do DES. Como se poderia descer aos infernos ou subir aos céus? **Como a terra seria um lugar de pecado se ela faz o mesmo movimento? A igreja católica foi lenta para entrar nessa discussão. Contudo, não podia ser menos cristã dos que os protestantes** (antes tarde do que nunca).

1616 – O livro foi proibido pelo Santo Ofício.

A MISTERIOSA LEI DE TITIUS - BODE

Johann Alert Bode (1747-1826)
Johann Daniel Titius (1729-1796)

Ressonância Mecânica do disco proto-planetário!?

Fórmula Empírica para as distâncias:

$$a = \frac{2^n x 3 + 4}{10}$$

$n = -\infty$ (Mercúrio)

$n = 0$ (Vênus) $n = 1$ (Terra) $n = 2$ (Marte)

$n = 3$? $n = 4$ (Júpiter) $n = 5$ (Saturno)

$n = 6$ (Urano) $n = 7$ (Plutão) NETUNO ?

TYCHO BRAHE (1546 – 1601)

1. Último Grande Astrônomo Observacional antes do Telescópio.
2. Fabricou seus próprios Instrumentos - Observatório na Ilha de Hven (Dinamarca)
3. Observacões Precisas de Planetas e 777 Estrelas (precisão de 4’)
4. Não Acreditava na Hipótese Heliocêntrica (Paralaxe!)
5. O sistema do Mundo deveria ser decidido pelas Observações! Espírito Científico
6. Em 1600, contratou o matemático Johannes Kepler para analisar seus dados (colhidos durante 20 anos)

Brahe e Kepler

Brahe morreu em 1601, logo após contratar Johannes Kepler (1571-1630). Ele herdou o posto e os dados de Tycho. Kepler trabalhou durante 20 anos tentando ajustar o movimento dos planetas com as possíveis curvas.

Baseado no heliocentrismo, em sua intuição e após inúmeras tentativas, concluiu que os planetas seguiam órbitas elípticas em torno do Sol, satisfazendo as 3 Leis de Kepler!

Teve uma vida atribulada:

"Quando desaba a tempestade nada mais nobre senão colocar a âncora de nossos estudos no solo da eternidade" - Kepler

Dados de Tycho sobre Marte eram os mais abundantes e precisos (10 pontos).

Kepler tentou inutilmente ajustar um círculo. Mas o último ponto dava um erro de 8' de arco. Descartou essa possibilidade pois acreditava nos dados de Tycho.

Tentou uma curva oval e rapidamente descobriu que uma ELIPSE ajustava muito bem todos os dados.

A curva é parte das 3 leis de Kepler

Cônicas: Círculo, Elipse, Parábola e Hipérbole

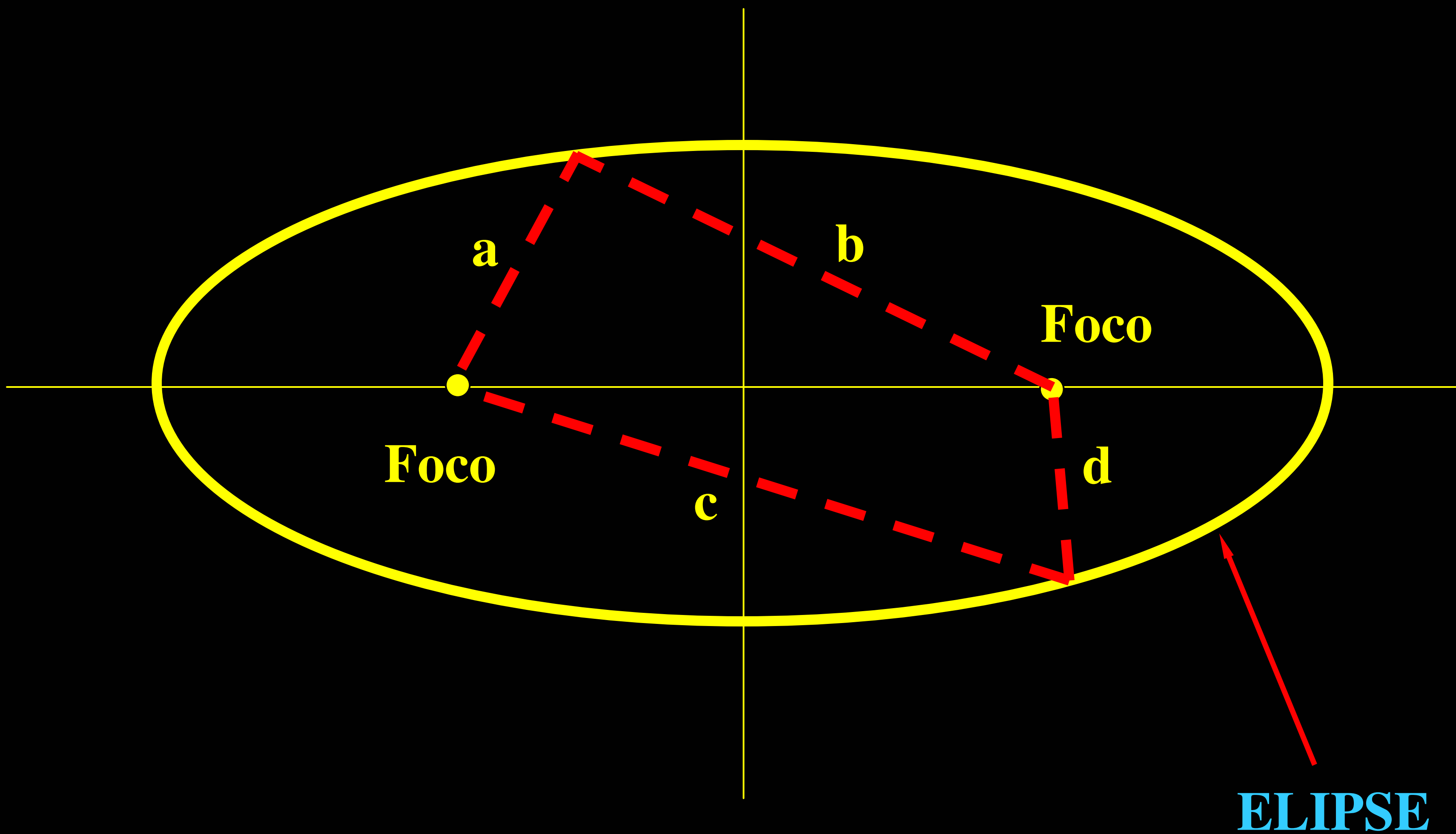
1.ª LEI DE KEPLER

(LEI DAS ÓRBITAS)

"As órbitas dos planetas no movimento de translação em torno do Sol são elipses com o Sol ocupando um dos focos"

Numa elipse existem dois focos. A soma das distâncias aos focos é constante em qualquer ponto da curva

$$a + b = c + d$$

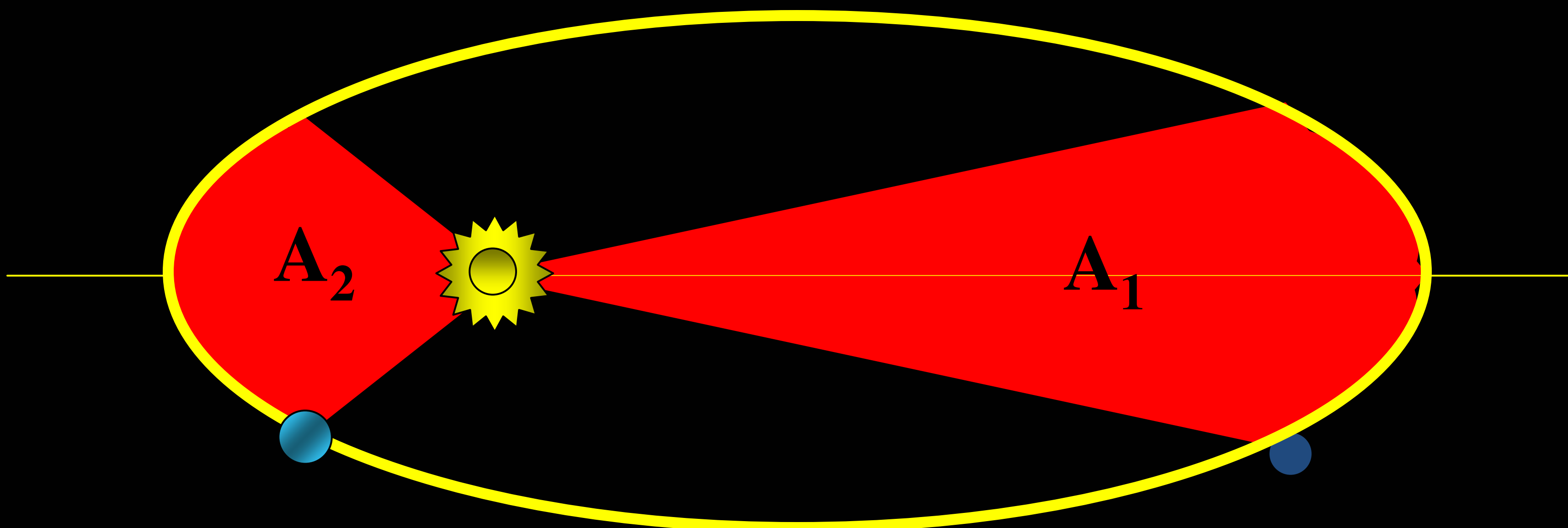


<u>2.ª LEI DE KEPLER</u>

(LEI DAS ÁREAS)

