

Introdução à Astronomia¹

Nelson Vani Leister

Departamento de Astronomia

Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas - IAG

Universidade de São Paulo - USP



¹Apostila de Astronomia (versão#1 2020) - Parte #01

Sumário

1	Introdução	5
2	Organizando o Universo	13
2.1	Os caminhos para a compreensão	13
2.2	A astronomia na Mesopotâmia (As sementes da ciência.)	16
2.3	Período helenístico (Inovações gregas)	17
2.3.1	A Biblioteca de Alexandria	22
2.4	O empecilho paralático	23
2.5	A não uniformidade dos movimentos planetários.	27
2.6	Ptolomeu (O Almagesta)	29
2.7	Nicolau Copérnico (A época pós-Ptolomeu)	31
2.7.1	Uma biografia resumida.	33
2.8	As distâncias planetárias no modelo de <i>Copérnico</i>	34
2.9	Tycho Brahe (um astrônomo profissional)	37
2.10	Johannes Kepler (a harmonia das esferas)	38
2.10.1	As leis de Kepler	42
2.11	Exercícios	43
3	A visão do céu	45
3.1	O movimento aparente das estrelas	45
3.2	Exercícios	47
3.3	O movimento aparente do Sol	49
3.4	O movimento da Lua	51
3.5	Fases da Lua	51
3.6	Eclipse	53
3.6.1	Região de visibilidade de um eclipse.	55
3.6.2	Máxima duração de um eclipse.	55
3.7	Exercícios	56
4	A Esfera Celeste.	59
4.1	Sistema de Referência	60
4.1.1	Coordenadas polares de uma direção.	61
4.2	Sistema local de referência.	62
4.2.1	Coordenadas Horizontais	62
4.2.2	Coordenadas Horárias	63
4.3	Sistema de Referência sobre a esfera das fixas.	64

4.3.1	Coordenadas Equatoriais	64
4.3.2	Coordenadas Eclípticas	65
4.3.3	A direção dos eixos cartesianos.	66
4.3.4	Relação entre as coordenadas dos sistemas equatoriais e horárias.	66
4.3.5	Latitudes (ϕ) e Longitudes (λ) geográficas.	67
4.3.6	Relação entre dois sistemas de coordenadas locais.	69
4.4	Exercícios	70
5	Movimento aparente do Sol.	74
5.1	Movimento aparente do Sol em longitude eclíptica	74
5.1.1	As Estações do Ano	80
5.2	Movimento aparente do Sol em ascensão reta	82
5.2.1	A Equação do Tempo	83
5.2.2	Calendários (O Relógio Solar)	84
5.3	Exercícios	89
6	A nova ordem cósmica	94
6.1	Galileu Galilei: (O telescópio)	94
6.2	A Mecânica Newtoniana.	95
6.2.1	A Gravitação Universal.	96
6.2.2	Resultados da Lei de Newton aplicadas ao movimento planetário	98
6.3	Movimento de um corpo em um campo gravitacional.	100
6.4	Exercícios	104
7	A dinâmica da Terra	106
7.1	O tempo na Astronomia	106
7.1.1	O tempo sideral, o solar verdadeiro e médio	107
7.1.2	O tempo civil e o universal	109
7.2	Exercícios	109
7.3	Movimentos da Terra.	110
7.3.1	A rotação da Terra	110
7.3.2	A precessão.	116
7.3.3	A translação ao redor do Sol	117
7.3.4	Evidências da translação da Terra ao redor do Sol	118
7.3.5	A aberração do Sol.	119
7.3.6	Aberração das fixas	121
7.3.7	Aberração secular	121
7.3.8	Aberração anual da fixas	122
7.3.9	Aberração Diurna	124
7.3.10	Paralaxe	125
7.3.11	O Efeito Doppler e a medida da velocidade	129
7.4	Exercícios	131
7.5	As forças gravitacionais diferenciais	132
7.5.1	Movimento diurno (diário).	132
7.5.2	Variações da velocidade de rotação da Terra.	133
7.5.3	Os maremotos (<i>Tsunami</i>) e a rotação da Terra	134

7.5.4	O efeito de maré (<i>Albert A. Michelson</i>)	135
7.5.5	Sincronismo rotacional e a evolução do efeito de maré	136
7.5.6	O limite de Roche (<i>Edouard Roche</i>).	137
7.5.7	O movimento conjunto do sistema solar.	137
8	APÊNDICE	139
8.1	A visão do céu segundo um artista	139

Capítulo 1

Introdução

Há quatro mil anos, astrônomos babilônios já tinham conhecimentos suficientes para poderem prever os movimentos da Lua, das estrelas, dos planetas e do Sol no céu, podendo mesmo prognosticar os eclipses. Entretanto, foram os gregos os primeiros a construir um modelo cosmológico que interpretava esses movimentos. No século IV a.C., eles admitiam o conceito de que as estrelas eram fixas em uma esfera, a celeste, que girava em torno da Terra a cada 24 horas e, ainda, que os planetas, o Sol e a Lua se moviam no éter, região compreendida entre a Terra e as estrelas.

Esse modelo foi depois pormenorizado, dando origem, no século II d.C., ao famoso sistema de Ptolomeu, fundado em movimentos circulares, considerados perfeitos. Assim, as estrelas e os planetas foram supostos como se movendo em círculos, o que, na verdade, não ocorria. Para explicar os complicados movimentos dos planetas, que também pareciam dar volteios periodicamente, Ptolomeu criou a teoria dos epiciclos, em que, por intermédio da composição de círculos, era possível reproduzir os movimentos dos planetas ao redor da Terra, tida como fixa no centro do mundo.

Apesar dessa estrutura complicada, Ptolomeu concebeu um modelo tão próximo de reproduzir os movimentos reais dos planetas que, quando no século XVI Copérnico propôs seu sistema heliocêntrico, a precisão obtida para as posições dos astros com este novo modelo não se comparava à precisão daquele de Ptolomeu. Copérnico construiu um modelo em que a Terra e os demais planetas se moviam em órbitas circulares ao redor do Sol mas, ainda assim, as evidências observacionais favoreciam o sistema de Ptolomeu. Havia uma razão de ordem prática que contribuía para que os astrônomos rejeitassem o conceito de Copérnico, segundo o qual a Terra orbitava o Sol. Tycho Brahe, considerado o maior astrônomo do século XVI, entendia que se a Terra estivesse se movimentando ao redor do Sol, então as posições relativas das estrelas deveriam mudar quando vistas de pontos diferentes da órbita da Terra. Entretanto, não havia nenhuma evidência desse movimento aparente, denominado paralaxe heliocêntrica. A conclusão imediata era a de que ou a Terra era fixa ou então as estrelas deveriam estar situadas fantásticamente(!) longe.

Foi com a ajuda de uma luneta, inventada por Galileu no século XVII, que foram produzidos os argumentos que puseram abaixo a noção de que a Terra estava no centro do universo. Galileu descobriu a existência de pequenos objetos orbitando o planeta Júpiter e, se tais corpos podiam orbitar outro planeta, não haveria razão para que os planetas não pudessem orbitar o Sol. Com a invenção da luneta, Galileu pôde observar estrelas não visíveis a olho nu.

Kepler, assistente de Tycho Brahe, descobriu a chave para a construção de um modelo

heliocêntrico, no qual os planetas se moviam em elipses ao redor do Sol, ao mesmo tempo em que, em 1687, o físico inglês Isaac Newton demonstrava que o movimento elíptico poderia ser explicado pela existência de uma força cuja intensidade é proporcional ao inverso da distância ao quadrado entre o Sol e os planetas. Newton formulou a lei da gravitação universal e, com ela, pela primeira vez, foi capaz de determinar a causa de os corpos serem puxados para o centro da Terra. Newton aplicou sua nova teoria ao estudo do movimento da Lua na presença da Terra e do Sol, além de obter com êxito uma solução para o movimento de cometas. Em particular Halley, um de seus seguidores, previu o retorno do cometa, que levou seu nome, para o ano de 1758, cujos cálculos foram baseados em dados disponíveis à época.

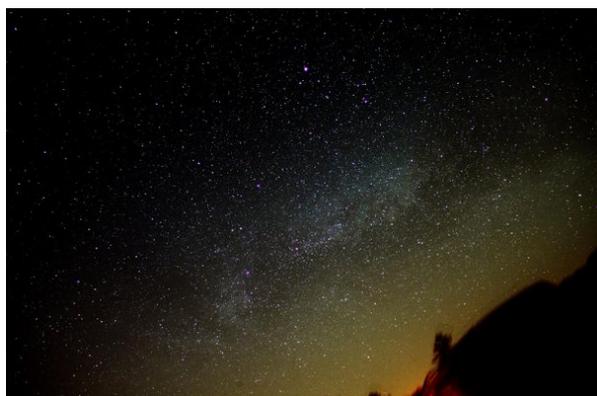


Figura 1.1: Faixa luminosa (branca) corresponde à Via Láctea.

A grande maioria das estrelas que podemos ver pertence à Via Láctea, faixa luminosa de maior concentração de estrelas que se estende pelo céu. Entre outros, Kant (1724-1804), filósofo alemão considerado o pensador mais influente dos tempos modernos, nasceu em Königsberg, atual Kaliningrado, e morreu aos 80 anos, especulou que a Via Láctea seria um corpo em rotação composto por um grande número de estrelas presas entre si por forças gravitacionais, assim como o sistema solar. A resultante desse conjunto de estrelas em movimento seria visto, de nossa posição na galáxia, como uma faixa no céu.

Kant previu ainda que algumas das estruturas visíveis no céu noturno poderiam ser “galáxias individuais”, similares à Via Láctea.

Foi por volta de 1771 que graças aos constantes progressos dos meios de observação do céu que os astrônomos do século XVIII tomaram conhecimento da existência de numerosos objetos difusos que batizaram de nebulosas. Foi nesta época que Charles Messier (1730-1817) trabalhou com Joseph-Nicolas Delisle fundador do Observatório de São Petersbourg. Ainda sobre Delisle, ele recebeu o título de astrônomo, na França em 1716, e criou o Observatório do Hotel de Cluny que mais tarde celebrou Messier por seu notável trabalho. Delisle mostra que os arcos iris são causados pela separação da luz do sol pelas gotas de água. Trabalhou no cálculo da distância da Terra ao Sol e observou os trânsitos de Mercúrio e Vênus.

No Observatório do Hotel de Cluny, Messier estudou meticulosamente 44 cometas e, descobriu outros 20 em colaboração com outros astrônomos franceses como Pierre Méchain¹ e Alexis Bouvard². A reputação de Messier é devida ao resultado de seu catálogo de 110 objetos de aparência difusa que ele produziu para pesquisadores de cometas a fim de evitar que esses fossem confundidos com objetos fixos. Estes objetos foram adicionados mais tarde ao NGC “New General Catalogue”³.

¹Descobriu 8 cometas e 26 objetos celestes (onde se inclui a galáxia do Sombrero). Sua maior contribuição foi a medida do metro, com Delambre (Método analítico para a determinação do arco do meridiano)

²Foi diretor do observatório de Paris. Descobriu 8 cometas, mas seu trabalho mais importante foi descobrir, ao compilar tabelas das posições de Júpiter, Saturno e Urano, que suas posições eram discrepantes em relação às observações

³NGC catálogo astronômico que contém 7840 objetos celestes, compiladas por John Dreyer até 1888, data da

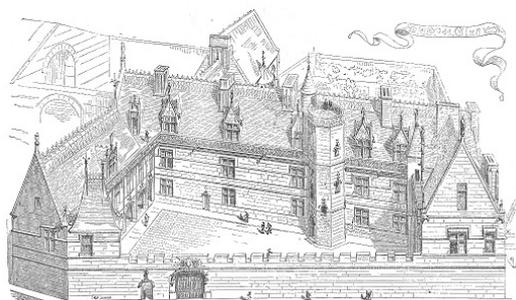


Figura 1.2: Observatório do Hotel de Cluny. Nanquim do Eng. Eugène Viollet le Duc (1856) Atual Museu da Idade Média - Paris.

Sabemos hoje que estas nebulosas não tinham todas as mesmas características. Encontramos desde simples aglomerados de estrelas ou mesmo nuvens de gás, exterior a nossa galáxia. Foram estes últimos objetos que impuseram dificuldades aos astrônomos para entender o nosso Universo. O filósofo alemão Emmanuel Kant, em 1755, foi um dos primeiros a perceber a verdadeira natureza da Via Láctea concluindo que algumas daquelas estranhas nebulosas eram enormes agrupamentos de estrelas semelhante a nossa Galáxia e que se situavam além das fronteiras desta.

Thomas Wright foi o primeiro astrônomo a especular sobre a forma de nossa galáxia e suspeitar que alguns daqueles objetos difusos eram galáxias distantes. Em sua obra “An original theory or new hypothesis of the universe” propõe um modelo para a Via Láctea como um sistema achatado, repleto de estrelas e composto de um núcleo central com o Sol e os planetas situados no plano, mas sem a necessidade de estarem centrados na galáxia. A aparência da Via Láctea era como um efeito óptico devido a Terra estar imersa em uma camada plana de estrelas de fraca luminosidade. Entretanto, foi no século XIX que Willian Herschel, com uma lista de mais de 5000 objetos observados propôs um primeiro desenho para a forma de nossa galáxia.

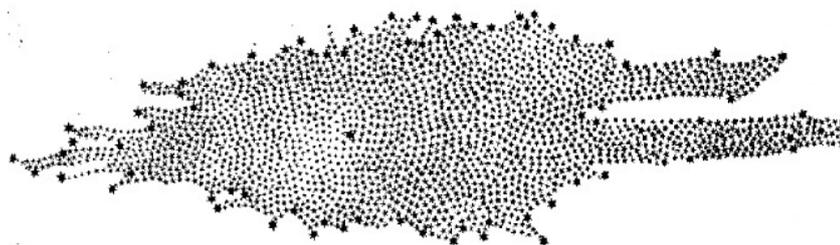


Figure 1.3: Observatório de Thomas Wright. Desenhado por Thomas Wright na segunda metade do século 18. Localizado na Westerton, perto de Bishop Auckland. Herschel elaborou o primeiro mapa da nossa galáxia, estimando as distâncias para estrelas assumindo que todas tinham mesmo brilho. Seu mapa da galáxia em que colocou o Sol perto do centro (o ponto mais escuro) é mostrado na imagem à direita.

Uma das limitações dos modelos propostos para nossa galáxia repousava no fato de não se conhecer distâncias confiáveis dos objetos celestes. A esse propósito, Bradley por volta de 1725 tentou repetir as medidas de Hooke da estrela γ Draconis. Embora não tenha conseguido detectar a paralaxe, Bradley fez uma descoberta surpreendente, de que γ Draconis se deslocara para o sul de 1” de grau em três dias, o que o levou a concluir que além da estrela ter se movido para a direção errada o valor do efeito era muito grande para ser devido a paralaxe. Ele estabeleceu que a mudança da posição aparente da estrela era provocada pela aberração,

primeira publicação do catálogo nas Memórias da Royal Astronomical Society (Memoirs of the Royal Astronomical Society vol. 49 p 1-237).

fenômeno resultante da composição da velocidade da luz com a do movimento do avanço da Terra em sua órbita.

A organização matemática da astronomia foi realizada por Laplace. Matemático, astrônomo e físico sintetizou e ampliou o trabalho de seus predecessores em cinco volumes do seu *Mécanique Céleste*, que traduzia a mecânica clássica usada por Isaac Newton em um estudo baseado em cálculo. A suposição de que o conhecimento das posições pregressas dos planetas conhecidos era suficiente para gerar previsões das posições futuras se confirmava, exceto para o caso de Urano, primeiro planeta descoberto com a ajuda de um telescópio⁴, cujo estudo detalhado de seu movimento gerou um dos resultados mais espetaculares da mecânica celeste Newtoniana.

Urban Le Verrier (Leverrier 1811-1877), astrônomo e matemático francês especialista em mecânica celeste, celebrou-se pelo estudo e cálculo das causas hipotéticas das anomalias do movimento de Urano e que resultou na descoberta do planeta Netuno em 1846 por Galle. Constatou-se que não era apenas Urano que contrariava as efemérides do movimento previsto pela gravitação universal de Newton. Os cálculos mais detalhados para o movimento de Mercúrio que levavam em conta a presença dos demais planetas mostravam, em confronto com as observações, um avanço residual do periélio de $40''$ /sec.

Lembremos que a teoria da gravitação universal proposta por Newton no final do século XVII baseava-se no conceito da força gravitacional que age sobre o princípio da ação a distância, o que significa que a força exercida entre dois corpos é determinada por suas posições qualquer que sejam suas distâncias. Este caráter instantâneo é incompatível com a idéia da relatividade restrita proposta por Einstein em 1905 de que nenhuma informação pode se propagar mais rápido que a velocidade da luz. Em 1916, após a publicação da teoria da Relatividade Geral, os primeiros trabalhos já mostravam o avanço do periélio das órbitas. Por outro lado, na teoria Newtoniana a força é expressa de forma independente das equações do movimento de dois corpos, enquanto que na teoria da Relatividade Geral o campo e o movimento se fundem em uma mesma equação, que resulta se conhecer a curvatura do espaço-tempo em cada posição. O movimento de uma partícula sob a ação de um campo gravitacional se dá ao longo de uma geodésica do espaço-tempo.

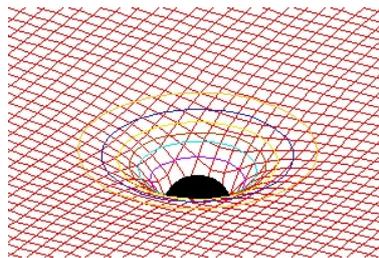


Figure 1.4: O conceito de curvatura do espaço-tempo por um objeto massivo é comum ser utilizado como uma analogia com a deformação causada por uma bola pesada numa membrana elástica. Esta representação mostra apenas a curvatura espacial de um espaço de duas dimensões, sem levar em consideração o efeito do tempo.

Já no século XIX o astrônomo e matemático Bessel havia medido a distância das estrelas por meio da paralaxe, no entanto, o caráter galático ou extragalático de certas estruturas identificadas no céu ainda não estavam esclarecidas o suficiente para que se discutisse o formato

⁴Descoberto por William Herschel em 13 de março de 1781, mas o reportou (em 26 de abril de 1781) como um cometa.

do universo uma vez que o conhecimento das distâncias eram precárias face as limitações das medidas.

Einstein propôs um universo baseado no princípio cosmológico, ou seja, na idéia de que o universo é homogêneo e isotrópico. Por razões que parecem filosófica, Einstein adicionou a suposição de que era estático e imutável. Sob a influência da gravidade, os vários objetos no universo se atraem e, portanto, tendem a convergir. Para contrariar esta atração, Einstein foi levado a introduzir o equivalente a uma força repulsiva no universo que chamou de constante cosmológica. Esta hipótese, que parece extremamente ad hoc, dado o contexto, permite um equilíbrio entre os fenômenos de atração e repulsão.

Em 1904, Henrietta Leavitt estudando placas fotográficas produzidas no observatório do Harvard College fez uma descoberta inovadora formulando uma relação entre o período e luminosidade das estrelas variáveis Cefeidas⁵. A comparação de duas placas fotográficas da pequena névem de Magalhães, tomadas com o telescópio Bruce, levou a descoberta de 57 estrelas variáveis. Um programa de análise mais minuciosa resultou na descoberta de mais 969. Outras 808 variáveis foram encontradas na grande névem. Em 1908, Leavitt publica seus resultados nos Anais do Observatório Astronômico de Harvard College, notando que algumas das variáveis apresentavam um padrão: as mais brilhantes pareciam ter períodos mais longos. Esses resultados foram confirmados em 1912 cujas conclusões foram: as estrelas variáveis Cefeidas de maior luminosidade intrínseca possuem períodos mais longos.

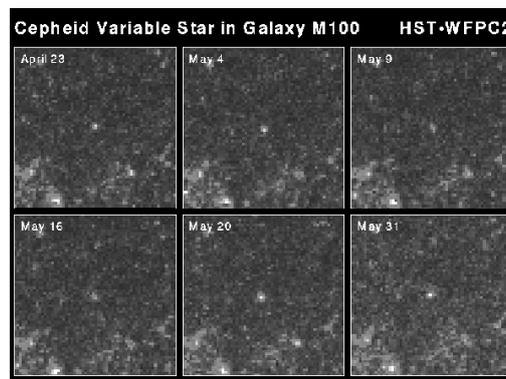


Figure 1.5: A imagem acima mostra uma cefeida em M100 apresentando uma variação de brilho ao longo de um período de dias (a cefeida está no centro de cada quadro).

Na época, não estava clara a existência de um grande número de nebulosas que eram na verdade galáxias situadas fora da Via Láctea. Suas distâncias eram muito grande e difícil de ser medida usando a paralaxe. A relação período-luminosidade para as Cefeida forneceu a chave para estimar estas distâncias. Cefeidas foram logo detectadas em outras galáxias, como a Galáxia de Andrômeda (nome dado por Edwin Hubble em 1923-24) e foram uma parte importante das evidências que as galáxias estão muito além da Via Láctea e eram a chave para resolver o grande debate sobre a natureza espiral das nebulosas e se o Universo era maior do que nossa própria Galáxia. Nossa imagem do universo foi mudado para sempre, em grande parte por causa da descoberta de Leavitt.

⁵São estrelas supergigantes que pulsam de forma regular podendo apresentar períodos de pulsação entre 1 e 100 dias com amplitudes entre 0,3 e 3,5 magnitudes.

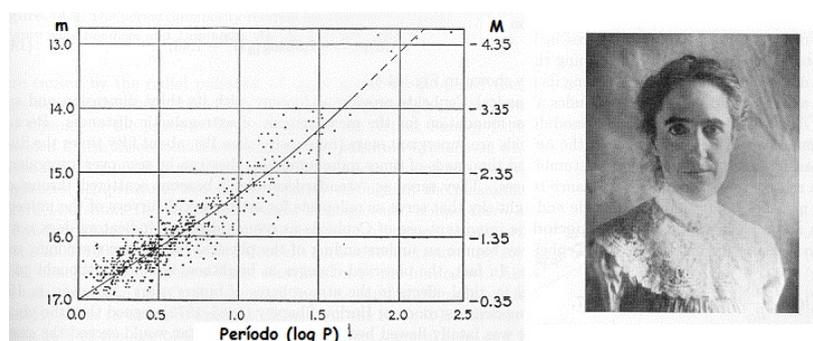


Figure 1.6: Henrietta Leavitt (1868-1921) (Harvard College Observatory)

Já em 1920 um debate envolvia a natureza propriamente dita do Universo. De um lado, o astrônomo Harlow Shapley (1885-1972), do observatório de *Mont Wilson*, defendia um modelo de cosmos composto por um sistema de estrelas como a Via Láctea, sustentando que o universo não se estendia além da Via Láctea. Heber D. Curtis (1872-1942) no entanto, sugeriu que as nebulosas espirais formavam um sistema que caracterizava o universo como formado de ilhas. A diferença de concepções motivou a organização de uma discussão iniciada na Academia Nacional de Ciências em Washington. O Grande Debate, nome dado ao evento que ocorreu durante a década de 1920, se concentrava sobre a natureza dos objetos que eram então chamados de “nebulosas”. As discussões focavam não só a natureza mas tratava da distância em que se encontravam estes objetos, e em consequência a natureza galáctica ou extragaláctica dos mesmos. A mais famosa destas discussões ocorreu em 26 de abril de 1920 no Museu Nacional de História Natural, *Smithsonian Institution*.

Por outro lado, as idéias defendidas por Curtis favoreciam os resultados de Vesto Slipher (1875-1969) que, em 1914, havia detectado um deslocamento para o vermelho das linhas espectrais de alguns desses objetos (na verdade galáxias), cujas amplitudes doppler das velocidades dos movimentos pareciam indicar que esses objetos não estavam ligados gravitacionalmente à nossa galáxia.

Foi nos finais dos anos 1920 que Edwin Hubble trouxe os argumentos que possibilitaram encerrar o grande debate ao detectar cefeidas e algumas estrelas variáveis em numerosas nebulosas (como eram denominadas algumas estruturas difusas pertencentes ao catálogo Messier). Atribui-se a descoberta do deslocamento para o vermelho das galáxias a Hubble entretanto, as medidas e seu significado foram entendidos antes de 1917 por Keeler, Slipher e Campbell dos observatórios de Lick e Lowell. Hubble combinou suas medidas de distância com aquelas de Slipher do deslocamento para o vermelho das galáxias e descobriu existir uma proporcionalidade entre as distâncias desses objetos e o deslocamento das linhas espectrais. Com um conjunto de 46 medidas individuais conseguiu traçar uma tendência que levou a obteção da constante de Hubble-Humason igual a 500 km/s/Mpc^6 , que resulta em uma idade menor que a da Terra.

Em 1917, o meteorologista e matemático russo Friedmann notou que as equações de Einstein poderiam descrever um universo em expansão. O conjunto de equações de Friedmann demonstra a expansão do espaço para um universo admitido como homogêneo e isotrópico⁷ no contexto da relatividade geral. O sistema de Friedmann é derivado das equações de campo de Einstein para

⁶ Alguns autores afirmam que o primeiro a descobrir o deslocamento das galáxias foi George Lamaitre que teria publicado seus resultados dois anos antes que Hubble (*Nature* 479, 171-173 Nov. 2011).

⁷ que apresenta as mesmas propriedades físicas em todas as direções

um fluido com uma densidade de energia ρ e pressão p . Tal solução supõe que o universo teve sua origem há aproximadamente um bilhão de anos e que as galáxias estão se afastando umas das outras desde um certo instante inicial no qual toda a matéria constitutiva do universo foi criada. Tal evento cosmológico foi denominado pelo astrônomo britânico Fred Hoyle como *Big Bang*, nome que se consagrou.

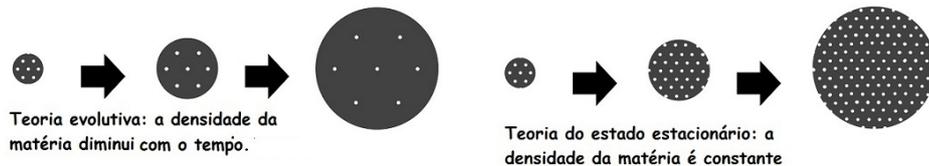


Figura 1.7: Modelo cosmológico desenvolvido por Fred Hoyle, Gold Thomas e Hermann Bondi em 1948 como a principal alternativa para a teoria padrão do Big Bang do universo.

A teoria *steady state* (também conhecida como a teoria do universo infinito ou da criação contínua) foi um modelo desenvolvido em 1948 por Fred Hoyle, Thomas Gold, Hermann Bondi e outros, como uma alternativa à teoria do *Big Bang* (conhecida como o modelo cosmológico padrão). Considerar a teoria *steady state* é imaginar um mecanismo contínuo de criação de matéria nova em um universo em expansão. Embora o modelo tivesse um grande número de adeptos entre os cosmologistas dos anos 50 e 60, a quantidade de partidários diminuiu drasticamente nos anos 60, com a descoberta da radiação cósmica de fundo (microondas). A importância desse modelo foi a de gerar um dos campos de pesquisa mais importantes da astrofísica, o que terminou por produzir argumentos que sustentaram a teoria do *Big Bang*.

Por muitos anos a discussão sobre o universo ser estático e eterno ou existir apenas por um intervalo de tempo finito foi considerada puramente acadêmica. A radiação de fundo⁸, descoberta em 1964, foi interpretada como remanescente da intensa radiação originada no *Big Bang* e confirmou estudos de Alpher e Hermann realizados nos anos 50.

A cosmologia moderna, no entanto, teve início em 1917, quando Einstein propôs modificações à sua teoria da relatividade geral, anunciada em *Considerações Cosmológicas da Teoria da Relatividade Geral*. A teoria de Einstein estimulou cosmologistas tais como Willem de Sitter, Karl Schwarzschild e Arthur Eddington a explorar a importância astronômica da relatividade geral, com ênfase na necessidade do estudo de objetos distantes. Antes disso, e por algum tempo, os físicos supuseram que o universo era estático e imutável.

Trabalhos posteriores realizados por Gamow, Alpher e Hermann, em 1940, calcularam as abundâncias relativas do hidrogênio e do hélio que poderiam ter sido produzidas no *Big Bang* e concluíram que os valores estavam de acordo com os observados. Quando as abundâncias dos outros elementos leves também foram calculadas, estas se mostram consistentes com as observadas. Desde 1970, quando havia um consenso entre os cosmólogos em aceitar o modelo do *Big Bang*, começaram os questionamentos mais específicos sobre a suposta imutabilidade de nosso universo.

Como as galáxias e os agrupamentos de galáxias que observamos hoje foram formados a partir da chamada expansão primordial? De que matéria é feito o nosso universo? Como saber se habitamos ou não um buraco negro? Ou se há alguma forma de matéria que, contudo, não

⁸Embora predita através de teorias, a radiação de microondas foi detectada acidentalmente por Arno Penzias e Robert Woodran Wilson em experimentos realizados com a antena Horn.

brilha como as estrelas? A relatividade geral nos fala da curvatura espaço-tempo. Assim, vale a pergunta sobre qual a forma do nosso universo. Há, afinal, uma constante cosmológica?

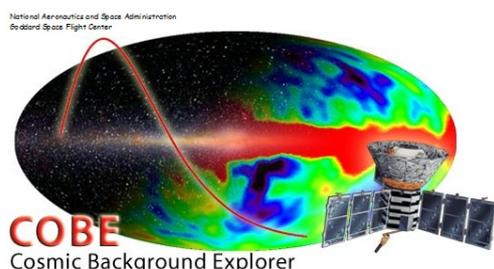


Figura 1.8: COBE (*The Cosmic Background Explorer*) foi o primeiro dedicado à investigar a radiação cósmica de fundo do universo.

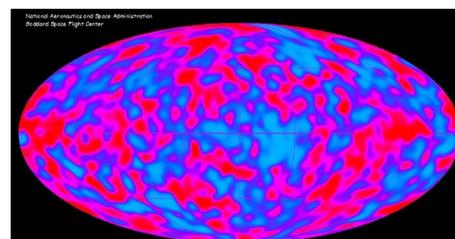


Figura 1.9: Famoso mapa da radiação anisotrópica de fundo produzido pelos dados do satélite COBE.

Nós só estamos começando a achar as respostas para algumas destas perguntas. E, aqui, a radiação cósmica de fundo tem um papel fundamental, porque ela nos dá um quadro do universo como ele foi há cem mil anos do *Bang Bang*. A radiação cósmica de fundo se mostra notavelmente uniforme, mas foi somente em 1992 que o satélite *Cosmic Background Explorer*, da NASA, constatou, pela primeira vez, que ela era anisotrópica⁹. As flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo, de uma parte em mil, podem ter sido as responsáveis pela formação das galáxias.

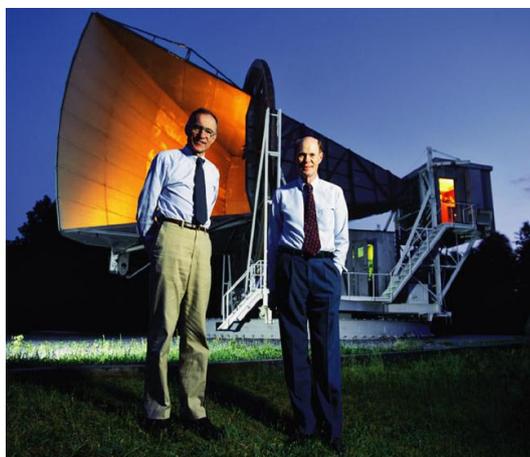


Figura 1.10: Penzias e Wilson são os astrônomos que descobriram a radiação de fundo na frequência de microondas.

A partir de 1980, houve um crescente interesse pelo estudo dos processos físicos que reinaram no início do universo. Novas tecnologias e experimentos espaciais, como o telescópio Hubble, incrementaram o conhecimento sobre o cenário do nosso universo, inspirando principalmente os cientistas teóricos a produzir modelos mais ousados, com base nas mais recentes idéias da relatividade e da física de partículas.

⁹Diz-se de um corpo fisicamente homogêneo, mas cujos valores de certas propriedades físicas e químicas variam com a direção.

Capítulo 2

Organizando o Universo

2.1 Os caminhos para a compreensão

Da última glaciação, a humanidade extraiu informações primárias que permitiram o desenvolvimento do conhecimento científico astronômico. Atribuem-se àquela época os primeiros documentos de astronomia representados por gravuras em pedras lascadas. Como exemplos, notamos gravações consideradas representações de medidas associadas às fases da Lua (Fig. 2.1). Também são encontrados desenhos rupestres representativos do Sol, da Lua e das estrelas. O período da Pedra Lascada caracterizou-se pelo desenvolvimento de aptidões do homem para o domínio e a fabricação de ferramentas que facilitariam a existência humana.



Figura 2.1: À esquerda, o mais velho Calendário Lunar. Antigas constelações foram identificadas na arte rupestre encontrada na França e na Alemanha. Sacerdotes da cultura da época Paleolítico interpretaram por intermédio de símbolos a interação entre o ciclo lunar anual com as mudanças sazonais na terra; à direita, os famosos alinhamentos de pedras na região de Le Menec-Carnac no noroeste francês.

No segundo período da Idade da Pedra (Mesolítico), a produção de manufaturas permitiu que o homem melhorasse suas habilidades e aprofundasse seu conhecimento sobre a agricultura (assentamentos agrícolas organizados foram descobertos na Turquia em 9000 a.C.). O cultivo da Terra despertou o homem para a necessidade de conhecer o movimento dos principais astros no céu, o que possibilitou o estabelecimento de correlações entre as posições dos corpos celestes, as aparições destes e as melhores épocas para o plantio em função das estações do ano. Com a finalidade de melhor precisar essas épocas, inúmeras evidências, como os alinhamentos de pedras,

indicam as posições do Sol em determinadas datas durante o ano, a fim de melhor estabelecer os períodos de frio e de calor, de chuva e de seca. Exemplos dessa arquitetura são encontrados em Le Menec-Carnac, situado a noroeste da França e constituído por pedras distribuídas ao longo de poucos quilômetros (Fig. 2.1).

É certo que os nossos ancestrais dedicaram boa parte de suas vidas observando o céu. Em parte, pela curiosidade proporcionada pelo movimento aparente dos astros e, por outro lado, porque a regularidade com que certos fenômenos aconteciam permitia, ao longo do tempo, descrever o Universo e determinar para cada estrutura uma distância, um tamanho e uma idade, estabelecendo um sistema para a sua compreensão.

O período aproximado de quatro mil anos que se estendeu de 5000 a.C. até 1000 a.C. caracterizou-se pela edificação de pirâmides (Egito) e templos, além da construção de outros grandes monumentos da arquitetura antiga que até hoje deixam dúvidas sobre como puderam ser edificados. Apesar das incertezas acerca do significado dessas obras arquitetônicas, parece que tais estruturas foram orientadas segundo direções que estabelecem épocas bem definidas do ano. As posições do Sol, da Lua e de alguns agrupamentos de estrelas delimitavam as épocas com precisão, o que permitia conhecer a evolução e a repetibilidade de certos fenômenos astronômicos e determinar as melhores datas ou períodos para o plantio, a colheita, o armazenamento dos alimentos e garantir a sobrevivência humana.



Figura 2.2: À esquerda, grafia em pedra da supernova 1054, em Chaco Canyon, Novo Mexico e, à direita, Stonehenge, monumento pré-histórico na Inglaterra.

Stonehenge (Fig. 2.2) é um exemplo vivo entre as edificações que mobilizam o interesse de historiadores, arqueólogos e astrônomos que investigam na Pré-História os mistérios ligados a essas construções. Utilizando-se das efemérides do Sol e da Lua calculadas com recursos modernos, Gerald Hawkins forneceu as primeiras evidências concretas de que Stonehenge foi utilizado como um "observatório" (*Nature* 1963, no artigo *Stonehenge Decoded*), e no livro de mesmo nome *Stonehenge Decoded* 1965 (New York: Doubleday; London: Souvenir Press, 1966.) Os cálculos mostram que as pedras fundamentais de Stonehenge se alinham precisamente com o Sol por ocasião de certos eventos astronômicos, como a época dos solstícios (quando o Sol se encontra mais afastado do equador celeste) e dos equinócios (passagem do Sol pelo equador celeste). Hawkins foi além e mostrou que é possível utilizar o monumento como uma espécie de ábaco para prognosticar eclipses por meio do movimento aparente dos corpos celestes. Os numerosos alinhamentos observados não parecem ser acidentais, no entanto, os fatos mesmos da construção desse monumento ainda provocam divergência entre os historiadores.

Na China, os principais registros da existência de observações astronômicas datam de 4000 a.C.. Algumas informações importantes acerca da astronomia foram transmitidas no século XVII d.C. aos chineses pelos padres jesuítas que estiveram em Pequim. O principal interesse chinês pela astronomia era voltado mais para a questão observacional do que para os aspectos cosmológicos e, nesse sentido, os chineses se concentraram em problemas ligados à confecção de calendários e ao registro de eventos astronômicos particulares. Alguns dos registros de eclipses do Sol datam de 2000 a.C.. Da mesma época são as evidências da existência do primeiro calendário solar. Os registros da utilização de um ciclo de dezenove anos para medir o tempo (ciclo metônico)¹ e dos primeiros registros observacionais das manchas solares são de 1000 a.C..

No primeiro milênio antes da era cristã, os chineses registraram a passagem de cometas, assim como o aparecimento de uma supernova² (é de 532 a.C. o primeiro registro). Já da era cristã são a determinação da constante de precessão dos equinócios ($1^\circ/50$ anos) e os registros de observação acerca das caudas dos cometas, dirigidas sempre na direção contrária à da posição do Sol. Entre os vários registros de explosões de supernova, os chineses observaram e registraram em 1054 d.C. a que deu origem à nebulosa Caranguejo (Fig. 2.2).

Em 4 de julho de 1054 d.C. os astrônomos chineses notaram uma estrela peculiar na constelação de Touro, próxima à estrela ζ Tauri, não muito afastada da Lua. Esta estrela se tornou aproximadamente quatro vezes mais luminosa do que Vênus ($\text{mag} = -6$), tendo sido possível observá-la à luz do dia durante 23 dias. Um dos documentos diz: “No primeiro ano do período Chih-lo, uma estrela apareceu ... Gradativamente tornou-se invisível, tendo levado mais de um ano para tal ...” Na Índia, as primeiras referências à astronomia são encontradas no *Rig Veda*³,

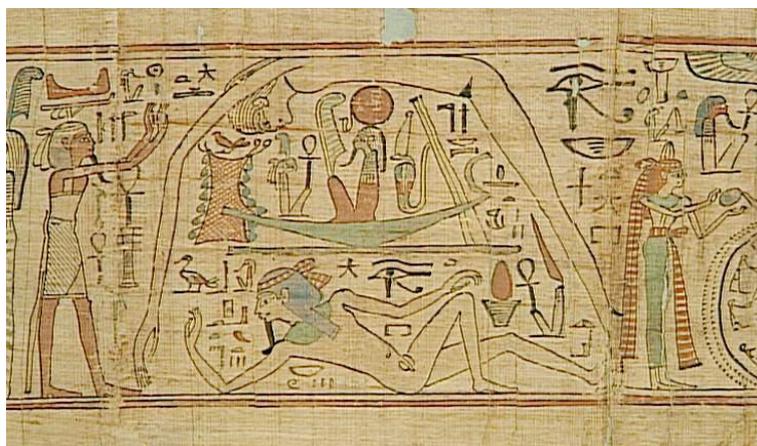


Figura 2.3: O céu é o corpo de *Nut*, enquanto arqueado de horizonte a horizonte, e *Geb* é a Terra.

datado de 2000 a.C.. Os *arianos*⁴ de fato, exaltavam o Sol, as estrelas e os cometas.

Da literatura Veda, nota-se que o interesse dos indianos pela astronomia deveu-se à possibilidade de prognóstico das estações chuvosas, de importância capital para toda a comunidade

¹Ciclo de dezenove anos solares que compreende aproximadamente 235 lunações (a menos de duas horas).

²morte de uma estrela anã causada pelo início repentino de uma explosão (tipo I) ou onda de choque enormemente energética causada pelo colapso de uma estrela de alta massa (tipo II).

³Um dos quatro textos fundamentais do pensamento indiano.

⁴Nome dos povos mais antigos da família indo-européia ou ariana. Os que habitavam o Irã e falavam o zendá foram denominados iranianos, enquanto os que povoaram a Índia e falavam o sânscrito foram chamados hindus.

agrícola. Os indianos subdividiram o céu para poder melhor definir as épocas das estações. Entretanto, tal fato não significou que aspectos teóricos ou mesmo os mais abstratos para a compreensão astronômica tenham sido abandonados. Da mesma forma a mitologia foi uma preocupação na escritura Veda, a qual associava as constelações e os cinco planetas a deuses. A astronomia relacionada à astrologia identificava os planetas (chamados *Grahas*) com a fortuna. Os planetas *Shani*(Saturno) e *Mangal*(Marte) foram associados à infelicidade e às coisas sinistras.

No Egito antigo, a característica dominante da astronomia também está relacionada a concepções místicas do mundo. Para os egípcios, o céu era representado por *Nut* e *Geb* (Fig. 2.3). Pelo corpo de *Nut*, *Amon-Ra* (o Sol) viajava pelo Nilo celeste em seu navio. Inicialmente (3000 a.C.), o conhecimento egípcio sobre a astronomia foi utilizado para a orientação dos templos e pirâmides, que apontavam para a posição do Sol em determinadas épocas do ano. O calendário egípcio, por sua vez, uma grande herança para o Ocidente, foi conhecido graças às conquistas de Julio César. Era baseado na duração de 365,25 dias para o ano, o calendário egípcio é subdividido em 12 meses de 30 dias, mais cinco dias adicionais. Juntando-se o Sol e a Lua aos cinco planetas observáveis, estes sete objetos eram admitidos regentes de cada um dos dias da semana.