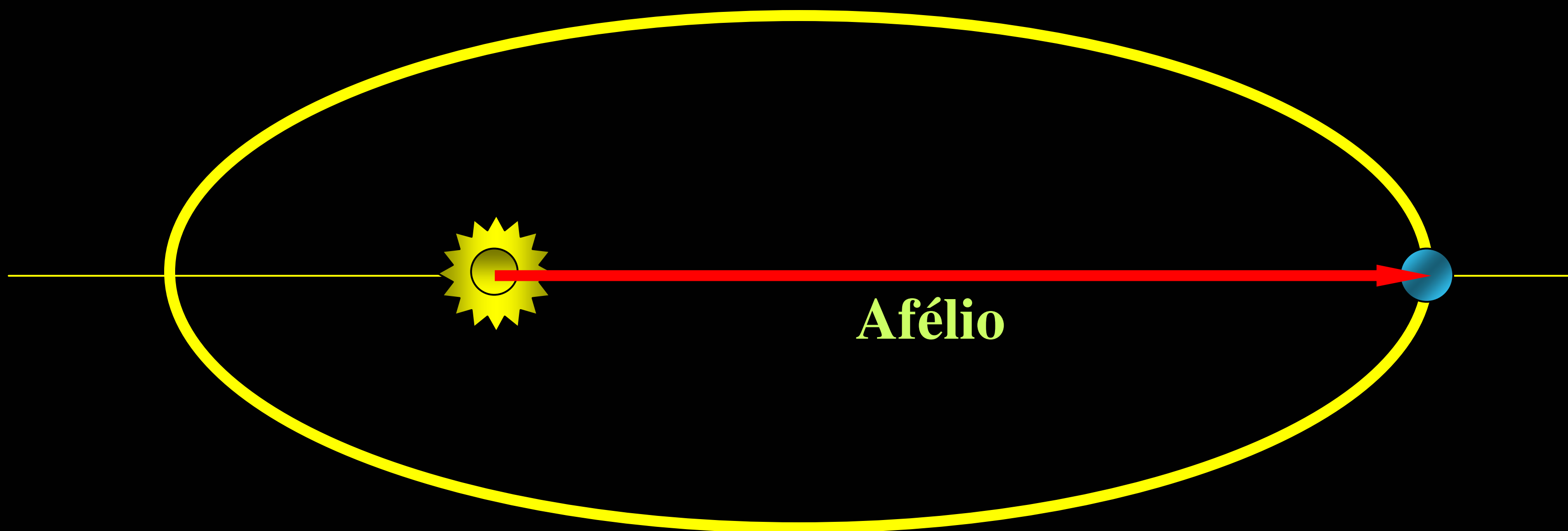
"A área descrita pelo raio vetor de um planeta (linha imaginária que liga o planeta ao Sol) é diretamente proporcional ao tempo gasto para descrevê-la."

Velocidade Areolar $\Rightarrow$ velocidade com que as áreas são descritas.

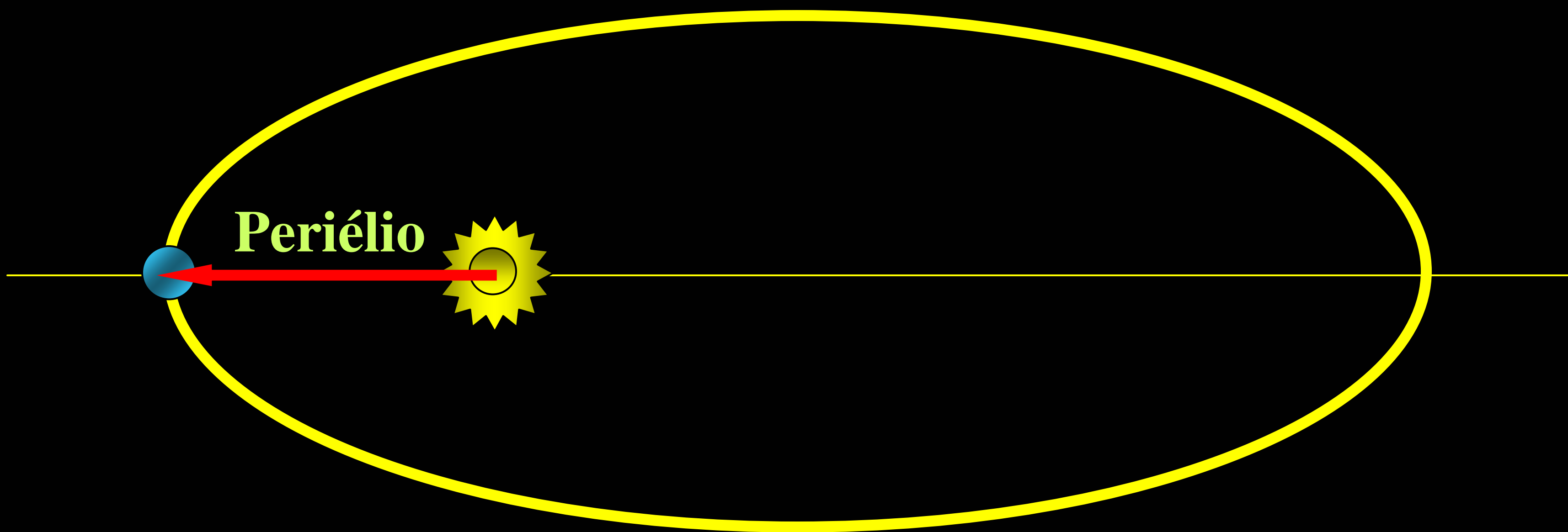


Cada planeta mantém sua velocidade areolar constante ao longo de sua órbita elíptica

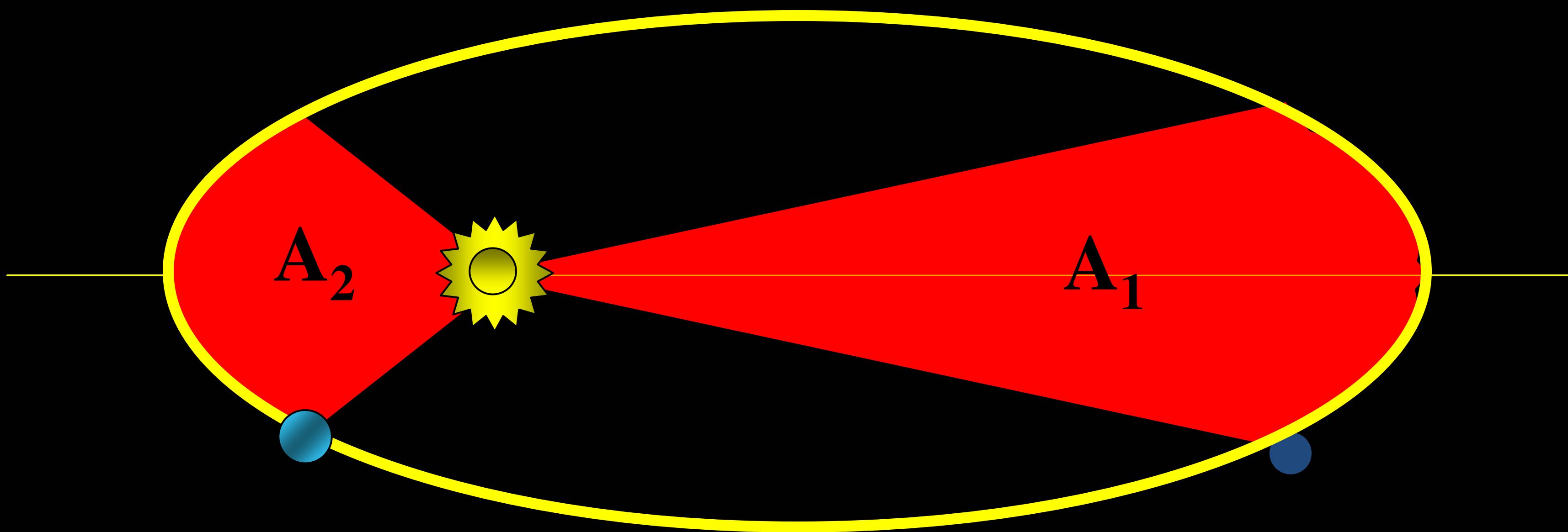
$$\frac{\Delta A_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta A_2}{\Delta t_2}$$



Afélio ⇒ ponto de maior afastamento entre o planeta e o Sol



Periélio ⇒ ponto de maior proximidade entre o planeta e o Sol



A velocidade no periélio é maior que no afélio.

Velocidade da terra no Afélio = 29,3 km/s

Velocidade da terra no Periélio = 30,2 km/s

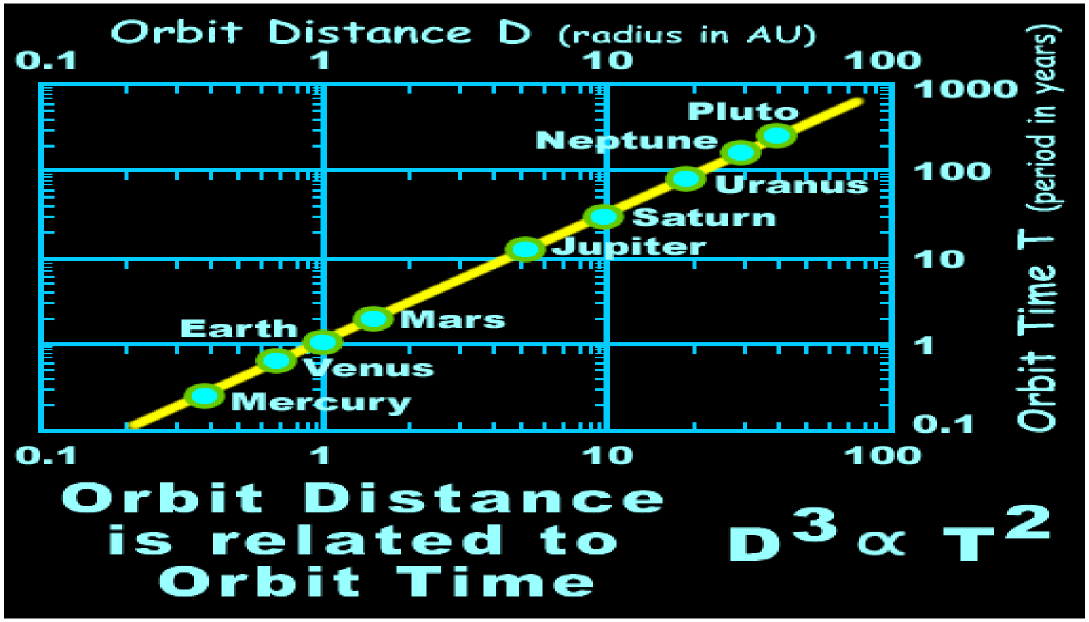
3.ª LEI DE KEPLER

(LEI DOS PERÍODOS)

"O quadrado do período da revolução de um planeta em torno do Sol é diretamente proporcional ao cubo do raio médio de sua elipse orbital."

Raio Médio $\Rightarrow$ média aritmética entre as distâncias máxima e mínima do planeta ao Sol.

$$\frac{T^2}{R^3} = K$$



Planeta	*T* (*dias terrestres*)	*R* (*km*)	T^2/R^3
Mercúrio	88	$5{,}8 \times 10^7$	$4{,}0 \times 10^{-20}$
Vênus	224,7	$1{,}08 \times 10^8$	
Terra	365,3	$1{,}5 \times 10^8$	
Marte	687	$2{,}3 \times 10^8$	
Júpiter	4343,5	$7{,}8 \times 10^8$	
Saturno	10767,5	$1{,}44 \times 10^9$	
Urano	30660	$2{,}9 \times 10^9$	
Netuno	60152	$4{,}5 \times 10^9$	
Plutão	90666	$6{,}0 \times 10^9$	

As Leis de Kepler dão uma visão cinemática do sistema planetário.

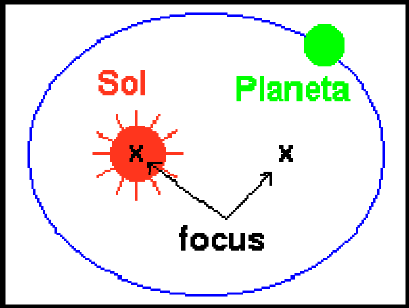
Do ponto de vista dinâmico, *que tipo de força o Sol exerce sobre os planetas, obrigando-os a se moverem de acordo com as leis que Kepler descobrira?*

A resposta foi dada por Isaac Newton (1642-1727):

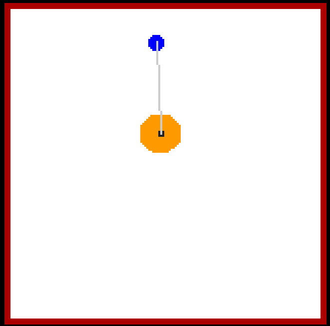
FORÇA GRAVITACIONAL (Principia -1687)

FALTAVA A DEFESA DA COSMOLOGIA COPERNICANA (Galileo)

LEIS de KEPLER

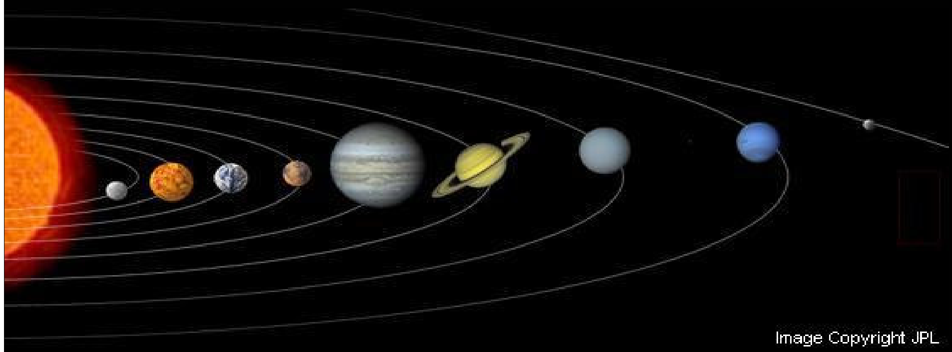


1º Lei: Órbita Elíptica com o sol num dos focos



2º Lei: Lei das áreas

$$\frac{dA}{dt} = \text{constante}$$



3º Lei:

$$P \propto a^{3/2} \quad \Rightarrow \quad P^2 = ka^3$$

Galileo (1564-1642)

Desafios de Galileu

1 – Libertar-se do princípio de autoridade, representado de um lado, pelas escrituras, Igreja, etc; e por outro lado, pela tradição aristotélica.

(Método Científico)?

2 – Elaborar novas premissas que tornassem possível uma nova cosmologia → Derrubada das premissas aristotélicas.

3 – Construir uma mecânica e uma gravitação compatível com o heliocentrismo e particularmente com o movimento diurno da Terra.

Esta última tarefa foi totalmente cumprida por Newton.

Galileu: Principais Contribuições

1 – Via Láctea é constituída por uma infinidade de estrelas.

2 – Em 1610 Descobriu 4 satélites em Júpiter, com períodos entre 2 e 17 dias: Io, Europa, Ganimedes e Calisto (Satélites Galileanos). Hoje sabemos que Júpiter tem 39 satélites.

Descoberta importante para mostrar que a Terra não era o centro do universo.

3 – Fases de Vênus – não eram previstas pelo Geocentrismo!

4 – Relevo da Lua – Manchas Solares
Os corpos celestes não são esferas perfeitas....

Livros:

1. **O mensageiro das Estrelas (1610)–Siderius Nuncius**
2. **Diálogos sobre os 2 sistemas de Mundo (1632)**

Obs: Somente em 1822 as obras de Copérnico, Kepler e Galileu foram liberadas pelo "Santo Ofício".

Newton (1643 – 1727)

A explicação do Movimento Planetário e das Leis de Kepler

Livro: Mathematical Principles of Natural Science (Principia) - 1687

- **Leis da Mecânica**
- **Gravitação Universal**
- **Movimento dos Planetas e Cometas**
- **Leis de Kepler (K)**
- **Marés**
- **Cálculo Diferencial e Integral**
- **Unificou a Física (Celeste e Terrestre)**
- **Cosmologia Newtoniana**
- **Física e Geometria**
- **Origem das Forças de Inércia (Forças Fictícias)**

Mecânica: 3 Leis de Newton

1) Lei da Inércia e sua medida:

Referencial Inercial

"Na ausência de forças externas um corpo permanece em repouso ou se desloca em movimento retilíneo e uniforme."

A massa m é uma medida da inércia de um corpo. O momento

$$\vec{p} = m\vec{v} \equiv cte \qquad \textbf{se} \qquad \vec{F} = 0$$

Lei de Inércia X Referencial Absoluto!

2) Dinâmica: A Lei de Força (referenciais inerciais)

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

m=cte

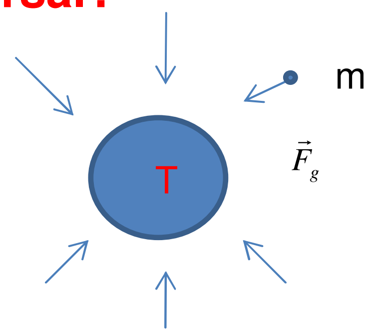
$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \qquad \vec{a} \,//\, \vec{F}$$

Terceira Lei: A toda Ação corresponde uma Reação igual e contrária (mesma direção)

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

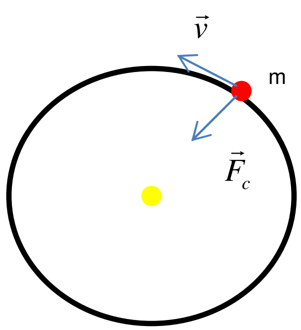
(Eletromagnetismo?)