2.2 A astronomia na Mesopotâmia (As sementes da ciência.)

Os povos babilônios⁵ contruíram um acervo de informações observacionais por meio do conhecimento das posições planetárias imprescindível para a confecção de calendários, contudo, sem a preocupação de definir princípios físicos coerentes. Embora a noção de tempo sempre estivesse

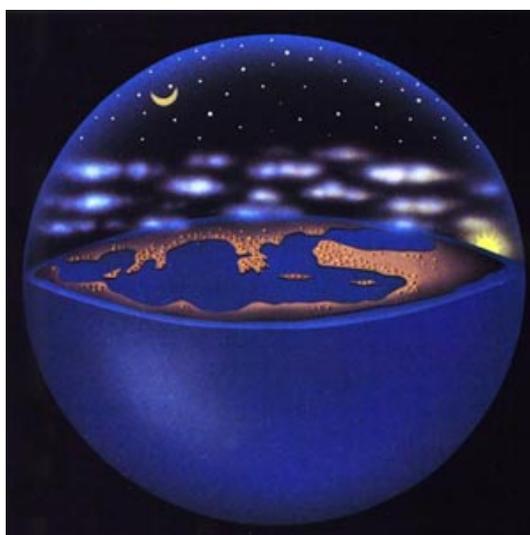


Figura 2.4: Concepção da Terra conforme Tales de Mileto.

ligada aos movimentos da Terra, o movimento de rotação só veio a ser considerado por Filolau,

⁵Babilônia, civilização antiga cujas ruínas estão situadas à beira do rio Eufrates, 160 km a sudoeste de Bagdá. Em 2105 a.C., Sumuabum Ali fundou uma dinastia, cujo sexto rei, Hamurabi, realizou a unidade das regiões suméria e acádia em um mesmo império. A partir desse momento até a época da dinastia selêucida, a Babilônia foi uma das mais importantes civilizações do Oriente.

Eudócio e Aristóteles (384-322 a.C.), que imaginavam a Terra esférica, girando ao redor de um fogo central. Antes dele, Tales defendia que a Terra era plana e flutuava na água⁶, e argumentou que sua teoria levava em conta que a Terra estava em repouso, porque é da natureza da madeira e de substâncias semelhantes, a capacidade para flutuar em água, embora não no ar (*De Caelo*, 294 a 30-b1). Entretanto, em 600 a.C., imaginar a Terra plana (Fig. 2.4) representava um obstáculo às idéias de realização de grandes viagens marítimas, que poderiam terminar em queda nos enormes precipícios do fim do mundo.

Apesar de a rotação da Terra ter sido considerada tardiamente, a noção do “dia” com base nesse movimento e dividido em partes de 12 horas (“dia/noite”) já era compreendida pelos babilônios e egípcios. Originária dos caldeus, a noção de semana com um período de sete dias pode estar ligada às fases da Lua. A denominação dos dias da semana, por sua vez, parece estar relacionada aos nomes dos planetas, do Sol e da lua, e a ordem dos dias, às supostas distâncias desses objetos celestes a partir da Terra.

A noção de ano já estava associada à completa revolução aparente do Sol através das constelações do zodíaco.

Os astrônomos babilônios observaram o céu por séculos, tendo registrado suas observações em diários astronômicos, almanaques e catálogos de estrelas. Durante o reinado de Ammisaduqa (1646 - 1625 a.C.)⁷, foram compilados catálogos estelares detalhados, baseados em observações que, por terem sido numerosas, resultaram na obtenção de posições precisas. Dentre os resultados, podemos mencionar a duração do mês sinódico (intervalo de tempo correspondente ao ciclo das fases lunares). Nabû-rîmanni, astrônomo (560 - 480 a.C.), obteve 29,530614 dias para a duração desse período, enquanto Kidinnu (400 - 310 a.C.) chegou ao valor de 29,530594 dias. Outro resultado importante foi o comprimento do ano solar, que Kidinnu calculou com um erro de 4,5 minutos. Essa precisão é melhor do que aquela obtida pelo astrônomo checoslovaco Theodor Oppolzer em 1887.

A análise dessas observações permitiu, ainda, que os astrônomos babilônios previssem eclipses lunares e, posteriormente, eclipses solares com alta precisão. Utilizavam como ferramenta o período de Saros, reconhecido por astrônomos da antiga Babilônia como o período correspondente aos 223 meses sinódicos que separam dois eclipses lunares ou solares.

A importância desses prognósticos motivou um comportamento peculiar entre os assírios e babilônios, já que os eclipses lunares eram considerados como de mau presságio para os reis. Dessa forma, era possível, nestas ocasiões designar reis substitutos, que governariam durante o período considerado de mau agouro, preservando a vida do real mandatário, a fim de permitir a continuidade da política reinante. Caso nada ocorresse, o substituto do rei era morto, garantindo, assim, que o presságio fosse mantido.

Outro resultado importante a destacar foi a confecção de um calendário quase perfeito (voltaremos a este tema mais adiante).

2.3 Período helenístico (Inovações gregas)

Designamos época helenística ou Helenismo o período caracterizado pela difusão da civilização grega, levada aos territórios conquistados. Neste período, a cultura grega passa a ser o bem

⁶Em *De Caelo*, Aristóteles escreveu: “(...) esta é a explicação mais antiga que nós conhecemos” (*De Caelo*, 294 a 28-30).

⁷O primeiro rei da dinastia babilônica.

comum dos países mediterrâneos, estendendo-se à Ásia Central, impondo-se, desde a morte de Alexandre até os dias das conquistas romanas, do Egito à Síria, até Roma e Espanha, e também entre a elite judaica, bem como entre a nobreza romana (Fig. 2.5). Em muitos aspectos, o Helenismo é um dos períodos mais importantes da história da civilização ocidental. Assim como a influência grega chegou ao extremo Oriente, de modo inverso, a partir das expedições de Alexandre, temos o Ocidente aberto às influências do Oriente e do Extremo Oriente.

O grande desenvolvimento da astronomia no mundo antigo deveu-se aos gregos, no período iniciado em 600 a.C. até 400 d.C.. O método grego era distinto daqueles utilizados por civilizações anteriores, como a babilônica (cujo enfoque era numérico), e por isso davam conta de descrever os complexos movimentos lunares, tarefa pretendida pelos povos da Mesopotâmia. A abordagem grega era geométrica, o que melhor contribuiu para compreender os modelos cosmológicos. Tales, filósofo jônio do século VI^o a.C., foi o responsável pela introdução das idéias geométricas na astronomia. Pitágoras (582-500 a.C.), aproximadamente cem anos depois, imaginou o Universo como uma série de esferas concêntricas, nas quais cada um dos sete “errantes” (o Sol, a Lua, e os cinco planetas conhecidos) estavam presos. Eudóxio aprimorou o modelo de esferas giratórias e introduziu esferas extras para cada um dos planetas, a fim de explicar os seus complexos movimentos. Aristóteles realizou uma síntese desses trabalhos e se tornou uma autoridade até a Idade Média. Embora a convicção aristotélica de que a Terra fosse imutável tenha retardado o progresso do conhecimento astronômico, tal modelo forneceu uma explicação correta para os eclipses lunares e para a forma esférica da Terra.



Figura 2.5: À esquerda, o mundo helênico e, à direita, o Universo conforme a concepção dos gregos.

Foram os gregos, portanto, os responsáveis por incorporar à astronomia aspectos científicos até então não considerados e conferir à astronomia um significado mais realístico. Aspectos geométricos para o modelo de Universo foram propostos pelos pitagóricos, começando por considerar a Terra como uma esfera, por razões de simetria. Da mesma forma o Universo era limitado por uma segunda esfera que definia o lugar onde se situavam as estrelas. Outras tantas esferas eram admitidas como o lugar onde repousavam os planetas, conferindo ao cosmos um modelo geocêntrico de dez esferas, donde o termo “a Harmonia das esferas”. Apesar de bem engendrado, este modelo apresentava a falha de não conseguir justificar os conhecidos movimentos retrógrados que os planetas (ou “errantes”) apresentavam em certas ocasiões .

A observação dos astros sugeriu a Pitágoras a idéia de que uma certa ordem dominava o Universo. Evidências estariam na alternância do dia e da noite, no ciclo das estações do ano e no movimento circular das estrelas, considerado perfeito, e por isso o mundo poderia ser chamado de cosmos, termo que compreende as noções de ordem, correspondência e beleza. Nessa

“cosmovisão”, Pitágoras inferiu que todos os corpos celestes, inclusive a Terra, seriam esféricos, por considerar a esfera um sólido perfeito dentre os demais.

Quanto ao movimento dos corpos celestes, este era admitido como circular e uniforme. Quanto mais nobre um corpo, mais lento o seu movimento em relação a outro corpo. Assim, o Universo pitagórico seguia o seguinte esquema: a Terra girava diariamente ao redor do fogo central e mostrava sempre a mesma face (do mesmo modo como a Lua faz em relação à Terra). O movimento da Terra ao redor do fogo explicava a rotação aparente das esferas em que cada objeto celeste estava situado. Todos os corpos giravam de oeste para leste e os períodos de revolução eram proporcionais à nobreza do corpo celeste. A Terra, considerada imperfeita no modelo pitagórico, levava um dia para realizar uma rotação completa, enquanto a Lua levava um mês e o Sol, um ano. Os planetas tinham períodos maiores. Os pitagóricos sustentavam o princípio de que as distâncias entre os corpos celestes se encontravam na mesma proporção numérica que o intervalo das notas musicais em determinada escala (distâncias finitas). Não se observava a paralaxe estelar.

A rotação da Terra era aceita entre os adeptos da escola pitagórica, mas a maior descoberta de Pitágoras e de seus discípulos (já que havia certa obscuridade em torno do pitagorismo, em razão do caráter esotérico e secreto da escola) deu-se no domínio da geometria, no que se refere às relações entre os lados do triângulo retângulo.



Figura 2.6: Pitágoras, o fundador da escola que exerceu influência duradoura no curso da ciência, filosofia e teologia da Grécia antiga.

As primeiras idéias que incorporavam conceitos de física para explicar o Universo foram consideradas por Aristóteles, que ao lado dos aspectos geométricos, estabeleceu um modelo cosmológico complexo baseado na uniformidade da rotação dos planetas e do Sol ao redor da Terra conforme imaginava Platão (427 - 347 a.C.), mestre de Aristóteles e discípulo de Sócrates (470 - 399 a.C.). O modelo aristotélico permitiu uma explicação para o aparente movimento retrógrado de certos planetas.

Aristóteles sustentava que o Universo era esférico e finito. Esférico, porque esta era a forma geométrica julgada perfeita e, finito, porque deveria haver um centro para o Universo, a Terra,

e, portanto, um corpo que possui um centro não poderia ter uma dimensão infinita. Aristóteles acreditava que a Terra também era uma esfera relativamente pequena se comparada à das estrelas e que, em contraste com os corpos celestes, a Terra estava em repouso. Como prova desta tese, ele sustentava que, se a Terra estivesse em movimento, um observador veria as estrelas fixas se movendo de forma semelhante a dos planetas e, como este fato não se verificava, concluiu que a Terra estava em repouso.

Para provar que a Terra era esférica, Aristóteles argumentava que toda a matéria se movia para o centro do planeta, tendo como resultado final desse movimento uma esfera. Não se limitou às suas convicções e princípios para sustentar a idéia da esfericidade da Terra, utilizou também evidências baseadas em suas observações e defendeu que, no caso dos eclipses lunares, se a Terra não fosse esférica, sua sombra projetada na Lua não mostraria traços curvos. Além desses argumentos, Aristóteles considerava que, quando nos deslocamos sobre a superfície da Terra, não vemos as mesmas estrelas e tão pouco elas ocupam sempre a mesma posição no céu. Deduziu que as estrelas deveriam ter forma esférica tão somente por considerar a esfericidade uma forma perfeita, contudo, acreditava que o aspecto circular poderia ser percebido por meio da observação e que, sob a forma esférica, as estrelas poderiam se manter em suas respectivas posições.



Figura 2.7: O Universo segundo Aristóteles.

Aristóteles, assim como Eudóxo⁸ e Calipo⁹ acreditavam que cada planeta seguia uma tra-

⁸(408 - 355 a.C.) Físico, matemático e astrônomo, calculou a duração do ano solar e indicou reformas para o calendário. Foi o primeiro astrônomo grego a explicar os movimentos dos planetas de uma maneira científica.

⁹(370 - 300 a.C.) Matemático e astrônomo, observou os movimentos dos planetas e utilizou os métodos de Eudoxo para explicá-los. Mediu a duração do ano e das estações para construir um calendário lunisolar preciso. Atribuiu as diferenças das estações devido às variações da “velocidade do Sol”.

jetória definida por um certo número de esferas. O problema deste modelo, entretanto, era que Aristóteles não podia explicar como o movimento das esferas externas não interferia no movimento das internas. Ainda assim, ele tentou uma explicação mecânica, introduzindo 22 esferas que se contrabalançariam, estabelecendo o equilíbrio. Entretanto, tal complicador, em vez de aclarar o problema dos movimentos planetários, tornou-o mais difícil.

De acordo com Aristóteles, havia três tipos de movimentos: o retilíneo, o circular e uma combinação dos dois. Os quatro elementos do mundo sublunar se moveriam em linha reta. A Terra ocupava o plano inferior, o fogo, o superior, e a água e o ar estariam entre os dois primeiros (Fig. 2.7).

O movimento circular era considerado por Aristóteles um movimento natural e, para que algo se mantivesse em movimento, deveria existir certo sincronismo, além da necessidade da consideração da existência de algo que pudesse mantê-lo. Assim, Aristóteles supôs que o movimento inicial fosse dado por uma espécie de “moto primordial” (primeiro motor), causador do movimento circular, considerado como o movimento perfeito por não ter nem começo nem fim.

O modelo hierárquico do Universo aristotélico influenciou profundamente os estudiosos medievais, que introduziram modificações a fim de que tal modelo pudesse corresponder àquele admitido pelos teólogos cristãos. São Tomás de Aquino (1225 - 1274 d.C.)¹⁰ reinterpreto o “moto primoridal” como anjos.

Apoiado pelas autoridades eclesiásticas da Idade Média, o modelo de Aristóteles prevaleceu por vários séculos. Infelizmente, este fato impediu o progresso da ciência, pois poucos ousavam desafiar a Igreja. Não obstante, Aristóteles trouxe uma contribuição importante para a astronomia, ao levantar questões importantes sobre o Universo e estimular sua generalização.

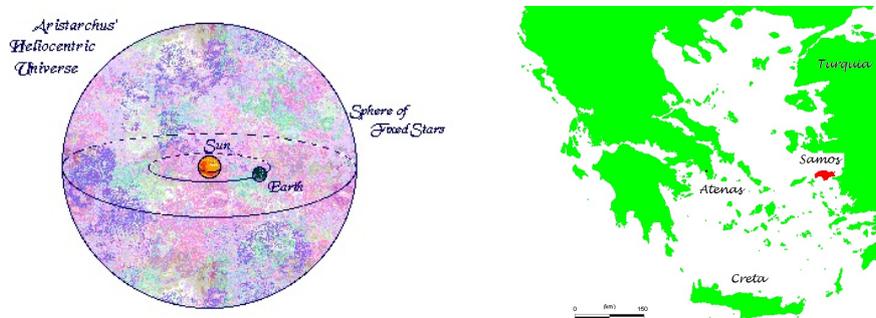


Figura 2.8: À esquerda, o modelo de Universo segundo Aristarco. À direita, a ilha grega de Samos.

O conceito de Universo que considerava o Sol, e não a Terra, como o centro do sistema solar (modelo heliocêntrico, Fig. 3.8) foi proposto por Aristarco de Samos¹¹ 1800 anos antes que Copérnico adotasse tal modelo, considerado revolucionário. A concepção de Aristarco já levava em conta os movimentos de rotação e de translação da Terra para explicar os movimentos diurno e anual da esfera celeste e da Terra, respectivamente.

Os escritos de Aristarco se perderam com o desaparecimento da biblioteca de Alexandria (Alexandre, o Grande, 356 - 323 a.C.). Algumas das idéias de Aristarco já previam movimentos para o sistema Terra-Sol independentes daqueles do sistema Terra-Lua, entretanto, não exis-

¹⁰Nasceu em Rocca Secca, perto de Nápoles. Era filósofo, teólogo e patrono das Universidades e escolas católicas.

¹¹Samos é uma ilha localizada no Mar Egeu, junto à costa da Turquia (Fig. 2.8).

tem evidências de que essas noções tenham sido aplicadas para o sistema solar. O modelo de Aristarco, sem seguidores imediatos, foi atacado e esquecido, particularmente devido a dois aspectos: contradizia a física aristotélica de imutabilidade da Terra e, em segundo, pelo fato de que se a Terra se movesse ao redor do Sol, as posições das estrelas deveriam estar afetadas de um movimento peculiar devido à paralaxe, fenômeno imperceptível a olho nu (o único recurso observacional disponível na época).

2.3.1 A Biblioteca de Alexandria

Permanecem até hoje um mistério as razões que culminaram no incêndio que destruiu a Biblioteca de Alexandria (Egito), o maior acervo do conhecimento humano que existiu em toda a Antigüidade. O enigma persiste, não pela falta de suspeitos, mas, ao contrário, pelo excesso deles. Os fatos apontam para um romano, Júlio César; um cristão, o patriarca Teófilo; e um muçulmano, o califa Omar de Damasco.

Considera-se que a Biblioteca Real de Alexandria tenha sido fundada em 283 a.C. pelo faraó egípcio Ptolomeu II Sóter, depois de o pai deste haver fundado ali o Templo das Musas (ou museu), um santuário no moldes do Liceu de Atenas (Grécia). O museu foi um lugar de estudos, que compreendia um jardim e um zoológico, além da biblioteca, propriamente dita.

Estima-se que em determinado momento a Biblioteca de Alexandria reunisse cerca de um milhão de documentos originários da Assíria, Grécia, Pérsia, Egito, Índia e de muitas outras civilizações. O acervo era administrado por cerca de mais de cem pessoas que viviam na Biblioteca e nela permaneciam em tempo integral para pesquisar, traduzir aulas e conferências, escrever e copiar documentos. Em aproximadamente sete séculos de existência, a Biblioteca foi parcialmente destruída por diversas vezes. Alexandria foi por muito tempo conhecida por políticas alternantes e violentas. Lá viviam cristãos, judeus e pagãos. Assim, o desaparecimento da Biblioteca está relacionado às histórias das conquistas e tem como causa as divergências entre grupos conflitantes, movidos por suas diferentes religiões. As narrativas acerca dos muitos incêndios que acometeram a Biblioteca são contadas ao longo de séculos e têm interpretações diversas, segundo o grupo dominante.



Figura 2.9: A Biblioteca de Alexandria (ilustração).

O primeiro a ser apontado como o responsável pela destruição da grande Biblioteca foi Júlio

César que, em 48 a.C., perseguia Pompeu, no Egito, quando foi interceptado em Alexandria por uma frota egípcia que lhe era numericamente maior. Vendo-se em território inimigo, César ordenou que fosse ateadado fogo aos navios inimigos. A tática, aparentemente bem sucedida, não contava que o fogo se espalhasse pelo porto: a destruição não se limitou à frota egípcia, mas incendiou também parte da cidade de Alexandria e atingiu a área onde se localizava a Biblioteca. A descrição de César sobre o incêndio menciona que este começou no porto, mas não inclui detalhes sobre a extensão do evento.

A segunda hipótese para a destruição da Biblioteca é creditada a Edward Gibbon em sua obra "Declínio e Queda do Império Romano". Tal história, entretanto, é um pouco complexa: Patriarca de Alexandria de 385 a 412 d.C., Teófilo transformou o Templo de Serápio em uma igreja cristã durante seu reinado. Assim, inúmeros documentos ali existentes foram destruídos. Estima-se que o Templo de Serápio reunia cerca de 10% do acervo total da Biblioteca de Alexandria. Depois da morte de Teófilo, o sobrinho deste, Cirilo, tornou-se o Patriarca. Seguiram-se levantes, quando um monge cristão, Hierax, foi assassinado por ordem do prefeito Orestes. Dizia-se que Orestes estava sob a influência de Hypatia, filósofa e filha do último membro da Biblioteca de Alexandria - embora se observe que Hypatia fora a última bibliotecária responsável.

Logo após a morte de Hierax, grupos antagônicos atraíam seus desafetos a fim de promover matanças entre os diversos grupos étnicos. Um desses confrontos envolveu Hypatia, cuja morte alguns historiadores relacionam à destruição final da Biblioteca. Como Teófilo é culpado pelo fato de ter aniquilado documentos quando da ruína do Templo de Serápio, a fim de torná-lo uma igreja cristã, a confusão entre os incidentes permitiu que Teófilo fosse responsabilizado pela morte de Hypatia e também pela destruição da Biblioteca, sem se ter em conta o fato de que Teófilo morrera alguns dias antes de Hypatia.

Uma terceira hipótese responsabiliza o califa Omar de Damasco pela destruição da Biblioteca. Quando os muçulmanos tomaram a cidade de Alexandria, em 640 d.C., ao califa chegaram informações de que a Biblioteca abrigava escritos que contradiziam o Alcorão, livro sagrado muçulmano. Desta forma, obras teriam sido destruídas, utilizadas como luminárias nas casas de banho da cidade, tendo levado cerca de seis meses para serem totalmente consumidas. Tal narrativa pertence ao bispo Gregório Bar-Hebraeus, o qual destinava a maior parte do tempo a escrever sobre as atrocidades dos muçulmanos, contudo, sem documentação histórica.

Quem, afinal, provocou o incêndio que destruiu a Biblioteca de Alexandria? Documentos de Plutarco, o biógrafo, historiador e moralista grego (50 a 120 d.C.) culpam Júlio César. Edward Gibbons, ateu ou deísta, culpa os cristãos. Já o bispo Gregório, que, particularmente, era antimuçulmano, culpa o califa Omar.

Motivos não faltam e, provavelmente, todos tiveram alguma participação nesta empreitada.

2.4 O empecilho paralático

Era bem compreendido na antiguidade que o conhecimento da direção de um objeto celeste não era suficiente para caracterizar sua posição no espaço. A ideia de que a Terra devesse ser fixa no centro do Universo foi, de uma certa forma, baseada na impossibilidade de se perceber os movimentos estelares aparentes devido ao movimento da Terra ao redor do Sol. Como esses movimentos aparentes estelares dependem da distância que esses objetos se situam de nós, para os astrônomos Gregos a tarefa de percebê-los era impossível visto os recursos disponíveis de observação que possuíam.

Um método para medir as distâncias é baseado na triangulação. Com larga aplicação em medidas de distância na Terra, seus princípios foram aplicados para estimar as distâncias astronômicas. A utilização desse processo pressupõe conhecer-se trigonometria e estar familiarizado com medidas angulares. Entretanto, sem nenhum conhecimento prévio de trigonometria poderíamos resolver o problema por intermédio de uma abordagem mais básica.

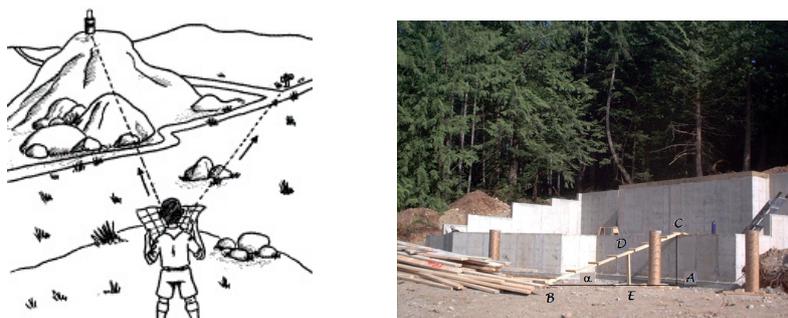


Figura 2.10: Método da triangulação.

O método baseia-se na semelhança de triângulos. Imagine que tenhamos que medir a distância de um objeto que nos seja inacessível. Vamos considerar o triângulo \widehat{ABC} da Fig 2.10, e construir o triângulo \widehat{BDE} , de forma que o lado \overline{DE} seja paralelo ao \overline{AC} . Considerando a semelhança desses dois triângulos, seus lados podem ser relacionados pela expressão:

$$d = \overline{AC} = \frac{\overline{DE} \times \overline{AB}}{\overline{BE}}$$

Medindo-se os comprimentos \overline{AB} , \overline{DE} e \overline{BE} , podemos obter o valor de $\overline{AC}(d)$ que correspondente a distância procurada.

A paralaxe é um efeito geométrico visto como a mudança aparente da posição dos objetos devido ao movimento do observador. Em uma sistema heliocêntrico esse fenômeno é perceptível, para um objeto distante como uma estrela, devido a revolução da Terra ao redor do Sol (paralaxe heliocêntrica). Ela é perceptível quando a observação é realizada a partir de duas posições distintas da Terra em sua trajetória.

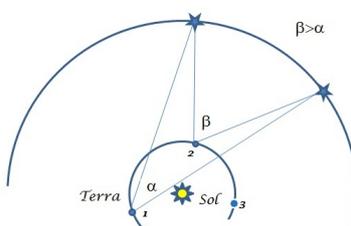


Figura 2.11: Paralaxe estelar - modelo heliocêntrico.

Observemos duas estrelas A e B (Fig. 2.11) e admitamos o modelo de Universo de Aristarco, para uma época na qual as estrelas eram consideradas fixas e situadas todas em uma mesma distância. Notamos que elas parecem estar mais próximas da Terra (angularmente) quando o

observador se encontra nas posições 1 e 3 (nove e três horas), e mais afastadas quando a Terra se aproxima da posição 2 (meio-dia).

Essas aproximações e afastamentos aparentes não eram perceptíveis, e por esse motivo não podiam ser verificados na época dos astrônomos Gregos, motivo principal para que se descartasse a visão heliocêntrica do Universo. Sabemos hoje que este tipo de observação só seria possível de ser realizada com a ajuda de aparatos ópticos convenientes (Telecópios).

Entretanto, alguns problemas práticos interessaram os astrônomos na antiguidade, que conseguiram obter soluções, através de aplicações geométricas, com resultados práticos interessantes. Dentre os trabalhos de Aristóteles se inclui a tentativa de provar que a Terra era esférica sendo que um de seus argumentos era que a Terra projetava uma sombra circular sobre a Lua durante os eclipses. Baseado nestas observações Aristóteles calculou a dimensão da Terra obtendo um valor subestimado para seu diâmetro. Esse problema interessou *Eratóstenes*. Entre



Figura 2.12: Eratóstenes - o raio da Terra.

suas andanças pelo norte da África, *Eratóstenes* observou que em um dia particular do verão (no solstício), e ao meio-dia, o Sol estava bem próximo da vertical, na cidade de *Siene*, (*hoje Assuão*)¹² projetando-se no fundo de um poço. No mesmo dia, em *Alexandria*¹³, a aproximadamente 800 km de *Assuão*, observava que o Sol projetava uma sombra de um obelisco, segundo um ângulo de $7,2^\circ$ (Fig. 2.12). Neste caso, o diâmetro para a Terra obtido por triangulação é equivalente a 12.600km.

Outro exemplo foi baseado na visão heliocêntrica que *Aristarco* possuía do cosmos. Por intermédio das relações entre os lados de um triângulo retângulo, foi possível calcular a relação entre as distâncias Terra/Sol (que já havia sido subestimada por *Aristóteles*), e obter a distância Terra/Lua por intermédio da observação do eclipse lunar. Esse valor (distância média Terra/Sol) permite estabelecer uma forma simples para dimensionar o cosmos usando essa distância como unidade padrão (U.A. unidade astronômica)¹⁴. A relação entre as distâncias d (Terra-Lua) e D (Terra-Sol) foi possível de ser obtida conhecendo-se a diferença do intervalo de tempo entre as fases da Lua nova a quarto crescente e do quarto crescente a Lua cheia. Esse tempo, ao contrário do que *Aristóteles* obteve (6 horas!), era de 35 minutos. Na figura 2.13 conclui-se que o arco β , percorrido em $35/2$ minutos, pode ser calculado por uma regra de três, se considerarmos que o

¹²Cidade próxima ao trópico de Câncer

¹³Cidade portuária a noroeste do Cairo

¹⁴Distância média entre o Sol e a Terra

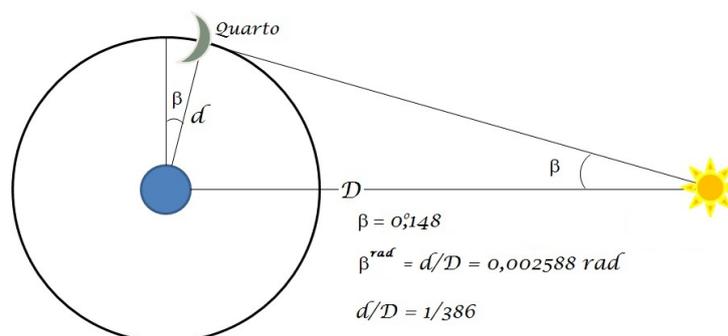


Figura 2.13: Método inventado por *Aristarco* para determinação da relação entre as distâncias Terra/Sol.

período correspondente a luação¹⁵ vale cerca de 29,5 dias. Podemos escrever:

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & & 29,5 \text{ dias} \\ \beta & & [(35/2]/60)^h/24^h \text{ dias} \implies \beta = 0,148^\circ \end{array}$$

Utilizando a nomenclatura da figura (Fig. 2.13), podemos escrever a relação trigonométrica entre os lados do triângulo cujos vértices são representados pela Terra, Lua e Sol, de modo que:

$$\sin \beta = d/D$$

Sendo β um ângulo pequeno, podemos considerar a função seno de β como o valor numérico de β em radiano¹⁶, e portanto:

$$\beta = d/D \implies \beta = 0,002588 \text{ rad},$$

o que resulta

$$d/D = 1/386,$$

diferente do valor obtido por *Aristóteles*, que foi de 1/19. A distância Terra/Lua, depende do conhecimento das medidas que caracterizam o eclipse lunar. Consideremos ΔT o intervalo de tempo em que o eclipse transcorre. Tal fenômeno correspondente ao movimento da Lua de um ângulo igual a $2(\beta + R_L)$. Por outro lado podemos escrever uma relação entre os lados do triângulo retângulo cujos vértices são representados na figura 3.14 pelo centro da Terra, e pelos pontos de intersecção da reta que tangencia as esferas representativa da Terra e da Lua. Podemos escrever:

$$\sin \alpha = \frac{R_T}{D}$$

onde R_T é o valor da medida do raio da Terra, e D a distância Terra/Lua procurada.

¹⁵Intervalo de tempo médio correspondente às fases da Lua

¹⁶Unidade de medida de ângulo

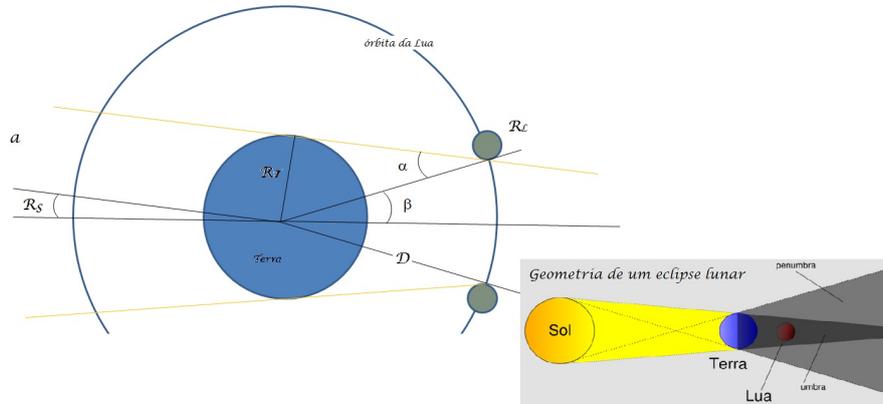


Figura 2.14: Método creditado a *Aristarco* para determinação da distâncias Terra/Lua.

Considerando-se o movimento da Lua como circular e uniforme, é possível escrevermos uma expressão para o arco que Lua percorre em função do intervalo de tempo ΔT do eclipse:

$$\Phi = \left(\frac{2\pi}{P} \right) \Delta T,$$

é o arco que a Lua percorre durante o intervalo de tempo ΔT correspondente ao eclipse; podemos escrever:

$$2(\beta + R_L) = \left(\frac{2\pi}{P} \right) \Delta T$$

O valor de α pode ser obtido pela expressão:

$$R_S + \beta = \alpha + a$$

exceto do valor de a (paralaxe de posição)¹⁷, podemos obter a distância Terra/Lua.

2.5 A não uniformidade dos movimentos planetários.

Hiparcos foi um astrônomo grego que viveu entre 190-120 a.C.. Sua primeira contribuição, uma espécie de tabela trigonométrica, levou alguns historiadores a considerá-lo o inventor da trigonometria. Dentre suas principais descobertas esta a precessão dos equinócios. A precessão dos equinócios é um lento movimento do equinócio ao longo da eclíptica para oeste causado pela atração do Sol e da Lua no bojo equatorial da figura da Terra. Lembrar ainda que o equinócio é o ponto onde o Sol cruza o equador celeste. Outro resultado interessante, obtido por *Hiparcos*, foi o cálculo do comprimento do ano com valor dentro de um intervalo de 6,5 minutos. O valor obtido por *Hiparcos* para a precessão foi de $46''$, que pode ser considerado bom se comparado com os valores modernos de $50,26''$, e melhor do que os $36''$ obtidos por *Ptolomeu*. *Hiparcos*

¹⁷ Ângulo a partir do Sol que se viria o raio da Terra

criou o primeiro mapa de estrela com posições precisas e compilou um catálogo de 1080 estrelas com as respectivas magnitudes visuais¹⁸.

Por outro lado, e conforme a tradição Grega, Hiparcos era partidário de que os planetas moviam-se com velocidades constantes, o que na prática não era verificado. Com a finalidade de dar um aspecto mais realístico ao modelo de *Aristóteles*, e considerando que os planetas mudavam bruscamente de direção, Hiparcos introduziu o conceito de excentricidade.

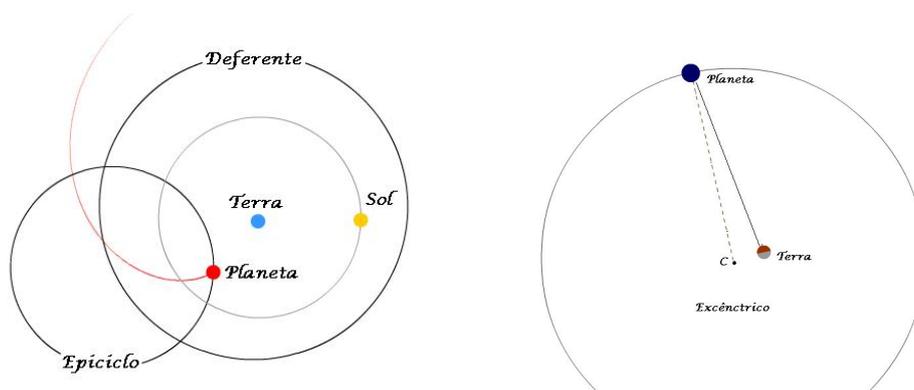


Figura 2.15: O epiciclo e a deferente no movimento retrógrado. O excêntrico: o planeta gira com movimento circular uniforme em relação ao centro.

Colocando-se a Terra em uma posição excêntrica em relação à trajetória do planeta (Fig. 2.15D), era possível considerar o planeta girando com velocidade constante ao redor da circunferência centrada em C o que preservava os conceitos vigentes na época da uniformidade dos movimentos, permitindo assim que para um observador na Terra o movimento fosse visto como variável. Porém, o excêntrico não explicava o movimento retrógrado dos planetas. Esse

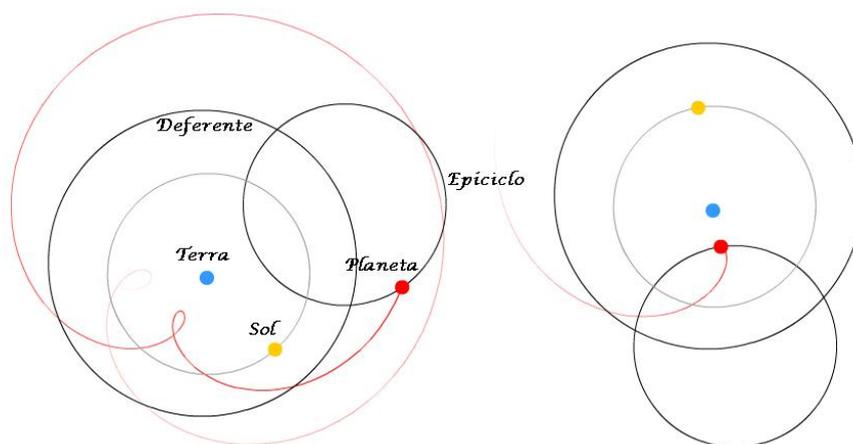


Figura 2.16: Movimento de um planeta produzido pela adoção das circunferências representativas dos epiciclo e deferente.

fato levou-o a tentar explicar a não uniformidade dos movimentos planetários considerando

¹⁸Magnitude visual é uma escala de brilho baseado na intensidade luminosa da estrela. O termo “visual” significa que o brilho está sendo medido na parte visível do espectro eletromagnético.

um planeta P movendo-se em uma pequena circunferência (epiciclo), cujo centro localiza-se em uma segunda ao redor da Terra (deferente). Os raios dessas figuras girando na mesma direção apresenta um movimento resultante que depende da posição do planeta relativa a deferente. Se o planeta encontra-se na região interna dessa circunferência (de P_1 a P_2), seu movimento é contrário àquele das estrelas, senão coincide com o movimento geral da esfera celeste (Fig. 2.15E).

O movimento da deferente reproduz o do planeta de oeste para leste através do zodíaco. Os períodos resultantes produzido pelos movimentos do epiciclo e da deferente eram obtidos, observacionalmente (Tab. 2.5.1) pela medida do intervalo de tempo que o planeta levava para circular o zodíaco (período da deferente), e pelo intervalo de tempo que levava para percorrer uma laçada (período dos epiciclos).

Tabela 2.5.1 Características dos movimentos dos planetas (*Zeilik-1991*).

Planetas	Duração	Períodos	Sideral	Anos
	típica (dias)	Sinódico (dias)		
Mercúrio	34	116	88,0	0,241
Vênus	43	584	224,7	0,615
Marte	83	780	687,0	1,881
Júpiter	118	399	4.318,0	11,822
Saturno	139	378	10.828,5	29,647

2.6 Ptolomeu (O Almagesta)

O modelo geocêntrico completo realizado por *Claudius Ptolomeu (100-178)*, 250 anos depois de *Hiparcos*, reuniu toda a tradição astronômica em uma obra intitulada *O Almagesta*, primeiro livro de astronomia com um modelo de mundo que perdurou por 1300 anos. Seu modelo foi estruturado conforme as seguintes evidências e doutrina:

- é geocêntrico,
- e os movimento dos planetas são mantidos sem que haja necessidade da interferência de forças.
- Neste modelo, o mundo possui tamanho finito sendo que as distâncias são medidas em raios da Terra;
- os movimentos retrógrados dos planetas são representados pela composição dos movimentos produzidos pelos epiciclo e deferente, e
- as variações na velocidade desses movimentos são levadas em conta pelas equantes

Ptolomeu assume a forma da Terra como esférica ocupando o centro do universo. Seu modelo baseava-se nos princípios definidos por *Aristóteles*, embora na prática acabe violando um dos principais fundamentos quando admite que o movimento dos planetas é representado pela combinação dos movimentos retrógrado da velocidade através do zodíaco.

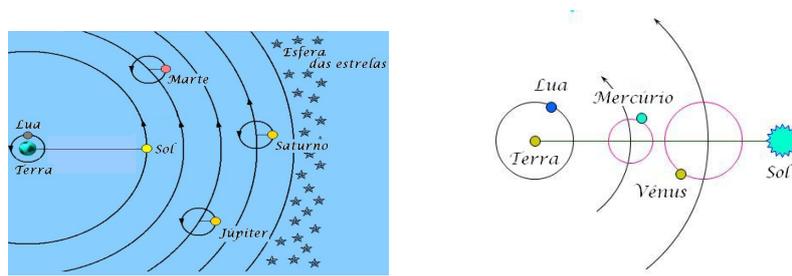


Figura 2.17: Modelo de *Ptolomeu*: Movimento dos planetas interiores e exteriores conforme *Ptolomeu*

Tabela 2.6.1 Resumo do Modelo de *Ptolomeu* - Movimentos do céu, Sol e Lua (*Zeilik-1991*).

Observação	Explicação
Céu	
Movimento do céu de Leste para oeste em 24 horas	Movimento diurno de Leste para Oeste da esfera celeste
Sol	
Movimento no plano da eclíptica anual de Oeste para leste	Movimento anual do Sol na esfera (W-E)
Velocidade não uniforme	Equante
Lua	
Movimento mensal W-E	Movimento de W-E com duração de um mês

Semelhante ao modelo de Hiparco, e com finalidade de explicar as variações de velocidades dos planetas ao percorrer suas trajetórias, *Ptolomeu* imagina o planeta movendo-se ao redor da Terra, mas em uma circunferência centrada em um ponto simétrico da Terra em relação ao centro da deferente. Esse ponto é denominado de equante (Fig. 2.18). O centro do epiciclo é tomado na deferente sobre a reta que une a Terra ao Sol, para os planetas internos, e na paralela a essa mesma reta para o caso dos externos. Visto do equante o planeta se move com velocidade constante, enquanto que da Terra o movimento é variável.

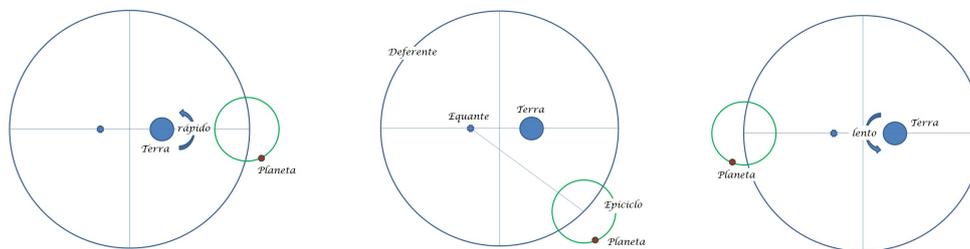


Figura 2.18: O equante: justificar a variação de velocidade dos planetas segundo *Ptolomeu*

A forma diferente com que *Ptolomeu* trata os planetas internos, Mercúrio e Vênus, dos externos Marte, Júpiter e Saturno, resulta do fato de Mercúrio não se afastar do Sol mais do que 23° enquanto que Vênus não mais do que 46° . Para levar em conta esse fato, *Ptolomeu*

Tabela 2.6.2 Resumo do Modelo de *Ptolomeu* - Movimentos dos Planetas (*Zeilik- 1991*).

Observação	Explicação
Planetas	
Movimento geral de W-E na região zodiacal	Movimento da deferente de W-E com período obtido pelas observações
Movimento Retrógrado	Movimento do epiciclo na mesma direção daquele da deferente. Período baseado entre os movimentos retrógrados
Variação da velocidade devido ao movimento retrógrado	Excêntrico e equante
Mercúrio e Vênus	
maior afastamento do Sol, 23° e 46° respectivamente	Tamanho dos epiciclos (raio)
Aparecem fixos ao Sol	centro dos epiciclos na reta Sol-Terra
Marte, Júpiter e Saturno	
Movimento retrógrado quando em oposição - mais brilhante	Raio dos epiciclos alinhados com a reta Sol-Terra

define o raio do epiciclo de Mercúrio menor do que o de Vênus, o que resulta esses dois planetas a se movimentarem sempre próximos ao Sol (Fig. 2.17).