Como Newton Descobriu a Gravitação Universal?



A Terra (Sol) exercem uma força sobre os objetos nas suas proximidades. Newton supôs que essa era a mesma força que fazia uma maçã cair ou mantinha um planeta em órbita com velocidade $\vec{v}$ constante:

$$\boxed{F_c = \frac{mv^2}{r}}$$



Questão: Qual a dependência radial da força gravitacional?

Leis de Kepler!

$$\boxed{F_c = \frac{mv^2}{r}}$$

v = ? se $P^2 = kr^3$ (terceira Lei de Kepler)

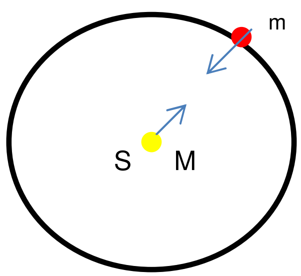
$$P = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow v = \frac{2\pi r}{P} = \frac{2\pi r}{\sqrt{kr^3}}$$

$$v^2 = \frac{4\pi r^2}{kr^3} = \frac{4\pi^2}{r} \Rightarrow \boxed{F_c = \frac{m v^2}{r} = F_{S-P} \propto \frac{m}{r^2}}$$

Pela Terceira Lei de Newton:

$$F_{S\to P} = F_{P\to S}$$

$$F_{P\to S} \propto \frac{M}{r^2}$$



Constante de Newton

$$\Rightarrow F_G \propto \frac{Mm}{r^2} \Rightarrow F_G = \frac{GMm}{r^2}$$

GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

"Dois pontos materiais se atraem mutuamente com forças que têm a direção da reta que os une e cujas intensidades são diretamente proporcionais ao produto de suas massas e inversamente proporcionais ao quadrado da distância que os separa."

Ainda de acordo com as Leis da Gravitação Universal:

Devido a sua enorme massa, o Sol tende a atrair os planetas em sua direção

Quanto mais próximo do Sol, maior a velocidade do planeta para que possa escapar do campo de atração gravitacional do Sol

A densidade de um planeta influencia na sua velocidade de rotação

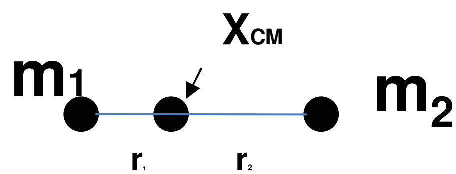
(quanto mais denso, mais lento)

Formação do Sistema Planetário ?

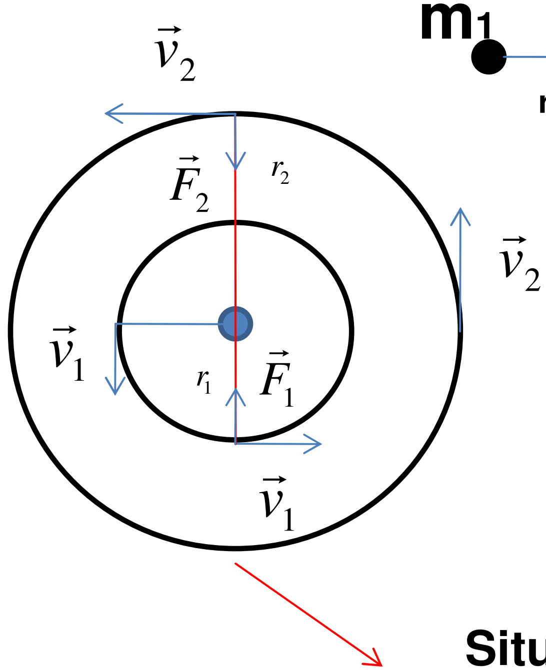
Derivação Elementar da Constante de Kepler

$$P^2 = kr^3$$

Qual a expressão de K considerando a Gravitação Universal?



$$\dot{X}_{CM} = 0$$



$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{(r_1 + r_2)^2}$$

$$F_1 = \frac{mv_1^2}{r_1}$$

$$F_2 = \frac{mv_2^2}{r_2}$$

Situação Especial
(órbita circular)

O conhecimento do Período **P** implica nas velocidades:

$$\mathbf{v_1} = \frac{2\pi\,\mathbf{r_1}}{\mathbf{P}} \Rightarrow \mathbf{v_1^2} = \frac{4\pi\,\mathbf{r_1^2}}{\mathbf{P^2}}$$

1) $$\frac{G\cancel{m_1}m_2}{(r_1+r_2)^2} = \frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2 \cancel{m_1} r_1}{P^2}$$

2) $$\frac{Gm_1\cancel{m_2}}{(r_1+r_2)^2} = \frac{m_2 v_2^2}{r_2} = \frac{4\pi^2 \cancel{m_2} r_2}{P^2}$$

1+2 ⇒ $$\frac{G(m_1+m_2)}{(r_1+r_2)^2} = \frac{4\pi^2(r_1+r_2)}{P^2}$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}(r_1+r_2)^3$$

Comparando com a 3a Lei de Kepler: $P^2 = ka^3$

$$\boxed{k = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}}$$

k é constante, se e somente se a soma das massas para cada par (Sol e planeta) fosse a mesma. Isso de fato não acontece!

No caso do Sol: $$k_{sol} = \frac{4\pi^2}{G(M_{sol} + m_p)}$$

$$m_p << M_{sol} \quad \Rightarrow \quad k_{sol} = \frac{4\pi^2}{GM_{sol}} = cte$$

Júpiter/Satélite: $$k_J = \frac{4\pi^2}{G(M_J + m_s)} \quad \mathbf{m_s << M_J} \quad k_J = \frac{4\pi^2}{GM_J}$$

Em geral teremos: $$\mathbf{k_{sol}(M_{sol} + m_p) = k_J(m_J + m_s) = k_T(m_T + m_L)...}$$

pois a razão: $$\boxed{\frac{4\pi^2}{G} = k(m_1 + m_2) \equiv cte}$$

Determinação das Massas

Podemos escrever a Terceira Lei de Kepler na forma: $P^2 = ka^3$, ou ainda:

$$\boxed{(M + m) = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{P^2}}$$

Medindo-se **a** e **P** para um dado corpo podemos calcular M+m. Se m<<M teremos com muito boa aproximação a massa do corpo central. Para o Sol:

Ex:

$$M_{sol} = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{P^2}$$

No caso de estrelas binárias com massas equivalentes: M $\cong$ m

$$M = \frac{2\pi^2}{G}\frac{a^3}{P^2}$$

Obs: Se soubermos as massas e valor de a podemos estimar o período de revolução!

Questão: É possível estimar massas de estrelas sem o conhecimento da dinâmica de outro corpo nas proximidades?

Ex: Marte tem 2 satélites. Deimos (o menor) tem período de 1.262 dias, com distância média a Marte de **23.500 km**. Qual a massa de Marte?

a) $$k = \frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

$$M_m + m_D = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a_D^3}{P_D^2} \approx M_m$$

MKS $G = 6.67 \times 10^{-11}$ (Nm²/kg² ou m³/kgs²)

CGS $G = 6.67 \times 10^{-8}$ cm³/gs²

$$\mathbf{M_{marte} = 5.9 \times 10^{23}\,kg \approx 0.1 M_{Terra}}$$

b) Mais diretamente (em massas da Terra)

$$\mathbf{k_{Ma}M_{Ma} = k_T M_T}$$

$$M_T = M_{Terra}$$

$$\frac{a_D^3}{P_D^2} M_{Ma} = \frac{a_L^3}{P_L^2} M_{Terra}$$

$$M_{Ma} = \left(\frac{a_L}{a_D}\right)^3 \left(\frac{P_D}{P_L}\right)^2 M_{Terra}$$

$$\frac{M_{Ma}}{M_{Terra}} = \left(\frac{1.262}{27.32}\right)^2 \left(\frac{384000}{23500}\right)^3 \cong 0.1$$

$$M_{Ma} \cong 0.1 M_{Terra}$$

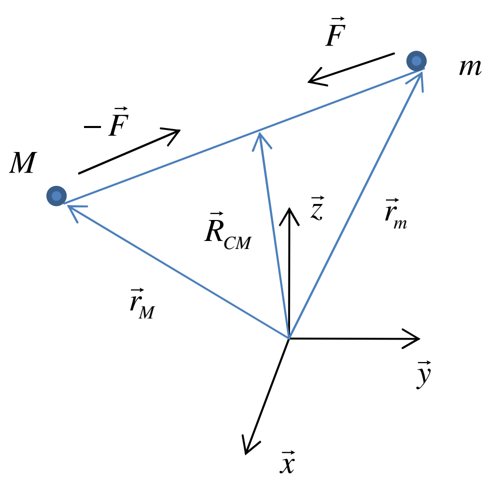
Gravitação Newtoniana e as Leis de Kepler

O Problema de Dois Corpos

Vamos considerar 2 massas M e m que interagem através de uma força central (gravitacional)

$$\vec{r} = \vec{r}_M - \vec{r}_m \qquad m\ddot{\vec{r}}_m = \frac{GMm}{r^2}\hat{r} \qquad M\ddot{\vec{r}}_M = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

$$\Rightarrow M\ddot{\vec{r}}_M + m\ddot{\vec{r}}_m = 0 \qquad \vec{F}_{ext} = 0$$



Por definição de centro de massa:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{M\vec{r}_M + m\vec{r}_m}{M+m}$$

O que ocorre com o centro de massa do sistema?