Para os planetas exteriores, pelo fato de *Ptolomeu* ter definido o raio dos epiciclos sempre paralelos à semi reta definida pelas posições da Terra e do Sol, garante que esses planetas retroagem somente quando em oposição (definição a frente).

As tabelas 2.6.1 e 2.6.2 representam uma sinopse da “teoria” de *Ptolomeu* no que se refere aos movimentos dos principais corpos celestes.

Por fim, no modelo de *Ptolomeu*, o cosmos tem dimensão finita e a distância da Terra ao Sol era dada em raios da Terra, como havia sido concebida por *Aristóteles* e *Hiparcos*. A distância da Terra até a Lua foi considerada igual a 59 raios terrestre ($59 \times 6.400\text{km} = 377.600\text{km}(!)$), não existindo nada além da esfera das estrelas, que se situava a 20.000 raios terrestres. Além disso *Ptolomeu* admitia que entre as esferas, lugar ocupado pelos planetas, eram regiões vazias.

2.7 Nicolau Copérnico (A época pós-Ptolomeu)

Nos primeiros séculos depois de *Ptolomeu*, a astronomia perdeu importância com o declínio da civilização grega. Até o século XII, a maior parte dos trabalhos astronômicos eram desconhecidos na Europa, e só ganharam notoriedade quando foram traduzidos, do latim, alguns manuscritos árabes de pensadores gregos.

No século XIII, o rei *Alfonso (o Grande)* da Espanha, patrocinou a publicação das “Tabelas de Alfonsine”, que forneciam as posições planetárias baseadas no modelo de *Ptolomeu*. Compiladas em 1252 na cidade de Toledo, elas só foram publicadas tardiamente em Veneza no ano de 1483, e representavam o resultado do trabalho realizado por 50 astrônomos, tendo sido úteis na obtenção das efemérides planetárias para a época.

O fato do Sol mostrar-se um astro de comportamento diferente dos planetas, por certo levou

Copérnico a imaginar um modelo de universo que desse a ele uma posição de destaque em seu modelo de mundo (“o sistema heliocêntrico”). Os primeiros trabalhos de *Copérnico*, que datam



Figura 2.19: Diagrama do modelo de *Copérnico*. A direita Quadro ”Astronomer Copernicus: Conversation with God”, de Jan Matejko (1872)

de 1514, tiveram circulação restrita. Fundamentalmente o Sol substituiu a Terra como centro do universo, o que significou fazê-la, além de circular ao redor do Sol com período anual, girar ao redor de seu eixo. *Copérnico* assume, entretanto, que os corpos celestes possuem movimento circular e uniforme. Seu trabalho “*De revolutionibus orbitum coelestium*” só foi publicado no ano de 1543, quando seu estado de saúde já debilitado se agravou, levando-o a morte pouco tempo depois. Ao que se sabe, *Copérnico* não teve nem mesmo a oportunidade de ler a versão final de sua obra.



Figura 2.20: Movimento retrógrado do planeta Marte.

Seguindo diferentes caminhos na montagem de seu modelo, *Copérnico* adota alguns princípios, tais como:

- O centro do Universo está localizado perto do Sol.
- A distância da Terra a esfera das estrelas é muito maior que a distância Terra-Sol.
- O movimento diário relativo ao horizonte, resulta do movimento da Terra em torno de seu eixo.
- O movimento do Sol relativo as estrelas é resultado da revolução anual da Terra ao redor do Sol.

- O movimento retrógrado dos planetas ocorre devido ao movimento relativo da Terra e dos planetas.

Ressalta-se que para *Copérnico* não havia necessidade da interferência de forças para manter os movimentos, estes eram reproduzidos de forma espontânea. Exceção feita ao Sol que ocupava o centro, *Copérnico* descobre uma explicação simples e natural para os movimentos retrógrados dos planetas, isto é, eles resultam da “passagem” da Terra por qualquer planeta exterior, ou quando a Terra é “passada” por um interno.

2.7.1 Uma biografia resumida.

- 1473 - *Copérnico* nasceu em Torun na Polônia, aos 19 dias de fevereiro.
- 1491 - deixa a escola paroquial de St. John em Torun para ir para a Universidade na Cracóvia.
- 1491 a 1495 - realiza seus estudos universitários
- 1496 - começa seus estudos de Direito em Bolonha, onde foi assistente de Matemática de Domenico Maria, conhecido como “fazedor de prognóstico!!”.
- 1501 - completa seu quarto ano de estudos de direito e começa os de Medicina em Pádua
- 1503-1507 - completa seu curso de Medicina e recebe a licença para clinicar



Figura 2.21: Igreja onde estava o sepultado Nicolau Copérnico.

- 1514 - 1516 - Atendendo a uma consulta do Conselho de *Lateran*, apresenta uma proposta para a reforma do calendário¹⁹. Sua preocupação com a ciência começa no instante em que é dispensado de suas obrigações administrativas da ordem de *Frombork*²⁰, começando então a se dedicar a organizar um pequeno observatório. No início deste período publica o seu *Commentariolus* (Uma breve Descrição) critica o sistema Ptolomáico por não ter aderido aos princípios dos movimentos circulares e uniformes.

¹⁹Copérnico achava a reforma do calendário prematura visto na época não se conhecer com precisão comprimento do “Ano Trópico” para torná-la satisfatória.

²⁰Cidade da Polônia cujos habitantes eram principalmente comerciantes, fazendeiros e pescadores. Seu morador mais famoso foi o próprio *Copérnico* que viveu e trabalhou como cânone de 1512-1516 e de 1522-1543.

- 1528 - Trabalha em desenhos que seriam utilizados para cunhar moedas
- 1539 - Sua reputação de matemático era conhecida. *Georg Joachim von Lauchen - Rheticus*²¹, professor de Matemática de Wittenberg vem visitá-lo para conhecer com profundidade sua teoria, e acaba convencendo *Copérnico* a publicar sua obra *De Revolutionibus*.
- 1543 - o dia 21 de Maio marca sua morte

2.8 As distâncias planetárias no modelo de *Copérnico*

Copérnico estabeleceu uma maneira de ordenar os planetas, a partir do Sol por intermédio do conhecimento de seus períodos sinódicos (S), que é o intervalo de tempo em que uma dada configuração planetária se repete.

A partir do conhecimento desse intervalo de tempo, é possível calcular o período sideral (P) que é definido como intervalo de tempo de uma revolução completa do planeta em relação as estrelas.

Relações simples entre estes dois períodos podem ser escritas:

$$1/P = 1 + 1/S$$

e

$$1/P = 1 - 1/S$$

para os planetas internos e exteriores, respectivamente, com E sendo o período de translação da Terra ($\sim 365,25$ dias).

As posições planetárias foram ordenadas a partir da sequência natural baseada no conhecimento de seus períodos siderais. Mercúrio que possui o menor período, está mais próximo do Sol, enquanto que Saturno, com o maior está mais afastado. Copérnico obteve, em função da distância Terra-Sol, os afastamentos dos planetas ao Sol.

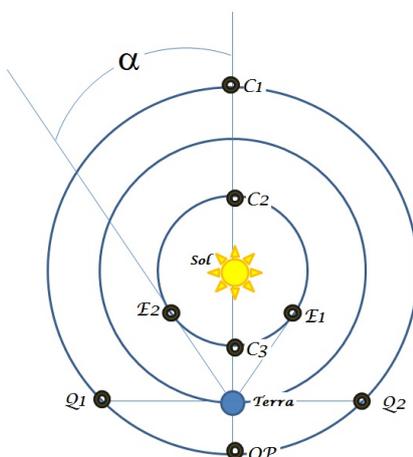


Figura 2.22: Configuração planetária heliocêntrica.

²¹ *Rheticus* produziu uma tabela dos valores da função trigonométrica seno de $10''$ em $10''$.

A fim de compreender a maneira como foram calculados não só os períodos siderais, como as distâncias planetárias ao Sol, assinalamos que os planetas estão ordenados a partir do Sol na sequência: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, e Netuno. Aqueles mais próximos são denominados de “internos”, e os mais afastados de “exteriores”. Definindo-se “elongação” como sendo o ângulo visto a partir da Terra entre as direções do centro do Sol, e a direção ao planeta, denominaremos elongação leste ou oeste, conforme o planeta esteja a leste ou oeste do Sol, visto a partir da Terra. Particulares valores dessas elongações têm nomes especiais (Fig. 3.22).

Uma elongação de:

- 0° - é denominada de conjunção (C_i),
- 180° - de oposição (OP) e
- 90° - de quadratura (Q_i).

Quando um planeta interno atinge sua distância máxima ao Sol, esta posição em particular é denominada de máxima elongação (E_i).

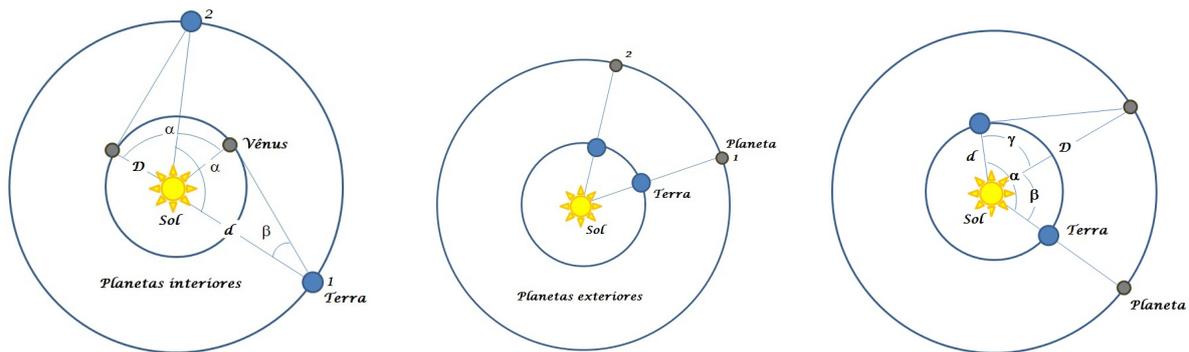


Figura 2.23: Períodos Sideral e Sinódico. Determinação das distâncias.

O cálculo das distâncias podem ser feitas de maneira simples. Para os planetas internos, pela medida do ângulo entre as direções ao Sol e do planeta no momento de sua máxima elongação. O ângulo α pode ser caculado por uma regra de três: $\alpha = \frac{360^\circ S}{T}$, onde T é o período de translação da Terra

a) para a distância:

$$D = d \sin \beta$$

b) para o período sideral

Admitamos que S seja o tempo necessário para que a Terra vá da posição 1 até 2. A diferença $t_2 - t_1 = S$ é chamada de tempo sinódico.

Da mesma forma o planeta, que é mais rápido percorre no intervalo S um ângulo de $360^\circ + \alpha$. Por uma regra de três simples:

$$S \rightarrow 360^\circ + \alpha$$

$$P \rightarrow 360^\circ \implies \frac{1}{P} = \frac{1}{S} + \frac{1}{T}$$

Se $T = 1$ ano obtemos a equação do início da subsecção 3.8

Para os exteriores o método é aplicado de forma diferente. A partir do instante da oposição, registra-se o instante em que a Terra esta em máxima elongação. A determinação do ângulo

pode ser feita conforme visto na figura 2.23. Vamos admitir que a partir de uma oposição registremos o intervalo de tempo até que ocorra a primeira quadratura. Seja t esse intervalo de tempo. A Terra percorre o ângulo $\alpha = \frac{360^\circ t}{T}$ nesse intervalo, enquanto que o planeta $\beta = \frac{360^\circ t}{P}$. Considerando que o $\gamma = \alpha - \beta$, podemos escrever:

a) para a distância

$$D = \frac{d}{\cos \gamma}$$

b) para o período sideral

Consideremos que a enquanto a Terra percorre um ângulo $360^\circ + \alpha$ no intervalo de tempo correspondente ao período sinódico

S (repetição da mesma configuração), o planeta percorre um ângulo α no mesmo período, logo:

$$S \rightarrow \alpha$$

$$T \rightarrow 360^\circ \implies \frac{1}{P} = \frac{1}{T} - \frac{1}{S}$$

Da mesma forma que para os planetas internos, se considerarmos $T = 1$ ano para o período da Terra retomamos a equação proposta no início desta subsecção.

Logo, para Mercúrio e Vênus, o método consiste em se obter o ângulo quando o planeta está em máxima elongação, cujos valores médios são de 23° e 46° , respectivamente.

Copérnico eliminou os epiciclos para explicar o movimento retrógrado e ao mesmo tempo dispensou o equante. Entretanto, os cálculos resultante a partir de seu modelo, levaram-no a obter efemérides planetárias menos precisas que quando calculadas com o modelo de Ptolomeu, o que representou uma dificuldade para a sua aceitação.

Para efeito de comparação, na tabela 2.8.1, encontramos as distâncias planetárias relativas de seis planetas, obtidas por intermédio do modelo de Copérnico e de valores modernos.

Tabela 2.8.1 Distâncias planetárias relativas (*Zeilik-1991*).

Planetas	Modelo de Copérnico (U.A.)	Valores Modernos (U.A.)
Mercúrio	0,38	0,387
Vênus	0,72	0,723
Terra	1,00	1,00
Marte	1,52	1,52
Júpiter	5,22	5,20
Saturno	9,17	9,54

Vale lembrar, a título de curiosidade que no final do século XVIII, foi desenvolvida por Johan Daniel Tietz (Titius), tendo como adepto o astrônomo alemão Johann Elert Bode, diretor do Observatório de Berlim, uma sequência de números, traduzida matematicamente pela expressão:

$$\alpha = 0.4 + 0.3 \times 2^n$$

com $n = -\infty, 0, 1, 2, 4, 5, \dots$, que conhecemos como Lei de Titius-Bode, cujo valor de α representa, em UA (unidades astronômicas), as distâncias dos planetas do sistema solar. O valor de $n = 3$ representava um eventual planeta a ser descoberto entretanto, mais tarde se descobriu que esta região era povoada por uma enorme quantidade de pequenos corpos do sistema solar que se denominou de cinturão de asteróides.

2.9 Tycho Brahe (um astrônomo profissional)

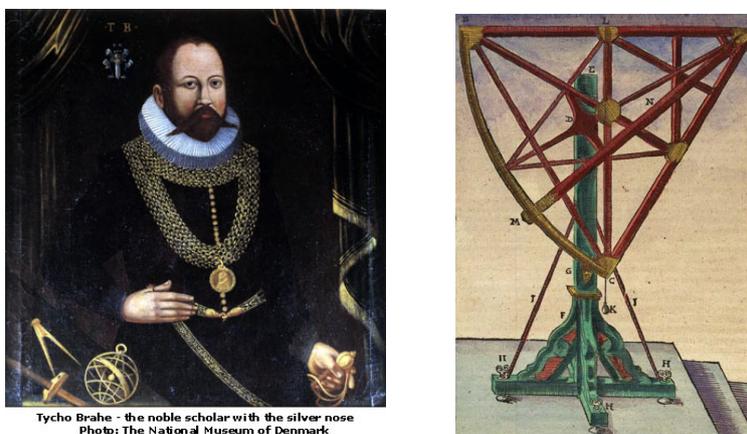


Figura 2.24: *Tycho Brahe*. O idealizador de instrumentos.

Tycho Brahe (1546 - 1601) (Fig. 2.24) rejeitou o sistema heliocêntrico tanto no aspecto da física, como observacional, propondo um modelo alternativo que representava uma mistura do geocêntrico com o de Copérnico (Fig. 2.25E). Um fato ocorrido em novembro de 1572 levou-o a reconsiderar a Terra como centro do cosmos. O fenômeno observado foi o aparecimento na constelação de Cassiopéia, de uma nova (em dada circunstância, é possível que uma estrela anã branca passe por uma fase de atividade explosiva, apresentando alta luminosidade). Seu brilho foi tão intenso que ela pode ser vista, mesmo durante o dia, por um longo tempo (Fig. 2.25D). *Tycho* acompanhou essa estrela durante o período de dois anos, e constatou em suas andanças pela Europa, ser imperceptível a mudança de sua posição no céu, e portanto não pode, evidenciar o famoso efeito de paralaxe heliocêntrica. Concluiu também que essa imutabilidade estava ligada ao fato da estrela estar muito longe, o que levou-o a concluir tratar-se de um objeto que pertencia a esfera celeste. Esse fato contrariava a doutrina Aristotélica de que a esfera celeste era imutável. Seu trabalho com esta estrela lhe confere fama a ponto de convencer o rei *Frederico II* da Dinamarca, a construir com recursos da coroa, um observatório na ilha de Hveen: o *Uraniborg*.

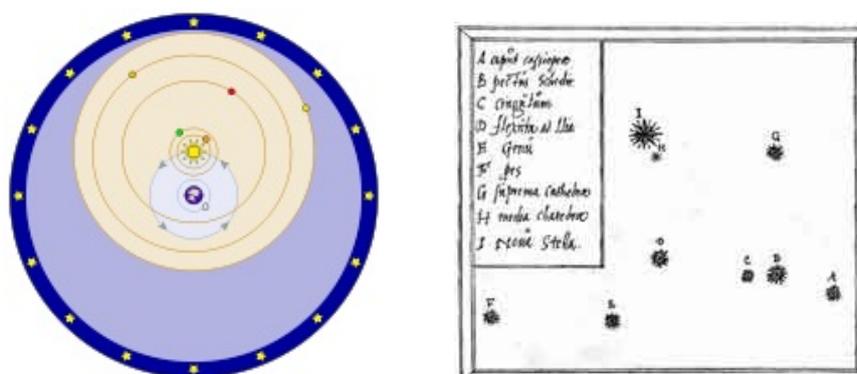


Figura 2.25: Modelo do cosmos de Tycho Brahe. Novae.

Sua vocação para o desenvolvimento instrumental levou-o a conceber instrumentos de alta qualificação (Fig. 2.24D). Com eles começou o primeiro programa observacional coerente, com precisão de 1 minuto de grau. Diferente dos programas observacionais de planetas, que na época se limitava a registrar o intervalo de tempo em que os planetas faziam as laçadas e o período em que essas se repetiam, *Tycho* empreendeu um programa que cobria uma parte considerável da trajetória dos astros (em particular de Marte).

Conquanto conhecesse o trabalho de *Copérnico*, *Tycho* não aceitava a idéia da Terra girar ao redor do Sol, pois nas diferentes tentativas que fez para detectar a paralaxe heliocêntrica, não obteve êxito. Com a morte de *Frederico II*, *Tycho* perde a proteção da coroa tendo que se mudar para Praga. Seu modelo do cosmos era insustentável, e por saber desse fato, fez com que seu assistente *Kepler* promettesse não utilizar seus dados observacionais, das campanhas de Marte, para provar que a Terra girava ao redor do Sol. Com a morte de *Tycho*, uma era da Astronomia se encerrava, iniciando-se uma nova baseada nas suas observações.

2.10 Johannes Kepler (a harmonia das esferas)

Kepler (1571 - 1630) (Fig. 2.26) nasceu na cidade de *Weil der Stadt* na Alemanha, tendo ingressado na Universidade de Tubinger em 1589. Enquanto estudante foi selecionado para trabalhar na Áustria, como professor de matemática, onde fez suas primeiras descobertas que levou-o a chave do problema dos movimentos planetários.

As duas primeiras leis foram apresentadas por *Kepler* pela primeira vez no ano de 1609, na sua obra intitulada “Astronomia Nova”, e possibilitaram duas mudanças básicas que condicionavam a maneira de se conceber os movimentos planetários na astronomia. A primeira, foi a ruptura com o axioma platônico de movimentos circulares e uniformes que condicionou a elaboração dos modelos dos movimentos planetários desde a época de Platão. A segunda, foi a possibilidade da astronomia tratar as suas hipóteses e construções de modelos voltados a enfoque realista, mediante caráter físico das leis. Em outras palavras, as duas primeiras leis de Kepler procuram descrever a realidade física dos movimentos dos planetas, ao contrário daqueles modelos sem vínculo com o que ocorre na esfera celeste.

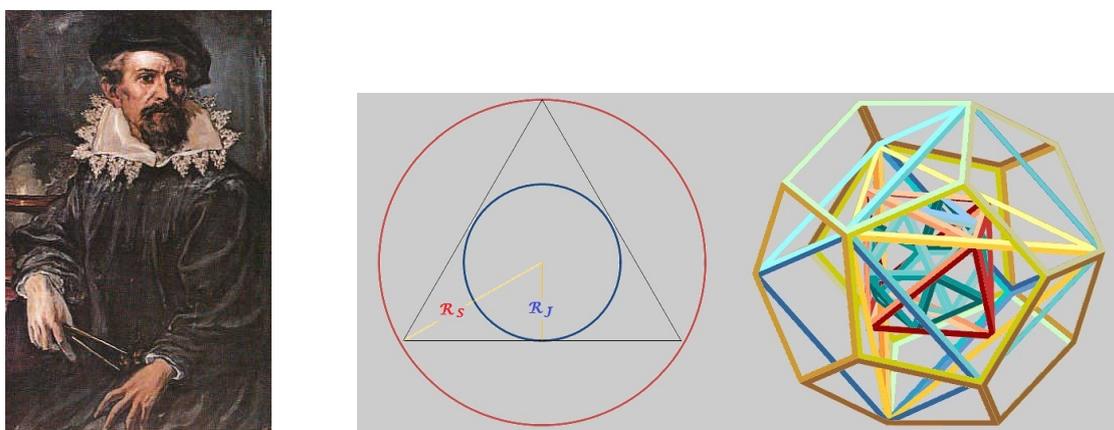


Figura 2.26: Johannes Kepler. Os poliedros regulares. A relação entre as órbitas de Júpiter e Saturno.

Todavia, esse trabalho exposto nessa obra de 1609 inicia-se, na verdade, com o primeiro trabalho astronômico de Kepler, o “Mysterium Cosmographicum”, editado em 1596 objetivava resolver alguns dos principais problemas da astronomia da sua época, tais como a determinação das órbitas planetárias; explicar a existência de apenas seis planetas, e a relação entre as órbitas com as distâncias dessas ao centro; e, elaborar leis que os descrevessem e explicassem.

Para resolver esses problemas, Kepler pretendia que o centro dos movimentos celestes fosse o Sol, sendo a Terra considerada como um planeta, que se movimentava da mesma forma que os outros, incluindo-se, dessa maneira, no rol dos defensor do sistema de Copérnico, e que pudessem ser descritos mediante a hipótese, por ele assim denominada, dos sólidos perfeitos, isto é, a inscrição e circunscrição dos cinco sólidos perfeitos conhecidos nas esferas correspondentes às órbitas dos seis planetas observados (Fig. 2.26).

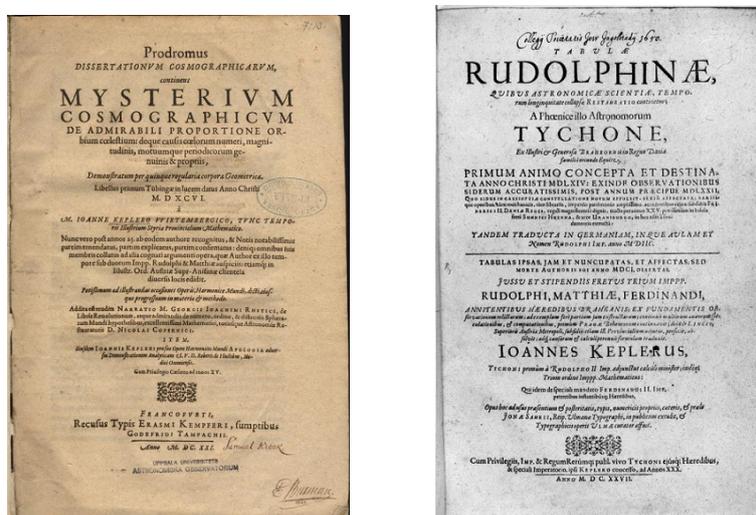


Figura 2.27: Mysterium Cosmographicum - trabalho de Kepler sobre as órbitas planetárias. Tabelas planetárias publicadas por Kepler.

A propósito da conjunção entre os planetas Júpiter e Saturno, que acontece com regularidade, verificou que suas órbitas poderiam ser imaginadas como duas circunferências, uma inscrita e outra circunscrita, em um triângulo equilátero. Neste caso os raios dessas órbitas deveriam estar na razão de 2:1, o que era surpreendente, visto que segundo o modelo de Copérnico, esta razão é de 1,83:1 (Fig. 2.26). Por achar este resultado interessante, julgou ter encontrado um modelo geométrico para o sistema solar.

Conforme declara Kepler no prefácio de seu “Cosmographicum”, sua intenção era de defender a criação do universo operado com cinco sólidos regulares, os quais foram considerados desde o tempo de Pitágoras e Platão.

Pode-se apreciar, pela citação acima, a idéia básica de Kepler sobre a ordenação do cosmos. Para ele, o universo foi construído segundo uma estrutura harmônica, isto é, todas as partes do universo (planetas, Sol, etc.) mantêm uma relação constante entre as suas distâncias e os tempos de percurso desses ao centro (Sol); sendo que o número de planetas conhecidos não foi dado ao acaso, mas por uma necessidade harmônica, determinada por um possível arranjo entre eles e os sólidos perfeitos, conforme Kepler gostaria.

Kepler imaginou então que pudesse explicar a distribuição dos planetas em suas órbitas

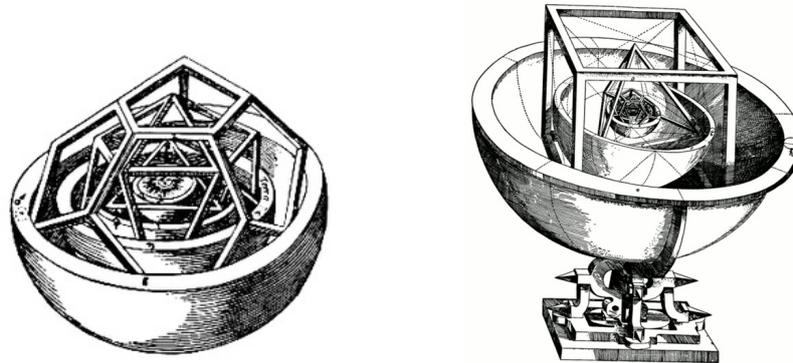


Figura 2.28: O espaçamento harmônico das órbitas planetárias.

por meio de figuras regulares, levando em conta a relação existente entre elas. Utilizou-se do fato de que apenas cinco sólidos são regulares, e que os seis planetas estavam separados por cinco espaços, considerou que a separação das órbitas planetárias poderiam ser explicadas pelo arranjo desses sólidos (Fig. 2.28). Essas idéias convenceram Kepler a considerar que o Sol poderia exercer uma força sobre os planetas que os impeliam em suas órbitas. Parecia razoável supor que o Sol exercesse uma força maior sobre Mercúrio que Vênus, pelo fato do primeiro estar mais próximo que o segundo, e portanto, sendo forçado a girar mais rapidamente.

Em 1594 publicou suas idéias em “*Mysterium cosmographicum*”, primeiro tratado que considerava um corpo central que regia, por conseguinte, os movimentos planetários. Essas novas idéias foram fundamentadas em conceitos modernos sobre os movimentos planetários. Foram introduzidas por *Kepler* para dar uma interpretação física ao modelo de *Copérnico*, admitindo que as órbitas planetárias eram determinadas por forças atuante entre o Sol e os planetas.

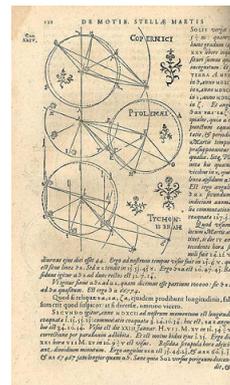
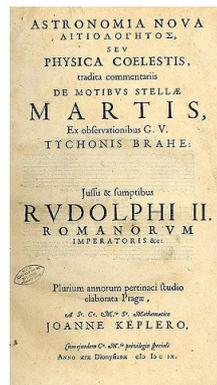


Figura 2.29: A Astronomia Nova.

Contudo, no “*Mysterium Cosmographicum*”, Kepler ainda não tinha condições de calcular matematicamente um modelo de dinâmica celeste. Nessa obra, ele apenas podia afirmar que o universo era constituído de uma estrutura matemática associada aos acontecimentos celestes a ser expressa em forma de leis universais, mas isso sem respaldo empírico. Dessa maneira, a preocupação kepleriana em estabelecer uma proporção entre as distâncias e os tempos, levou-o a investigar por que um planeta perde velocidade quanto mais longe está do Sol, e isso se dará,

na “Astronomia Nova”, por razões físicas, ou melhor, dinâmicas.

Kepler precisava encontrar as distâncias médias dos planetas ao centro dos movimentos, o Sol, a fim de determinar a excentricidade de suas órbitas. Em outras palavras, precisava encontrar dados, de melhor qualidade, que fornecesse os posicionamentos dos planetas na sua longitude heliocêntrica. Na ocasião esses dados eram conhecidos pelas tabelas “Prutênicas” (substituiu a de “Alphonsine”), baseadas na teoria de Copérnico. Contudo o tipo de órbita considerada por Copérnico (circular) ocasionava erros de 10 segundos de grau para as previsões dos movimentos, já que os planetas apresentavam um movimento de vai e vem característico.

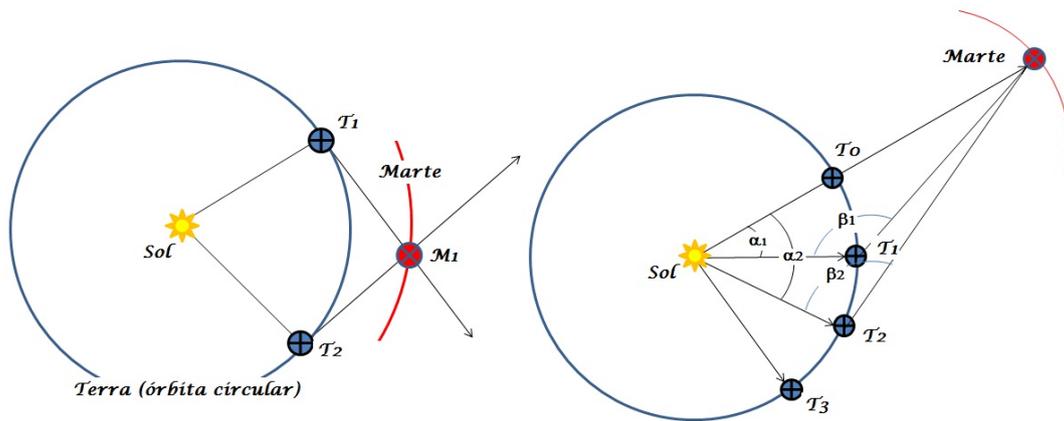


Figura 2.30: Cálculo das órbitas de Marte e da Terra a partir das observações de *Tycho Brahe*.

A primeira tentativa de *Kepler* para explicar um novo modelo do cosmos foi desenvolvida para descrever o movimento de Marte a partir das observações realizadas por *Tycho Brahe*. A adoção de uma órbita circular levou-o ao fracasso visto que as observações eram de grande precisão. Admitiu então uma órbita circular para o movimento de Marte e procurou no acervo observacional de Tycho aquelas separadas de um período orbital de Marte, uma vez tendo determinado esse parâmetro. Conhecendo as posições da Terra e de posse das direções de Marte vamos partir da configuração correspondente a oposição que ocorre no instante T_o . Admitindo a distância Sol-Marte (SM) conhecida, no triângulo SMT_1 conhecemos os ângulos α_1 e β_1 . Aplicando-se a lei dos senos, podemos obter a distância ST_1 da expressão:

$$ST_1 = \frac{SM}{\sin \beta_1} \sin(180^\circ - \alpha_1 - \beta_1)$$

Vamos repetir esse mesmo raciocínio para a posição da Terra T_2 , que corresponde ao instante $t = T_o + 2T$, onde T corresponde ao período sideral de Marte. Generalizando teremos, para os instantes: $t_n = t_o + nT$, as distâncias Terra-Marte (raio vetor da Terra):

$$ST_n = \frac{SM}{\sin \beta_n} \sin(180^\circ - \alpha_n - \beta_n)$$

Kepler construiu um gráfico da posição da Terra em função da direção do momento da oposição, que resultou em uma figura próxima a uma elipse com um movimento com velocidade areolar constante (Fig 2.31).

Com um procedimento semelhante, adotou um movimento com uma trajetória elíptica para a Terra e procurou aquelas separadas do ano para obter a forma da trajetória de Marte, que

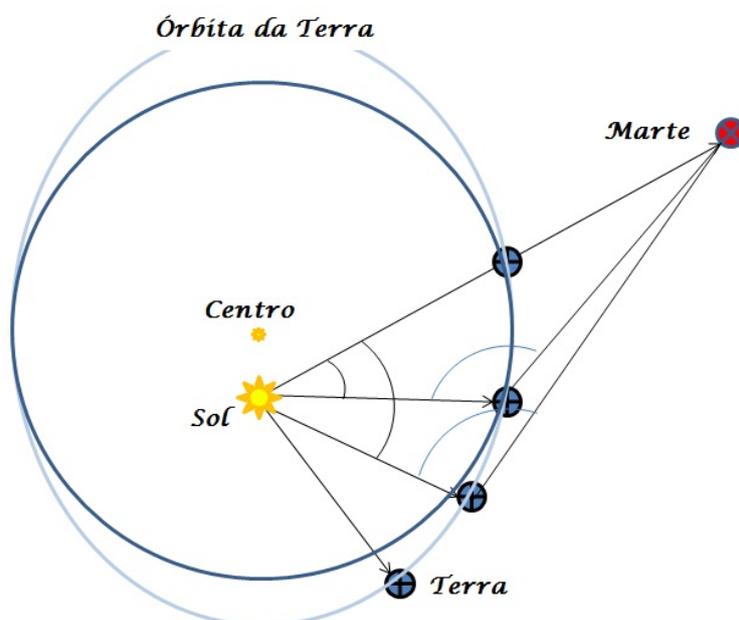


Figura 2.31: Posição da Terra em função do tempo obtida das por Kepler do acervo observacional de Brahe

levou-o a mesma conclusão: trajetória elíptica e velocidade areolar constante. A terceira lei veio mais tarde em 1619, após ter perdido longo tempo nos seus modelos geométricos.

2.10.1 As leis de Kepler

- Primeira lei (1609) - Os planetas se movem em elipses com o Sol em um dos focos.
- Segunda lei (1609) - Os planetas se movem com velocidade areolar heliocêntrica constante.
- Terceira lei (1619) - A relação entre o quadrado do período orbital de um planeta e o cubo da sua distância média ao Sol é igual para todos os planetas.

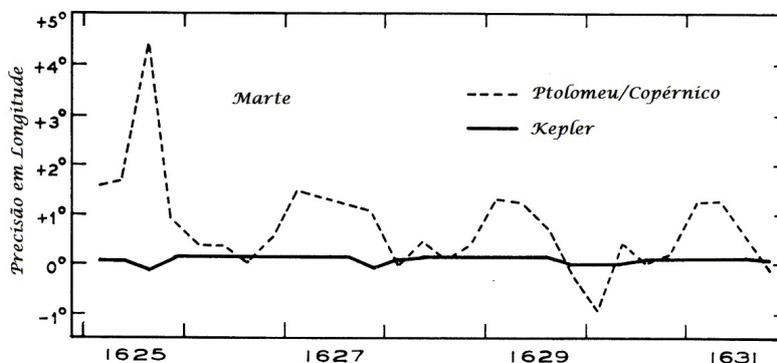
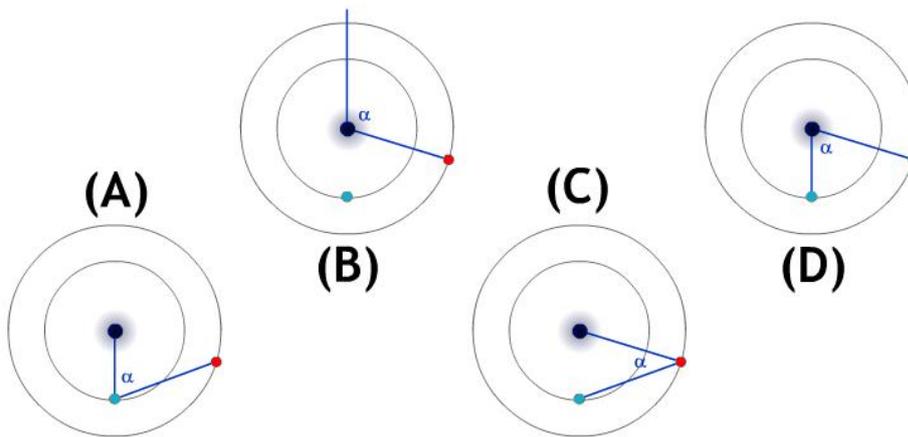


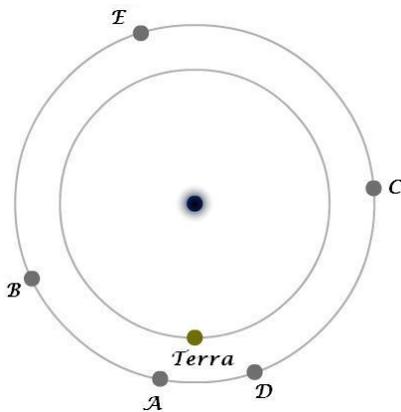
Figura 2.32: Precisão nas posições, em longitude eclíptica, do planeta Marte

2.11 Exercícios

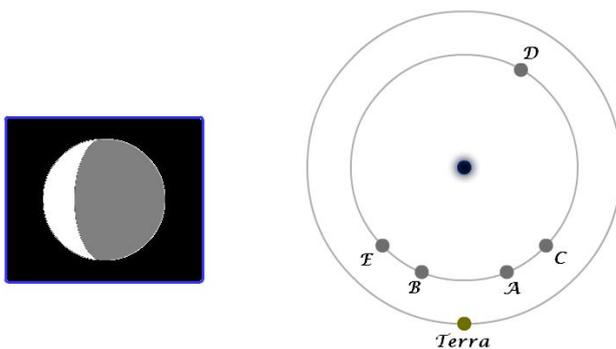
1ª Questão. Qual dos diagramas abaixo ilustra corretamente a elongação de Marte.



2ª Questão. Qual das opções abaixo representa um a elongação de 10° .

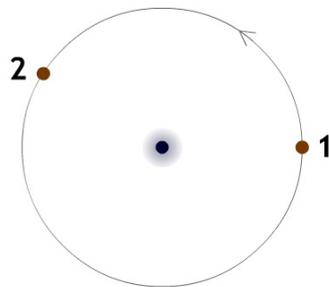


3ª Questão. Baseando-se no modelo de Copérnico, qual dos seguintes opções corresponde à fase de Vênus proposta na figura do lado esquerdo?

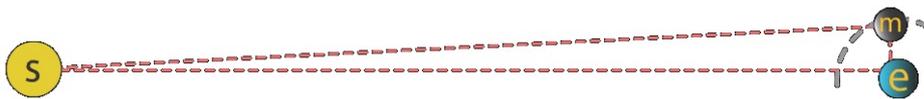


4ª **Questão.** A figura abaixo mostra a Terra em duas posições de sua órbita ao redor do Sol. Quantas rotações foram necessárias que a Terra executasse para passar da posição 1 para a 2?

- (A) 0.42
- (B) 5
- (C) 10
- (D) 150
- (E) 365



5ª **Questão.** Aristarco observou a separação angular do Sol e da Lua usando o triângulo mostrado na figura abaixo para estimar a distância Terra-Sol (em termos da distância Terra-Lua). Ele utilizou a lua na fase de quarto crescente porque neste instante ...



- A) a Lua está mais distante da Terra
- B) o ângulo $EMS = 90^\circ$
- C) o ângulo ESM é mínimo
- D) a lua está mais próxima do Sol
- E) o ângulo ESM é máximo

Capítulo 3

A visão do céu

3.1 O movimento aparente das estrelas

A maioria de nós já teve a possibilidade de olhar o céu a partir de um local afastado dos grandes centros urbanos e, portanto, despoluído da iluminação artificial. A primeira impressão é a de que os objetos celestes estão espalhados ao acaso sem que se vislumbre, em princípio, uma ordenação entre os mesmos. As diferenças perceptíveis são as de brilho e de cor. Vemos que os objetos celestes estão estampados em um fundo de forma semi-esférica que representa o céu. Com o tempo, ainda que sem regras, percebemos a existência de agrupamentos estelares que se apresentam sob forma de figuras indissociáveis e que representam as constelações.

Conhecidas desde a Antigüidade, as constelações são definidas como agrupamentos de estrelas que esboçam uma figura mitológica (ou às vezes realista, com boa imaginação). Na Babilônia, as constelações foram utilizadas como marcos para fornecer as posições do Sol e da Lua e também como fonte para o estudo do movimento dos planetas. As constelações conhecidas hoje (88 no total) foram estabelecidas pela União Astronômica Internacional. Se você as observar com regularidade, verá que suas respectivas formas não mudam, de modo perceptível, ao longo de muito tempo.

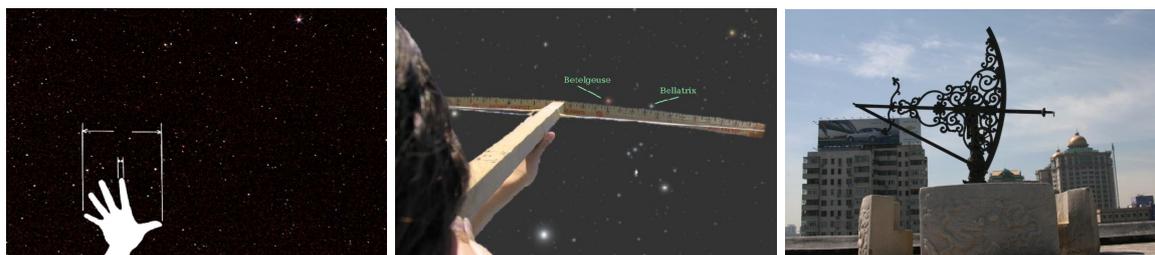


Figura 3.1: Medida da distância angular entre duas estrelas.

Para posicionar o Sol ou a Lua entre as estrelas é preciso medir a distância entre as estrelas ou mesmo entre estrelas e um objeto celeste qualquer. Esse trabalho foi importante e ajudou a conhecermos o movimento dos corpos do sistema solar. Uma maneira simples de estimarmos a separação angular entre dois objetos celestes pode ser realizado com a ajuda das mãos que, projetadas no céu (Fig. 3.1), estabelecem uma correspondência de valores angulares aproximados. Esses valores equivalem às separações angulares ou distâncias angulares. Técnicas mais apu-

radas foram utilizadas pelos astrônomos para medir as distâncias angulares entre os diferentes objetos celestes (ver capítulo 4 neste fascículo).

Por outro lado, o Sol e a Lua, assim como Vênus, cobrem uma certa porção visível significativa do céu chamada de diâmetro angular. Estes objetos aparecem como discos projetados no céu e a medida de seus diâmetros angulares corresponde à distância angular entre suas extremidades opostas (limbos) (Fig. 3.2).



Figura 3.2: Diâmetro angular dos objetos. Crédito: Laurent Laveder (PixHeaven.net/TWAN).

Para notarmos o movimento aparente das estrelas, basta que observemos o céu durante uma noite desde o anoitecer até o amanhecer. As estrelas parecem se mover relativamente ao horizonte¹ nascendo do lado leste, descrevendo, na maior parte das vezes, um pequeno arco no céu, pondo-se do lado oeste (Fig. 3.3).



Figura 3.3: Traços das estrelas no céu. Crédito. Credit & Copyright: Elke Schulz (Gemini South Star Trails)

¹Horizonte é a linha imaginária que corresponde à intersecção do céu com a Terra e que pode melhor ser percebido se estivermos situados no mar.

Se você vive no hemisfério sul e olhar na direção do pólo, verá que algumas estrelas nunca se põe em relação ao horizonte. Essas estrelas descrevem pequenos círculos todos centrados no pólo celeste (Fig. 3.3). No hemisfério sul não encontramos nenhuma estrela que se situe nesse ponto, a Sigma Octante ($V^* \sigma \text{ Oct}$) é a mais próxima. No hemisfério norte, por sua vez, podemos ver uma estrela de brilho moderado denominada Polaris ($\alpha \text{ Ursa Menor}$) que está bem próxima do pólo celeste norte. Essas estrelas foram bastante observadas com o propósito de estudar o movimento de rotação da Terra.

Se você possui o hábito de observar o céu, com certa frequência durante o ano, notará que as constelações também mudam de posição em função das estações do ano. Assim, no verão e por volta das 20h00, é possível ver a constelação de Orion em seu movimento para o oeste, aproximando-se do Sol. A observação deve ser realizada em noites sucessivas e nos mesmos horários. No inverno, você poderá observar a constelação de Escorpião (Fig. 3.4). Nesta época Orion não poderá ser vista porque ela estará próxima do Sol (movimento aparente anual do Sol).

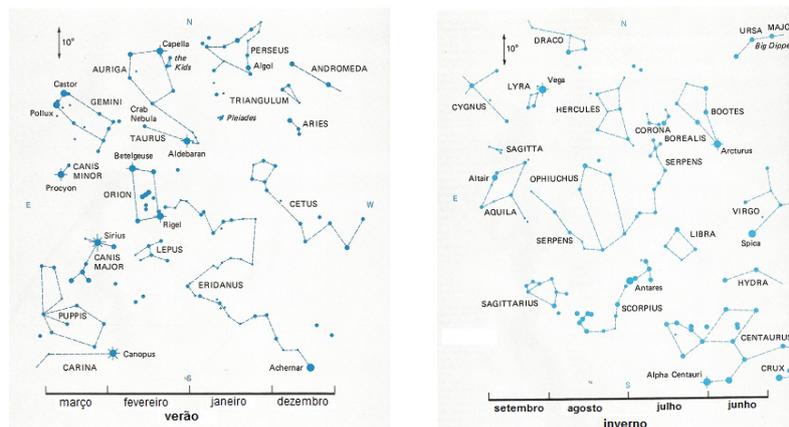


Figura 3.4: Carta do céu: (a) Verão e (b) Inverno.

3.2 Exercícios

1ª Questão.

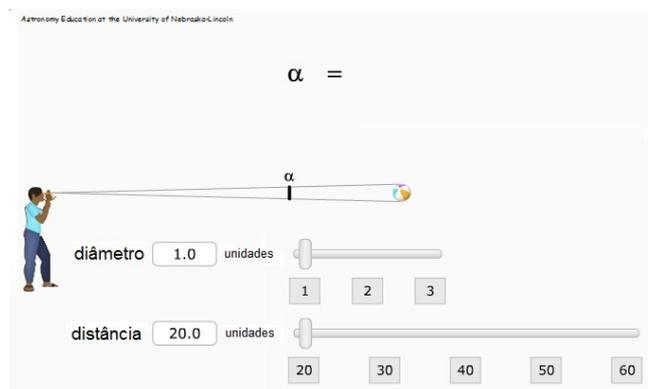
O tamanho angular da Lua é um dado fácil de obter bastando que se faça uma consulta a um livro de astronomia. Imagine, entretanto que se queira obter o tamanho de um objeto distante. De que maneira prática podemos obter esse tamanho? Uma idéia é utilizar um objeto como referência, e nesse caso estamos propondo que se utilize da Lua. Nosso artifício consistirá em obter uma foto da Lua e outra do objeto em questão com a mesma distância focal, ou ainda colocá-los em uma mesma foto. As medidas necessárias para o cálculo podem ser obtidas utilizando um programa de exibição de imagens. Utilizar a figura abaixo para calcular o tamanho da cúpula do telescópio.

Dados: a) distância entre o fotógrafo e a cúpula 1440 metros.

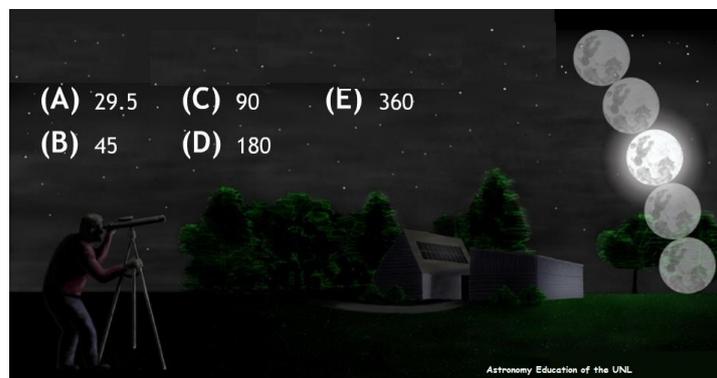
b) tamanho angular da Lua na data 0,55° da foto.



2ª Questão. Na figura abaixo α representa o ângulo que cobre por completo o diâmetro da bola. Deduza a expressão que dá o valor de α em função da distância e do diâmetro linear da bola e calcule o valor desse ângulo em segundos de grau para cada combinação de distância e diâmetro linear proposta.



3ª Questão. Quantas luas poderiam ser enfileiradas do horizonte até o zênite (ponto diretamente acima de nossas cabeças).



3.3 O movimento aparente do Sol

O movimento aparente diário do Sol - desde o nascer, no lado leste, traçando um pequeno círculo no céu, até o pôr, no lado oeste, define um dos ciclos básico de tempo: o dia (intervalo de tempo correspondente à soma do dia claro e da noite).

No meio do caminho entre o amanhecer e o pôr, o Sol ascende ao seu ponto mais alto relativamente ao horizonte, o que define o meio do dia (passagem superior pelo meridiano local²). O intervalo entre duas sucessivas culminações caracteriza a duração do dia solar.

Façamos agora uma experiência fixando no solo uma pequena vara na posição vertical em um lugar plano. Você acaba de construir um instrumento rudimentar para estudar os movimentos aparentes diário e anual do Sol no céu relativamente ao horizonte. Este dispositivo é chamado de gnômon e é utilizado como indicador das horas solares pelas sombras projetadas. Examinemos a sombra produzida por este instrumento. A ponta da sombra marca o fim de uma linha que liga o Sol ao topo da vara (Fig. 3.5). A sombra aponta na direção do Sol e o comprimento da sombra é indicativo da altura do Sol com relação ao horizonte. Quanto mais baixo está o Sol, mais longa é a sombra que ele projeta da haste. Ao meio-dia a sombra tem o menor tamanho.

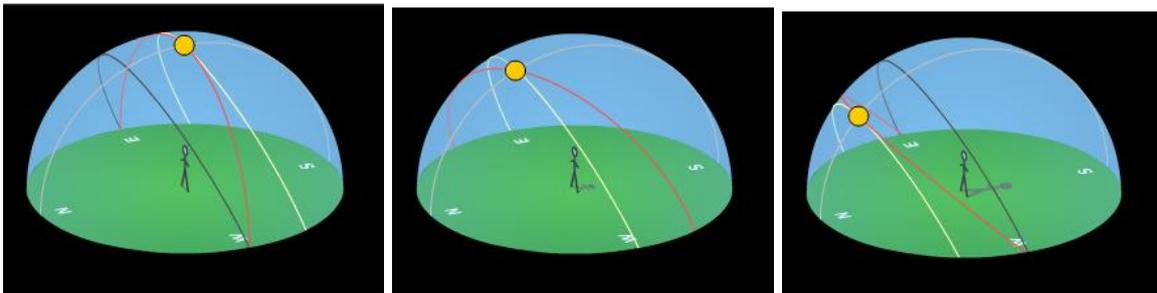


Figura 3.5: Sombra projetada pelo gnômon segundo a posição do Sol no céu em São Paulo ($\phi = 23^\circ$) (Astronomy Education at the University of Nebraska-Lincoln).

Observe a sombra do Sol ao meio-dia ao longo de um ano. Você notará que a altura do Sol no céu ao meio-dia varia em função da estação do ano. É exatamente no verão que a sombra tem seu menor tamanho. Ao meio-dia do solstício de verão (por volta de 21 de dezembro), o dia

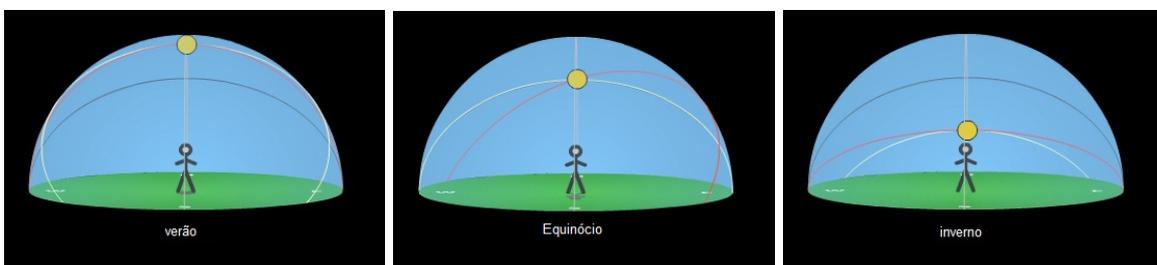


Figura 3.6: O Sol ao meio-dia, quando está em sua posição mais alta no céu (Astronomy Education at the University of Nebraska-Lincoln).

claro possui o maior número de horas e o Sol está no ponto mais alto do céu para as localidades

²Plano definido pelos polos e pelo zênite, o ponto mais alto de uma dada localidade (ver capítulo 4)

de latitudes maiores que $23,5^\circ$ (em valores absolutos). No entanto, ao meio-dia do solstício de inverno (por volta de 21 de junho), o Sol projeta a maior sombra do ano. Neste caso, o dia claro tem o menor número de horas e o Sol do meio-dia está no ponto mais baixo do céu no ano. Entre as duas épocas, ao meio-dia, o gnômon produz uma sombra de comprimento entre seu mínimo no verão e seu máximo no inverno (Fig. 3.6). O ciclo de sombras de um gnômon define a segunda unidade básica do tempo: o ano e suas estações.

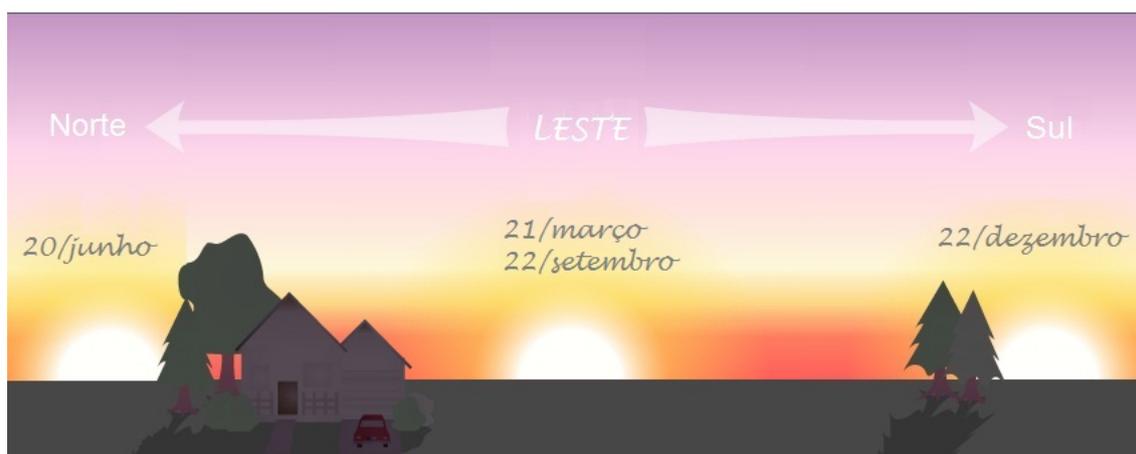


Figura 3.7: Variação da posição do nascer no horizonte (latitudes acima de $23,5^\circ$, em módulo) (Astronomy Education at the University of Nebraska-Lincoln).

As mudanças na posição do Sol ao meio-dia em função das estações do ano também podem ser vistas quando do nascer ou do pôr do Sol (Fig. 3.7). Considere o amanhecer em dada localidade do hemisfério sul durante o solstício de verão. Para latitudes de valores em módulo acima de $23,5^\circ$, o Sol nascerá em uma posição mais ao sul. Após o solstício de verão, a posição do Sol ao amanhecer se desloca para o norte e no solstício de inverno, o nascer ocorrerá no ponto mais afastado do ponto cardeal leste. Entre essas duas posições, o Sol nascerá exatamente no ponto cardeal leste por ocasião dos equinócios, quando a duração do dia é igual à da noite.



Figura 3.8: O movimento aparente do Sol relativamente às estrelas.

O Sol se move (aparentemente) com respeito às estrelas - um movimento difícil de se observar,

porque não podemos ver as estrelas durante o dia. Uma forma de fazer essa constatação é escolher uma constelação brilhante visível logo após o pôr do Sol. Repita essa experiência na mesma hora durante aproximadamente uma semana. A constelação estará mais próxima do horizonte e portanto mais próxima do Sol (Fig. 3.8). Relativamente às estrelas, o Sol parece se mover para leste. Em um ano, o Sol voltará para a posição inicial com respeito às estrelas, o que perfaz uma volta de 360° em um ano ou aproximadamente 1° por dia.

O quão rápido um objeto cobre uma certa distância angular define a velocidade angular. Relativamente às estrelas, o Sol se move com uma velocidade angular de aproximados 1° por dia. Imagine que possamos registrar a posição do Sol entre as estrelas durante um ano. Se traçarmos uma linha imaginária que ligue esses pontos, teremos um círculo: este é denominado eclíptica. As doze constelações tradicionais por onde o Sol passa ao longo de um ano estão distribuídas em uma região centrada nesse círculo a qual chamamos faixa zodiacal (Fig. 3.9).

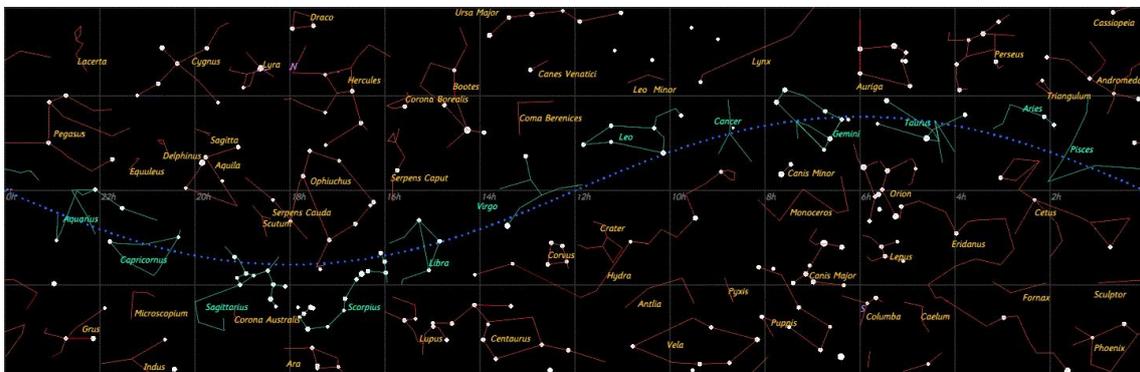


Figura 3.9: A eclíptica e as estrelas zodiacais.

3.4 O movimento da Lua

3.5 Fases da Lua

Há muito tempo que os seres humanos observaram que o aspecto da Lua (ou fases da Lua, para os gregos) mudava periódica e ciclicamente. Foi Aristarco (310-220 a.C.) que no século III a.C. explicou a razão das fases lunares:

- a) o Sol é um corpo luminoso (emissor de luz);
- b) a Lua é um corpo iluminado (apenas reflete a luz que recebe do Sol);
- c) num dado instante, um hemisfério da Lua (aquele voltado para o Sol) estará iluminado, enquanto o outro, estará escuro;
- d) devido à posição relativa entre Sol, Lua e Terra, nós podemos ver, em instantes diversos, as diferentes áreas da Lua iluminadas pelo Sol;
- e) dependendo da área iluminada observável, teremos as diferentes fases da Lua.

Sabemos que a Lua é um corpo aproximadamente esférico. Contudo, devido à grande distância a qual ela se encontra da Terra, temos a impressão de que a Lua se torna apenas um “disco” no céu. Chamamo-lo de *disco lunar*. Poderíamos dizer que o disco lunar representa a face da Lua voltada para a Terra.

Como o movimento de rotação da Lua em torno do próprio eixo é síncrono com seu movimento de revolução em torno da Terra (os movimentos são síncronos, pois ambos têm o mesmo período), a Lua apresenta sempre a mesma face para nós. Assim, a Lua tem, para os habitantes da Terra, uma face visível e uma face oculta (que só foi vista e fotografada por naves espaciais que deram a volta em torno dela). Durante a órbita da Lua ao redor do nosso planeta, há períodos em que

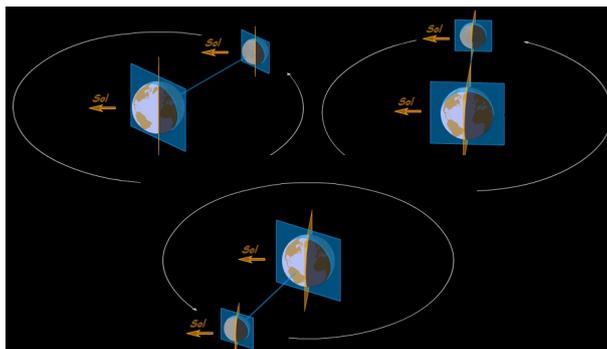


Figura 3.10: Movimento orbital e fases da Lua.

todo o hemisfério iluminado da Lua pode ser visto da Terra: dizemos então que a Lua está na fase Cheia.

Caso o hemisfério iluminado não seja visível da Terra, a fase da Lua é descrita como Nova. Neste caso, o disco lunar ou não é perceptível ou, na melhor das hipóteses, apresenta um aro circular muito tênue como silueta da Lua.

Quando apenas metade do hemisfério iluminado é visível da Terra, ocorre uma quadratura.

Caso a quadratura ocorra entre a Lua Nova e a Lua Cheia, dizemos que a fase da Lua é Quarto Crescente. Para os habitantes do hemisfério sul do planeta, a parte iluminada da Lua lembrará vagamente a forma da letra *C* maiúscula.

Se a quadratura ocorrer entre a Lua Cheia e a Lua Nova, dizemos que a fase da Lua é Quarto Minguante. Para os habitantes do hemisfério sul da Terra, a forma do disco lunar parecerá vagamente com a da letra *D* maiúscula.

Chamamos de *lunação* ou *período sinódico* da Lua ou *mês sinódico* o intervalo ocorrido entre duas luas Novas consecutivas:

$$\text{Lunação} = 29^d 12^h 44^m 02^s,9 = 29^d,530589$$

Matematicamente, a fase da Lua representa o quociente entre o diâmetro angular da parte iluminada da Lua (d'), pelo diâmetro iluminado da Lua na fase Cheia (d):

$$\phi = \frac{d'}{d}$$

Para os valores zero, meio e um, temos, respectivamente, as Luas Nova, Crescente (ou Minguante) e Cheia. Nos casos de Lua Nova, Quarto Crescente, Cheia e Quarto Minguante, as diferenças entre as longitudes eclípticas da Lua e do Sol ($l_{\text{Lua}} - l_{\text{Sol}}$) serão, respectivamente, 0^0 , 90^0 , 180^0 e 270^0 .

Define-se como *idade da Lua* o número de dias decorridos desde a última Lua Nova.

Denomina-se *terminadouro* a linha, na superfície da Lua, que separa sua parte iluminada de sua parte escura.

3.6 Eclipse

Um outro fenômeno que envolve as posições relativas entre o Sol, a Lua e a Terra, somado ao fato de que apenas o Sol é um corpo luminoso, é o eclipse.

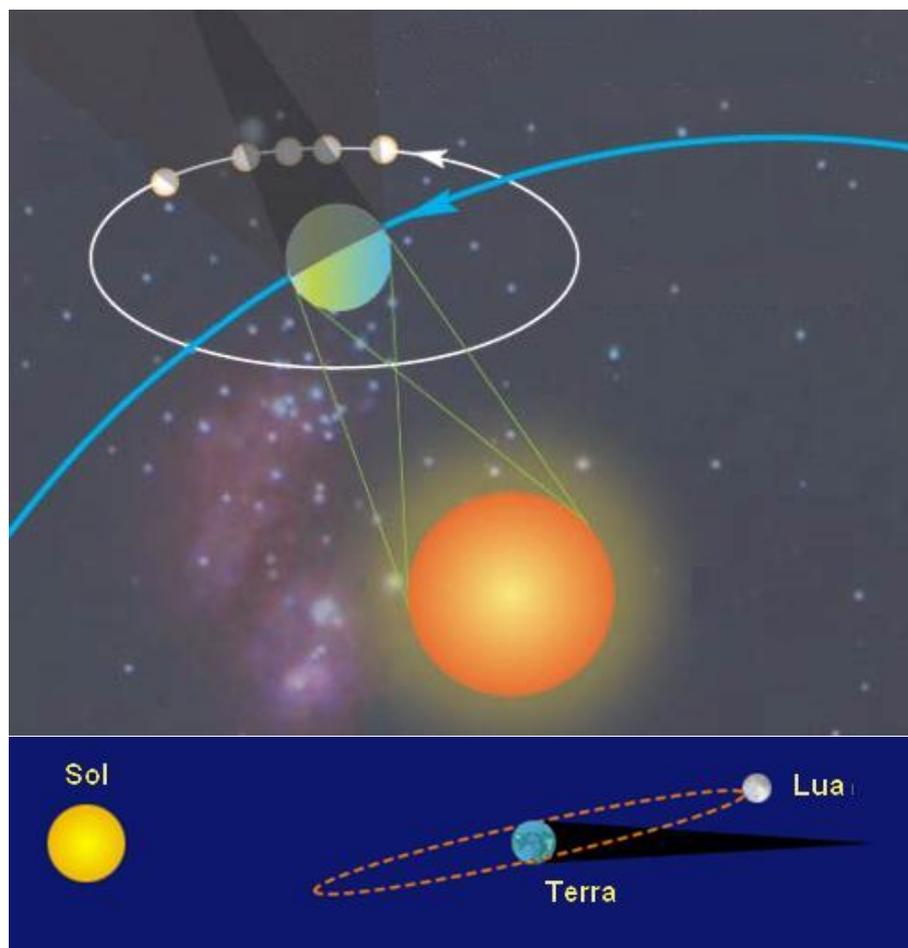


Figura 3.11: Configuração Sol-Terra-Lua para eventual ocorrência de eclipses.

Um *eclipse solar* ocorre quando a Lua se interpõe entre o Sol e a Terra, impedindo que parte dos raios solares atinjam a Terra.

O eclipse solar é total quando o observador não puder receber nenhum raio vindo do Sol; caso parte do Sol continue visível, o eclipse é dito solar parcial. Se, em particular, o centro do Sol fique encoberto pela Lua e restar apenas um anel brilhante em torno do centro obscurecido, então o eclipse é denominado solar anular.

Caso nosso planeta se coloque entre o Sol e Lua, ele impedirá que os raios solares atinjam a Lua. Quando a Lua fica completamente na região de sombra da Terra, diz-se que o eclipse lunar é umbral total. Caso apenas parte da Lua fique obscurecida pela sombra da Terra, temos um eclipse lunar umbral parcial. Umbra é a parte da sombra que não recebe luz de nenhum ponto da fonte luminosa (é a região do cone de sombra compreendida entre as tangentes externas ao Sol e à Terra). Penumbra é a região da sombra que não recebe luz de todos os pontos da fonte

luminosa (é a região compreendida entre as tangentes internas ao Sol e à Terra, excluídas as partes pertencentes à umbra).



Figura 3.12: Eclipses do Sol: parcial, anular e total.

Quando a Lua entra completamente na região de penumbra, temos o eclipse penumbral total da Lua; caso apenas parte da Lua fique na penumbra, temos o eclipse penumbral parcial da Lua. Devido à pequena diminuição de brilho da Lua durante um eclipse penumbral, é muito difícil, se não impossível, perceber um tal eclipse a olho nu.

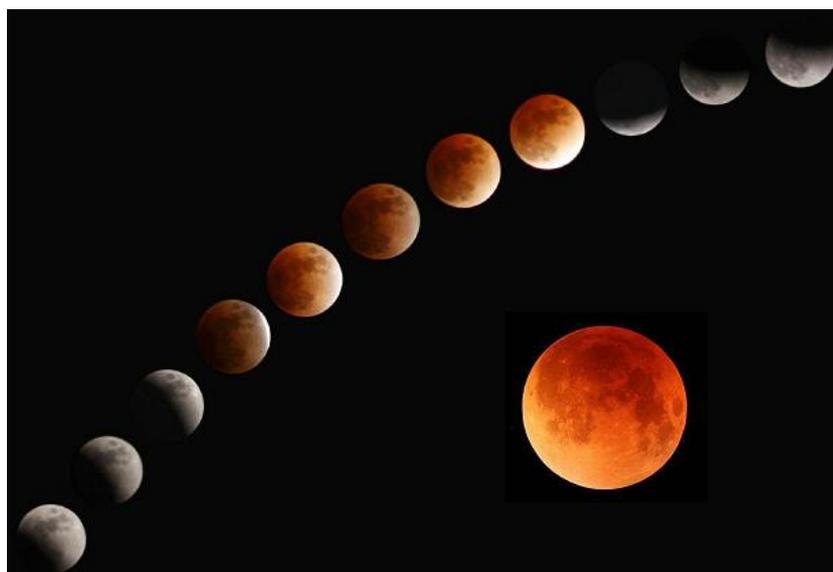


Figura 3.13: Eclipse da Lua.

É importante notar que o plano de órbita da Lua em torno da Terra não coincide com o plano de órbita da Terra em torno do Sol (Fig. 3.11). Na realidade, o plano da órbita da Lua está inclinado de cerca de $5,2^\circ$ com relação ao plano da órbita da Terra. Isso significa que, apesar de os três astros aparecerem, nos esquemas apresentados, alinhados nas épocas de Lua Nova (eclipse solar) e de Lua Cheia (eclipse lunar), nem sempre quando a fase for de Lua Nova ocorrerá eclipse solar e nem sempre quando a fase for de Lua Cheia haverá eclipse lunar, pois, na realidade, a Lua poderá estar ligeiramente acima ou abaixo do plano da eclíptica. Apenas quando a Lua estiver neste plano ou muito próximo dele é que poderá haver eclipse nas fases de

Lua Cheia e Nova.



Figura 3.14: Relação entre eclipses e fases da Lua.

A linha de intersecção do plano da órbita da Lua com o plano da eclíptica recebe o nome de *linha dos nodos*. O ponto da linha onde a Lua passa do hemisfério Sul para o Norte é chamado de nodo ascendente da órbita lunar; o ponto onde a Lua passa para o hemisfério Sul é denominado de nodo descendente da órbita lunar. Os eclipses só podem ocorrer quando a Lua estiver próxima dos nodos lunares, quando da época de mudança de fase para Lua Nova ou Cheia.

Por meio da geometria e da cinemática do movimento lunar e solar podemos mostrar que durante um ano ocorrem, no mínimo, dois eclipses, sendo ambos solares. Podem ocorrer, no máximo, sete eclipses por ano, sendo dois ou três lunares e cinco ou quatro solares, respectivamente.

A cada 18 anos e 11,3 dias, os eclipses ocorrem novamente na mesma ordem; esse período é chamado de *período de Saros*. Em cada um desses períodos ocorrem 70 eclipses perceptíveis a olho nu, sendo 41 solares e 29 lunares.

3.6.1 Região de visibilidade de um eclipse.

Durante um eclipse lunar, todos os habitantes da Terra que puderem ver a Lua poderão presenciar o eclipse. Isso corresponde, aproximadamente, à 1/3 da área da superfície da Terra.

A visibilidade de um eclipse solar, por sua vez, é bem mais restrita. A faixa de totalidade, isto é, a faixa da superfície da Terra da qual se pode ver o eclipse total tem cerca de 200 km de largura (direção norte-sul) e uma extensão que pode chegar a vários milhares de quilômetros. A faixa da superfície terrestre de onde se pode ver o eclipse parcial é bem maior, com largura norte-sul de cerca de 5 mil km e largura de alguns milhares de km. A faixa de visibilidade do eclipse anular é igual a do eclipse total.

3.6.2 Máxima duração de um eclipse.

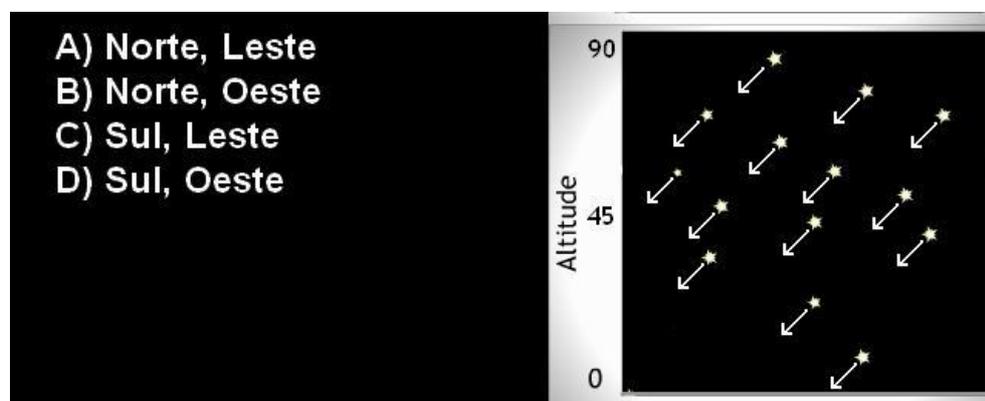
Conhecendo-se as características geométricas e cinemáticas dos elementos envolvidos no eclipse, torna-se possível calcular que, no caso de um eclipse solar, a máxima duração da fase de totalidade é de cerca de 7min 30s. Nem todos os eclipses solares totais, porém, têm essa duração. Condições diversas, entre elas, a distância da Terra ao Sol (a qual varia a cada época do ano), a

distância da Lua à Terra e a posição da sombra da Lua na Terra são alguns dos fatores determinantes para tal estimativa. A duração total de um eclipse solar, desde o momento em que a Terra inicia a entrada na região de penumbra, até o momento em que ela sai completamente da região penumbral, é de cerca de 6h15m.

No caso de um eclipse lunar, a duração da fase de totalidade pode chegar a 1h45m e a duração total do eclipse pode chegar a 6h19m.

3.7 Exercícios

1ª **Questão.** A figura abaixo representa o movimento de um conjunto de estrelas vista por um observador situado em uma latitude do hemisfério _____ olhando para o lado_____.



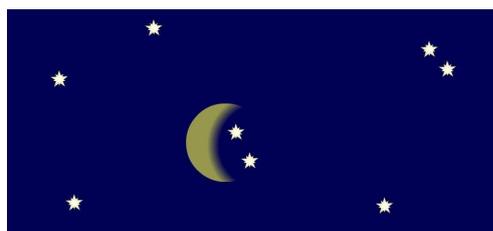
2ª **Questão.** Você olha para o céu na direção do Sul a aproximadamente 21:00 horas. A Lua está a sua direita, perto do horizonte. Com base nestas condições responda:

- A Lua está nascendo ou se pondo?
- Qual sua fase?

Na noite seguinte você repete sua observação no mesmo horário.

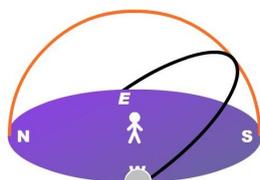
- Qual a posição da Lua em relação a noite anterior? Esta mais elevada, mais baixa, ou na mesma posição?
- Caso ela tenha se movido este movimento ocorreu para o leste ou para o oeste em relação às estrelas?
- Sua fase mudou? Em caso afirmativo, explique?

3ª **Questão.** Um desenho similar ao que está abaixo apareceu em um anúncio em uma revista. O que há de errado com este desenho? Comente.



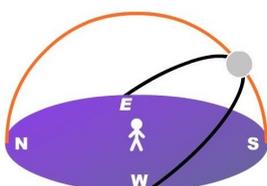
4ª **Questão.** No diagrama abaixo, a lua está no horizonte oeste e indicada apenas como um círculo cinza sem informações a respeito da sua fase. Se for meia-noite, qual a fase da lua:

- A) Nova
- B) Quarto crescente
- C) Cheia
- D) Quarto minguante



5ª **Questão.** Na figura abaixo a lua está no meridiano. Se a fase da lua for cheia, que horas são aproximadamente:

- A) Meia noite
- B) 6 horas da manhã
- C) Meio dia
- D) 18 horas



6ª **Questão.** A primeira aparição da lua crescente do mês tem um significado especial para os muçulmanos, uma vez que marca as datas de atividades religiosas, como o início e o fim do período de jejum. Para ver o primeiro dia de lua crescente, onde e quando você deve procurar?

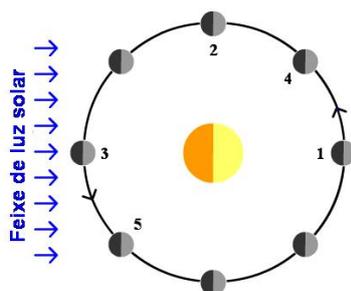
- A) perto do horizonte leste antes do nascer do sol
- B) próximo ao horizonte leste, após o nascer do sol
- C) acima de sua cabeça perto da meia-noite
- D) perto do horizonte oeste antes do anoitecer
- E) perto do horizonte oeste após o por do sol



7ª **Questão.** Se o Sol se põe a oeste no equinócio vernal, três semanas mais tarde ele se porá:

- a) mais ao Norte para Oeste
- b) diretamente na direção oeste
- c) mais ao Sul para oeste

8ª **Questão.** A figura abaixo mostra a lua em diferentes posições na órbita, ilustrando a geometria das fases, numeradas de 1 a 5. Que posição corresponde a lua nova? Qual das posições corresponde a fase da lua cheia?



9^a **Questão.** Qual é a fase da lua imediatamente antes de um eclipse solar?

- a) nova
- b) quarto crescente
- c) quarto minguante
- d) cheia

10^a **Questão.** Qual é a fase da lua imediatamente antes de um eclipse lunar?

- a) nova
- b) quarto crescente
- c) quarto minguante
- d) cheia

Capítulo 4

A Esfera Celeste.

O movimento diurno da esfera celeste é interpretado, depois de Copérnico, como consequência do movimento de rotação da Terra. O estudo do movimento dos objetos celestes em relação à esfera local (imóvel para um observador na Terra), foi explorado desde a antigüidade, levando a diferentes interpretações até a adoção final do sistema heliocêntrico. Entretanto, o estudo do movimento das estrelas simplifica-se se suas direções forem referidas a um sistema de coordenadas celestes equatoriais (referenciadas ao plano do equador).

Para descrever o movimento diurno das estrelas, é suficiente estudar o movimento do sistema de referência equatorial em relação ao sistema local (referidas ao plano do horizonte), o que nos levará a definir o tempo sideral, a latitude, além das longitudes, a fim de relacionar dois sistemas em localidades distintas na terra.

O movimento diurno é o que determina o nascer e pôr do Sol, Lua, planetas e das estrelas, e em especial o estudo destes últimos objetos celestes, que são habitualmente conhecidas por “fixas”, será feito desprezando-se os efeitos devido à refração astronômica, assim como outros, menos perceptíveis, devido a precessão, nutação, aberração e a paralaxe.



Figura 4.1: Traços do movimento das estrelas ao redor do pólo, gravado antes do nascer da lua no Observatório Gemini Sul, Cerro Pachon, Chile. As duas manchas leitosas são as Nuvens de Magalhães, e completam a cena um rastro de um meteoróide do lado esquerdo da figura.

O movimento diurno da esfera celeste corresponde ao movimento de todo o conjunto do céu. Ele deve ser entendido como a composição de uma “esfera celeste local”, onde serão caracterizados os elementos do sistema de referência local, com uma segunda em rotação onde serão caracterizados os pontos que definem as direções das estrelas. Esses pontos, invariavelmente ligados entre si como as imagens das estrelas sobre um globo celeste, será denominado de “esfera das fixas” por questão de tradição. Como o movimento diurno não deforma as posições relativas dessas estrelas, ele será entendido como o movimento da esfera das fixas em relação à esfera local.

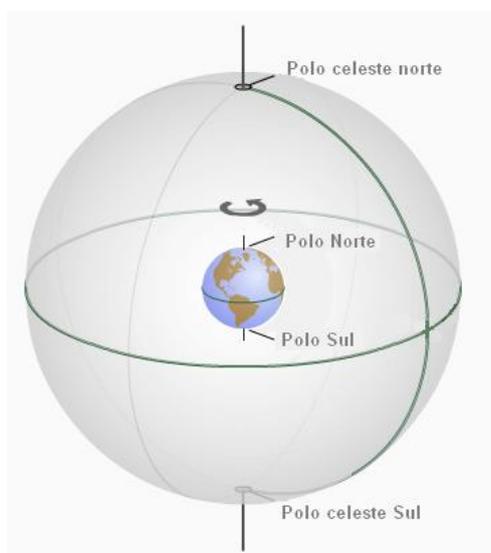


Figura 4.2: A esfera celeste local e a esfera das fixas.

O movimento geral da esfera celeste corresponde a sua rotação em torno de um “eixo de rotação instantâneo”, cuja intersecção com cada uma das esferas são os pólos instantâneos de rotação, e denominados de pólos celestes. Eles podem ser móveis sobre cada uma das esferas, o que efetivamente se constata, entretanto seus deslocamentos são de pequenas amplitudes sobre a esfera local e de extrema lentidão sobre a esfera das fixas. Finalmente o movimento em torno do eixo instantâneo, denominado de “eixo do mundo” é realizado no sentido contrário aos do ponteiros do relógio, com duração pouco menor do que um “dia solar médio” (Fig. 4.2), cuja definição veremos mais adiante.

4.1 Sistema de Referência

O estudo cinemático do universo, que perdurou por vários séculos, pode ser feito referindo-se seus movimentos a um sistema qualquer. Essa descrição da mesma forma é válida se for referido a outro, conquanto tenhamos possibilidade de relacioná-los por intermédio de uma ou mais operações¹ aplicadas no sistema inicial.

A escolha do sistema de referência sendo inteiramente arbitrário, nada se opunha a adoção de um sistema ligado à Terra. Os movimentos dos planetas podem ser corretamente descritos

¹Intervenções por intermédio de rotações e translações de matrizes

no sistema de *Ptolomeu*, sendo suficiente se representar as deferentes e epiciclos circulares por elipses keplerianas, o que equivale ao sistema de Copérnico.

A adoção de um sistema de referência deixa de ser arbitrário quando estudamos a dinâmica do universo, e nesse caso, os princípios da dinâmica se aplicam em determinados sistemas ditos absolutos.

Sabemos que um sistema de referência tradicional não constitui um sistema absoluto. Apesar de objetos longínquos, como radiofontes poderem ser, em primeira aproximação, consideradas sistemas absolutos, na realidade eles não o são, o que coloca o problema de Copérnico sem uma solução definitiva, mas provisória no sentido de que toda ciência observacional não é jamais verificada senão dentro de um limite de precisão.

4.1.1 Coordenadas polares de uma direção.

Adotemos um sistema de referência definido por três eixos de coordenadas retangulares $Oxyz$ (Fig. 4.3). Tracemos pelo ponto O um segmento $\overline{OQ} = r$ paralelo à direção procurada e no mesmo sentido. As coordenadas do ponto Q definem de maneira unívoca uma direção, que verificam a relação:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

se considerarmos $\overrightarrow{OQ} = \vec{1}$ ² $\implies x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

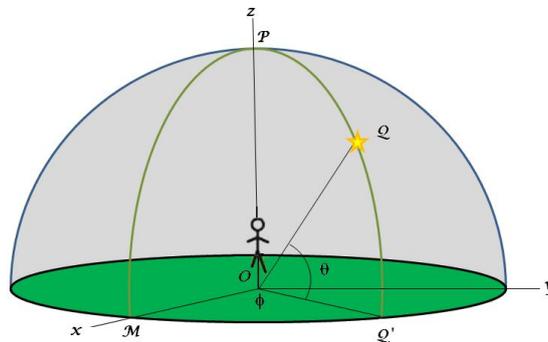


Figura 4.3: Coordenadas polares

Podemos então definir a direção de um ponto por suas coordenadas polares (ou esféricas). Projetando-se Q em H sobre o plano xOy , podemos definir ϕ o ângulo de OH com Ox , e θ o ângulo de OQ com OH , positivo para Oz . A direção OQ pode ser definida por seus cos-senos diretores, conforme está na figura 4.3.

Chamamos de “esfera celeste” ao lugar geométrico dos pontos diretores de módulo unitário, sendo que as coordenadas polares de um ponto Q são dadas em função dos ângulos ϕ e θ .

Um dos problemas clássicos da astronomia fundamental está ligado à medida do ângulo Ω entre duas direções. A expressão pode ser obtida considerando-se dois vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 com coordenadas polares respectivamente ϕ_1, θ_1 e ϕ_2, θ_2 .

²Adota-se raio da esfera das fixas como de módulo unitário, considerando-se que todas as estrelas estejam à mesma distância do centro.

Os cos-senos diretores das direções \vec{r}_1 e \vec{r}_2 são definidos pelas matrizes:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \phi_1 \\ \cos \theta_1 \sin \phi_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} \quad e \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \cos \phi_2 \\ \cos \theta_2 \sin \phi_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

Da definição de produto escalar de vetores, teremos: $\cos \Omega = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$, que pode ser escrito matricialmente pelo produto da transposta de \vec{r}_1 por \vec{r}_2 :

$$\cos \Omega = (\cos \theta_1 \cos \phi_1 \quad \cos \theta_1 \sin \phi_1 \quad \sin \theta_1) \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \cos \phi_2 \\ \cos \theta_2 \sin \phi_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

o que resulta: $\cos \Omega = \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)$

As figuras que se seguem apresentam o pólo acima do horizonte, o pólo sul, entretanto os sistemas de coordenadas seguirão as definições clássicas.