Note que: $$M\,\ddot{\vec{r}}_M + m\,\ddot{\vec{r}}_m = 0 \Rightarrow M\,\dot{\vec{r}}_M + m\,\dot{\vec{r}}_m = cte$$

O momento total do sistema é conservado

Não existem forças externas aos dois corpos! Pela definição de centro de massa:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i m_i\,\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = \frac{M\dfrac{d\vec{r}_M}{dt} + m\dfrac{d\vec{r}_m}{dt}}{M+m}$$

$$\frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = cte \Rightarrow$$

O centro de massa move-se com velocidade constante

Obs: Se a velocidade do centro de massa é constante, podemos tomá-la como sendo zero por uma escolha apropriada de Sistema de Referência.

Vamos reescrever as equações de movimento numa forma mais conveniente:

$$\ddot{\vec{r}}_m = +\frac{GM}{r^2}\hat{r} \qquad \ddot{\vec{r}}_M = -\frac{Gm}{r^2}\hat{r}$$

Fazendo a diferença (raio vetor relativo): $\vec{r} = \vec{r}_M - \vec{r}_m$

$$\ddot{\vec{r}}_M - \ddot{\vec{r}}_m = -G\frac{M+m}{r^2}\hat{r} \quad \text{ou,} \quad \boxed{\ddot{\vec{r}} = -G\frac{M+m}{r^2}\hat{r}}$$

Observe bem a equação de movimento para o raio vetor relativo $\vec{r}$

Se definirmos (seguindo a notação do livro de Kepler/):

$$\boxed{\mu = (M+m)G \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r}}$$

Problema de um corpo $\vec{r} = \vec{r}(t)$

A solução dessa equação governa a órbita relativa dos corpos (planeta, cometa, satélite, etc).

Em princípio são 3 equações (2ª ordem) diferenciais acopladas

$$\vec{r} \equiv \left(\vec{x}(t), \vec{y}(t), \vec{z}(t)\right)$$

A solução em geral é trabalhosa!

6 condições iniciais: $\left(x_0, y_0, z_0\right), \left(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\right)$ **3 corpos?!**

A derivação das leis de Kepler é simplificada se procurarrmos estabelecer as quantidades conservadas: **Momento Angular e a Energia total do movimento**

(i) Conservação do Momento Angular

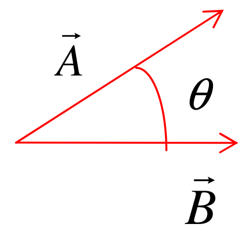
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ (Momento Angular) $\vec{\tau}_{ext} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ (Torque Externo)

Como as forças externas são nulas no movimento de dois corpos sob uma força central, não existe torque externo e portanto o momento angular é conservado.

Tal resultado também segue da equação de movimento!

$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0$ Multiplicando vetorialmente por $\vec{r}$ temos:

$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} \times \vec{r} = 0$ Mas $\vec{r} \times \vec{r} = 0$ pois $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = ABsen\theta$



Portanto: $\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$

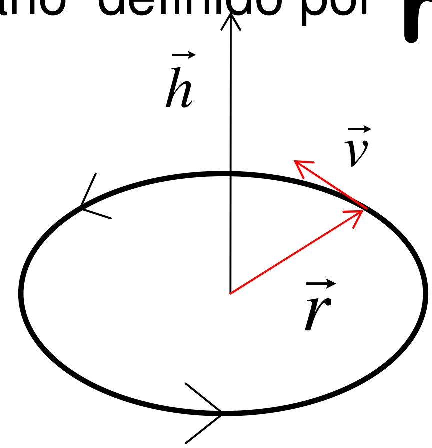
$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) = 0$$

$\boxed{\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h} = cte}$

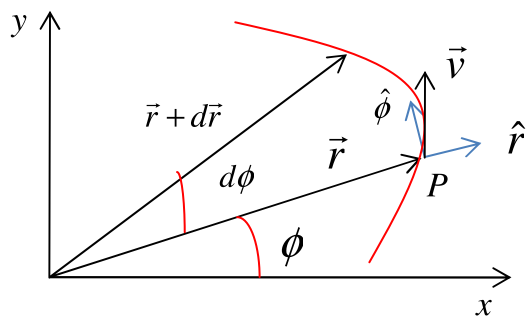
$\vec{h} \equiv$ É o momento angular por unidade de massa

$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m\vec{h}$

Obs: O vetor $\vec{h}$ é sempre perpendicular ao movimento (pois é ortogonal ao plano definido por $\vec{\mathbf{r}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$!)



O movimento sob ação de uma força central é **planar**! A partir da conservação de $\vec{h}$ é fácil obter a Lei das Áreas (2ª Lei de Kepler). Como o movimento é planar, podemos utilizar coordenadas polares (r,φ) para o movimento relativo:



$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$$

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\phi \hat{\phi} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\phi}\,\hat{\phi}$$

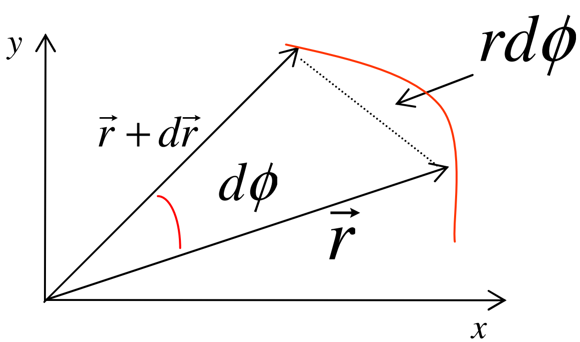
$$\begin{cases} v_\phi = \dfrac{\overbrace{\Delta L_\phi}^{\text{deslocamento}}}{\Delta t} \\ v_\phi = r\,\dfrac{d\phi}{\Delta t} \\ v_\phi = r\dot{\phi} \\ v_r = \dot{r} \end{cases}$$

$$\vec{\mathbf{h}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{r}} \times \left(\dot{\mathbf{r}}\,\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{r}\dot{\phi}\,\hat{\phi} \right) = \mathbf{r}^2 \dot{\phi} \left(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\phi} \right) = \mathbf{r}^2\, \dot{\phi}\, \hat{\mathbf{z}}$$

Portanto, o módulo de $\vec{h}$ é:

$$|\vec{\mathbf{h}}| = \mathbf{h} = \mathbf{r}^2\, \dot{\phi} = \mathbf{const.}$$

Como h está relacionado com a Área varrida pelo raio vetor?



$$dA = \frac{1}{2}\, base\ x\ altura$$

(Triângulo elementar)

$$\begin{cases} \text{base: } \boldsymbol{r} \\ \text{altura: } rd\phi \end{cases}$$

$$\boxed{dA = \frac{1}{2} r^2 d\phi \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt}}$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\mathbf{r}^2\dot{\phi} = \frac{\mathbf{h}}{2} = \mathbf{const.}$$

$$\dot{A} \equiv \frac{dA}{dt}\left(velocidade\ Areal\right)$$

A área varrida pelo raio vetor é constante !

$$\frac{dA}{dt} = const. \Leftrightarrow h = const.$$

Portanto, é a conservação do momentum Angular que explica a lei das áreas (2ª lei de Kepler)

(ii) Conservação da Energia Total

Equação de Movimento: $$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} + \frac{\mu \vec{\mathbf{r}}}{\mathbf{r}^3} = 0$$

A equação acima significa que $\ddot{\vec{r}} // \vec{r}$ **(sentido oposto)**

Multiplicando a EM escalarmente por $\dot{\vec{\mathbf{r}}}$ **temos:** $$\dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \ddot{\vec{\mathbf{r}}} + \frac{\mu}{\mathbf{r}^3} \dot{\vec{\mathbf{r}}} \cdot \vec{\mathbf{r}} = 0$$

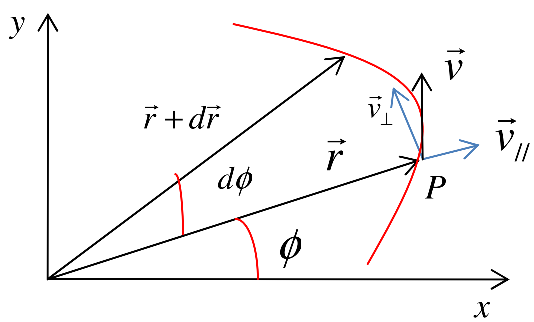
Note que: $$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$ onde: $v = \dot{\vec{r}}$

Portanto, a equação de movimento pode ser escrita como:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) + \frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \cdot \vec{v}) = 0}$$

Qual é o vetor velocidade?