4.2 Sistema local de referência.

4.2.1 Coordenadas Horizontais

A “vertical” de uma localidade, caracterizada pela direção de um fio de prumo, pode ser determinada com boa precisão. Chamaremos de “zênite”, e designaremos por Z , o ponto diretor da vertical ascendente. O grande círculo³ H representa o horizonte local e pode ser entendido como o plano tangente à superfície local, que tem por pólo fundamental o ponto Z . Denominaremos de “nadir” ao ponto diametralmente oposto ao zênite. Horizonte, zênite e nadir são os elementos da esfera local.

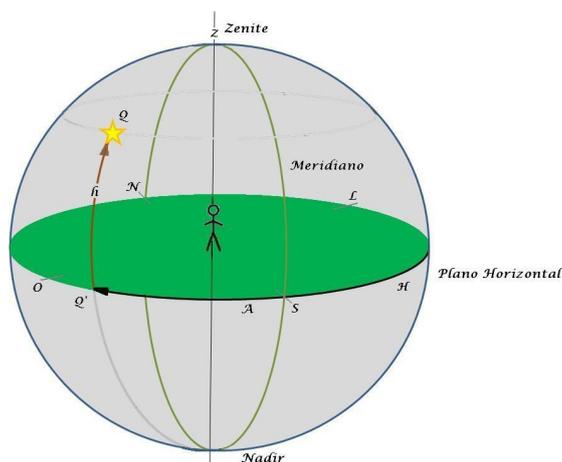


Figura 4.4: Coordenadas horizontais

Escolhendo-se o horizonte como plano fundamental de um sistema de coordenadas local, seja N uma origem arbitrariamente escolhida, mas bem determinada em função da localidade. Os

³Intersecção de uma esfera com um plano que passa por seu centro.

ângulos serão contados positivamente no sentido retrógrado, ou do movimento observado dos ponteiros do relógio quando colocado no solo (face voltada para cima).

Seja Q o ponto diretor de uma direção (Fig. 4.4). Tracemos um grande semicírculo ZQ , denominado de círculo vertical do ponto Q , que intercepta o horizonte em Q' . NQ' é denominado de “azimute” de Q , representado pela letra A , e contado de 0° a 360° . O ângulo QQ' representa a “altura” h do ponto Q , contado em graus, positivamente na direção do zênite. Em muitos casos a altura é substituída pela “distância zenital” z . O pequeno círculo, centrado no eixo zenital e que passa por Q é denominado de “almucântara”. Devido ao movimento diurno as coordenadas horizontais de um objeto são variáveis no tempo nesse sistema. O azimute e a altura (ou a distância zenital) são as coordenadas horizontais do ponto Q . Os co-senos diretores são definidos pelas matrizes:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos h \cos A \\ \cos h \sin A \\ \sin h \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \sin z \cos A \\ \sin z \sin A \\ \cos z \end{pmatrix} \quad 4.2.1$$

4.2.2 Coordenadas Horárias

Chamamos de “meridiano astronômico”⁴ ao plano vertical que passa pelo eixo do mundo, representado na figura pelo grande círculo PZ que une o pólo ao zênite. O ponto N , origem da contagem dos azimutes, é a interseção do plano meridiano com o do horizonte. O semi-plano vertical ZL normal ao meridiano, dirigido para leste, é denominado de “primeiro vertical”, sendo seu prolongamento na direção oeste denominado de “segundo vertical”. A altura ϕ do pólo (norte ou sul) é a “latitude astronômica” do lugar. O “equador celeste” é o grande círculo que tem por pólo fundamental o “pólo celeste”, e é adotado como plano fundamental de um novo sistema de coordenadas local. O pontos N, S, L e W são os pontos cardeais de uma dada localidade (Fig. 4.5).

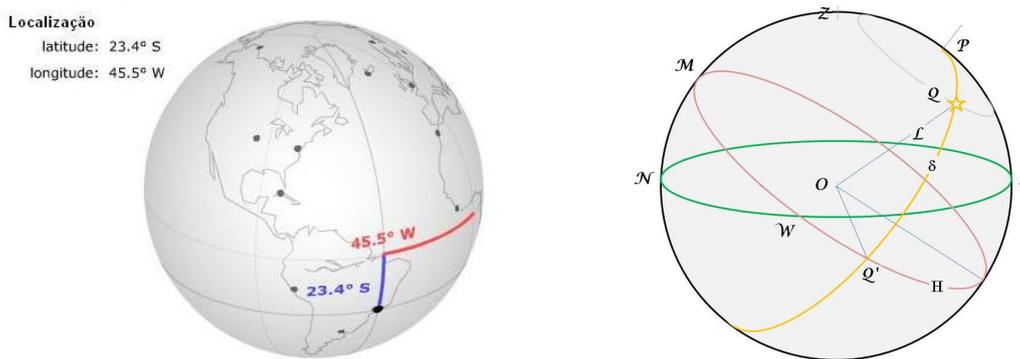


Figura 4.5: Localização de um ponto sobre a superfície da Terra. Coordenadas horárias

Na figura 4.5, chamamos de “círculo horário” ao semicírculo que passa pelos pólos e pelo ponto Q da esfera celeste e que intercepta o equador no ponto Q' . Seja M um ponto do equador, situado acima do horizonte e localizado no meridiano local.

⁴Meridiano superior é o semicírculo que passa pelos pólos e pelo zênite.

Chamamos de “ângulo horário” o diedro⁵ formado pelo círculo horário e pelo semimeridiano pelo ponto M . Representa-se pela letra H e conta-se positivamente no sentido contrário ao movimento de rotação da Terra, em unidades de horas e fração de 0^h a 24^h (ou de -12^h a $+12^h$). O pequeno círculo por Q com centro no eixo polar, e paralelo ao equador é denominado de “paralelo celeste”. A distância desse paralelo ao equador é medido em graus e fração, de 0° a 90° , positivamente para o norte, e denominado de “declinação” (δ). Ângulo horário e declinação são as coordenadas horárias do ponto Q . A descrição do movimento diurno de um astro nesse sistema fica bastante simplificado, pois a declinação das estrelas é invariável no tempo (desprezamos o movimento dos pólos sobre a esfera das fixas) e a variação do ângulo horário em função do tempo segue leis bastante simples se comparadas a do sistema horizontal.

Os co-senos diretores são definidos pela matriz:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos H \\ \cos \delta \sin H \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad 4.2.2$$

4.3 Sistema de Referência sobre a esfera das fixas.

4.3.1 Coordenadas Equatoriais

Imaginando-se o movimento diurno representado pelo movimento da esfera das fixas em relação à esfera local, é preciso dispor de um sistema de referência ligado à esfera das fixas. Tal sistema permitirá descrever o céu estrelado e as constelações⁶ considerando que as estrelas possuam coordenadas fixas.

O plano fundamental desse sistema é o “equador celeste”, e a origem das contagens dos ângulos, nesse plano, é o “ponto vernal”⁷ ou “ponto γ ”.

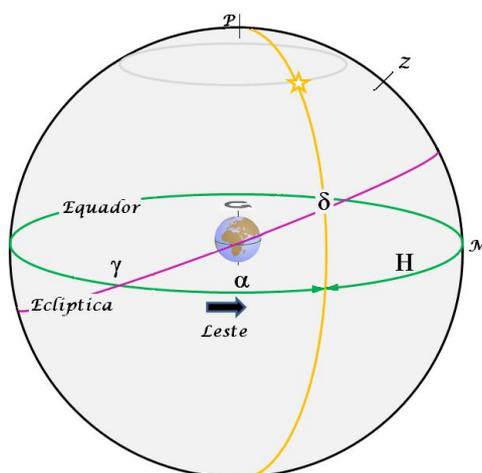


Figura 4.6: Coordenada Equatorial

⁵ Ângulo entre dois planos quaisquer, medido pela intersecção de um terceiro plano perpendicular a aresta dos dois primeiros

⁶ Agrupamento aparente de estrelas ligadas por linhas imaginárias de suas imagens projetadas no plano perpendicular à esfera celeste

⁷ Lugar representativo do cruzamento do Sol pelo plano do equador no sentido do hemisfério sul para o norte

A “ascensão reta” (α) de um ponto Q é o diedro dos planos correspondentes ao seu círculo horário e aquele do ponto γ . É contado no sentido direto, contrário ao do movimento diurno. Devido a essa convenção os astros passam pelo meridiano na ordem de ascensão reta crescente, sendo elas expressas, como o ângulo horário, em unidades de horas e frações. A segunda coordenada neste sistema é a declinação, já definida para o sistema horário de coordenada.

Ascensão reta e declinação, coordenadas do sistema equatorial, sendo independentes do movimento diurno, são invariáveis no tempo, e para uma dada estrela, a menos que o plano fundamental e/ou o ponto γ não o sejam na esfera das fixas.

Os co-senos diretores são definidos pela matriz:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad 4.3.1$$

4.3.2 Coordenadas Eclípticas

A “eclíptica”⁸ foi adotada como plano fundamental de um sistema de coordenadas, que se adotado para o estudo do movimento dos planetas do sistema solar que possuem trajetórias quase coplanares, simplifica o equacionamento do problema. A origem das contagens das “longitudes eclípticas” (η) é o ponto γ , e contada positivamente no sentido do movimento de rotação da Terra.

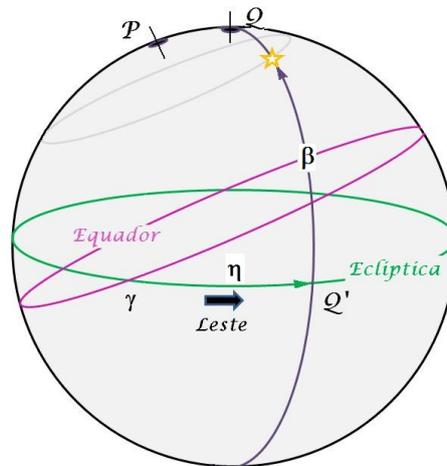


Figura 4.7: Coordenadas eclíptica

A “latitude eclíptica” (β) é a distância angular do ponto ao plano fundamental, contado de 0° a 90° positivo para o pólo norte da eclíptica. A intersecção dos planos da eclíptica e do equador é a reta que determina os pontos equinociais, e o ângulo entre estes planos, denominado de “obliquidade da eclíptica”, vale $\epsilon = 23^\circ 27'$ para todos os efeitos. A perpendicular a essa reta, no plano da eclíptica, interceptará a eclíptica nos pontos de coordenadas:

$$\alpha = 6^h \quad \delta = +\epsilon = +23^\circ 27'$$

$$\alpha = 18^h \quad \delta = -\epsilon = -23^\circ 27'$$

⁸Plano da órbita da Terra

O primeiro desses pontos define o início do inverno austral, enquanto que o segundo o verão (ao contrário para o hemisfério Norte).

Os co-senos diretores são definidos pela matriz;

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \eta \\ \cos \beta \sin \eta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \quad 4.3.2$$

4.3.3 A direção dos eixos cartesianos.

A colocação dos eixos cartesianos correspondentes aos sistema de coordenadas polares segue os seguintes critérios:

- escolha de um plano fundamental
- o eixo z é perpendicular ao plano fundamental passando pelo pólo do sistema
- o eixo x pertence ao plano fundamental e dirigido em uma direção a partir da qual se medem os ângulos
- o eixo y está no plano fundamental e sua direção é tal que definirá a orientação desse sistema

Resumimos na tabela 4.3.1 os principais sistemas utilizados na Astronomia:

Tabela 4.3.1. Sistemas de coordenadas

Sistema	Orientação do sistema	Direção dos eixos			Coordenadas	
		x	y	z		
Horizontal	Indireto	N	$A = 90^\circ$	Z	A	h
Horário	Indireto	N	$H = 90^\circ$	N	H	δ
Equatorial	Direto	γ	$\alpha = 90^\circ$	N	α	δ
Eclíptico	Direto	γ	$\eta = 90^\circ$	N	η	β

4.3.4 Relação entre as coordenadas dos sistemas equatoriais e horárias.

O aspecto do céu para um observador depende unicamente de um parâmetro, pois presumimos determinados os pólos celestes, sobre as duas esferas, local e das fixas. Chamaremos de “tempo sideral”, tal parâmetro, que é o ângulo horário do ponto γ .

A expressão “tempo sideral” é duplamente inadequada. Inicialmente porque a denominação tempo para o ângulo horário pressupõe que o ângulo horário do ponto γ possa representar uma escala de tempo uniforme, o que ignora o fato de as posições desse ponto e do pólo não estarem ligados às estrelas. Por outro lado qualificar de sideral faz pensar que é obtido pelo movimento de todos os astros que realizam o movimento diurno, e portanto assimilado a um tempo estelar. Além disso os pólos e a posição do ponto γ não estão ligados diretamente aos movimentos

das estrelas, pois o ponto γ é determinado pelo movimento do Sol, e portanto inteiramente determinado por seu movimento aparente.

Retomando a cinemática do movimento diurno, o ângulo horário de um ponto A , e sua ascensão reta α estão ligados ao tempo sideral T pela relação algébrica (Fig. 4.6):

$$H = T - \alpha \quad 4.3.1$$

Um caso importante é aquele em que $H = 0$ ou 12^h . Esses casos correspondem as passagens superior com $H = 0$, e inferior se $H = 12^h$ no meridiano local. Para a passagem superior escrevemos:

$$T = \alpha$$

o que inspira uma nova definição para o tempo sideral: é a ascensão reta dos astros na passagem superior pelo meridiano. Interpretamos que a ascensão reta de uma estrela em sua passagem meridiana possa fornecer o tempo sideral desde que essas estrelas tenham suas ascensões retas determinadas: é aqui que intervêm as observações do Sol.

A determinação das ascensões retas de um conjunto de estrelas brilhantes denominadas de “fundamentais” é feita observando-se na mesma época essas estrelas e o Sol. Essas observações, referidas a um catálogo de estrelas fundamentais, servem para a determinação da rotação e posição do pólo da Terra. As observações do Sol referidas a essas estrelas permite obter a orientação espacial do sistema de referência que corresponde as origem das ascensões reta e declinação.

4.3.5 Latitudes (ϕ) e Longitudes (λ) geográficas.

A posição instantânea de um astro em uma dada localidade depende da posição desse lugar na superfície da Terra. Cada ponto do globo terrestre é determinado por intermédio de suas “coordenadas geográficas”, latitude e longitude.

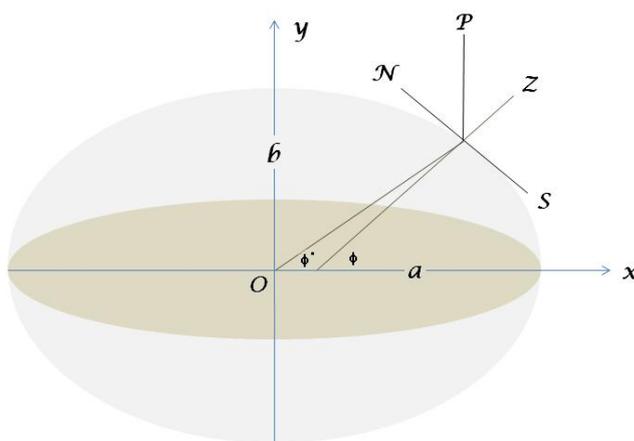


Figura 4.8: Elipsóide de referência.

Representemos a Terra por um elipsóide de revolução achatada, correspondente à superfície do mar, definido por um conjunto de medidas geodésicas ou gravimétricas.

A caracterização do elipsóide de referência é feita pelo conhecimento de seu raio equatorial e pelo achatamento de sua figura:

$$a = 6378136,0m$$

$$\epsilon = 1 : 298,257(IERS^* - 1989)$$

(*) *International Earth rotation and Reference Systems Service*

O equador celeste é o equador deste elipsóide, que supomos girando em torno de seu eixo de rotação. A latitude geodética ou astronômica de um lugar é o ângulo ϕ que a normal do local faz com o plano do equador (Fig. 4.8).

Duas localidades distintas são caracterizadas sobre a esfera celeste por meio de seus zênites. Suponhamos que G represente o zênite da cidade de *Greenwich* e Q de uma localidade qualquer. Sejam PGG' e PQQ' os meridianos das localidades em questão. O meridiano PGG' é adotado como a origem da contagem das longitudes (“meridiano internacional”). O diedro medido pelo arco $G'Q'$ (grafado na figura com a letra λ , é a “longitude geográfica” de Q .

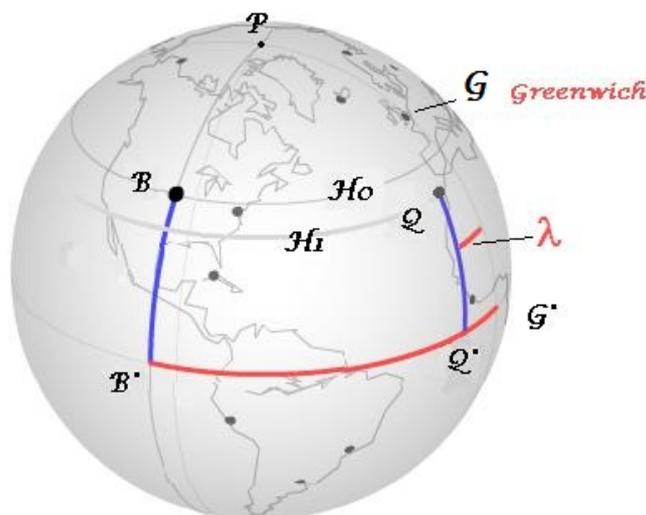


Figura 4.9: Longitude e latitude

As “longitudes” são contadas em graus de 0° a 180° positivamente no sentido do movimento dos ponteiros do relógio (quando voltado para o Norte). Entretanto por questão de hábito as longitudes são contadas em horas e frações sexagesimais. Assim, a longitude do Observatório do Pico dos Dias (*Laboratório Nacional de Astrofísica*), em Itajubá, é $3^h 02^m 19,8^s$ ($45^\circ 34' 57''$).

A posição relativa de dois sistemas de referências de duas estações Q e B é completamente determinada assim que possamos conhecer as latitude (distância angular contado a partir do equador) das estações, e a diferença de suas longitude. Assim é fácil transformar as coordenadas de um astro de um local para outro, no mesmo instante.

A declinação do objeto em questão (δ) tem o mesmo valor para as duas localidades Q e B (a condição de que a distância desse astro seja suficientemente grande em relação às dimensões da Terra, senão deve ser levada em conta a paralaxe diurna. Exceção feita a esse fato, a declinação de uma estrela não é uma coordenada de caráter local.

Sendo H_o o ângulo horário de um astro na localidade G , e H_1 em Q , no mesmo instante, a diferença de longitude entre as duas localidades é $\Delta\lambda$, expressa por:

$$H_o - H_1 = \lambda \tag{4.3.2}$$

Para um dado instante, os ângulos horários de um mesmo ponto da esfera das fixas, em duas estações, diferem entre si da diferença das longitudes desses locais. Essa condição aplicada às estrelas é válida também para o Sol, para o ponto γ etc. Como consequência, teremos que o “tempo solar local” em Q (ângulo horário do Sol), e o tempo sideral no mesmo ponto (ângulo horário do ponto γ), diferem um e o outro em relação ao tempo de mesmo nome no meridiano internacional, de um valor algebricamente igual a $-\lambda$. Como exemplo, o tempo solar e o sideral de Itajubá (Pico dos Dias) diferem em $-3^h02^m19,8^s$ em relação aos tempos solar e sideral de Greenwich. Esta comparação estabelece um princípio de determinação das longitudes, cuja discussão foge ao escopo desse capítulo.

4.3.6 Relação entre dois sistemas de coordenadas locais.

Um problema fundamental da astronomia é o estabelecimento das relações entre as coordenadas de dois sistemas. Seja um ponto Q do céu de coordenadas horizontais A e h e de coordenadas horárias H e δ . Podemos passar de um sistema a outro por meio de rotações em torno de eixos comuns.

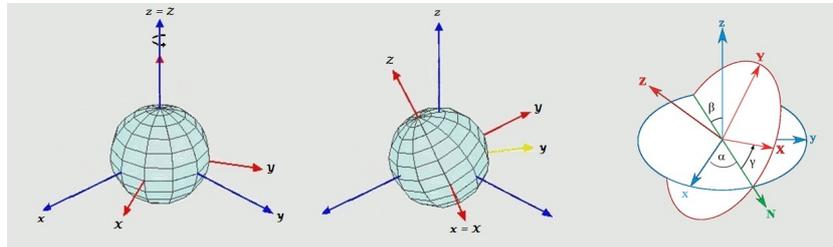


Figura 4.10: Rotação - Ângulos de Euler

Vamos inicialmente estabelecer, de forma genérica as equações que permitem efetuar uma rotação de eixos segundo um ângulo Ψ , contado positivamente no sentido contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio.

Sejam xyz e XYZ dois sistemas de coordenadas que têm em comum os eixos $0z=0Z$.

As matrizes de rotação segundo o eixo de rotação serão dadas por:

$$R_x(\Psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Psi & \sin \Psi \\ 0 & -\sin \Psi & \cos \Psi \end{pmatrix}, \quad R_y(\Psi) = \begin{pmatrix} \cos \Psi & 0 & -\sin \Psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Psi & 0 & \cos \Psi \end{pmatrix}$$

$$e \quad R_z(\Psi) = \begin{pmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

As coordenadas do ponto Q são dadas, para cada um dos sistemas considerados, pelas matrizes 4.2.1 e 4.2.2, respectivamente. Logo a transformação de coordenadas se dá por intermédio da operação das matrizes abaixo, com as seguintes características:

- a. $\Psi = -(90^\circ - \phi)$ em torno do eixo y: $R_y(\Psi)$

$$R_y[-(\pi/2 - \phi)] = \begin{pmatrix} \sin \phi & 0 & \cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \phi & 0 & \sin \phi \end{pmatrix}$$

- b. $\alpha = 180^\circ$ em torno do eixo z: $R_z(\Psi)$

$$R_z(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

portanto

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \cos H \\ \cos \delta \sin H \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \phi & 0 & \cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \phi & 0 & \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos h \cos A \\ \cos h \sin A \\ \sin h \end{pmatrix}$$

De forma semelhantem, podemos estabelecer as relações entre os sistemas de coordenadas equatorial e eclíptica, sobre a esfera das fixas. Para cada um dos sistemas considerados, as coordenadas do ponto Q são dadas pelas matrizes 4.3.1 e 4.3.2. Esses dois sistemas têm em comum os eixos $Ox=OX$, logo a transformação de coordenadas se dá por intermédio da rotação:

- a. $\Psi = +\epsilon$ em torno do eixo x: $R_x(\epsilon)$

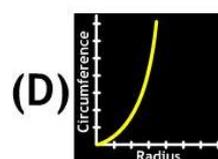
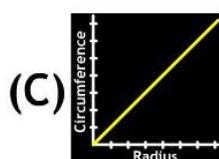
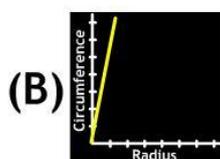
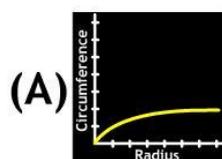
$$R_x(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix}$$

portanto

$$\begin{pmatrix} \cos \beta \cos \eta \\ \cos \beta \sin \eta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

4.4 Exercícios

1ª **Questão.** Um astrônomo coleta dados dos planetas telúricos, anotando o raio R e o comprimento da circunferência equatorial C (onde $C = 2\pi R$) para cada planeta. Estes dados estão representados em qual gráfico abaixo representado?



2ª **Questão.** Em São Paulo, Brasil a uma latitude de $23.5^{\circ}S$, a estrela Sirius com declinação de -16° , é uma ...

- a) estrela circumpolar
- b) estrela que nasce e se põe
- c) estrela que nunca nasce.

3ª **Questão.** Qual das seguintes coordenadas equatoriais representam um ponto que está mais próximo do Pólo Sul Celeste?

- a) $\alpha = 14^h \delta = +88^{\circ}$
- b) $\alpha = 14^h \delta = -88^{\circ}$
- c) $\alpha = 23^h \delta = +2^{\circ}$
- d) $\alpha = 18^h \delta = +86^{\circ}$
- e) $\alpha = 6^h \delta = +24^{\circ}$

4ª **Questão.** Qual dos seguintes coordenadas equatoriais representam um ponto que está mais próximo da eclíptica?

- a) $\alpha = 14^h \delta = +88^{\circ}$
- b) $\alpha = 14^h \delta = -88^{\circ}$
- c) $\alpha = 23^h \delta = +2^{\circ}$
- d) $\alpha = 18^h \delta = +86^{\circ}$
- e) $\alpha = 6^h \delta = +24^{\circ}$

5ª **Questão.** Qual dos seguintes coordenadas equatoriais representam um ponto que está mais próximo do equador celeste?

- a) $\alpha = 14^h \delta = +88^{\circ}$
- b) $\alpha = 14^h \delta = -88^{\circ}$
- c) $\alpha = 23^h \delta = +2^{\circ}$
- d) $\alpha = 18^h \delta = +86^{\circ}$
- e) $\alpha = 6^h \delta = +24^{\circ}$

6ª **Questão.** Qual das seguintes coordenadas horizontais representam uma direção (em São Paulo, SE, a $23,5^{\circ}S$) que está mais perto do pólo sul celeste?

- a) $A = 272^{\circ} h = 8^{\circ}$
- b) $A = 358^{\circ} h = -2^{\circ}$
- c) $A = 177^{\circ} h = 50^{\circ}$
- d) $A = 181^{\circ} h = 2^{\circ}$
- e) $A = 2^{\circ} h = 39^{\circ}$

7ª **Questão.** Qual das seguintes coordenadas horizontais representam uma direção (em São Paulo, SE, em $23,5$ graus S) que está mais próxima do zênite?

- a) $A = 272^{\circ} h = 8^{\circ}$
- b) $A = 358^{\circ} h = -2^{\circ}$
- c) $A = 177^{\circ} h = 50^{\circ}$
- d) $A = 181^{\circ} h = 88^{\circ}$
- e) $A = 2^{\circ} h = 39^{\circ}$

8ª **Questão.** Em uma localidade de latitude $90^{\circ}S$ o pólo celeste está a quantos graus acima do ponto cardeal sul?

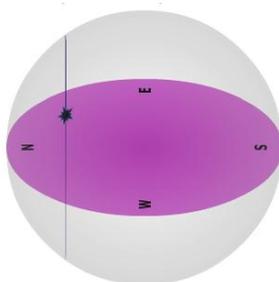
- a) 70°
- b) 90°
- c) 20°
- d) 0°
- e) 45°

9ª **Questão.** A figura abaixo representa a localidade de um observador em uma latitude de $80^{\circ}S$. Qual é a declinação do astro cujo movimento diurno está ali representado?



- (A) $+20^{\circ}$
- (B) -15°
- (C) -40°
- (D) -65°
- (E) -85°

10ª **Questão.** A figura abaixo representa a localidade de um observador em uma latitude de $0^{\circ}N$. Qual é a declinação do astro cujo movimento diurno está ali representado?



- (A) $+80^{\circ}$
- (B) $+60^{\circ}$
- (C) $+35^{\circ}$
- (D) -65°
- (E) -85°

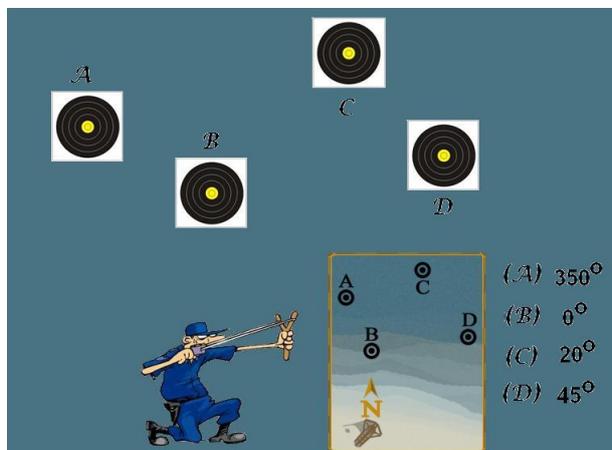
11ª **Questão.** Se o sol nasce diretamente na direção do ponto cardeal leste quando da passagem do Sol pelo equinócio vernal, três semanas depois o Sol nascerá:

- a) a nordeste
- b) diretamente no ponto cardeal leste
- c) no sudeste

12ª **Questão.** Ao longo de um ano, qual a proporção de todas as estrelas da esfera celeste que um observador situado no equador é capaz de ver?

- A) 25%
- B) 50%
- C) 100%
- D) um valor que varia de ano para ano
- E) um valor que varia dependendo da longitude do observador

13^a **Questão.** Em que direção (azimute) o atirador deve apontar para atingir o alvo B?



Capítulo 5

Movimento aparente do Sol.

5.1 Movimento aparente do Sol em longitude eclíptica

O centro do Sol descreve um grande círculo sobre a esfera das fixas, denominado de “eclíptica”. O nó ascendente é aquele que corresponde a intersecção com o equador quando o Sol passa do hemisfério austral para o hemisfério boreal. Este ponto define a origem das coordenadas equatoriais ($\alpha = 0^h$ e $\delta = 0^\circ$) e é denominado de equinócio, sendo esse o ponto que define o tempo sideral. A posição da eclíptica fica completamente determinada por seu nó ascendente e por sua inclinação em relação ao equador celeste, cujo valor é $\epsilon = 23^\circ 27'$ (Fig. 5.1).

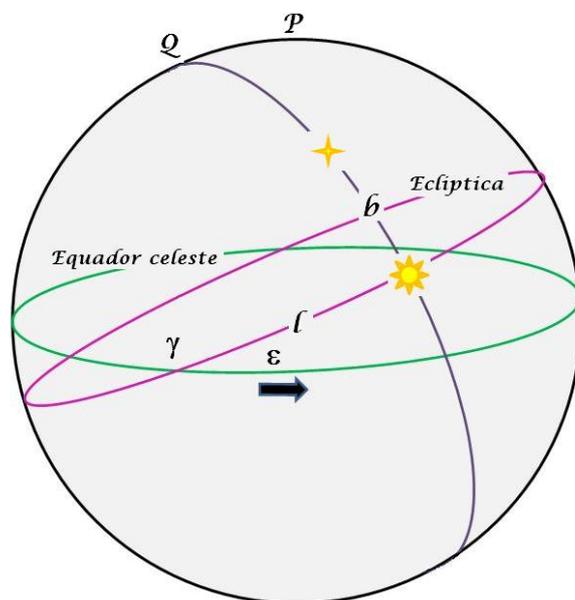


Figura 5.1: Esfera Celeste e a eclíptica

O estudo do movimento aparente do Sol se simplifica se considerarmos que sua latitude eclíptica é por definição nula. É evidente que o estudo do movimento relativo do Sol se traduz na verdade pelo estudo do movimento da Terra que obedece as leis de *Kepler*. A caracterização do movimento aparente do Sol tem implicações na definição das escalas de tempo.

A fim de estabelecer as relações entre os elementos da órbita aparente do Sol, é importante definir a geometria básica da elipse e seus principais parâmetros. Elipse é um exemplo de uma classe de curvas chamada de cônicas. Essa família é resultado da intersecção de um plano, com um cone, em diferentes ângulos (Fig. 5.2).

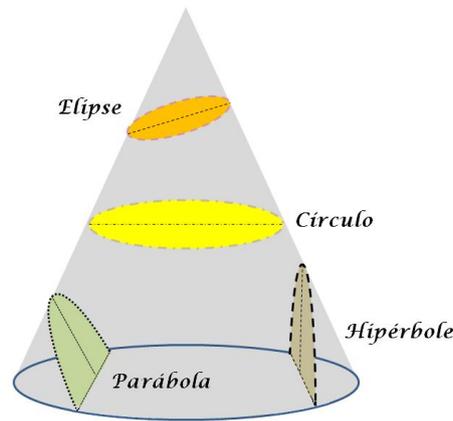


Figura 5.2: Cônicas

Elipse é definida matematicamente como o lugar geométrico dos pontos tal que a soma das distâncias a dois pontos (focos) qualquer na elipse é uma constante (Fig. 5.3) e maior que duas vezes a distância entre eles; conseqüentemente

$$r + r' = 2a = \text{constante}$$

A linha que une o dois focos F e F' cruza a elipse nos dois vértices A e A' . Quando r e r' estão ao longo desta linha, a é a metade da distância entre os vértices; chamamos a como o semi-eixo maior da elipse. A forma da elipse é determinada por sua excentricidade e , tal que a distância de cada fóco e o centro da elipse vale ae . Quando $e = 0$, nós teremos um círculo. A metade da perpendicular ao eixo maior que passa pelo centro da figura é denominado de semi-eixo menor e vale b . Usando as linhas tracejadas na figura 5.3 ($r = r' = a$) e pelo teorema de Pitágoras, teremos:

$$b^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2(1 - e^2)$$

A primeira lei de *Kepler* supõe o Sol em um dos focos F . Então o vértice A é denominado de periélio da órbita (ponto mais próximo do Sol), e o vértice A' é chamado de afélio (ponto mais afastado do Sol). A distância periélica AF é igual a $a(1 - e)$, e a distância afélica $A'F$ é igual a $a(1 + e)$. A média dessas distâncias para o sistema solar é igual ao semi-eixo maior da órbita a .

A órbita está definida por seu semi-eixo a , e por sua excentricidade e ($e = c/a$). O raio vetor e o ângulo v (anomalia verdadeira) que dá a posição do planeta, em um instante qualquer, pode ser escrito por:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} \quad 5.1.1$$

Da figura 5.3 podemos escrever:

$$r'^2 = r^2 + (2c)^2 - 2r(2c) \cos(\pi - v) = (2a - r)^2$$

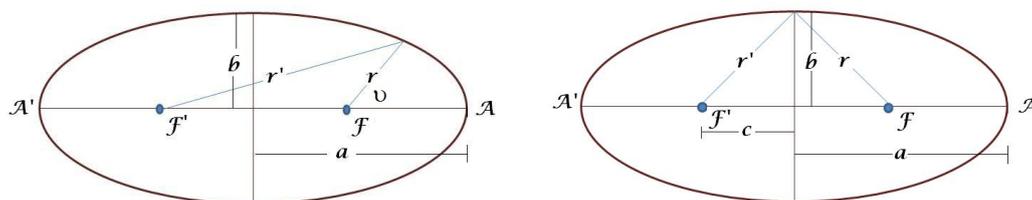


Figura 5.3: A elipse: elementos e propriedades

ou

$$r^2 + 4c^2 + 4cr \cos v = 4a^2 - 4ar + r^2$$

$$4cr \cos v + 4ar = 4a^2 - 4c^2$$

$$r(a + c \cos v) + a^2 - c^2 \Rightarrow ra(1 + e \cos v) = a^2(1 - e^2)$$

$$r(1 + e \cos v) = a(1 - e^2) \Rightarrow r = \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e \cos v)}$$

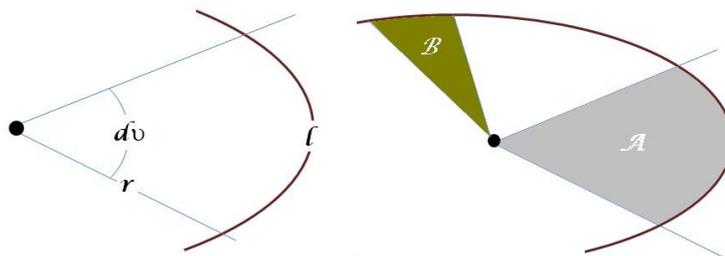


Figura 5.4: Lei das áreas

Da lei da áreas, podemos escrever que o raio vetor que une o planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais. Note que quanto mais distante do Sol estiver do planeta, mais lentamente ele se move.

$$dA \propto dt \Rightarrow dA = \mathfrak{R}dt/2$$

mas

$$dA = rr \frac{dv}{dt} \Rightarrow dA = r^2 \frac{dv}{2}$$

$$r^2 dv = \mathfrak{R}dt \Rightarrow r^2 \frac{dv}{dt} = \mathfrak{R}$$

Portanto, perto do periélio, a Terra se desloca mais rápido, enquanto que nas proximidades do afélio, mais devagar. Sua velocidade média é de $29,8 \text{ km/s}$, e a velocidade para uma dada posição pode ser calculada pela expressão:

$$V^2 = K \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Como, segundo *Kepler* o quadrado do período orbital é diretamente proporcional ao cubo da sua distância média ao Sol, para todos os planetas então:

$$\frac{a^3}{T^2} = K$$

a em unidades astronômicas de distância e T em anos, teremos então que:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1$$

Retomemos o problema de *Kepler* e vamos procurar caracterizar a equação do movimento. Da figura 5.5, podemos escrever:

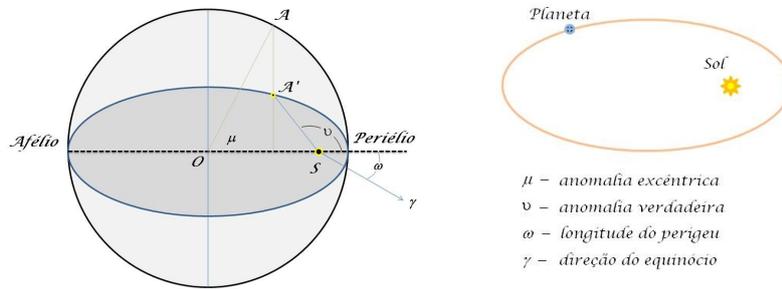


Figura 5.5: O problema de Kepler

$$a \cos \mu = c + r \cos \nu; \quad \text{como} \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e \cos \nu)} \quad e \quad c = ea$$

$$\implies a \cos \mu = ae + \frac{a(1 - e^2) \cos \nu}{(1 + e \cos \nu)}$$

$$a \cos \mu (1 + e \cos \nu) = ae(1 + e \cos \nu) + a(1 - e^2) \cos \nu$$

$$a \cos \mu + ae \cos \mu \cos \nu = ae + ae^2 \cos \nu - a \cos \nu - ae^2 \cos \nu$$

$$\cos \mu + e \cos \nu \cos \mu = e + \cos \nu$$

$$e \cos \mu \cos \nu - \cos \nu = e - \cos \mu$$

$$\implies \cos \nu = \frac{e - \cos \mu}{e \cos \mu - 1} \quad \text{ou} \quad \cos \nu = \frac{\cos \mu - e}{1 - e \cos \mu} \quad 5.1.2$$

sendo: $\sin^2 \nu = 1 - \cos^2 \nu$, então

$$\sin^2 \nu = 1 - \left(\frac{e - \cos \mu}{e \cos \mu - 1} \right)^2 = \frac{(1 - 2e \cos \mu + e^2 \cos^2 \mu - \cos^2 \mu + 2e \cos \mu - e^2)}{(1 - e \cos \mu)^2}$$

$$\sin^2 \nu = \frac{1 - \cos^2 \mu - e^2(1 - \cos^2 \mu)}{(1 - e \cos \mu)^2} = \frac{(1 - \cos^2 \mu)(1 - e^2)}{(1 - e \cos \mu)^2} \implies$$

$$\sin \nu = \frac{\sqrt{(1 - e^2)} \sin \mu}{(1 - e \cos \mu)} \quad 5.1.3$$

Da primeira lei de Kepler (Eq. 5.1.1), temos:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}$$

substituindo-se o valor do cos-seno por sua expressão (Eq. 5.1.2), temos:

$$\begin{aligned} \implies r &= \frac{a(1 - e^2)}{1 + \frac{e(\cos \mu - e)}{(1 - e \cos \mu)}} \\ r &= \frac{a(1 - e^2)(1 - e \cos v)}{(1 - e \cos \mu + e \cos \mu - e^2)} \implies r = \frac{a(1 - e^2)(1 - e \cos \mu)}{(1 - e^2)} \\ \implies r &= a(1 - e \cos \mu) \end{aligned} \quad 5.1.4$$

Da leis das áreas:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \mathfrak{R} \implies r^2 \frac{dv}{d\mu} \frac{d\mu}{dt} = \mathfrak{R} \quad 5.1.5$$

diferenciando a equação (5.1.2) e utilizando-se o resultado da (5.1.3) temos:

$$\begin{aligned} -\sin v \frac{dv}{d\mu} &= \frac{-(1 - e \cos \mu) \sin \mu - (\cos \mu - e)e \sin \mu}{(1 - e \cos \mu)^2} \\ &= \frac{-\sin \mu + e \sin \mu \cos \mu - e \sin \mu \cos \mu + e^2 \sin \mu}{(1 - e \cos \mu)^2} = -\frac{\sqrt{(1 - e^2)} \sin \mu}{1 - e \cos \mu} \frac{dv}{d\mu} \\ -\sin v \frac{dv}{d\mu} &= \frac{-\sin \mu + e^2 \sin \mu}{(1 + e \cos \mu)^2} \end{aligned}$$

portanto

$$-\sqrt{(1 - e^2)} \frac{dv}{d\mu} = -\frac{(1 - e^2)}{1 - e \cos \mu} \implies \frac{dv}{d\mu} = \frac{\sqrt{(1 - e^2)}}{1 - e \cos \mu}$$

substituindo-se na equação (5.1.5), temos:

$$r^2 \frac{\sqrt{(1 - e^2)}}{1 - e \cos \mu} \frac{d\mu}{dt} = \mathfrak{R}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{a^2(1 - e \cos \mu)^2 \sqrt{(1 - e^2)}}{1 - e \cos \mu} \frac{d\mu}{dt} = \mathfrak{R} \implies a^2(1 - e \cos \mu) \sqrt{(1 - e^2)} \frac{d\mu}{dt} = \mathfrak{R} \\ (1 - e \cos \mu) d\mu = \frac{\mathfrak{R}}{a^2 \sqrt{(1 - e^2)}} dt \end{aligned}$$

Considerando-se

$$n = \frac{\mathfrak{R}}{a^2 \sqrt{(1 - e^2)}} \text{ denominado de movimento médio.}$$

$$\implies (1 - e \cos \mu) dt = n dt$$

Ainda:

$$\int_{t_0}^t (d\mu - e \cos \mu d\mu) = n \int_{t_0}^t dt \implies \mu - e \sin \mu = n(t - t_0)$$

Seja $M = n(t - t_0)$ (a anomalia média)

$$\mu - e \sin \mu = M \tag{5.1.6}$$

é a equação de Kepler.

Lembrando que \mathfrak{R} é duas vezes a velocidade areolar, escrevemos:

$$\frac{\mathfrak{R}}{2} = \frac{\pi ab}{T}$$

então $n = \frac{2\pi ab}{T a^2 \sqrt{1-e^2}}$

Como da relação entre os elementos da elipse podemos obter: $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, então:

$$\frac{2\pi a \sqrt{a^2 - c^2}}{T a^2 \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}} \implies n = \frac{2\pi}{T}$$

A equação 5.1.6 pode ser escrita como:

$$-e \sin \mu = M - \mu \quad \text{ou} \quad \sin \mu = \frac{\mu - M}{e}$$

e considerada na forma $f(\mu) = g(\mu)$ onde $f(\mu)$ representa a função seno e $g(\mu)$ uma reta, a solução será a intersecção de uma família das retas com a função trigonométrica seno, conforme figura 5.6.

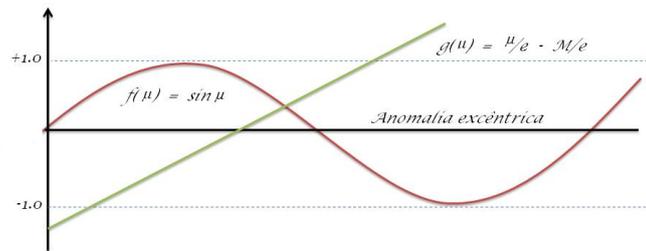


Figura 5.6: Solução da equação de Kepler

Uma outra maneira de resolver é desenvolver as expressões de r , μ e v em potências da excentricidade da órbita (no sistema solar as excentricidades das órbitas são pequenas o suficiente para se poder desenvolver as expressões em séries na origem). Em particular, para todas as aplicações neste compêndio será suficiente truncarmos a série na primeira ordem.

$$\implies e^0 \longrightarrow r=a, \mu=v \text{ e } \mu=M \rightarrow (\text{movimento circular e uniforme})$$

$$\implies e^1 \longrightarrow \mu = \mu)_{e=0} + e \frac{\partial \mu}{\partial e})_{e=0}$$

$$\text{Da (5.1.6) temos que } \mu=M + e \sin \mu \longrightarrow \frac{\partial \mu}{\partial e} = \sin \mu + e \cos \mu \frac{\partial \mu}{\partial e} \longrightarrow \frac{\partial \mu}{\partial e} = \frac{\sin \mu}{(1-e \sin \mu)}$$

$$\text{para } \mu)_{e=0} = M \longrightarrow \frac{\partial \mu}{\partial e})_{e=0} = \sin M, \text{ então:}$$

$$\mu = M + e \sin M \tag{5.1.7}$$

$$\rightarrow r = r)_{e=0} + e \frac{\partial r}{\partial e})_{e=0}$$

Da (5.1.4), como $r = a(1 - e \cos \mu) \rightarrow \frac{\partial r}{\partial e} = -a \cos \mu + ae \sin \mu \frac{\partial \mu}{\partial e}$

para $r)_{e=0} = a \rightarrow \frac{\partial r}{\partial e} = -a \cos \mu + ae \sin \mu \frac{\sin \mu}{(1 - e \cos \mu)}$

$$\frac{\partial r}{\partial e})_{e=0} = -a \cos M \rightarrow r = a - ae \cos M, \text{ então:}$$

$$r = a(1 - e \cos M) \quad 5.1.8$$

$$\rightarrow v = v)_{e=0} + e \frac{\partial v}{\partial e})_{e=0}$$

Da (5.1.2), como $\cos v = \frac{\cos \mu - e}{1 - e \cos \mu}$

$$-\sin v \frac{\partial v}{\partial e} = \frac{(1 - e \cos \mu)(-\sin \mu \frac{\partial \mu}{\partial e} - 1) - (\cos \mu - e)(e \sin \mu \frac{\partial v}{\partial e} - \cos \mu)}{(1 - e \cos \mu)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial e})_{e=0} = \frac{(-\sin M \sin M - 1) + (\cos M \cos M)}{-\sin M} = \frac{-\sin^2 M - 1 + \cos^2 M}{\sin M}$$

$$\frac{\partial v}{\partial e})_{e=0} = +2 \sin M, \text{ então:}$$

$$v = M + 2e \sin M \quad 5.1.9$$

$2e \sin M$ é a chamada de equação do centro.

5.1.1 As Estações do Ano

Uma aplicação direta do movimento aparente do Sol em longitude consiste no cálculo das estações do ano. As estações - primavera, verão, outono e inverno - são conseqüências da inclinação de $23,5^\circ$ do plano do equador em relação ao plano da eclíptica. A excentricidade da órbita da Terra é pequena para afetar as estações ($e = 0.00167$); lembre-se que o perihelio ocorre durante o inverno no hemisfério norte.

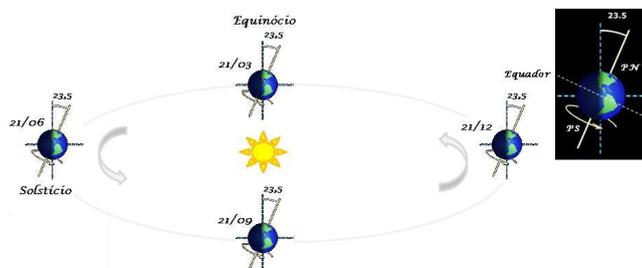


Figura 5.7: Movimento aparente do Sol. O plano da eclíptica

As linhas equinocial e a solsticial dividem o plano da eclíptica em quatro partes. O intervalo de tempo gasto pelo Sol para percorrer cada um desses quadrantes corresponde a duração das estações do ano (Fig. 5.7).

A longitude do Sol pode ser escrita em função da longitude do perigeu (ϖ) e de sua anomalia verdadeira (Fig. 5.8) em um dado instante. Então:

$$l = \varpi + v = \varpi + M + 2e \sin M + \dots \quad 5.1.10$$

com

$$M = \frac{2\pi}{T}(t - t_o)$$

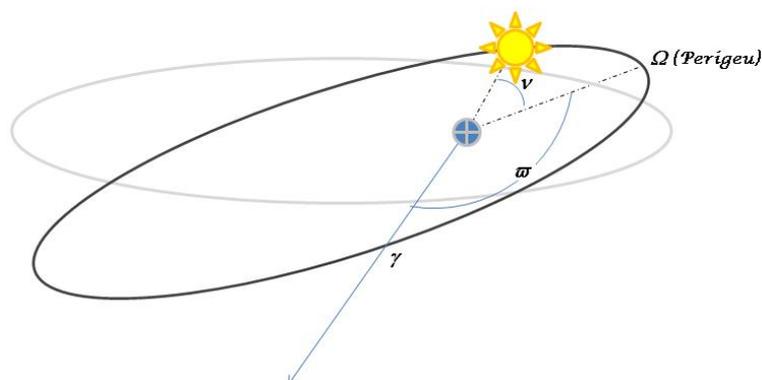


Figura 5.8: Longitude eclíptica do Sol

A partir das expressões do movimento aparente do Sol em longitude em função do tempo, e considerando ainda que:

$$t_o = T \text{ janeiro } 3,02 \text{ instante da passagem pelo perigeu}$$

$$\varpi = 282^{\circ}04',5$$

$$e = 0,0167$$

As datas do começo de cada estação são obtidas resolvendo-se a equação acima em M para os seguintes valores da longitude eclíptica do Sol: $l = 0^{\circ}; 90^{\circ}; 180^{\circ}$ e 270° . Podemos escrever de forma simplificada que:

$$l - 282^{\circ}04,5' = \nu$$

Tabela 5.1.1 Duração das estações do ano

$t - t_o =$ 77,16(dias)	Duração da estação
169,97	92,81 Outono
263,59	93,62 Inverno
353,41	89,82 Primavera
442,41	89,00 Verão

e que se adotarmos uma aproximação dentro do minuto, a equação será então:

$$M = 3548'' , 2(t - t_o) = \nu - 115' \sin \nu$$

com os valores sucessivos de $\nu = 77^{\circ}55,5', 167^{\circ}55,5', \dots$. Os cálculos numéricos dão como resultados os valores na tabela 5.1.1.

5.2 Movimento aparente do Sol em ascensão reta

Uma vez estabelecidas as expressões da longitude do movimento anual aparente do Sol em função do tempo, é conveniente expressar sua ascensão reta utilizando-se das expressões que relacionam as coordenadas equatoriais e eclíptica do Sol. Utilizaremos da trigonometria esférica, em especial,

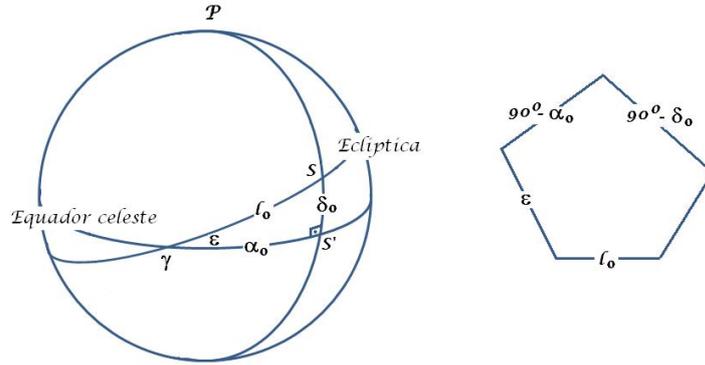


Figura 5.9: Coordenadas equatoriais e eclíptica do Sol

podemos escrever do triângulo esférico $\gamma SS'$ as equações:

$$\sin S \cos 90^\circ = \cos l \sin \alpha - \sin l \cos \alpha \cos \epsilon \rightarrow \cos l \sin \alpha = \sin l \cos \alpha \cos \epsilon,$$

e portanto:

$$\tan \alpha = \cos \epsilon \tan l$$

é uma equação da forma

$$\tan y = p \tan x, \quad \text{com } p > 0$$

que tem solução do tipo:

$$y = x + q \sin 2x + \frac{q^2}{2} \sin 4x + \frac{q^3}{3} \sin 6x + \dots$$

com

$$q = \frac{p-1}{p+1}, \quad (|q| < 1)$$

nesse caso:

$$q = -\tan^2 \frac{\epsilon}{2}$$

e portanto:

$$\alpha = l_0 - \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \sin 2l_0 + \frac{1}{2} \tan^4 \frac{\epsilon}{2} \sin 4l_0 - \frac{1}{3} \tan^6 \frac{\epsilon}{2} \sin 6l_0 + \dots$$

Lembrando que l é expressa pela equação 5.1.10, podemos escrever como expressão final para a ascensão reta do Sol:

$$\alpha = \varpi + M + 2e \sin M - \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \sin 2(\varpi + M) + \dots \quad 5.1.11$$

5.2.1 A Equação do Tempo

Vamos nos antecipar ao conceito de tempo da astronomia para aproveitando das expressões da longitude eclíptica do Sol, estabelecer a equação do tempo e estudar a partir desta a variação do comprimento do dia solar verdadeiro.

$$E = 2e \sin M - \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \sin 2l_0$$

Estudaremos a equação do tempo desprezando as desigualdades do tempo sidereal que existem e que são pequenas, limitando-nos a considerar a equação do tempo e a redução ao equador cada uma conservando apenas termo principal, o que se resulta:

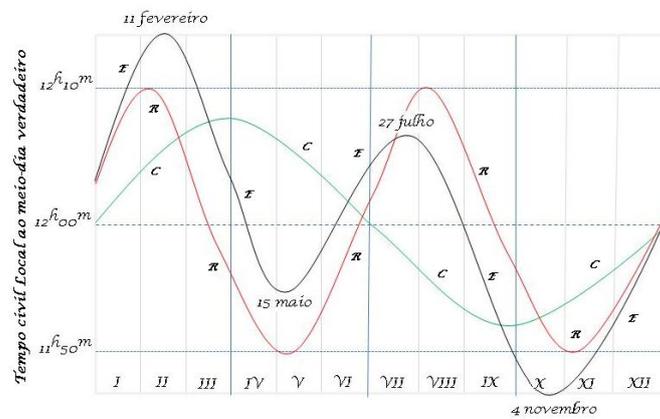


Figura 5.10: Variação anual da equação do tempo (curva E). As curvas C e R (tracejadas) correspondem respectivamente as equações do centro e a redução ao equador.

O primeiro termo da expressão tem período anual, e se anula para valores crescentes quando da passagem do Sol pelo perigeu, isto é no dia 02 de janeiro (lembro que este termo depende do tempo, cuja variação é bem lenta). Já o argumento do segundo termo vale duas vezes a

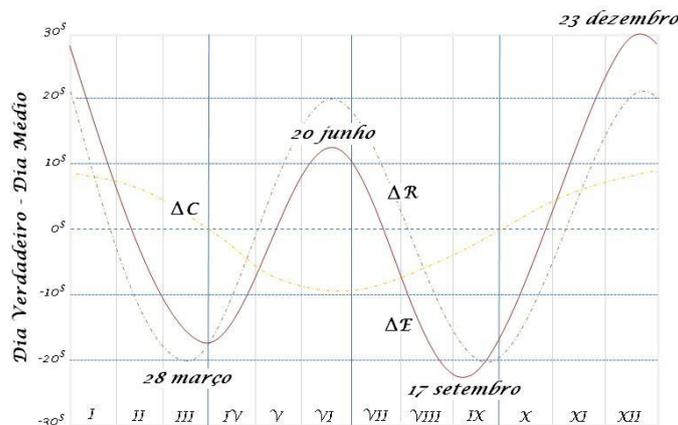


Figura 5.11: Variação anual da duração do dia solar verdadeiro (curva ΔE). As curvas ΔC e ΔR (tracejadas) são devidas as variações das equações do centro e da redução ao equador.

longitude média do Sol. Seu período vale 6 meses, e se anula para valores decrescentes (sinal negativo) nos equinócios, e para valores crescentes nos solstícios. Feitas estas considerações podemos construir as curvas das variações de cada um dos termos e somá-las (Fig. 5.10). As variações da equação do tempo são acompanhadas das variações da duração do dia verdadeiro, que corresponde ao intervalo de tempo de dois meio dias verdadeiro (Fig. 5.11).

5.2.2 Calendários (O Relógio Solar)

O mais simples relógio de Sol que podemos construir é aquele a partir de uma vara vertical fincada em uma superfície plana. O movimento aparente do Sol desde seu nascer, passagem pelo ponto mais alto até seu pôr, projeta uma sombra que gira, sendo útil para marcar o tempo ao longo do dia. O sentido da rotação da sombra ao redor da vara é a dos ponteiros do relógio (Fig. 5.12).

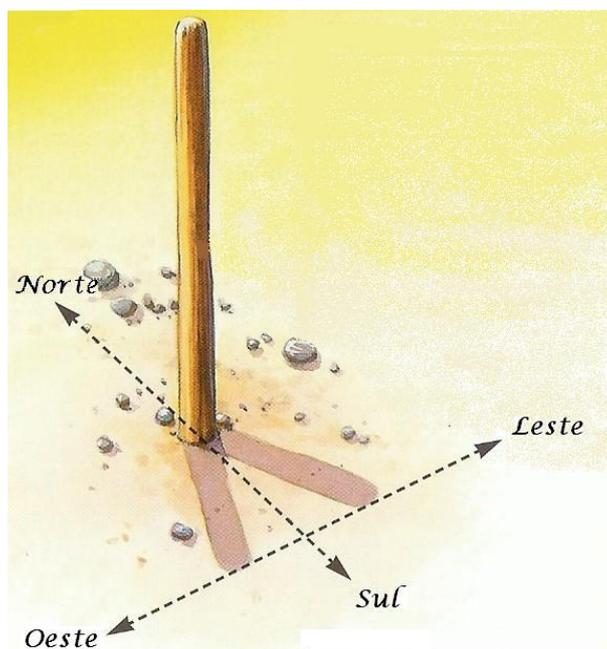


Figura 5.12: Relógio de Sol - Gnômon

Um relógio de Sol é denominado de “gnômon”, e indicará o meio do dia corretamente quando sua sombra apontar o ponto cardeal norte ou sul (norte em latitudes intermediárias norte, sul em latitudes meridionais). Perto do equador sua posição depende da estação do ano.

Calendário é um conjunto convencional de regras para associar dias inteiros em períodos maiores com o objetivo de contar a passagem do tempo, desde uma época até uma data desejada.

Os períodos mais usados são a semana, o mês e o ano.

A restrição de usar apenas dias inteiros é imposta para assegurar que todos os períodos utilizados comecem sempre à mesma hora do dia, geralmente no início do dia. Esse início, convencionalmente, pode ser à meia-noite (no calendário gregoriano e na maior parte dos calendários usados no ocidente), ao anoitecer (nos calendários muçulmano e judeu), ao nascer do sol, ao meio-dia etc.

O dia solar é o período fundamental em qualquer calendário usado. Sua duração é definida como sendo o intervalo de tempo médio entre duas passagens consecutivas do centro do Sol pelo mesmo meridiano de um local. Por motivos de eficiência observacional, costuma-se escolher, para isso, o meridiano superior do local (é o semicírculo com extremidades nos pólos e passando pelo zênite do local). A média é obtida sobre o período de um ano.



Figura 5.13: Relógio de Sol - Cidade Universitária - USP, Campus Oeste

O dia solar médio é dividido em 24 partes iguais, recebendo, cada uma delas, a denominação de 1 hora.

O período abrangendo 7 dias é o ciclo chamado de semana. Sua origem está associada à adoração dos 7 astros que os antigos chamavam de astros errantes, pois eles se deslocam entre as estrelas “fixas”: Lua, Marte, Mercúrio, Júpiter, Vênus, Saturno e Sol, os quais, respectivamente, deram origem aos dias da semana segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado e domingo. Logo, a semana é um ciclo artificial, sem fundamentos astronômicos.

A observação das mudanças cíclicas no aspecto iluminado do disco lunar levou os antigos povos a escolherem a Lua como um marcador natural da passagem dos dias.

A Lua se mostra desde um disco completamente iluminado (“ Lua Cheia”) até praticamente sua invisibilidade total (“ Lua Nova”), passando por todos os aspectos intermediários. A fase representando um semi- círculo iluminado, ocorrente entre a Lua Nova e a Lua Cheia, recebe o nome de Lua Quarto Crescente, enquanto que a fase correspondente entre a Lua Cheia e a Lua Nova é a fase de Lua Quarto Minguante.

O intervalo de tempo entre duas fases homônimas consecutivas recebe o nome de luação e sua duração média é de cerca de 29,530589 dias. Como esse período não é um número inteiro de dias, ele não pode ser usado diretamente como período de um calendário. Definiram então o mês lunar, que constava de 29 ou de 30 dias (às vezes usados alternadamente para que, em média, obtivesse-se a duração da luação).

O outro período utilizado em calendários é o ano, inicialmente chamado de ano das estações. Povos do norte da África e do Oriente Próximo puderam observar que:

- as condições climáticas variavam de forma mais ou menos cíclica, alternando épocas quentes com outras frias, cada uma com período razoavelmente previsível;

- apesar de que ao meio-dia de cada dia, a sombra de um gnômon é a menor do dia, a cada dia essa sombra mínima tem um comprimento diferente; nas épocas mais quentes ela é mais curta e nas mais frias é mais comprida (observação feita em locais distantes do equador).

Unindo essas duas características, os antigos puderam definir as estações do ano. O *Verão* iniciava-se quando a sombra, ao meio-dia, era a menor de todas as sombras medidas ao meio-dia. O *Inverno* iniciava-se quando a sombra, ao meio-dia, era a mais comprida de todas as sombras ao meio-dia.

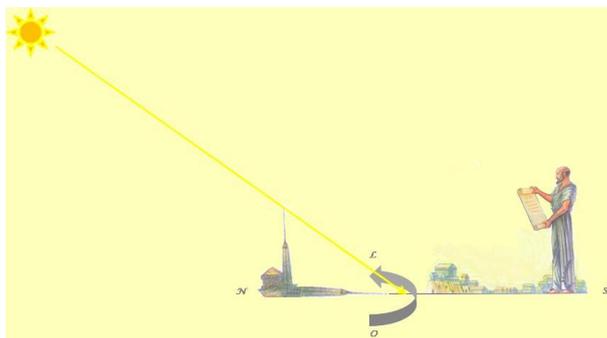


Figura 5.14: Observação da sombra do Sol. Posição da sombra do Sol em relação ao ponto cardinal sul.

A observação da sombra do Sol durante o ano resultou na seguinte definição para “Ano das estações ou Solar”: é o intervalo de tempo entre os inícios de 2 estações homônimas sucessivas. Para isto, basta observar a sombra do gnômon sempre ao meio-dia e verificar as datas em que as duas sombras são de iguais comprimentos.

Ao meio-dia do início do verão, o Sol parece bem alto no céu, enquanto que, à mesma hora no início do inverno, ele parece bem mais próximo ao horizonte. Os dias dos inícios do Verão e do Inverno recebem o nome de “Solstícios”.

Notar que durante o Verão a parte clara do dia é longa e a noite é curta; no Inverno a situação se inverte. Entre os dias solsticiais, o Sol deve, duas vezes por ano, passar pelo ponto

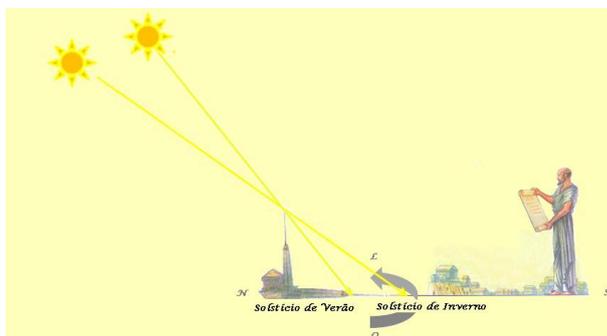


Figura 5.15: Determinação da duração do ano das estações.

de altura média entre as alturas mínima e máxima dos solstícios. Essas datas receberam o nome de “Equinócios” já que a duração da parte clara do dia e a duração da noite eram, nessas datas,

iguais. Quando esse ponto é atingido, depois do início do verão, temos o “Equinócio do Outono” e quando ele ocorre depois do início do inverno, recebe o nome de “Equinócio da Primavera”. As estações respectivas têm inícios nos dias equinociais correspondentes.

As primeiras observações levaram à adoção do ano de 365 dias. Mas, muitos anos de observação puderam mostrar que o início de duas primaveras sucessivas ocorria em intervalos de pouco mais de 365 dias.

Os egípcios haviam verificado que, depois de 365 dias, a sombra do gnômon, ao meio-dia, não voltava exatamente onde esteve 365 atrás; apenas depois de 4 anos de 365 dias e mais 1 dia é que o fenômeno ocorria. Por volta do ano 238 a.C., *Ptolomeu (III) Euergetes* propôs que 3 anos de 365 dias cada fossem seguidos por um ano de 366 dias, o que faria com que o calendário não defasasse muito com relação às estações. O processo não foi aceito inicialmente, mas foi usado depois para a definição do Calendário Juliano.

Sabemos, hoje, que a duração do Ano Solar é de cerca de 365,2422 dias (365d 05h 48m 46s) e é chamado de “Ano Trópico”.

Nota-se, portanto, ser impossível utilizar uma lunação (29,530589 dias) como o comprimento do mês e tão pouco o comprimento do ano solar (365,242199 dias) para definir o ano. Não há um número inteiro de dias que caracteriza tanto a lunação como o comprimento do ano. Por outro lado, não há um número inteiro de lunações num ano solar ($\frac{365,242199}{29,530589} = 12,368267$). Esses períodos são incomensuráveis, e este fato representa um problema para a criação de um bom calendário.

As estações do ano representavam, para os povos antigos, períodos de grande importância para o cotidiano. Por essa razão procuraram criar calendários de forma a ser sincronizado com as estações.

O ano egípcio consistia de 12 meses de 30 dias, mais 5 dias no final a fim de que redundasse em 365 dias. Entretanto de pronto verificaram que ao cabo de um ano a sombra do gnômon não reproduzia a posição de um ano atrás, apenas após 4 anos o fenômeno se repetia um dia após.

O ano babilônio era lunar, contendo doze meses lunares. O mês começava no início da Lua crescente logo após o pôr do Sol. Tinha 354 dias ($12 \times 29,530589$), ou seja, 11 dias a menos que o ano solar. Desse modo a cada 3 anos o calendário babilônio defasava de 1 mês com relação às estações do ano. A intercalação desse mês foi aperfeiçoada uma regra baseada no ciclo metônico de 19 anos. Dezenove anos solares havia 235 lunações aproximadamente 6940 dias ($19 \times 365,2422$, ou seja 235 lunações ($\frac{6940}{29,530589}$). Entretanto em 19 anos babilônios existem apenas 228 lunações (19×12), logo faltam 7 lunações para completar, o que significa intercalar 7 meses lunares a cada 19 anos para que o calendário lunar não se defase, que permite até hoje sua sobrevivência.

Acredita-se que o calendário romano tenha sido baseado em um dos calendários lunares gregos. A tradição romana reivindicou que sua criação tenha sido feita por *Romulus*, o fundador de Roma em 753 A.C.

A primeira versão conhecida continha dez meses, e começava quando da passagem do Sol pelo equinócio vernal; no entanto, o comprimento dos meses eram baseados no período da Lua (lunação).

O ano durava 304 dias (Tab. 5.1.2.) e havia aproximadamente 61 dias do inverno que não eram considerados no calendário.

A primeira reforma desse calendário foi atribuída a *Numa Pompilius*, o segundo dos sete reis de Roma. A ele é atribuído a redução dos meses de 30 para 29 dias além de ter adicionado no final do calendário os meses de Janeiro (29 dias) e Fevereiro (28 dias), em 713 A.C. Com essa artifício, aumentou seu comprimento para 355 dias (Tab 5.1.2.).

Tabela 5.1.2. Meses do calendário Romano

Meses originais	Meses após revisão
Martius (31 dias)	Martius (31 dias)
Aprilis (30 dias)	Aprilis (29 dias)
Maius (31 dias)	Maius (31 dias)
Iunius (30 dias)	Iunius (29 dias)
Quintilis (31 dias)	Quintilis (31 dias)
Sextilis (30 dias)	Sextilis (29 dias)
setembro (30 dias)	setembro (29 dias)
outubro (31 dias)	outubro (31 dias)
novembro (30 dias)	novembro (29 dias)
dezembro (30 dias)	dezembro (29 dias)
	Ianuarius (29 dias)
	Februarius (28 dias)

Os últimos meses tiveram sua denominação baseada na sua posição hierárquica no calendário original - setembro vem da palavra *septem* que significa sete, outubro de *octo* que significa oito, e assim por diante. *Quintilis e Sextilis* foram rebatizados, mais tarde, de julho e agosto em homenagem a *Julius César e Augustus*.

A fim manter o ano calendário alinhado aproximadamente com o ano solar, um mês, o *Mensis Intercalaris*, conhecido também como *Mercedonius* ou *Mercedinus*, era adicionado, de tempos em tempos, no final de fevereiro. O ano resultava então possuir 377 ou 378 dias. O mecanismo exato para esse acréscimo não foi claramente especificado. É certo que *Februarius* foi truncado para 23 ou 24 dias, e seguido por um mês intercalado de 27 dias. O ano (número de dias) era fixado pelo governante a fim aumentar seu mandato. A reforma do calendário Juliano começou a ser realizada no reinado de Julio César e finalizado por seu sucessor Augusto.

Os Romanos tinham nomes especiais para três dias específicos para cada mês. O sistema parece ter sido baseado originalmente nas fases da lua:

- *Calendas (Kalendae)* - primeiro dia do mês, de que a palavra “calendário” é derivada; imaginado para ser a data da lua nova.
- *Nones (Nonae)* - dependendo do mês, poderia ser o 5º ou o 7º dia; que corresponde ao meio da Lua (quartos).
- *Ides (Idus)* - dependendo do mês, poderia ser o 13º ou o 15º dia; correspondente a Lua cheia (meio do mês).

O calendário Juliano era uma reforma do calendário romano que foi concebido por Julius César em 46 A.C. e introduzido em 45 A.C. Foi escolhido depois da consulta ao astrônomo *Sosigenes da Alexandria* que calculou com boa aproximação o comprimento do ano trópico, que era conhecido desde Hiparcos. Possui um ano regular de 365 dias divididos em 12 meses, e um dia adicionado em fevereiro a cada quatro anos (ano bissexto¹). Portanto o ano Juliano tem, em média, 365,25 dias.

¹Um segundo dia adicionado no sexto dia antes do início do mês seguinte (calendas romanas)

O calendário Juliano permaneceu em uso até o século 20 em alguns países, como calendário nacional, tendo sido substituído pelo calendário Gregoriano moderno. É usado ainda por povos indígenas do norte da África e por muitas igrejas ortodoxas. Algumas igrejas ortodoxa usam o calendário Juliano revisado que é melhor que o calendário Gregoriano.

O papa *Gregory XIII* (7/1/1502 - 10/4/1585), batizado *Ugo Boncompagni*, foi Papa de 1572 a 1585. Nasceu na cidade de Bolonha, onde estudou leis tendo se graduado em 1530. Dedicou-se à reforma da igreja católica *Gregory XIII* é conhecido pela reforma do calendário, Com a colaboração do padre jesuíta Christopher Clavius, que era também astrônomo promoveu a reforma no calendário dando a origem ao calendário Gregoriano. A razão para a reforma baseava-se no fato de que o comprimento médio do ano no calendário Juliano era demasiado longo, e a data do equinócio vernal tinha se deslocado, ainda que lentamente, ocorrendo no dia 10 de março, visto que o computo da data de Páscoa seguia ainda a data tradicional de 21 de março.

As mudanças promovidas por Gregório corrigiram também a diferença que existia no calendário civil visto que o ano do calendário Juliano médio era ligeiramente mais longo, fazendo com que o equinócio vernal, e conseqüentemente a data da Páscoa estava deslocada com relação ao calendário civil e o das estações.

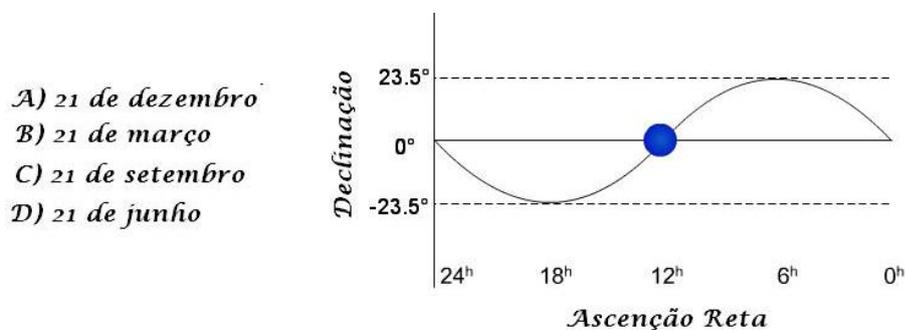
O sistema do calendário gregoriano tratou desses problemas, inicialmente e com finalidade de compensar o deslocamento do equinócio, eliminando 10 dias (o dia 04/outubro/1582 virou 15/outubro/1582). A fim de sincronizar o calendário com o das estações, adotou a seguinte regra para a definição do comprimento do ano (ano bissexto):

- Cada ano, cujo valor numérico de identificação for divisível por quatro é um ano de bissexto,
- à exceção daqueles que forem exatamente divisíveis por 100;
- os anos que forem divisível por 400 são anos bissextos.

Para exemplificar estas afirmações, o ano 1900 não foi um ano bissexto, entretanto o ano 2000 foi. No calendário Juliano, todos os anos divisíveis por 4 eram considerados bissextos.

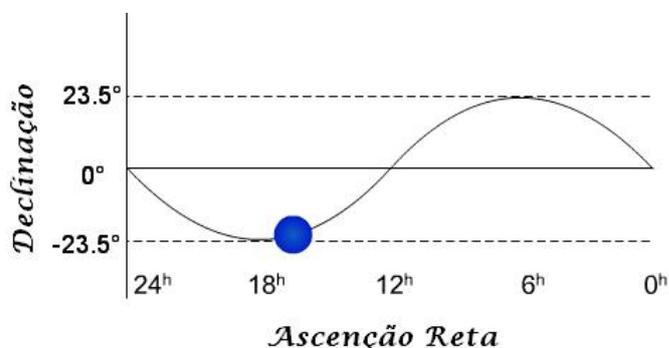
5.3 Exercícios

1ª Questão. Qual data aproximada o sol está na posição proposta pela figura abaixo:



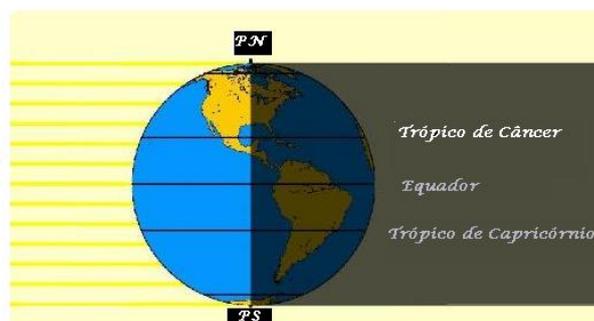
2ª Questão. Para qual das latitudes propostas abaixo o sol poderia estar no zenite na data aproximada apresentada no gráfico abaixo?

- A) 20° N
- B) 10° N
- C) 0°
- D) 10° S
- E) 20° S



3ª Questão. A imagem abaixo mostra a Terra sendo atingida pelos raios solares em que data aproximada:

- A) 21 de junho
- B) 21 de setembro
- C) 21 de dezembro
- D) 21 de outubro (ou 21 de fevereiro)
- E) 21 de abril (ou 21 de agosto)

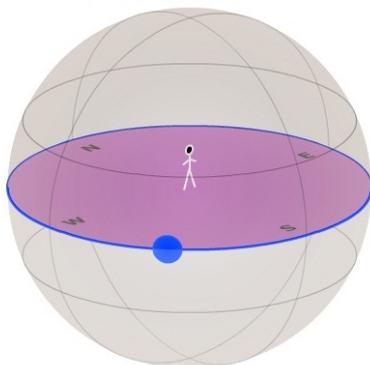


4ª Questão. Se você mora no Brasil e em algum momento durante o ano o Sol passa pelo zênite, você deve estar em:

- a) Paranaguá
- b) Florianópolis
- c) Rio Branco (capital do Acre)
- d) Porto Alegre

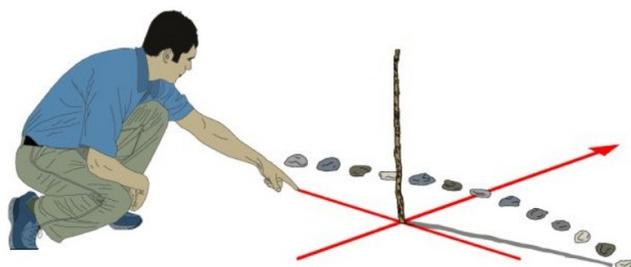
5ª Questão. A trajetória aparente do Sol no dia 20 de março é mostrada na figura abaixo. Qual é a latitude do observador?

- A) 90° N
- B) 40° N
- C) 0°
- D) 40° S
- E) 90° S

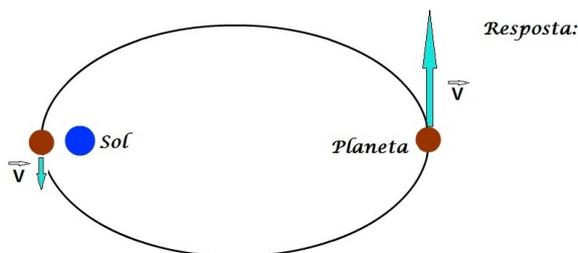


6ª **Questão.** Um método para a determinação de uma direção é utilizar uma vara vertical e a sombra projetada da vara pelo Sol. Um estudante de astronomia coloca uma pedra na ponta da sombra da vara a cada 15 minutos. A direção indicada pela seta deve ser:

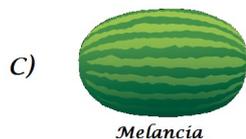
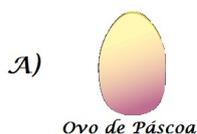
- A) Norte
- B) Leste
- C) Sul
- D) Oeste
- E) nenhuma delas



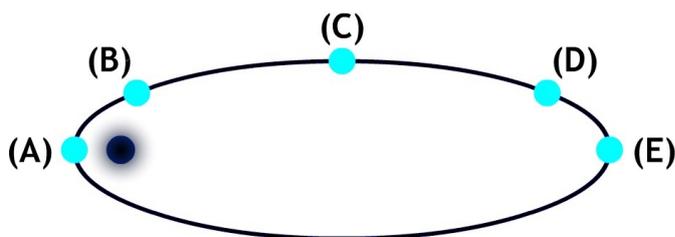
7ª **Questão.** A figura abaixo pretende descrever duas posições separadas de 180° de um planeta numa órbita elíptica em torno de uma estrela. O esquema representa uma situação real?



8ª **Questão.** Qual dos seguintes objetos tem a menor excentricidade?

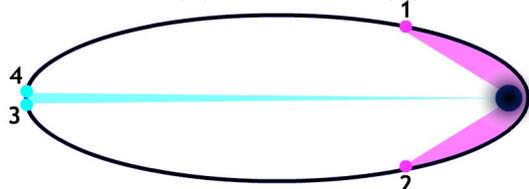


9ª **Questão.** A órbita de um cometa é mostrada abaixo. Em que ponto que a velocidade do cometa é maior?



10^a **Questão.** A órbita de um asteróide ao redor do sol é mostrada abaixo. Se o asteróide leva 2 anos para ir do ponto 1 ao ponto 2 e 1 ano para passar do ponto 3 ao ponto 4, a área azul deve ser () que a área rosa.

- (A) maior que (B) igual (C) menor que

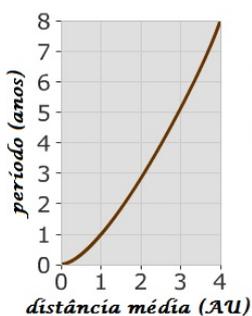


11^a **Questão.** A tabela abaixo ilustra os dados sobre a terceira Lei de Kepler para os seis primeiros planetas. Use-a para estimar o período orbital (em anos) do asteróide Baade que tem um semi-eixo maior de 2,55 UA.

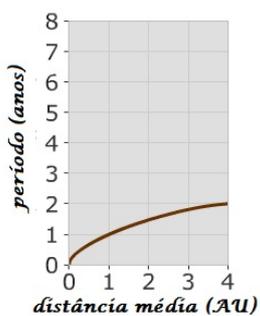
- (A) 4.07
(B) 19.2
(C) 1.67
(D) 50.2
(E) 0.77

	P (anos)	P ²	a ³	a (AU)
<i>Mercúrio</i>	0.24	0.058	0.058	0.39
<i>Vênus</i>	0.62	0.38	0.38	0.72
<i>Terra</i>	1.00	1.00	1.00	1.00
<i>Marte</i>	1.88	3.54	3.54	1.52
<i>Júpiter</i>	11.9	141	141	5.20
<i>Saturno</i>	29.5	868	868	9.54

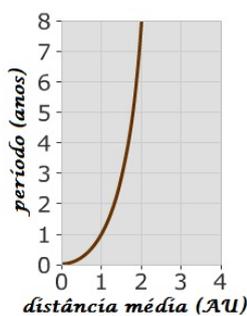
12^a **Questão.** Qual dos gráficos propostos abaixo representam corretamente a 3^a Lei de Kepler?



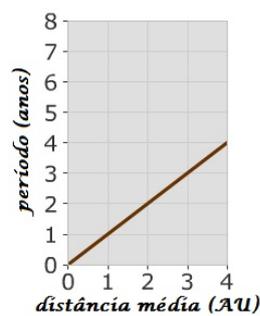
(A)



(B)



(C)



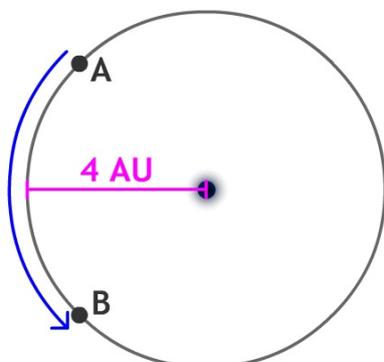
(D)

13^a **Questão.** Sedna, um objeto do Cinturão de Kuiper tem uma distância periélica de 76AU e afélica de 990UA; assim, a excentricidade e o semi-eixo maior de sua órbita valem, respectivamente:

- A) 0,08 e 533AU
B) 0,86 e 1066AU
C) 0,86 e 533AU
D) 0,86 e 914AU
E) 0,08 e 1096AU

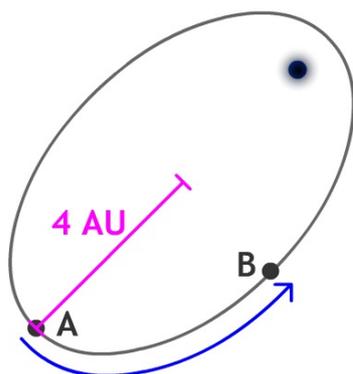
14ª Questão. Um asteróide viaja em torno do Sol em órbita circular com raio de $4AU$. Estimar o tempo que leva o asteróide para se deslocar do ponto A ao ponto B, em fração de anos.

- (A) 0.1
- (B) 1.5
- (C) 2
- (D) 2.5
- (E) 10



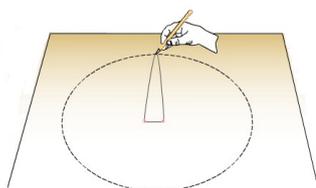
15ª Questão. Um asteróide viaja em torno do Sol numa órbita elíptica com um semi-eixo maior de $4AU$. Estimar o intervalo de tempo que o asteróide leva para se mover do ponto A ao ponto B.

- (A) 0.1
- (B) 1.5
- (C) 2
- (D) 2.5
- (E) 10



16ª Questão. Um estudante pretende desenhar uma elipse com semi-eixo maior de 40 cm e excentricidade de 0,1. Ele usa o método padrão que utiliza um pedaço de barbante unido por suas pontas. Envolvendo esse barbante em dois pontos fixos conforme a figura, qual deve ser o tamanho total do barbante utilizado?

- (A) 96
- (B) 84
- (C) 132
- (D) 44
- (E) 88



Capítulo 6

A nova ordem cósmica

Kepler havia desenvolvido uma astronomia baseada em um modelo geométrico. A adoção de órbitas elípticas conseguiu satisfazer tanto sua hipótese, como as observações de *Tycho Brahe*. As efemerides daquela época eram apresentadas por intermédio de tabelas de posições planetárias que até recentemente ainda eram empregadas por facilidade e comodidade de uso. Baseado no modelo de *Ptolomeu* do cosmos, foram geradas as tabelas de *Alphonsine* (1252), e com o modelo de *Copérnico* as tabelas de *Prutenic*. Em 1627 *Kepler* calcula as tabelas de *Rudolphine* baseado em movimentos elíptico. Estas trouxeram uma nova perspectiva para o cálculo das efemerides, pois as previsões baseados no modelo de *Kepler* ganharam precisão. O abandono dos princípios baseados em movimentos uniforme e trajetórias circulares, que tinham sido usados pelos astrônomos durante séculos, estabelece o início de uma nova era para a astronomia, introduzindo um conceitos de ciência baseado em princípios físicos.