Em coordenadas polares (r,φ) temos:



$$\vec{v} = \vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\phi}\,\hat{\phi}}$$

$$\vec{r}\cdot\vec{v} = r\hat{r}\cdot\left(\dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\phi}\,\hat{\phi}\right) = r\,\dot{r}$$

$$\left|\vec{v}_{\parallel}\right| = \dot{r} \qquad \vec{v}_{\parallel} = \dot{r}\hat{r}$$

$$\left|\vec{v}_{\perp}\right| = \frac{dl_1}{dt} = r\frac{d\phi}{dt} = r\dot{\phi} \qquad \vec{v}_{\perp} = r\dot{\phi}\hat{\varphi}$$

Logo, a equação de movimento fica:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right) + \frac{\mu\,\dot{\mathbf{r}}}{\mathbf{r}^2} = 0$$

c.q.d.

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)+\frac{\mu\,\dot{\mathbf{r}}}{\mathbf{r}^2}=0$$

Por outro lado

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right)=-\frac{\mu}{r^2}\dot{r}$$

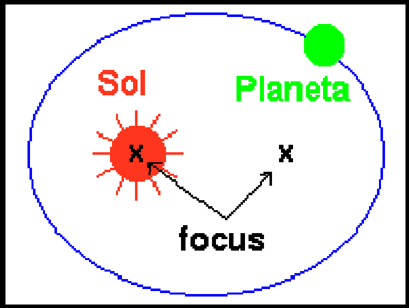
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2-\frac{\mu}{r}\right)=0$$

portanto

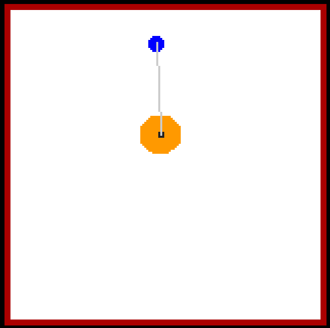
$$\frac{1}{2}\mathbf{v}^2-\frac{\mu}{\mathbf{r}}=\mathbf{const.}=\varepsilon\,\mathbf{(energia)}$$

Como veremos **ε** depende do tipo de trajetória. É possível deduzir que **ε** depende da excentricidade **(e)** , momento angular **(h)** e de **(μ)!**

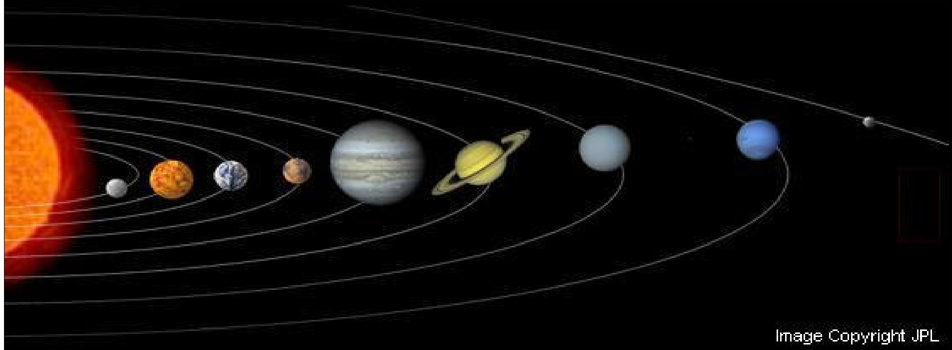
LEIS de KEPLER



1º Lei: Órbita Elíptica com o sol num dos focos

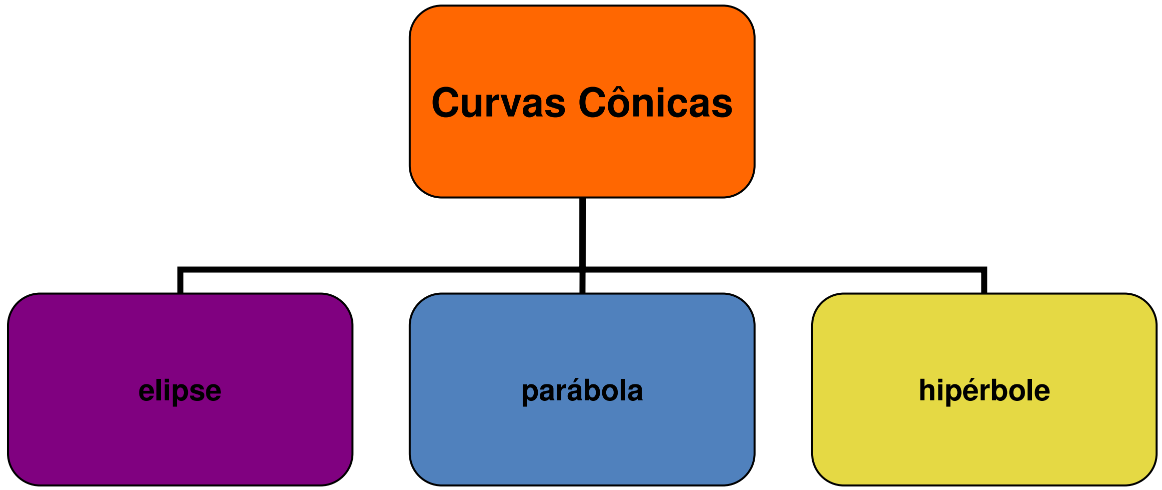


2º Lei: Lei das áreas $\boxed{\frac{dA}{dt} = \text{constante}}$



3º Lei:

$$P \propto a^{3/2} \quad \Rightarrow \quad P^2 = ka^3$$



Quais as quantidades físicas que decidem o tipo de cônica ?

Qual o valor de *e* ?

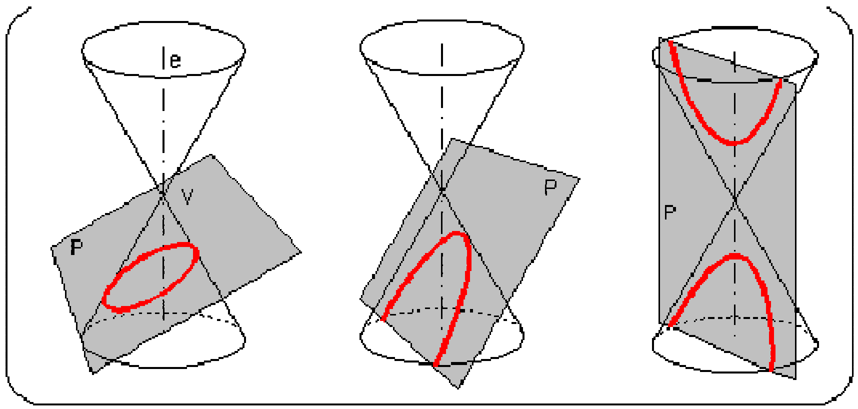
(Em termos das grandezas fisicamente relevantes)

$$\boxed{\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{h}, \varepsilon)} \quad ?$$

Em outras palavras: Qual a previsão da teoria de Newton?

As cônicas são definidas por sua excentricidade

$$e \quad \equiv \quad excentricidade$$



$e = 0$ **Círculo**

$0 < e < 1$ **Elipse**

$e = 1$ **Parábola**

$e > 1$ **Hipérbole**

Em função das quantidades físicas:

$$e^2 - 1 = \frac{2h^2}{\mu^2}\varepsilon \therefore e = \sqrt{1 + \frac{2h^2}{\mu^2}\varepsilon}$$

Esta relação entre a excentricidade e a energia define o tipo de cônica

$$e = 0 \Leftrightarrow \varepsilon = -\frac{\mu^2}{2h^2}$$ **Círculo**

$$0 < e < 1 \Leftrightarrow -\frac{\mu^2}{2h^2} < \varepsilon < 0$$ **Elipse**

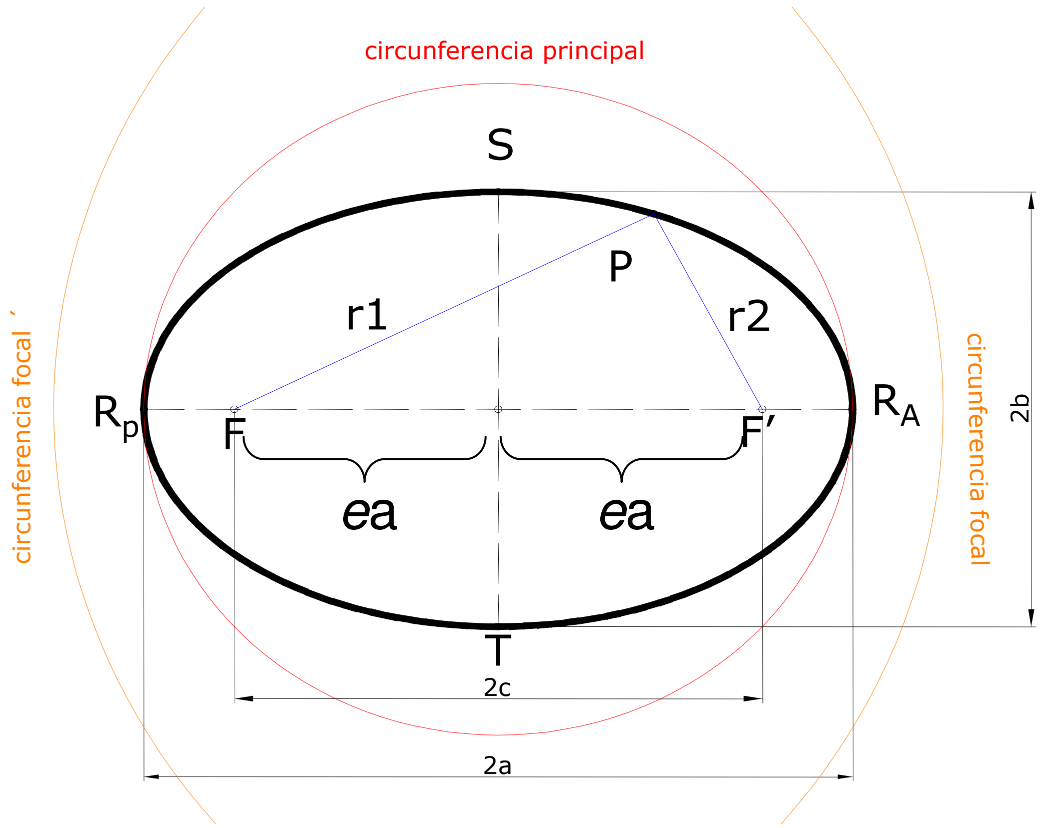
$$e = 1 \Leftrightarrow \varepsilon = 0$$ **Parábola**