6.1 Galileu Galilei: (O telescópio)

Galileu Galilei (1564-1642) nasceu em Pisa, mas ainda jovem se transferiu para Florença. Diferente de *Kepler*, estudou o movimento dos corpos na superfície da Terra, procurando estabelecer uma nova física para seus movimentos. Adepto ao sistema heliocêntrico, não tardou a provocar controvérsias ao se opor aos princípios Aristotélicos que admitiam formas perfeitas para os corpos celestes.

Com o emprego de uma luneta, construída de elementos utilizados para corrigir defeitos da visão, construiu um instrumento que possibilitava aproximar imagens de objetos distantes. Observando a Lua, pode constatar que tratava-se de um corpo celeste com superfície rugosa e não esférica, como previa *Aristóteles*. As observações dos acidentes e montanhas lunares levou-o a desenvolver um método para a determinação a altura das montanhas lunares, baseado nos comprimentos de suas sombras (Fig 6.1E). A descoberta mais importante de *Galileu* foi a das quatro luas mais brilhantes de Júpiter: “os satélites galileanos” (Fig 6.1C). Observações continuadas possibilitaram que ele viesse a conhecer os períodos orbitais desses corpos ao redor de Júpiter levando-o a concluir que, ao contrário do que imaginava, elas giravam ao redor de Júpiter, e não do Sol (“centro do Universo”). Esse segundo centro de revolução do cosmos contradizia a doutrina Aristotélica que previa um único para o Universo.

Não é certo que Galileu tenha sido o primeiro a observar as principais luas de Júpiter. Um velho registro chinês descreve que um astrônomo de nome *Kan Te*, no século IV a.C., fez muitas

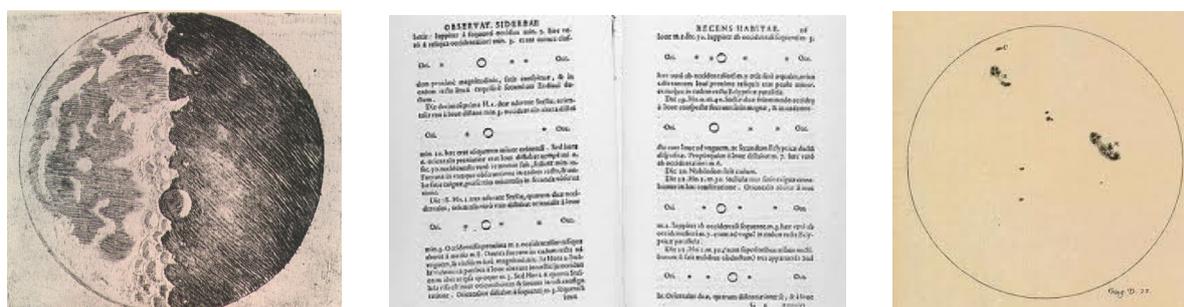


Figura 6.1: A Lua através do telescópio de Galileu. Os satélites galileanos. As manchas solar

observações de Júpiter tendo deixado transparecer que ele havia notado a presença de pequenas estrelas que pareciam estar ligadas ao planeta.

Ainda sobre *Galileu* conta-se que ao observar um lustre preso no teto de uma igreja em Piza, por volta de 1580, constata que o período de oscilação independe de sua amplitude. Questiona a doutrina Aristotélica no que diz respeito a queda dos corpos, e mostra que, independente de seu peso caem juntos. Além disso, utilizando-se de sua luneta, projeta a figura do Sol e mostra o caráter solar das manchas, contrariando o Jesuíta *Christoph Scheiner* que pressupunha serem essas manchas pequenos planetas que giravam ao redor do Sol.

6.2 A Mecânica Newtoniana.

A questão central referente ao movimento dos planetas ao redor do Sol foi tratado por *Isaac Newton* (1643 - 1727). Ao desenvolver sua obra, baseada em dados experimentais (colhidos por *Galileu*) e observacionais (traduzidos através das três leis de *Kepler*, enunciou uma teoria de como os corpos interagem entre si.

Lei da Gravitação Universal - Matéria atrai matéria na razão direta das massas e inversa do quadrado das distâncias.

$$|\vec{F}| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

com r representando a distância que separa os dois corpos de massas respectivamente m_1 e m_2 . G é uma constante de valor $6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$. A partir das deduções empíricas de *Kepler*, com respeito as órbitas planetárias, *Newton* viabilizou uma maneira de unificar a dinâmica do movimento com a gravitação, que publicou em 1687 com o nome de “Principia”.

A teoria de *Newton* forma uma base que é conhecida como a Mecânica Newtoniana. As três leis fundamentais, a lei da gravitação universal, e um pouco de cálculo, são suficientes para quantificar o comportamento dinâmico, de certa forma complexo, do movimento da Terra no Universo.

As três leis de *Newton* da mecânica é resumida a seguir. Lembro que no contexto admito o espaço e o tempo absolutos (sistemas inerciais), e uma partícula de massa m descrevendo uma trajetória $\vec{x}(t)$, com velocidade $\vec{v}(t)$, impulso linear $\vec{p} = m\vec{v}$ e aceleração \vec{a} .

I. Primeira Lei: Da inércia: A velocidade e o impulso linear de um corpo permanecem constantes (em magnitude e direção) a menos que uma força aja no mesmo.

$$\vec{v} \text{ e } \vec{p} = \text{constante}$$

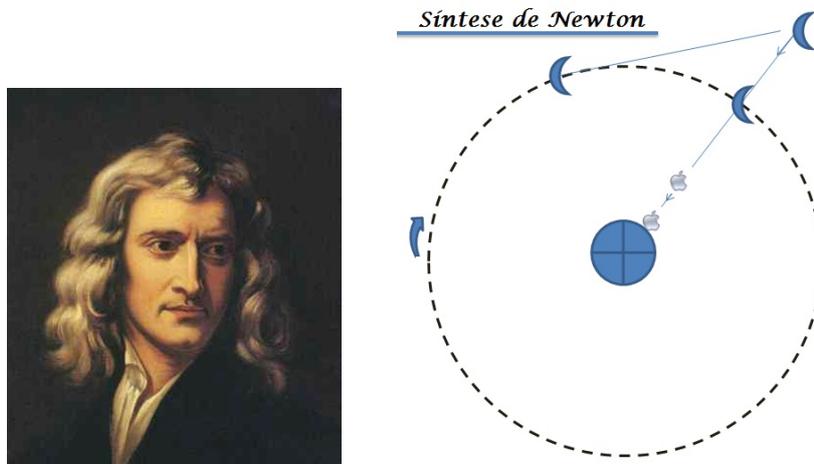


Figura 6.2: *Isaac Newton*. Força Central.

II . Segunda Lei: Força: A variação do impulso linear com o tempo que age sobre um corpo (ou sistema de corpos) é igual a força que atua sobre ele (ou sistema).

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

III . Terceira Lei: Ação e Reação: Em sistemas fechados, a força exercida por um corpo, é igual e oposta aquela que age sobre si, ou o momento linear total de um sistema fechado de corpos permanece constante ao longo do tempo

$$\vec{F}_{ex} = -\vec{F}_{ac} , \vec{p} = \text{constante}$$

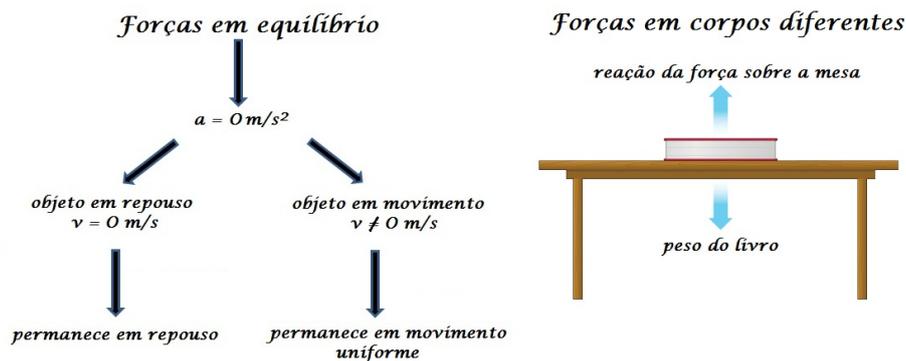


Figura 6.3: As leis de *Newton* do movimento.

6.2.1 A Gravitação Universal.

A teoria da gravitação universal de Newton admitia que a força que mantinha o movimento da Lua ao redor da Terra era a mesma que faz um objeto na Terra ser atraído na direção do centro da Terra. Sobre a Lua é responsável por seu movimento ao redor da Terra (força central).

Consideremos um corpo em movimento circular distante R de uma massa central M_E sujeito a uma força central. Sua velocidade \vec{v} , não obstante de módulo constante, é variável ao longo do tempo t em direção, de tal forma a definir uma aceleração (aceleração centrípeta) que mantém a órbita circular (Fig. 6.4).

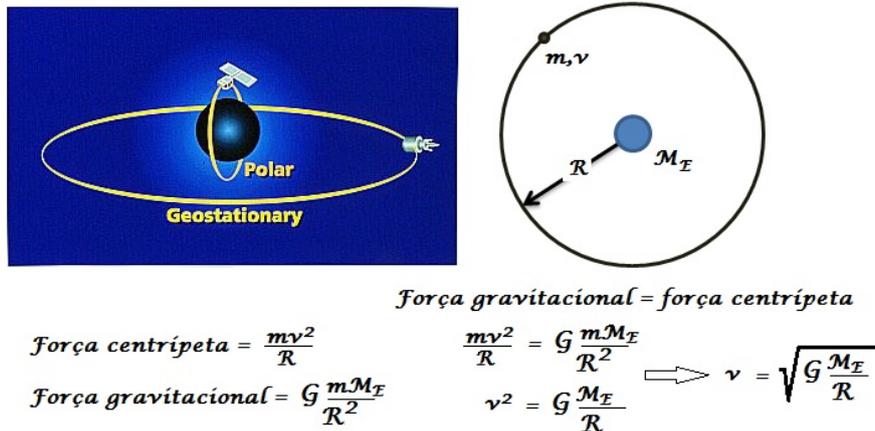


Figura 6.4: Movimento orbital de um corpo sujeito a uma força central. Componentes da velocidade orbital

Assim a aceleração centrípeta tem magnitude igual a:

$$\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

se m for a massa do corpo em órbita, pela segunda lei de Newton, a intensidade da força centrípeta é dada por:

$$F = m\alpha = \frac{mv^2}{r}$$

Sendo, ainda P , seu período orbital, sua velocidade então será:

$$v = \frac{2\pi r}{P}$$

mas pela terceira lei de Kepler, o período e o raio da órbita por meio da expressão:

$$P^2 = kr^3$$

onde k é a constante de proporcionalidade. Substituindo-se estes dois resultados, encontramos:

$$F = \frac{4\pi^2 m}{kr^2}$$

o que significa que a força que mantém o movimento orbital é inversamente proporcional ao quadrado do raio.

De acordo com a terceira Lei de Newton, o corpo central, e de massa M , no centro do movimento, fica sujeito a uma força igual e de sentido oposto. A força central é proporcional ao produto das massas dos dois corpos. Redefinindo a constante de proporcionalidade, teremos:

$$F_{grav} = \frac{GMm}{r^2}$$

que é a lei da gravitação universal. A direção da força está definida pela reta que une os dois corpos.

Nas proximidades da superfície da Terra, os corpos estão sujeitos a uma aceleração no sentido do centro de intensidade:

$$g = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} = 9,8m/s^2, \quad 6.2.1$$

Basta lembrar que $P = mg$ e $F = \frac{GmM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}$, que igualando, temos a expressão 6.2.1, onde M_{\oplus} e R_{\oplus} são respectivamente a massa e o raio da Terra. Ainda, devido a forma achatada da Terra, corpos em sua superfície estão sujeitos a acelerações de intensidade que variam de $9,781m/s^2$ no equador e $9,832m/s^2$ nos pólos.

6.2.2 Resultados da Lei de Newton aplicadas ao movimento planetário

A interpretação física das Leis de Kepler pode ser feita combinando-se as leis do movimento e da gravitação com as empíricas de Kepler. No intervalo de tempo dt , o vetor de posição varre um

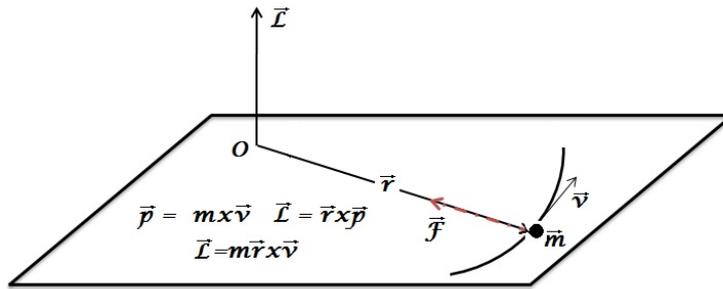


Figura 6.5: Movimento orbital de um corpo sujeito a uma força central. Componentes da velocidade orbital

ângulo $\Delta\phi$, de tal forma que: $\Delta\phi = v_t \frac{\Delta t}{r}$, onde $v_t = v \sin \theta$ é a componente perpendicular a \vec{r} da velocidade instantânea \vec{v} (θ é o ângulo entre \vec{r} e \vec{v}). A área correspondente vale: $\Delta A \equiv \frac{rv_t \Delta t}{2}$, e para $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{rv_t}{2} = \frac{r^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{h}{2} \implies |\vec{h}| = mrv \sin \theta \quad 6.2.2$$

onde \vec{h} é o momento angular por unidade heliocêntrico e constante pelo fato de ser conservado, o que implica no fato do movimento se realizar em um plano, pois sendo \vec{h} constante, o plano formado por \vec{r} e \vec{v} é sempre o mesmo.

Por outro lado, $A/P = |\vec{h}|/2$ com $A = \pi ab$ área da elipse e P o período orbital. Portanto a lei das áreas é cumprida uma vez que a velocidade areolar é igual a área A que é igual a metade do módulo do momento angular (ver Eq. 6.2.2).

Combinando-se esses resultados obtemos:

$$v = \frac{h}{r} = \frac{2A}{Pr} = \frac{2\pi ab}{Pa(1-e)}$$

Aplicando-se o resultado para o periélio e para o afélio, podemos escrever: $v = \frac{2\pi a}{P} \left[\frac{(1+e)}{(1-e)} \right]^{\frac{1}{2}}$, para o periélio, e $v = \frac{2\pi a}{P} \left[\frac{(1-e)}{(1+e)} \right]^{\frac{1}{2}}$, para o afélio. Levando-se em conta que $a = 1UA$, $P = 1$ ano e $e = 0,0167$ a excentricidade, as velocidades periélica e afélica valem respectivamente $30,3 km/s$ e $29,3 km/s$.

De modo análogo podemos escrever:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

com m a massa do corpo, \vec{r} seu raio vetor e \vec{p} o momento linear. Ainda

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Como \vec{v} e \vec{p} são paralelos e $\frac{d\vec{p}}{dt}$ define a força, na direção de \vec{r} , logo $\frac{d\vec{L}}{dt}$ é igual a zero e portanto

$$\frac{|\vec{L}|}{m} = rv_t = |\vec{h}| = \text{constante}.$$

Levando-se em conta que esses resultados independem da lei de forças consideradas, elas estão sujeitas a um campo de forças central (apontam para o baricentro do sistema).

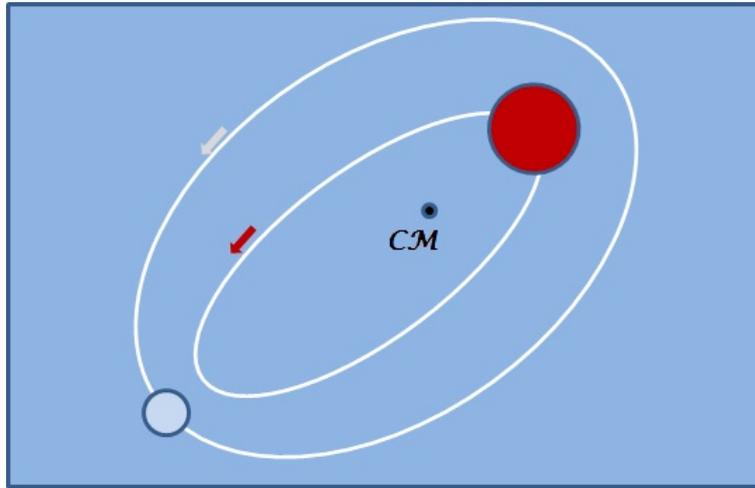


Figura 6.6: Movimento de dois corpos ao redor do centro de massa.

Podemos obter, por intermédio da combinação das leis de Newton uma relação entre o período orbital e o semi-eixo maior a da órbita de um planeta de massa m_2 ao redor de um corpo central de massa m_1 . Devido a força gravitacional que age segundo os centros dos dois corpos, ambos completam uma órbita em um mesmo período P , movendo-se com velocidades v_1 e v_2 . Podemos escrever:

$$F_1 = \frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{P^2}$$

$$F_2 = \frac{m_2 v_2^2}{r_2} = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{P^2}$$

Como pela terceira lei de Newton $F_1 = F_2$, obtemos:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

o que resulta que o corpo mais massivo está mais próximo do centro de massa que o menos massivo. Sendo $a = r_1 + r_2$ a distância que os separa, podemos escrever

$$r_1 = \frac{m_2 a}{(m_1 + m_2)}$$

Lembrando que $F_{grav} = F_1 = F_2$ e vale:

$$F_{grav} = \frac{Gm_1 m_2}{a^2}$$

combinando-se as expressões acima, obtemos a forma Newtoniana da terceira Lei de Kepler:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

Esta relação não é a mesma que para a terceira lei de *Kepler*, pois mostra que o cubo do semi-eixo maior é proporcional à soma das massa do corpo central e do planeta em questão.

Para o sistema solar, onde a massa do Sol é muito maior que qualquer outro planeta, podemos então escrever, sendo $m_1 \gg m_2$, que $k = 4\pi^2/GM_\odot$, com k sendo a constante de proporcionalidade da terceira lei de Kepler.

Newton não se limitou ao estudo do movimento de dois corpos, mas também ao problema do movimento da Lua em relação a atração da Terra e do Sol simultaneamente. Uma outra aplicação interessante de suas leis foi realizada para os cometas. A periodicidade do aparecimento desses objetos levou um seu discípulo procurar dentre as observações existentes o aparecimento de cometas que fosse separadas de intervalos de tempo regulares. Os registros do aparecimento de um cometas nos anos de 1531, 1607 e 1682 levou-o a concluir que se tratava de um mesmo objeto. Calculou seu retorno para 1758 com sucesso. Em homenagem a esse feito o cometa foi batizado com o nome do autor *Halley*.

As leis de *Newton* foram utilizadas durante muito tempo para a construção das efemérides dos movimentos dos planetas, cometas e satélites, além de explicar o achatamento da Terra, as marés ... A idéia de que se conhecendo as posições pregressas ser suficiente através de sua teoria para se prever as posições futuras ganhou adeptos, entretanto, as equações obtidas para os movimentos através da teoria de *Newton* não são suficientes para descrever e resolver por completo os movimentos planetários.

6.3 Movimento de um corpo em um campo gravitacional.

Vamos caracterizar as equações que definem as energias envolvidas no problema.

I. Energia Potencial

$$E_p = - \int_{\infty}^d F \cdot dr \quad e \quad \text{como} \quad F = \frac{GMm}{r^2}$$

$$E_p = - \int_{\infty}^d \frac{GMm}{r^2} dr \implies E_p = - \frac{GMm}{d}$$

II . *Energia cinética*

$$E_c = \frac{mV^2}{2}$$

III . *Energia mecânica total*

$$E_T = \frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{d} \tag{6.3.1}$$

se considerarmos um corpo em equilíbrio:

$$F_G = F_{centrípeta} \implies \frac{GMm}{d^2} = \frac{mV^2}{d} \implies mV^2 = \frac{GMm}{d}$$

que substituindo-se na expressão (6.3.1) obtemos:

$$E_T = \frac{GMm}{2d} - \frac{GMm}{d} = -\frac{GMm}{2d}$$

o sinal *-(negativo)* significa que o sistema é fechado, e portanto o planeta será mantido pela atração do corpo central.

Estudemos agora um corpo em movimento sujeito a uma força central. Da Fig. 6.7 podemos escrever:

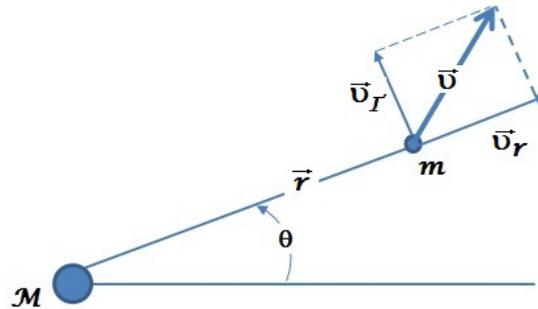


Figura 6.7: Esquema do movimento de um corpo sujeito a uma força central

$$v^2 = v_r^2 + v_T^2 \tag{6.3.2}$$

$$v^2 - \frac{2GM}{r} = h \quad \text{com} \quad h = \frac{2E_T}{m},$$

ainda

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad \text{enquanto} \quad v_T = r \frac{d\theta}{dt}$$

Substituindo-se na expressão (6.3.2) acima, obtemos:

$$\frac{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2}{(dt)^2} - \frac{2GM}{r} = h$$

enquanto que da 2ª lei de Kepler, temos:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c \implies (dt)^2 = \frac{r^4 (d\theta)^2}{c^2}$$

Logo:

$$\frac{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2}{r^4(d\theta)^2} - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{h}{c^2} = 0$$

$$\frac{(dr)^2}{r^4(d\theta)^2} + \frac{r^2(d\theta)^2}{r^4(d\theta)^2} - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{h}{c^2} = 0 \implies \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{h}{c^2} = 0 \quad 6.3.3$$

façamos

$$R = \frac{1}{r} - \frac{GM}{c^2} \implies dR = -\frac{dr}{r^2}$$

Substituindo-se na (6.3.3), temos:

$$\left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2 + \left(R + \frac{GM}{c^2} \right)^2 - \frac{2GM}{c^2} \left(R + \frac{GM}{c^2} \right) - \frac{h}{c^2} = 0$$

$$\left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2 + R^2 + \frac{2GMR}{c^2} + \frac{G^2m^2}{c^4} - \frac{2GMR}{c^2} - \frac{2G^2m^2}{c^4} - \frac{h}{c^2} = 0$$

$$\left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2 + R^2 - \left(\frac{G^2m^2}{c^4} + \frac{h}{c^2} \right) = 0$$

$$q^2 = \frac{G^2m^2}{c^4} + \frac{h}{c^2} = 0$$

$$\left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2 + R^2 - q^2 = 0 \implies (d\theta)^2 = \frac{(dR)^2}{-R^2 + q^2} \implies \pm d\theta = \frac{dR}{\sqrt{q^2 - R^2}}$$

integrando-se:

$$\pm(\theta - \theta_o) = \arccos \frac{R}{q} \implies \cos(\theta - \theta_o) = \frac{R}{q} \quad \text{ou} \quad q \cos(\theta - \theta_o) = R \implies$$

$$\frac{1}{r} - \frac{GM}{c^2} = \sqrt{\left(\frac{G^2m^2}{c^4} + \frac{h}{c^2} \right)} \cos(\theta - \theta_o) \implies \frac{1}{r} = \frac{GM}{c^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{hc^2}{G^2m^2}} \cos(\theta - \theta_o) \right)$$

façamos agora:

- $\frac{1}{p} = \frac{GM}{c^2} \implies p = \frac{c^2}{GM}$
- $e^2 = 1 + \frac{hc^2}{G^2m^2} = 1 + \frac{hp}{GM} \quad \text{portanto} \quad \frac{hp}{GM} = e^2 - 1 \implies h = \frac{e^2 - 1}{p} GM$
- $V = \Theta - \Theta_o$

logo:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos V)$$

representa a equação de uma cônica na forma polar do movimento orbital de um corpo em torno de um ponto.

IV . Cálculo da velocidade

Como da equação

$$v^2 - \frac{2GM}{r} = h \implies v^2 = \frac{2GM}{r} + \frac{(e^2 - 1)GM}{p}$$

ou de forma tradicional:

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1 - e^2}{p} \right)$$

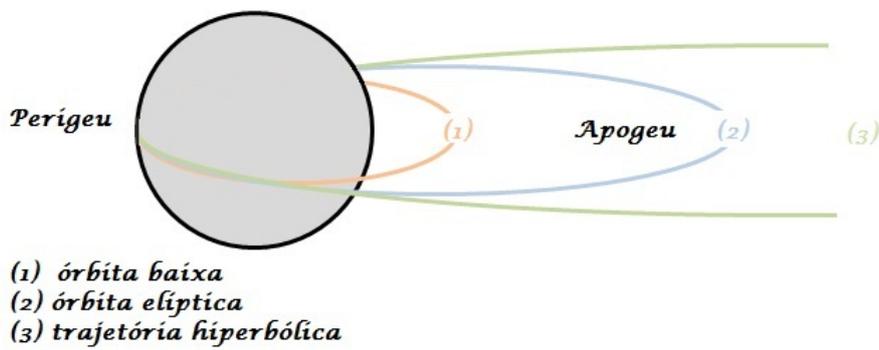


Figura 6.8: Tipos de trajetórias do movimento ao redor do centro de massa.

- i) A natureza da órbita depende do valor de e - *excentricidade*, mas também de v .
- ii) O valor $v_o = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$ é chamada de velocidade parabólica e corresponde a velocidade do ponto material em queda livre (com velocidade inicial 0), quando partindo do infinito chega-se à r .

Logo a natureza da cônica pode ser caracterizada nas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 h < 0 \quad v < \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad e < 1 \quad \text{elipse} \\
 h = 0 \quad v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad e = 1 \quad \text{parábola} \\
 h > 0 \quad v > \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad e > 1 \quad \text{hipérbole}
 \end{aligned}$$

Tabela 6.3.1 Velocidades em função da órbita.

Órbita	Velocidade
Órbita baixa (d=200km)	$V_p = 7,8km/s$
Órbita elíptica	$7,8km/s < V_p < 11,2km/s$
Trajetoária Hiperbólica	$V_p > 11,2km/s$
Órbitas Geoestacionárias (d=36000km)	$V = 3km/s$

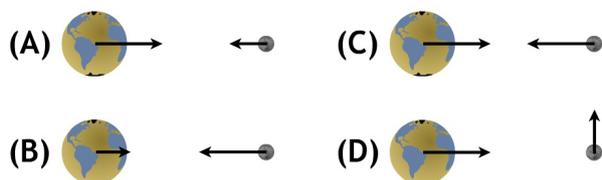
Como aplicação numérica adotar os seguintes valores:

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \text{ (ou } \text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2\text{)}, M_{\oplus} = 6 \times 10^{24} \text{kg e } R_{\oplus} = 6.400 \text{km}$$

A tabela 6.3.1 apresenta as velocidades para as diferentes órbitas de um satélite ao redor da Terra.

6.4 Exercícios

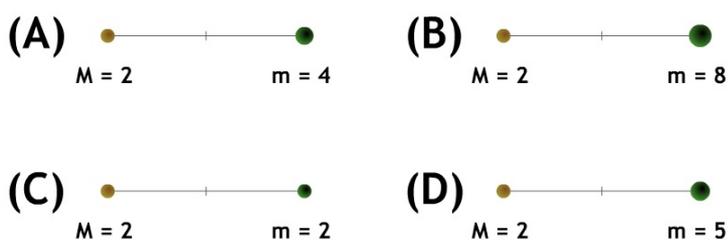
1ª **Questão.** Qual das opções representa corretamente a intensidade e direção da força gravitacional que a Terra e a Lua experimentam face a interação mútua?



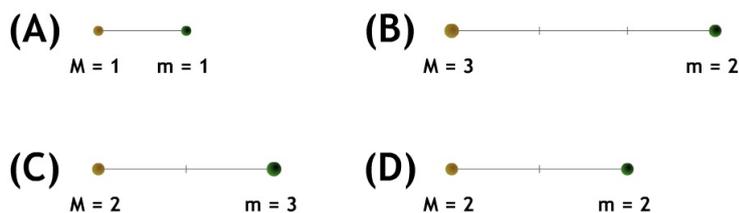
2ª **Questão.** A lei da gravitação universal devido a Newton, descreve a força de atração F entre duas massas M_1 e M_2 separadas por uma distância R . Note que, devido à terceira lei de Newton, ambas as massas experimentam essa força. Qual será o valor da força gravitacional, em termos de F , se a massa M_1 e a distância R entre elas dobrar?

A) $\frac{1}{4} F$ B) $\frac{1}{2} F$ C) $1 F$ D) $2 F$ E) $4 F$

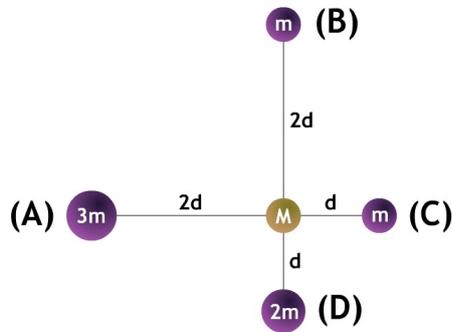
3ª **Questão.** Qual dos seguintes pares de massas exerce a maior força gravitacional entre si? (considere que em todos os casos as massas estão situadas em uma mesma distância)



4ª **Questão.** Qual dos seguintes pares de massas exerce a maior força gravitacional sobre o outro?



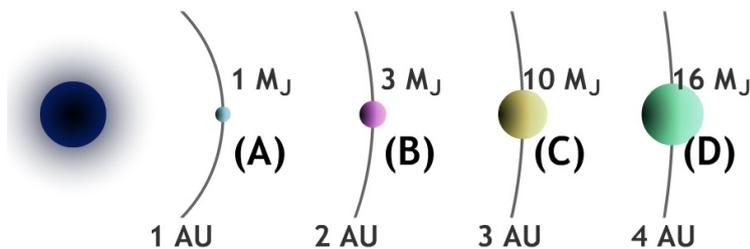
5ª Questão. Qual das opções indicadas abaixo representa o corpo que exerce a menor força gravitacional na massa M ?



6ª Questão. Qual das opções indicadas abaixo representa o corpo que exerce a menor força gravitacional na massa M ?

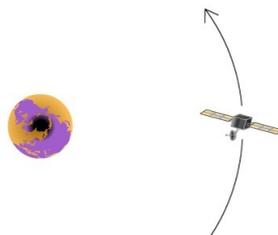


7ª Questão. Em um hipotético sistema solar os planetas estão espaçados em órbitas circulares. As massas planetárias são dadas em termos da massa de Júpiter. Qual dos planetas abaixo exerce a maior força gravitacional na estrela central?



8ª Questão. Os satélites de comunicações são muitas vezes colocados em órbita a 36.000 km acima da superfície da Terra no plano equatorial. Estes satélites são chamados de “geosíncronos”, já que permanecem fixos na mesma posição acima da Terra. Esses satélites têm um período orbital de ...

- (A) 12 horas
- (B) 1 dia
- (C) 1 mês
- (D) 6 meses
- (E) 1 ano



Capítulo 7

A dinâmica da Terra

7.1 O tempo na Astronomia

O tempo, assim como o comprimento e a massa, é uma das três grandezas fundamentais da física. Define-se para cada uma delas uma unidade e, em particular, para o tempo uma para a medida de uma duração. Para medir uma duração (intervalo de tempo) de um experimento, podemos utilizar uma unidade de tempo, como por exemplo, o período de oscilação estável de uma partícula vibrando. É suficiente, entretanto, que essa escala seja uniforme no decorrer do tempo.

Na verdade, o que procuramos, é referenciar a data do evento a uma época origem. É preciso, portanto, um relógio perpétuo cujo funcionamento não seja interrompido de modo a permitir medições em intervalos de tempo quaisquer.

As noções de tempo e de sistema de referência são fundamentais no que se refere à cinemática. Assim, estudando o movimento de um ponto material, nós exprimimos suas coordenadas, velocidade e aceleração em função de um parâmetro (variável independente) t , que chamamos de tempo. Esse parâmetro não tem nenhuma ligação com as observações astronômicas, por nenhuma necessidade lógica. As relações que escrevemos entre as coordenadas e o tempo t , é que definem por isso mesmo esse parâmetro, e que nos dão um meio prático de determiná-la. Se as tabelas que fornecem as correspondências entre os diferentes valores de t às posições dos astro pode ser calculada, a medida das coordenadas para um instante qualquer (conceito primitivo que representa quando um dado fenômeno ocorreu) nos permite, por interpolação inversa, conhecermos o tempo t . Portanto a posição do ponto funciona como um ponteiro de um relógio.

O movimento dos corpos celestes, e em particular o movimento dos corpos do sistema solar, nos oferece uma grande fonte para a construção de um relógio. Acreditou-se durante algum tempo que o movimento de rotação da Terra nos oferecia essa condição, entretanto ela não pode ser comparada a um corpo sólido indeformável. As marés, os fenômenos geológicos e geofísicos causam modificações nas dimensões do elipsóide de inércia representativo de nosso globo terrestre. Apesar dessas perturbações serem mensuráveis, não podemos considerar rigorosamente válidas as efemérides do tempo sideral T , estabelecidas em função de t , na hipótese de uma Terra indeformável. Para distinguir estes valores daremos o nome de tempo terrestre (T) aquele referente ao movimento da Terra, e tempo newtoniano t ao segundo. Um desacordo entre os tempos T , obtido pela rotação da Terra, e t , obtido pelo movimento orbital, foi determinado, a posteriori, sendo essa diferença atualmente de cerca de 1 minuto (60^s).

Podemos, entretanto, utilizar com boa aproximação o tempo terrestre, no lugar do newtoniano, se as medidas se restringem a curto termo. Em outras palavras podemos considerar o movimento da Terra suficientemente uniforme, a curto termo, se levarmos em conta os efeitos sobre a Terra da ação do Sol, Lua e planetas.

Outra forma de estabelecer uma escala de tempo uniforme é por intermédio da utilização de osciladores estáveis (10^{-12} do segundo), que garantam medidas muito longas com a ajuda de meios independentes da astronomia e que apresentam característica cíclica (quartzo, rubídio, cézio ...).

Como assegurar a continuidade de uma escala de tempo?

O estabelecimento das efemérides que fornecem o tempo sideral, e as posições planetárias que fornecem o tempo sideral em função de t da mecânica newtoniana, supõem conhecidos os valores numéricos dos coeficientes das expressões literais correspondentes. Esses coeficientes, dependem das constantes de integração cujos valores não podem ser obtidos senão às custas de observações. Cada vez que se revisa as constantes de integração, para melhor definição dos movimentos planetários, equivale a introduzir uma descontinuidade no intervalo de tempo que se usa como padrão. O problema é semelhante à definição do metro. Se conservássemos a primeira definição do metro, ligada as dimensões do globo terrestre, a cada nova determinação do geóide (melhora da precisão de medida, por exemplo) novo padrão seria estabelecido.

De modo semelhante do que se fez com a adoção de um padrão para o metro, uma escala de tempo uniforme e definida foi a solução (o tempo atômico (TA)). O segundo é definido baseado nas oscilações eletromagnéticas produzidas pelas transições quânticas num átomo (césio 133).

Astrônomos utilizam o termo tempo com um qualificador (tempo sideral, tempo solar ...), que são grandezas distintas do tempo t da mecânica. Essas grandezas têm a característica comum de variarem aproximadamente como funções lineares de t , e seus valores podem ser obtidos por observação, além de serem referidas às efemérides astronômicas. Veremos, no que se segue, que os tempos sideral e solar são essencialmente diedros, isto é, grandezas geométricas acessíveis por observações diretas e que servem como intermediárias quando procuramos determinar o tempo t .

7.1.1 O tempo sideral, o solar verdadeiro e médio

O tempo solar verdadeiro local é, por definição, o ângulo horário do centro do Sol. Podemos representá-lo pela expressão:

$$H_{\odot} = TS - \alpha_{\odot}$$

onde TS é o tempo sideral local. Lembremos ainda que a ascensão reta do Sol pode ser escrita conforme Eq. 5.1.11 da Sec. 5.2 como:

$$\alpha_{\odot} = \varpi + M + 2e \sin M - \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \sin 2(\varpi + M)$$

com:

ϖ - longitude do perigeu

M - anomalia média (ver Sec. 5.1)

$C = 2e \sin M$ - Equação do centro; corresponde a correção ao movimento planetário devido à excentricidade da órbita.

$R = -\tan^2 \frac{\epsilon}{2} \sin 2(\varpi + M)$ - projeção ao equador,
logo podemos escrever:

$$H_{\odot} = TS - A_o - A_1 t - C + R$$

com

$A_1 = n$ - movimento médio ($n = 2\pi/T$), e

$A_o = \varpi - nt_o$

O tempo solar verdadeiro é, portanto, afetado das variações da ascensão reta do sol. Podemos representar o tempo sideral por uma expressão do tipo:

$$TS = TS_o + TS_1 + \tau$$

onde

TS_o - é uma constante

TS_1 - é a taxa de crescimento do tempo sideral em um dia, e

τ - a soma das variações ligadas ao movimento do equinócio.

O tempo solar verdadeiro pode então ser expresso da seguinte forma em função do tempo uniforme:

$$H_{\odot} = TS_o - A_o + (TS_1 - A_1)t - (C + R - \tau)$$

A soma das parcelas $(C + R - \tau)$ é chamada de equação do tempo (Eq): logo

$$H_{\odot} = H_1 + (TS_1 - A_1)t - Eq$$

Todo método que permite medir o ângulo horário de um astro, relativo ao sol, pode servir para a determinação do tempo solar verdadeiro local. Podemos determinar exatamente ao meio dia a passagem do Sol pelo meridiano $H_o = 0$. Esse instante, acessível por observações, não varia como uma função linear do tempo, e portanto não podemos reproduzi-lo por intermédio de um relógio. Necessitamos dispor de uma escala uniforme de tempo e de um padrão.

Tratemos de definir uma escala uniforme, introduzindo inicialmente a noção de tempo solar médio. Para isso, vamos supor que uma teoria nos forneça a expressão exata da equação do tempo Eq . Se num dado momento a observação fornece H_o , o tempo solar médio é por definição:

$$H_m = H_o + Eq$$

Isto é, o tempo solar médio é o tempo solar verdadeiro corrigido da equação do tempo.

Como consequência dessa definição $H_m = H_1 + (A_1 - T_1)t$; se vamos identificar o tempo solar médio local como o tempo uniforme da mecânica, devemos ter $A_1 - T_1 = 1$. Adotando-se ainda como origem de t o meio dia médio de um determinado dia, temos:

$$H_m = t$$

Ainda o tempo médio se anula todos os dias ao meio dia, logo: $H_o = -Eq$, o que significa dizer que o tempo médio difere do verdadeiro por uma quantidade variável e igual a equação do tempo.

Podemos ainda dizer que a diferença entre o tempo sideral e o tempo verdadeiro local é igual a ascensão reta do Sol.

A diferença entre o tempo sideral e o tempo médio local, tem por expressão:

$$TS - H_m = TS - H_o - Eq$$

como $H_o = TS - \alpha_o \rightarrow TS - H_o = \alpha_o$ e $Eq = C + R - \tau$, substituindo-se:

$$TS - H_m = \alpha_o - C - R + \tau$$

que representa a ascensão reta do Sol desprovida da equação do centro, da redução ao equador e das variações que ficam sujeitas devido ao movimento do equinócio. Podemos interpretar a diferença $T - H_m$ como a ascensão reta de um móvel cujo ângulo horário será igual ao tempo médio local.

Num instante determinado, os tempos solar verdadeiros de duas localidades diferem entre si da diferença de longitudes, da mesma forma que os tempos médios locais.

Finalmente tratemos de obter a razão entre a duração de um dia sideral e um dia médio. Sabemos que $(T_1 - A_1)t$ cresce de um dia médio. Como $A_1 = n$, podemos escrever: $T_1 - n = 86400^s$, como $n = 2\pi/T = 236,555\dots$, então $T_1 = 86636,555\dots$, o que significa que em um dia médio, o tempo sideral cresce de T_1 . O dia sideral é então igual a:

$$1 \text{ dia sideral} = \frac{86400}{86636,555} \text{ dias médios,}$$

ou

$$\begin{aligned} 1 \text{ dia sideral} &= 1 \text{ dia médio} - 235,90968^s \\ &1 \text{ dia médio} - 3^m55^s,91 \end{aligned}$$

7.1.2 O tempo civil e o universal

O tempo solar verdadeiro, lido diretamente de um relógio solar, foi utilizado de um modo geral até o final do século XVIII. Foi a partir de 1816 que os relógios públicos, foram regulados em tempo médio.

A contagem do dia é feita a partir da meia-noite, instante correspondente a mudança de data, contado em horas de 0^h a 24^h . A partir daí, renuncia-se o tempo médio, que era contado a partir do meio dia, para adotar o tempo civil, que tem por definição ser igual ao tempo médio aumentado de 12^h . Assim o dia 10 de janeiro de 1999, às 09 horas tempo civil, corresponde ao dia 09 de janeiro de 1999, 21 horas.

A unificação da hora se deu graças a utilização de um sistema de fusos horários. Adota-se o meridiano de Greenwich como meridiano internacional. Vários fenômenos são datados em tempo civil de Greenwich, e esse tempo recebeu o nome de tempo universal (TU).

7.2 Exercícios

1ª Questão. Qual é o número médio de horas de luz por dia durante um ano, para um observador na latitude 41°N ?

- A) menos que 10 horas
- B) cerca de 11 horas
- C) exatamente 12 horas
- D) cerca de 13 horas
- E) mais que 14 horas

2ª Questão. Quando o Sol cruza o meridiano de uma dada localidade no dia 21 de março o TSL (tempo sideral local) vale:

- A) 0 horas
- B) 4 horas
- C) 12 horas
- D) 16 horas
- E) 20 horas

7.3 Movimentos da Terra.

Independente da discussão sobre a origem dos movimentos de rotação e de translação, dentre outros, de que são animados os corpos do nosso sistema solar, vamos neste capítulo caracterizar esses mesmos movimentos, para nosso planeta, e procurar verificar quais as consequências para as posições da Terra de um modo geral, não esquecendo que a maior parte dessas características são aplicadas para os demais planetas.