$$e > 1 \Leftrightarrow \varepsilon > 0$$ **Hipérbole**

Portanto, o tratamento Newtoniano vai muito além das leis de Kepler, ou órbitas elípticas, pois também explica o movimento de cometas e satélites ou **asteróides**!

Elipse

A ***Elipse*** é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a condição de que a soma das distâncias a outros pontos fixos F e F', chamados focos, é constante e igual a 2a, sendo 2a a longitude do eixo maior R_pR_A da elipse.



Quanto maior a distância FF' maior é a excentricidade *e* da Elipse

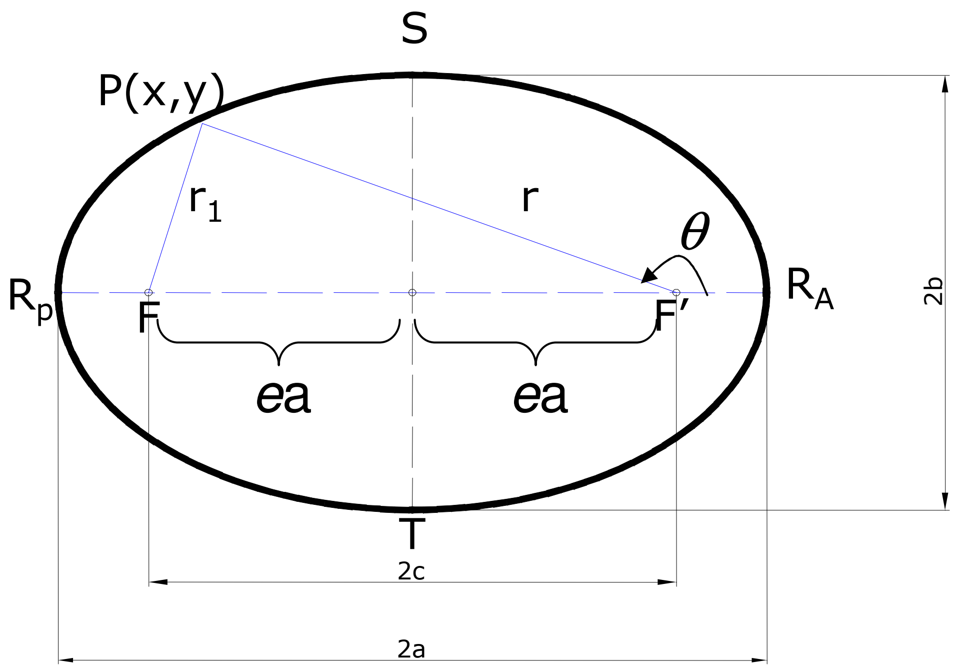
$$a^2 + (ea)^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad (ea)^2 = b^2 - a^2$$

$$e^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2} \Rightarrow e = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}} \qquad e = 0 \text{ (círculo)}$$

Distância do Periélio: $R_p = a - ea = a(1 - e)$

Distância do Afélio: $R_A = a + ea = a(1 + e)$

Equação da elipse (coordenadas polares): Uma elipse é por definição um conjunto de pontos equidistantes de dois focos separados por **2ae**, onde a é o semi-eixo maior e e a excentricidade.



Seja um ponto P(r,θ) ou P(x,y) sobre a elipse.

Pela lei dos cossenos:

$$\mathbf{r_1^2 = r^2 + (2ae)^2 - 2r(2ae)\cos\theta}$$

Por definição de elipse,

$$r + r_1 \equiv 2a \quad \Rightarrow \quad r_1 \equiv 2a - r$$

$$(2a - r)^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4rae\cos\theta$$

$$4a^2 + \cancel{r^2} - 4ar = \cancel{r^2} + 4a^2e^2 + 4rae\cos\theta$$

$$\mathbf{a^2(1 - e^2) = ar(1 + e\cos\theta)} \Rightarrow \boxed{\mathbf{r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}}}$$

Equação da Elipse

O que fez Newton?

$$\boxed{r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}}$$

Utilizando as equações de movimento mostrou que:

1)
$$\boxed{r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e\cos\theta}}$$

E portanto:

$$\boxed{\frac{h^2}{\mu} = a(1-e^2)}$$

2) No caso geral

$$\boxed{e = \sqrt{1 + \frac{2h^2}{\mu^2}\varepsilon}}$$

Terceira Lei de Kepler: Lei Harmônica

(Prova Geral)

A áera da Elipse é dada por: $A = \pi ab$

A = área, *a* = semi-eixo maior e *b* = semi-eixo menor $b = a(1-e^2)^{1/2}$

Da lei das áreas (constância do MA) temos: $dA = \frac{h}{2}dt$

Integrando-se sobre um período - P : $\pi ab = \frac{h}{2}P$ **(1)**

Substituindo-se **b** acima (da relação com a excentricidade)

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}(1-\mathbf{e}^2)^{1/2} = \left(\frac{\mathbf{ah}^2}{\mu}\right)^{1/2}$$

Elevando-se **(1)** ao quadrado e substituindo o valor de **b** acima :

$$\pi^2 a^2 \frac{a}{\mu} h^2 = \frac{h^2}{4} P^2 \quad \Rightarrow \quad P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu}$$

Substituindo **μ** temos a lei de Kepler:

$$\boxed{P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} a^3}$$

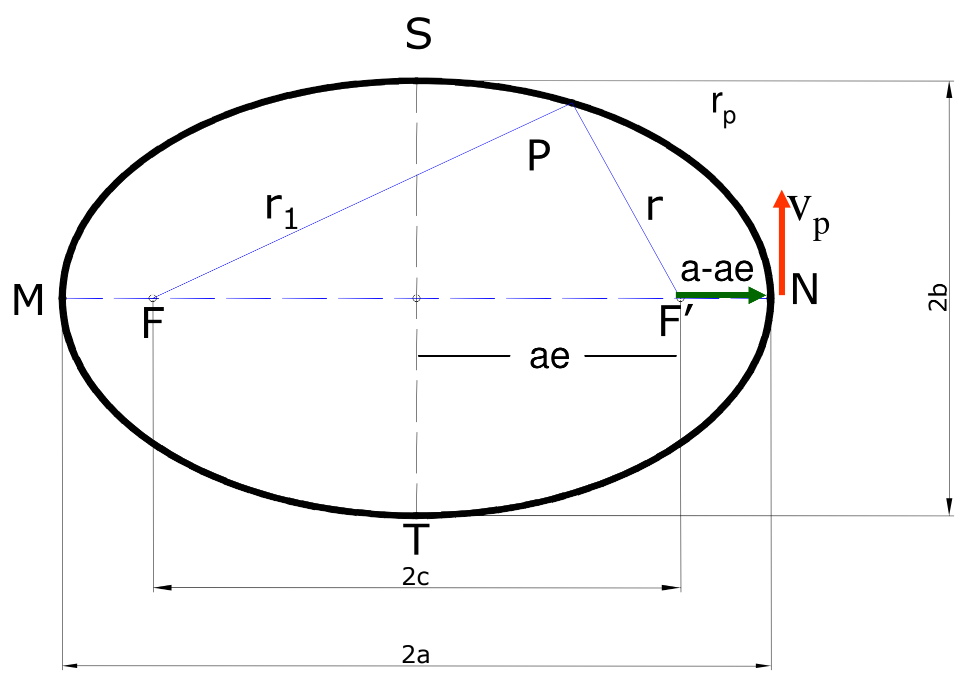
A "constante" de Kepler depende, portanto, da soma das massas dos corpos. No caso dos planetas do sistema solar, que orbitam o Sol, essa soma é praticamente igual à massa do Sol e, portanto aproximadamente constante.

Equação da Energia: Aplicações
Determinação da constante

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{R} \equiv \text{const.}$$

Como a energia é constante, podemos calcular o seu valor em qualquer ponto da órbita. Por exemplo, podemos calcular o seu valor (e o do momento angular) no periélio.

$$\begin{cases} r_p = a(1-e) \\ h = r_p v_p \end{cases}$$



$$\varepsilon_p = \frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu}{r_p}$$

$$v_p^2 = \frac{h^2}{r_p^2}$$

$$\varepsilon = \frac{h^2}{2r_p^2} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{1}{r_p}\left[\frac{h^2}{2r_p} - \mu\right]$$

mas $$\mathbf{h^2 = \mu a(1 - e^2)}$$ ⇨ **Substituindo *h* e *r*$_p$:**

$$\boxed{r_p = a(1-e)}$$

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\mu\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right]}$$

Da qual podemos calcular a velocidade relativa em qualquer posição!

Aplicações:

$$v = \sqrt{\mu\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right]}$$

1. Órbitas circulares:

Nas órbitas circulares ***r ≡ a:***

$$v_{cir} = \sqrt{\mu\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right]} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2r} = -\frac{G(m+M)}{2r} = -\frac{G(M+m)}{2r} < 0$$

2. Velocidade de Escape: Vesc

Velocidade mínima para que o corpo escape da atração gravitacional do sistema: **quando v= Vesc, o corpo chegará no infinito com** ***v = 0*** **(ou seja, em** ***r = ∞, v*** $_{\infty}$ ***= 0 teremos ε = 0*****)**

Pois (nesse caso limite) as energias potenciais e cinéticas serão nulas no infinito!

$$\varepsilon = \frac{v_{esc}^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{r}} \equiv 2v_{cir}$$

Qual a velocidade necessária para um satélite artificial escapar do campo gravitacional terrestre?

$$M_{\oplus} >> m_s \quad \Rightarrow \quad v^{\oplus}{}_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} \equiv 11{,}2\ km/s$$

3) Qual a velocidade de um satélite da Terra em órbita circular a 300km de altura ?

$$v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \qquad a = r$$

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \qquad \therefore \qquad r = 300km + R_T$$

$$r = (300 + 6370)km$$

$$r = 6670km$$

$$\mu = G(M_T + m_S) \cong GM_T \qquad v_{cir} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} \equiv 7{,}5\ km/s$$

Qual o período orbital ?

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_T + m_s)} a^3 = 90 \min$$

Suponha que nem a luz escape de uma corpo de Massa M! O que teremos ?

O que ocorre quando a velocidade de escape é igual a velocidade da luz? ***v = c***

Como nenhuma partícula (pela teoria da relatividade especial) pode se deslocar com v > c, o corpo não poderá ser visto!

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \equiv c$$

Qual seria o raio do corpo para o qual $v_{esc} = c$?

$$\sqrt{\frac{2GM}{R_g}} = c \quad \Rightarrow \quad \frac{2GM}{R_g} = c^2$$

$$R_g = \frac{2GM}{c^2} \quad \equiv$$

Raio de Schwarzchild ou

Raio gravitacional do corpo de massa M

Todo corpo de massa M tem um raio gravitacional

Buracos Negros

Se o raio do corpo é menor ou igual ao seu raio gravitacional dizemos que o corpo formou um buraco negro. Ou seja, para formar um buraco negro precisamos por toda a massa do corpo dentro do seu raio gravitacional.

$$R_g = \frac{2GM}{c^2}$$

Uma descrição consistente dos BN só é possível com a teoria de Einstein (Relatividade Geral). O valor de R_g define o chamado Horizonte do BN (Quem passar do horizonte não retorna). Matematicamente, o BN é uma singularidade no espaço – tempo.

SUPLEMENTO

Área da elipse: $A = \pi ab$

$$r = \frac{L}{1 + e\cos\theta} \Rightarrow L = a(1-e)$$

Semilatus rectum

Em coordenadas cartesianas:

$$r_1^2 = (x + ae)^2 + y^2 \qquad \text{(a)}$$

$$r^2 = (x - ae)^2 + y^2 \qquad \text{(b)}$$

Subtraindo (a)-(b) e usando $r = 2a - r_1$, *temos* $r_1 = a + ex$ (c)

Levando-se em conta que o semi-eixo menor é dado por $b^2 = a^2(1-e^2)$,o que pode ser facilmente derivado pelo teorema de Pitágoras colocando-se o ponto P(r,θ) em θ=90º, e substituindo-se (c) em (a), temos a equação de uma elipse em coordenadas cartesianas:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \Rightarrow x = a\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

A Área da elipse é dada por: $A = 4\int_0^b dy \int_0^x dx \Rightarrow A = 4\int_0^b a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\,dy$

Substituindo-se $y = b\ sen\ z$, e $dy = b \cos z\, dz$ $\quad A = 4ab\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (sen\ z)^2}\,\cos z\, dz$

e, como $sen^2 z + cos^2 z = 1$, resulta: $A = 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 z\, dz$ como $\int_0^{\pi/2} \cos^2 z\, dz = \frac{\pi}{4}$

$$A = \pi ab$$

Primeira Lei: Lei das Órbitas

Considere a equação de movimento:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0 \qquad \mu = G(M + m)$$

Multiplicando vetorialmente pelo momento angular por unidade de massa temos:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} \times \vec{h} = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3}\vec{h} \times \vec{r}$$

(*)

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \qquad \vec{h} \times \vec{r} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \times \vec{r}$$

Mas:

$$\frac{\mu}{r^3}\left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) \times \vec{r} = \frac{\mu}{r}\dot{\vec{r}} - \frac{\mu}{r^3}\left(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}\right)\vec{r} \equiv \mu \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Note que:

Esse resultado segue da identidade vetorial (regra do termo médio):

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$$

Portanto, podemos escrever (*) como:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \mu \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Mas $\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}\right)$ pois $\vec{h}$ é um vetor constante! Logo:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}\right) = \mu \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)}$$

Integrando a equação acima temos:

$$\boxed{\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \mu \frac{\vec{r}}{r} + \vec{\beta}}$$

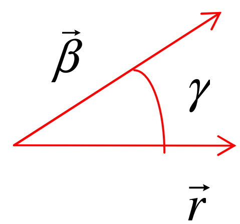
Como $\vec{h}$ é perpendicular ao plano da órbita $\Rightarrow \dot{\vec{r}} \times \vec{h}$ está no plano da órbita definido $\vec{r}$
por $\dot{\vec{r}}$ e $\vec{\beta}$ e, portanto, o mesmo ocorre com o vetor $\boxed{\vec{\beta} \cdot \vec{h} = 0}$

Temos apenas 6 constantes de movimento embora existam 7 “integrais” de movimento. 3 componentes de $\vec{h}$, a energia E, 3 componentes de $\vec{\beta}$, mais a relação

$$\vec{\beta}\cdot\vec{h}=0$$

Para encontrar a equação da trajetória vamos multiplicar o nosso resultado escalarmente por $\vec{r}$.

$$\vec{r}\cdot\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{h}\right)=\mu r+\beta r\cos\gamma$$



$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$

Usando a identidade vetorial

$$\vec{r}\cdot\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{h}\right)=\mu r+\vec{\beta}\cdot\vec{r}$$

Usando a identidade vetorial:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} \qquad\qquad \vec{r}\cdot\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{h}\right)=\mu r+\vec{\beta}\cdot\vec{r}$$

no lado direito temos:

$$\underbrace{\left(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\right)}_{\vec{h}}\cdot\vec{h}=\mu r+\vec{\beta}\cdot\vec{r}\equiv h^2$$

$$\Rightarrow h^2=\mu r+\beta r\cos\gamma=\mu r\left(1+\frac{\beta\cos\gamma}{\mu}\right)$$

$$\boxed{r=\frac{\dfrac{h^2}{\mu}}{1+\dfrac{\beta\cos\gamma}{\mu}}}$$

E comparando com a equação da cônica (ver página 14):

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta} \equiv \frac{L}{1+e\cos\theta}$$

$L = a\left(1-e^2\right) \equiv$ semi-latus rectum $\equiv r\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$

$$\boxed{L = \frac{h^2}{\mu}} \qquad \boxed{e = \frac{\beta}{\mu}} \qquad \boxed{\theta = \gamma}$$

$$r_+ = r(\theta = 0) \qquad r_- = r(\theta = \pi)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\frac{1}{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right)}$$

O que decide o tipo de cônica?

Pela definição do vetor $\vec{\beta}$

ENERGIA!

$$\vec{\beta} = \dot{\vec{r}} \times \vec{h} - \mu \frac{\vec{r}}{r}$$

é fácil mostrar (Kepler página 78) – Exercício

$$\beta^2 = h^2 v^2 + \mu^2 - 2\frac{\mu}{r} h^2 \equiv \mu^2 e^2 \quad \Longrightarrow \quad \mu^2 e^2 - \mu^2 = 2h^2 \left(\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} \right)$$

$$\mu^2 \left(e^2 - 1 \right) = 2h^2 \varepsilon$$

Resolvendo para a energia:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\mu^2}{2h^2} \left(e^2 - 1 \right)}$$

A excentricidade (e portanto o tipo de cônica traçada pelo corpo) depende da **energia** do sistema!