7.3.1 A rotação da Terra

Nós sabemos que a Terra esta animada de uma rotação, de oeste para leste, em um intervalo de tempo de aproximadamente 23^h56^m ($\omega = \frac{2\pi}{23^h56^m} = 7,28 \times 10^{-5} \text{rd/s}$). A velocidade de rotação linear no equador é :

$$v_o = \frac{2\pi R}{86164} = 465 \text{m/s} \quad 7.2.1$$

e para uma dada latitude ϕ , $v = v_o \cos \phi$, que provoca um achatamento na Terra, de modo que seu raio equatorial mede 6378,137 km, enquanto que o polar 6356,7523 km. Definimos o parâmetro ε para a figura da Terra, como sendo a razão: $\varepsilon = (r_e - r_p)/r_e$ onde r_e é seu raio equatorial e r_p o polar. Medidas precisas desses raios levam ao valor, para o achatamento, de $\frac{1}{f} = 298,257223$ (ver página 68, parágrafo 4.3.5).

A despeito das questões fundamentais ligadas ao conhecimento de nosso planeta uma das fundamentais é a que trata da rotação. Conquanto a escola Pitagórica estivesse revestida de um caráter esotérico e secreto, alguns de seus representantes chegaram a falar em rotação da Terra (ver Período Helenístico Cap. 3). Deixemos, no entanto, a questão filosófica a respeito da rotação e nos concentremos em como provar que a Terra gira.

O movimento para o oeste da esfera celeste poderia refletir o movimento diário da Terra para o leste, mas esta evidência, por si só, não é prova de que a Terra gira, pois poderíamos justificar o conceito de rotação dotando a esfera celeste de um movimento para oeste considerando esse movimento a partir de um sistema de referência em uma Terra estacionária. Logo nós só poderemos provar a rotação da Terra fundamentando nossos argumentos nas conhecidas leis da dinâmica de Newtoniana.

• O Efeito Coriolis

As trajetórias aparentes de foguetes e satélites da Terra podem ser compreendidas admitindo-se que a Terra gire. Considere um projétil lançado do pólo norte em direção ao equador da Terra (Fig. 7.1). Na ausência de rotação, o projétil deve seguir na direção do meridiano durante todo vôo. No entanto, na presença de rotação, o alvo situado no equador se moverá para leste com uma velocidade de 0,46km/s, e o projétil chegará em um ponto a oeste da posição do alvo. Embora, o movimento do projétil seja diretamente para o sul, ele chega no equador desviado para a direita em relação à superfície da Terra. A aceleração é produzida por uma força inercial que está na origem desse efeito - o efeito Coriolis - que foi deduzido por Gaspard Gustave de Coriolis (1792 - 1843) em 1835. A força de Coriolis é dita inercial e age perpendicularmente a direção do movimento de um corpo que se desloca em um meio (segundo um referencial) em rotação, da forma como visto por um observador no mesmo referencial.

Corpos em movimento sempre parecem estar desviados para a direita no hemisfério norte e para a esquerda no hemisfério sul. Se a velocidade de um projétil é v e a velocidade angular

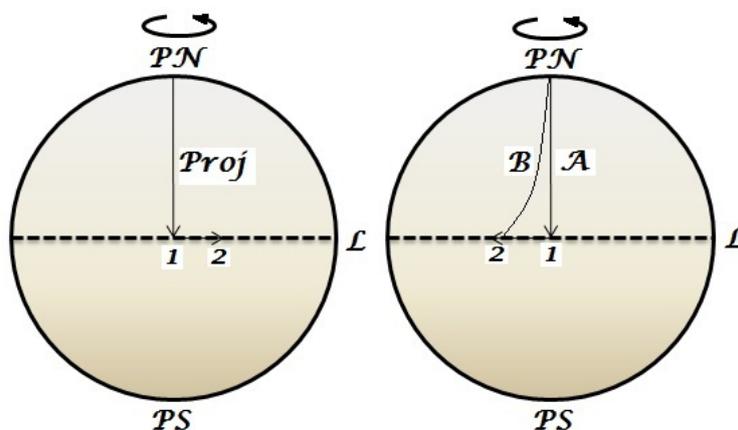


Figura 7.1: Trajetória de um projétil lançado do pólo norte da Terra. (A) Terra sem rotação o projétil atingirá o alvo em 1. (B) Trajetória do projétil na presença da rotação da Terra. O projétil chegará no equador em um ponto a direita do alvo.

da Terra for o vetor ω (a direção está voltada para o pólo norte celeste, e sua intensidade é medida pela velocidade da Terra em radiano por segundo), então, podemos escrever em termos da aceleração de Coriolis :

$$a_{Coriolis} = 2\omega(\vec{v} \times \vec{k}) \tag{7.2.2}$$

onde \vec{v} é a velocidade do pêndulo, \vec{k} é o vetor unitário no eixo de rotação terrestre e ω a velocidade de rotação angular da Terra (ou seja, uma volta em um dia sideral).

O produto vetorial resulta do produto das componentes perpendiculares de v e ω e a direção da aceleração de Coriolis é a direção em que aponta os dedos de sua mão direita quando você alinhar os dedos de sua mão direita ao longo v e girá-los de modo que o dedão aponte para para a direção da velocidade angular (ângulo ω - regra da mão direita).

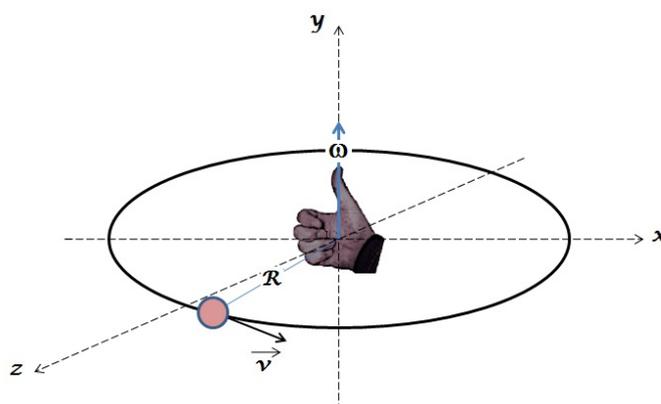


Figura 7.2: Regra da mão direita

Um corpo lançado em A (Fig. 7.1D), vai desviar-se para leste devido a rotação terrestre, com uma velocidade $v = (R+h)\omega$ com R o raio da Terra e ω sendo sua velocidade angular de rotação. O movimento resultante dessa queda livre é um movimento parabólico. O corpo cai em B depois

de um tempo dt , ao cabo do qual o ponto O será O' (Fig.7.3). Teremos então: $OB = (R+h)\omega dt$ e $OO' = R\omega dt$. Vemos portanto que o ponto B da queda se encontra desviado para leste do ponto O' equivalente a $BO' = h\omega dt$ com $h = g(dt)^2/2$, e portanto $BO'' = g\omega(dt)^3/2$. Por exemplo, para $h = 120m$, teremos $dt = 5s$ e $BO'' = 45mm$, onde $OO' \approx 2km$.

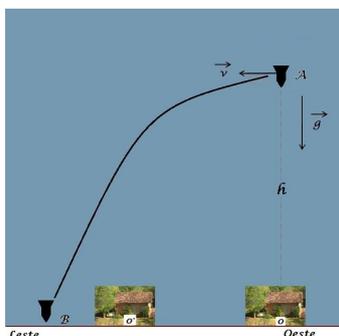


Figura 7.3: Desvio para leste

O efeito Coriolis define as características dos ventos em grande escala na atmosfera da Terra. Um ciclone é um local de circulação do ar que se caracteriza por um movimento no sentido anti-horário no hemisfério norte (sentido horário no sul), produzido um deslocamento para a direita do ar fazendo com que ele flua em direção ao centro de uma região de baixa pressão. Um anticiclone se forma quando o ar, a partir do centro de uma região de alta pressão, é desviado no sentido horário regiões do hemisfério norte (sentido anti-horário no Sul).



Figura 7.4: Anti-ciclone - hemisfério norte

O aquecimento solar produz grandes células de ar que se movimentam verticalmente e que são denominadas de células de *Hadley*. Na superfície da Terra, o efeito Coriolis causa ventos que fluem para leste nas regiões confinadas entre as latitudes de 5° a 30° . Nota-se ainda que o efeito Coriolis combinado com a convecção cria um padrão global de fluxo atmosférico. Convecção é um modo para transporte de energia térmica de uma localidade para outra (dois outros processos são a radiação e a condução.) A convecção acontece na atmosfera da Terra quando a radiação

solar aquece o solo e o ar entra em contato com ele. O ar se expande e sua densidade diminui. Ar frio, mais denso desce deslocando o ar mais quente, que enquanto sobe esfria.

• O pêndulo de Foucault

Conquanto sejam várias as evidências de que a Terra seja animada de movimento de rotação, a prova foi fornecida por *Foucault*, que com seu famoso pêndulo mostrou que se o plano de oscilação de um pêndulo livre está isento de forças perpendiculares, a intersecção do horizonte local e do plano de oscilação giram em um intervalo de tempo de 24^h no pólo, e de $24^h / \sin \phi$, em uma latitude ϕ qualquer.

Há 150 anos, Foucault (1819-1868) demonstrou a rotação da Terra, com auxílio de um pêndulo, em uma experiência que ficou conhecida como o “Pêndulo de Foucault”. A primeira vez em que conseguiu êxito na realização da experiência ocorreu em janeiro de 1851, na residência de sua mãe viúva, onde morava, na esquina das ruas d’Assas e de Vaugirard. O pêndulo não devia ter mais que 2,5 metros de comprimento.

Informado do êxito, Arago (1786-1853) - então diretor designado do “Bureau des Longitudes”, desde a morte de Bouvard (1767-1843) - convidou-o a reproduzir a experiência na sala do segundo andar do Observatório de Paris, atualmente denominada Sala Cassini. Esta segunda experiência foi efetuada no início de fevereiro de 1851 com um pêndulo que tinha entre 10 e 11 metros de comprimento.

O Príncipe-Presidente, que viria dentro em pouco a se tornar Napoleão III, informado do resultado da experiência, convidou Foucault a reproduzir o seu pêndulo em um lugar apropriado para uma demonstração pública. O monumento “Panthéon” foi escolhido e os numerosos espectadores, que lá estiveram em março de 1851, foram testemunhas do movimento da Terra, que, girando sob seus pés, criava a impressão de que era o pêndulo que efetuava esta rotação.



Figura 7.5: O pêndulo de *Foucault* (Panthéon)

Em 1902, Flammarion reproduziu a experiência, segundo relato contido na edição de fevereiro de 1996, da revista “l’Astronomie”. O Observatório de Paris, por ocasião da programação de

A Ciência em Festa de 1994, tomou, como tema central, a “Rotação da Terra”. A experiência do pêndulo de Foucault tornou a ser recriada na sala Cassini, graças à Sociedade “Athamor de Montluçon” (responsável pela massa na extremidade do pêndulo), com o apoio do Conservatório de Artes e Ofícios, particularmente de um de seus engenheiros, e do pessoal do Observatório de Paris. O sucesso dessa realização levou o Conservatório de Artes e Ofícios a reproduzir o pêndulo de 60 m no Panthéon (Fig. 7.5), por ocasião da Ciência em Festa do ano seguinte, 1995.

Um pêndulo simples consiste de uma massa m na extremidade de uma corda de massa desprezível ou em uma haste rígida de comprimento l . Se a massa m for deslocada de sua posição de repouso e solta, resultará em um movimento oscilatório.

Chamando de α o ângulo que a corda faz com a vertical em um dado instante, a equação diferencial do movimento é dada pela expressão:

$$F = -kx = m\ddot{x}$$

assumindo que não haja forças de amortecimento ou outras forças externas agindo e que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, teremos a expressão:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

que se identifica como um movimento harmônico. Chamando de α o ângulo que a corda faz com

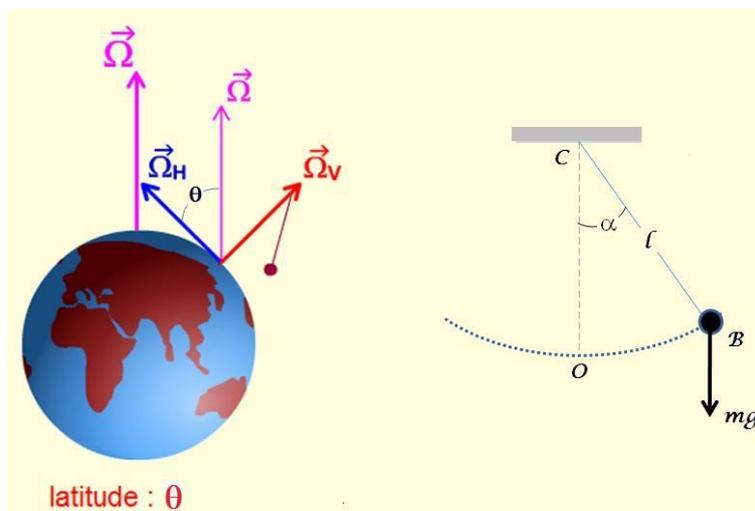


Figura 7.6: O pêndulo simples

a vertical em um dado instante, a equação diferencial do movimento é:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \alpha$$

assumindo que não haja forças de amortecimento ou outras externas agindo.

Conforme a figura 7.6, consideremos o plano horizontal, supondo que O seja a posição da massa oscilante em repouso. O eixo horizontal x é dirigido para o leste (tangente ao paralelo), enquanto o y está dirigido para o norte (tangente ao meridiano). O terceiro eixo Oz será vertical, dirigido para cima.

Para o caso em que a rotação da Terra é desconsiderada, as equações do movimento são aquelas do pêndulo simples, ou seja:

$$\begin{aligned}x'' &= -\omega^2 x \\y'' &= -\omega^2 y\end{aligned}$$

onde ω é a oscilação própria do pêndulo, isto é:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

com g a aceleração da gravidade e l o comprimento do pêndulo. Se no instante $t = 0$ o pêndulo passa por O com uma velocidade v_o segundo o eixo Ox , então a solução deste sistema será:

$$\begin{aligned}x &= \frac{V_o}{\omega} \sin(\omega t) \\y &= 0\end{aligned}$$

Se introduzirmos a rotação da terra, teremos que considerar o efeito Coriolis levando em conta a aceleração de Coriolis conforme a equação 7.2.2, onde a velocidade de rotação Ω da terra é muito menor que a velocidade de oscilação própria ω do pêndulo.

Considere que estejamos na latitude ϕ . As componentes do vetor $\Omega \vec{k}$ podem ser escrita no referencial $Oxyz$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos \phi \\ \Omega \sin \phi \end{pmatrix},$$

enquanto que as componentes de \vec{v} :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}$$

A aceleração de Coriolis terá por componentes:

$$\begin{pmatrix} 2y'\Omega \sin \phi \\ -2x'\Omega \sin \phi \\ 2x'\Omega \cos \phi \end{pmatrix}$$

As equações do movimento no eixo Oxy serão:

$$\begin{aligned}x'' &= -\omega^2 x + 2y'\Omega \sin \phi \\y'' &= -\omega^2 y - 2x'\Omega \sin \phi\end{aligned}$$

considerando as mesmas condições iniciais para $t = 0$, as soluções do sistema diferencial são:

$$\begin{aligned}x &= \frac{V_o}{\omega_o} \sin(\omega_o t) \cos(\Omega \sin(\phi)t) \\y &= -\frac{V_o}{\omega_o} \sin(\omega_o t) \sin(\Omega \sin(\phi)t)\end{aligned}$$

com

$$\omega_o = \sqrt{\omega^2 + \Omega^2 \sin^2(\phi)}$$

que pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{V_o}{\omega_o} \sin(\omega_o t) \begin{pmatrix} \cos(\Omega \sin(\phi)t) \\ -\sin(\Omega \sin(\phi)t) \end{pmatrix}$$

A oscilação se dá com uma pulsação própria ω_o que é expressa pela expressão:

$$\frac{V_o}{\omega_o} \sin(\omega_o t)$$

A direção desta oscilação é dada de acordo com a expressão:

$$\begin{pmatrix} \cos(\Omega \sin(\phi)t) \\ -\sin(\Omega \sin(\phi)t) \end{pmatrix},$$

que roda lentamente com uma frequência segundo: $\Omega \sin(\phi)$ que corresponde:

- nos pólos 1 ciclo por dia (1 dia)
- para $\phi = 45^\circ$ 0,7071 c/d (1,414 dias)
- para $\phi = 23,5^\circ$ em São Paulo 0,3987 c/d (2,507 dias)

7.3.2 A precessão.

Historicamente foi *Hiparcos* em 129 a.C que descobriu o efeito da precessão estudando o deslocamento aparente da estrela Spica situada nas proximidades do plano da eclíptica. Sua experiência, similar aquela de *Timocharis* e realizada em 273 a.C., consistia em medir a distância angular do centro da sombra terrestre projetada na Lua durante um eclipse lunar (posição diametralmente oposta ao do Sol que corresponde a uma longitude eclíptica para a estrela Spica de $L_{Spica} = L_{\odot} + 180^\circ$). *Hiparcos* obteve o valor para a longitude de 174° . Cento e quarenta e quatro anos antes *Timocharis* havia obtido 172° , o que levou-o a concluir que a estrela havia avançado de 2° nesse intervalo de tempo; ou seja $50''$ por ano. *Hiparcos* teria especulado que esse movimento pudesse ser devido ao movimento próprio da estrela, que para os conhecimentos da época pareceu algo exagerado. Entretanto essa descoberta teria sido considerado como um deslocamento, no sentido retrógrado do equinócio (que corresponde ao efeito da precessão).

Nós estamos familiarizados com o movimento de um giroscópio ou de um pião. Quando o eixo de rotação de um corpo não está alinhado com a vertical, espera-se que ele tenda a aumentar essa inclinação. Entretanto o eixo de rotação gira em relação a vertical mantendo a inclinação enquanto gira mais lentamente. Este movimento de precessão é previsto pelas leis de Newton, cuja interpretação da segunda lei de Kepler exige o conceito de momento angular:

$$L = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}), \quad 7.2.2$$

onde m é a massa do corpo, r o vetor posição e p o momento linear.

O produto vetorial na equação 7.2.2 produz o produto das componentes perpendicular dos dois vetores em questão. O momento angular é uma grandeza vetorial \vec{L} caracterizada pelas unidades $kg.m^2/s$.

Diferenciando a equação 7.2.2, obtemos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F},$$

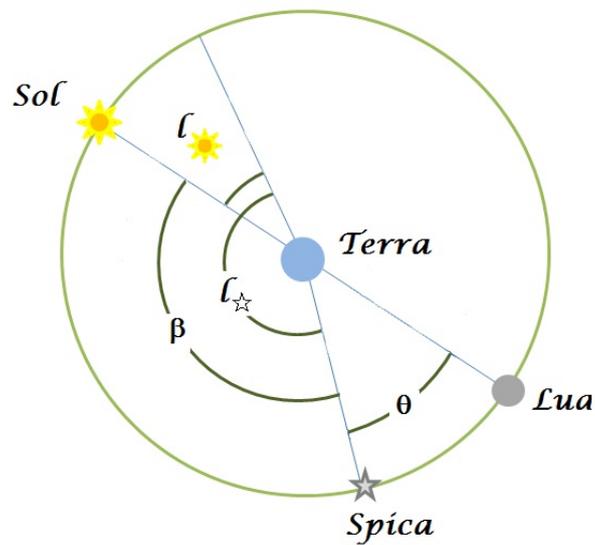


Figura 7.7: Geometria da observação da estrela SPICA



Figura 7.8: A precessão movimento giroscópico do eixo de rotação

onde $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$ é denominado de torque.

A atração gravitacional exercida no bôjo da Terra, produz um torque $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$. Como esse torque \vec{N} representa a taxa de variação do momento angular \vec{L} , com o tempo ($\vec{N} = d\vec{L}/dt$), não havendo nenhuma componente vertical que forçaria o pólo a movimentar-se para baixo, logo ele só pode girar, ou precessionar, segundo a vertical. Forças diferenciais aplicadas no bojo da Terra, devido a sua forma achatada, produz um movimento semelhante que a faz precessionar para oeste.

7.3.3 A translação ao redor do Sol

A translação anual da Terra é regida pela atração gravitacional do Sol, conforme estabelecido pela lei da gravitação universal. A intensidade dessa força é dada por:

$$F = \frac{GM_{\odot}m_{\oplus}}{d^2}$$

$M_{\odot} = 1,99 \times 10^{30} \text{kg}$ - massa do Sol

$m_{\oplus} = 5,98 \times 10^{24} \text{kg}$ - massa da Terra
 $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{N.m}^2/\text{kg}^2$ - constante gravitacional
 $d = 1,496 \times 10^{11} \text{m}$ - distância Terra-Sol

Esta lei, devido a *Newton* (1687), permitiu que se atribuisse uma interpretação física para os movimentos de dois corpos regidos pelas leis de *Kepler* (1609) (ver seção 3.10). Em particular para a Terra o plano de sua órbita, denominada de eclíptica, esta inclinada de um ângulo $\epsilon = 23^{\circ}26'21''$, aproximadamente, em relação ao equador. Os planos do equador e da eclíptica se interceptam nos pontos γ (equinócio) e γ' . A passagem do Sol pelo equinócio, corresponde a época em que ele cruza o equador no sentido do hemisfério sul para o norte, durante seu movimento aparente anual.

7.3.4 Evidências da translação da Terra ao redor do Sol

• A aberração

O efeito da precessão, que modifica as coordenadas celestes de uma estrela com o tempo, é na essência devido ao movimento do sistema de referência para o qual as coordenadas das estrelas são referidos.

A aberração assim como a paralaxe têm diferentes naturezas. A primeira trata da variação aparente da direção do astro devido ao movimento do observador, ou em outras palavras, a aberração depende da velocidade relativa observador e astro. Já a paralaxe é um efeito geométrico devido ao deslocamento relativo. Portanto, aberração e paralaxe são fenômenos de naturezas diferentes, que no entanto apresentam certa analogia quando tratados teoricamente.

O movimento da Terra combinado com a velocidade de propagação da luz, causam o efeito da aberração. Descoberto por *Bradley* em 1726 este efeito pode ser comparado a variação da direção aparente da queda das gotas de chuva conforme o observador esteja imóvel ou se deslocando (Fig. 7.9).



Figura 7.9: Trajetória aparente das gotas de água da chuva vista por um observador parado e em movimento

Se em um instante t observamos uma estrela a uma distância d , e levando-se em conta que a luz leva um tempo $\frac{d}{c}$ para chegar, onde c é a velocidade de propagação da luz, sua posição fica caracterizada no instante $t - \frac{d}{c}$. Além disso, durante o intervalo de tempo correspondente à $\frac{d}{c}$ a Terra se movimenta ao redor do Sol com velocidade aproximada de 30km/s . A estrela parecerá ter se deslocado no céu, descrevendo uma elipse dita de aberração, paralela à eclíptica, cujo centro é sua posição verdadeira e cujo semi-eixo maior é dado pela relação entre as velocidades da Terra e da luz, ou seja:

$$\sim \frac{30}{300.000} \text{rad} = 0,0001 \times 206265 \sim 20,6''$$

7.3.5 A aberração do Sol.

A velocidade relativa do Sol, supondo-se um movimento circular, é dada por $v = na$ com a representando a distância Terra-Sol (em unidades astronômicas) e n a velocidade angular aparente do Sol. O intervalo de tempo que a luz gasta para percorrer a distância a é dada pela expressão: $\tau = \frac{a}{c}$. Nesse intervalo de tempo o Sol se desloca de um arco de circunferência igual a $k = n\tau$, logo $k = n\frac{a}{c}$, ou $k = \frac{v}{c}$. O arco k representa então a diferença de posições aparente e verdadeira e denominado de aberração solar.

A descoberta da propagação da luz e a primeira determinação do tempo que ela leva para percorrer a distância Sol-Terra é devido a *Röemer* (1676 Observatório de Paris).

No século XVII, os eclipses dos satélites de Júpiter eram utilizados para a determinação das longitudes na Terra, o que conferia uma importância prática considerável às tabelas de seus movimentos fornecidas por Cassini. *Röemer* constatou que essas tabelas representavam corretamente os fenômenos observados nas vizinhanças das quadraturas do planeta, mas não nas oposições nem nas conjunções. Na época das conjunção os eclipses ocorriam com atraso, enquanto que na oposição com um avanço de quase 8 minutos, o que resultava em uma pulsação aparente do espaço com uma amplitude da ordem de $16,6^m$, valor correspondente ao dobro da chamada “equação da luz”.

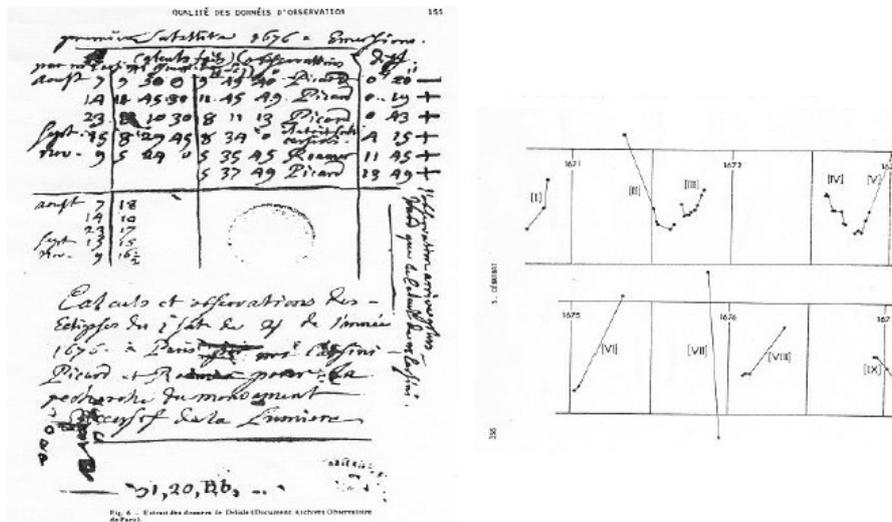


Figura 7.10: A esquerda parte do caderno de observações que integraram os cálculos da determinação da velocidade da luz. Observe que a maior parte das observações dessa noite foi realizada por Picard. A direita um gráfico, baseado nas observações de Röemer feito por Sagnier representando a equação da luz (Artigo de S.Débarbat - biblioteca do Observatório de Paris)

Logo:

$$k = n\tau = \frac{2\pi\tau}{T} = \frac{2\pi}{365,25 \times 24 \times 60} \times 8,3 \times 206265 \sim 20,45''$$

A determinação do valor mais correto para k implica na introdução do valor da excentricidade da órbita relativa do Sol. A velocidade do movimento kepleriano é resultado de dois vetores:

um normal ao raio que tem intensidade

$$\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}$$

e outro normal a linha das apsides que tem por medida

$$\frac{nae}{\sqrt{1-e^2}}$$

O hodógrafo do movimento é um círculo. As componentes das velocidades se obtém ds expressões:

a) componente radial

$$\frac{1}{r} = \frac{1+e\cos v}{p} \rightarrow -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{e\sin v}{p} \frac{dv}{dt}$$

como

$$r^2 \frac{dv}{dt} = C \rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{Ce\sin v}{dt} \rightarrow V_2 = \frac{Ce}{p}$$

b) componente normal

$$r \frac{dv}{dt} = \frac{C}{r} = \frac{C(1+e\cos v)}{p} \rightarrow V_1 = \frac{C}{p}$$

Portanto o hodógrafo é um círculo de raio $\frac{c}{p}$ com o centro situado a uma distância $\frac{Ce}{p}$ da normal ao eixo focal da cônica.

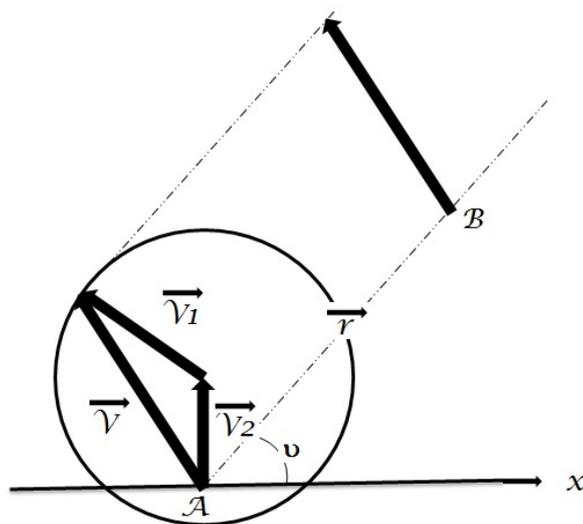


Figura 7.11: Hodógrafo do movimento aparente do Sol

Conforme a solução da equação de Kepler,

$$C = na^2\sqrt{1-e^2} \quad e \quad p = a\sqrt{1-e^2}$$

A componente normal ao raio vetor da velocidade é portanto

$$V_n = V_1 + V_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) \rightarrow V_n = V_1 + V_2 \cos v$$

logo

$$V_n = \frac{c}{p} + e \frac{c}{p} \cos V = \frac{c}{p} (1 + e \cos v)$$

A aberração do Sol é igual a razão desta velocidade com a da luz:

$$k(1 + e \cos v) = \frac{na}{c\sqrt{1 - e^2}} (1 - e \cos v)$$

$$\rightarrow k = \frac{na}{c\sqrt{1 - e^2}}$$

7.3.6 Aberração das fixas

A aberração não afeta somente o Sol como *Röemer* e seus contemporâneos admitiam. Na Fig. 7.12, T representa a Terra, A_1 o astro observado e \vec{v} a velocidade da Terra relativa ao astro.

A luz emitida pelo astro quando se encontra em A_1 chega até a Terra ao cabo de $\tau = \frac{A_1 T}{c}$.

A velocidade relativa estrela e Terra é $-\vec{v}$. A direção geométrica do astro é $T\vec{A}_2$, e sua direção aparente $T\vec{A}_1$.

A aberração é dada pela expressão:

$$\frac{\sin \theta}{A_1 T} = \frac{\sin \Delta\theta}{A_2 A_1} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{v}{c} \sin \theta$$

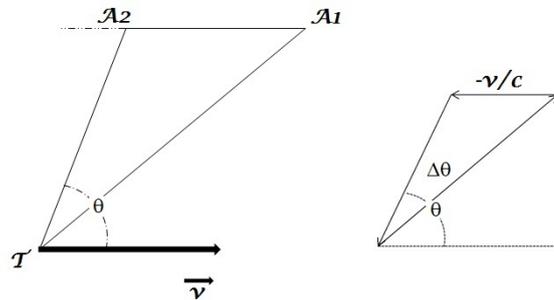


Figura 7.12: A aberração das fixas

7.3.7 Aberração secular

Supondo-se um observador T animado com uma velocidade v em relação a um conjunto de estrelas, se considerarmos um conjunto de pontos situados em uma circunferência em T devido ao movimento da Terra, resultará que todas as posições estarão mais próximas de A .

Em resumo todas as posições aparentes estão mais próximas do “Apex” (ponto diretor das velocidades), que as posições geométricas.

Se a distribuição geométrica das estrelas for uniforme, sua distribuição aparente não é; o hemisfério celeste que pertence o Apex se enriquece as custas do outro.

Se a velocidade \vec{v} representa, em valor, uma fração considerável daquela de valor c da luz, as estrelas aparecerão concentradas na direção do apex, deixando o antiapex pobre de estrelas.

O Sol e seu sistema planetário são animados de um movimento de translação em relação às estrelas próximas com velocidade aproximada de 20km/s, na direção da constelação de Hércules.

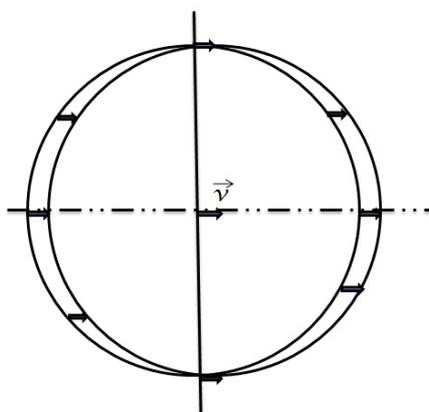


Figura 7.13: Aberração secular

A constante v/c tem valor aproximado de $14''$. Esse efeito não parece ter influência apreciável sobre a repartição aparente dos astros. Como a aberração de cada estrela é invariável em direção e módulo, ela não poderá ser colocada em evidência observacionalmente.

7.3.8 Aberração anual da fixas

A velocidade orbital da Terra varia pouco em módulo, mas muito em direção, e seu apex descreve um elipse em um ano permitindo colocar em evidência a aberração anual correspondente.

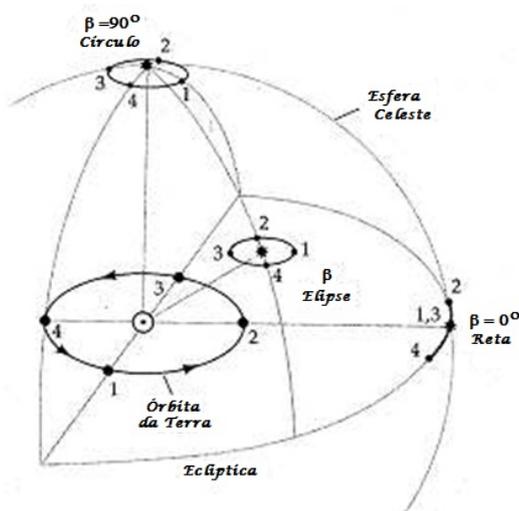


Figura 7.14: A aberração anual das fixas

Negligenciando-se provisoriamente a excentricidade da órbita da Terra, sua velocidade \vec{v} é igual a na , em módulo, e sua direção faz um ângulo de $-\frac{\pi}{2}$ em relação ao raio vetor Terra-Sol, de modo que o apogeu tem por longitude $\odot - \frac{\pi}{2}$.

A Fig. 7.14 mostra a órbita aparente estelar devido a aberração. A Terra é mostrada em quatro posições distintas, conjuntamente com as posições aparente de um astro situado no pólo,

no plano e em uma posição qualquer na eclíptica. A constante de aberração anual é o semi-eixo

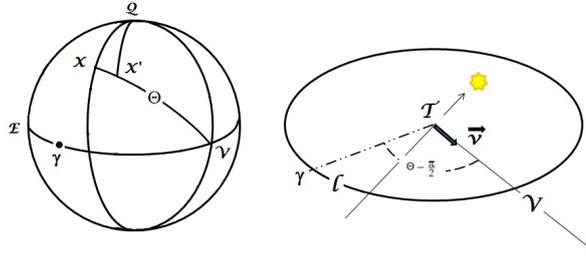


Figura 7.15: A aberração anual das fixas. Apex do movimento

maior da elipse e igual a $k = \frac{v}{c}$. O semi-eixo menor tem por valor $k \sin b$ (b latitude eclíptica). Uma estrela situada no plano descreve um segmento de reta de comprimento $2k$, enquanto que uma situada no pólo, uma circunferência de raio k .

Na Fig. 7.15 seja E o plano da eclíptica, γ o equinócio e X uma estrela de coordenada l e b (coordenadas eclípticas). O apex do movimento orbital da Terra é o ponto V nesse mesmo plano, e cuja longitude celeste é igual a do Sol diminuída de $\frac{\pi}{2}$.

Considerando-se o arco \widehat{VX} como Θ , a aberração XX' tem por valor: $k \sin \Theta$.

O ponto X' é mais próximo de V que o ponto X posição geométrica. As posições aparentes do ponto X' , sendo l' e b' suas coordenadas podem ser escrita como:

$$\Delta l = l' - l$$

$$\Delta b = b' - b$$

No triângulo QXX' , temos:

$$\cos \Theta l = XX' \sin S$$

$$\Delta b = XX' \cos S$$

Então:

$$\cos b \Delta l = k \sin \Theta \sin S$$

$$\Delta b = k \sin \Theta \cos S$$

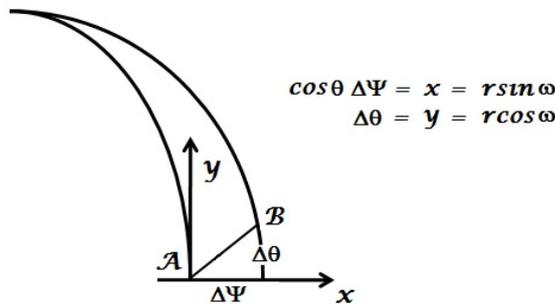


Figura 7.16: Coordenadas diferenciais (aproximação)

No triângulo QVX , considerando: $\widehat{QV} = \frac{\pi}{2}$, $\widehat{XV} = \Theta$, $\widehat{QX} = \frac{\pi}{2} - b$, e $\widehat{XQV} = \Theta - \frac{\pi}{2} - l$

podemos escrever:

$$\frac{\sin S}{\sin QV} = \frac{\sin XQV}{\sin \Theta}$$

$$\sin \Theta \cos S = \cos \widehat{QV} \sin \widehat{QX} - \sin \widehat{QV} \cos \widehat{QX} \cos \widehat{XQV}$$

$$\sin \Theta \sin S = -\cos(\Theta - l)$$

$$\cos \Theta \cos S = -\sin b \sin(\Theta - l)$$

Podemos então expressar a posição aparente em função da verdadeira de um objeto em coordenadas retangulares, por:

$$x = \cos b \Delta l = -k \cos(\theta - l)$$

$$y = \Delta b = -k \sin b \sin(\Theta - l)$$

e desta podemos obter

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2 \sin^2 b} = 1$$

que representa a equação de uma elipse de semi-eixos k e $k \sin b$. O que podemos concluir é que a estrela descreve essa elipse na esfera celeste, com centro correspondente a sua posição verdadeira. O semi-eixo maior k é paralelo à eclíptica e constante para todas as estrelas.

O efeito é maior para $X = \pm k$ para $\Theta - l = 0$, ou 180° . No pólo da eclíptica ($b = \frac{\pi}{2}$) a elipse torna-se uma circunferência, e a medida que nos aproximamos do plano a excentricidade da elipse aumenta até a eclíptica ($b = 0$) quando se degenera em uma linha reta.

7.3.9 Aberração Diurna

A aberração diurna corresponde a correção devida a rotação da Terra. A velocidade de rotação de um ponto no equador é dada por:

$$v_o = \frac{2\pi R}{24 \times 60 \times 60} \cong 0,465 \text{ km/s}$$

Em uma dada latitude ϕ podemos escrever:

$$v = v_o \cos \phi \rightarrow \kappa = \frac{v_o}{c} \cos \phi \Rightarrow \kappa = 0,320'' \cos \phi$$

No caso da rotação da Terra o apex do movimento está dirigido para o ponto cardinal leste, já que seu movimento de rotação se dá de oeste para leste.

$$\Delta \alpha \cos \delta = XX' \sin S$$

$$\Delta \delta = XX' \cos S$$

como

$$XX' = \frac{v_o}{c} \cos \phi \sin \Theta$$

do triângulo PXE

$$\sin \Theta \cos S = \cos \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) - \sin \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cos\left(h - \frac{3\pi}{2}\right)$$

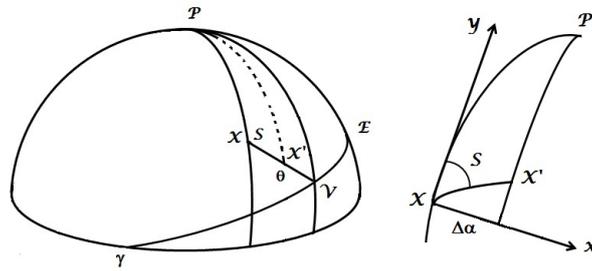


Figura 7.17: A aberração diurna

$$\begin{aligned} \sin \Theta \cos S &= \sin \delta \sin h \quad e \\ \frac{\sin S}{\sin \frac{\pi}{2}} &= \frac{\sin(h - \frac{3\pi}{2})}{\sin \Theta} \\ \sin \Theta \sin S &= -\cos h \end{aligned}$$

Substituindo-se:

$$\begin{aligned} \Delta \alpha \cos \delta &= \frac{v_o}{c} \cos \phi \sin \Theta \sin S \\ \Delta \delta &= \frac{v_o}{c} \cos \phi \sin \Theta \cos S \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= 0,0213^s \cos \phi \cos h \sec \delta \\ \Delta \delta &= 0,320'' \cos \phi \sin h \sin \delta \end{aligned}$$

para a passagem meridiana, como $h = 0$,

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= 0,0213^s \cos \phi \sec \delta \\ \Delta \delta &= 0 \end{aligned}$$

7.3.10 Paralaxe

Ao contrário da aberração, que se trata de um efeito óptico de velocidade relativa, a paralaxe é um efeito geométrico devido ao deslocamento relativo. Trata-se portanto de fenômenos diferentes na essência.

Trataremos o problema, inicialmente ligado a paralaxe anual das estrelas e seus movimentos próprios. As medidas das paralaxes e dos movimentos próprios são operações fundamentais da astronomia estelar e graças a estas é que conhecemos razoavelmente bem hoje a estrutura do universo.

Em seguida trataremos a paralaxe diária, pois a paralaxe horizontal equatorial do Sol é uma das constantes fundamentais da astronomia, que nos dá as dimensões absolutas do sistema planetário, e cuja determinação foi, para os astrônomos, um problema de importância fundamental, mas de grande dificuldade.

- Paralaxe anual estelar

De um modo geral, chamamos de paralaxe a mudança de direção de um astro quando o observador desloca-se de um ponto a outro no espaço. Trata-se, portanto, de um efeito geométrico do deslocamento relativo.

A trajetória anual da Terra causa um deslocamento aparente das estrelas, cuja trajetória aparente é uma elipse para um astro perto do pólo da eclíptica e uma reta para uma estrela situada no plano da eclíptica.

Este fenômeno geométrico permite medir as distâncias estelares. O método da determinação foi pela primeira vez aplicado por *Bessel* em 1838. O ângulo $2p$ é tão maior quanto mais próximo estiver o astro da Terra.

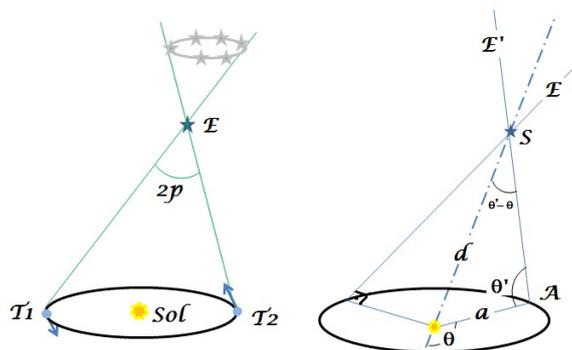


Figura 7.18: O efeito da paralaxe

Quando a Terra se encontra em A , a estrela é vista segundo a direção E' . A posição heliocêntrica, vista a segundo a direção S partir do Sol.

No $\Delta \widehat{CSA}$ na Fig. 7.18, temos:

$$\frac{\sin(\theta' - \theta)}{a} = \frac{\sin \theta'}{d}$$

$$\sin(\theta' - \theta) = \frac{a}{d} \sin \theta'$$

para

$$\theta' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \pi = \frac{a}{d}$$

$$\text{ou } \pi = \frac{a}{d} \text{ (paralaxe)}$$

A distância a Terra-Sol é conhecida e corresponde a unidade astronômica. A medida do ângulo π fornece a distância d do astro. Este ângulo medido em segundo de grau define uma medida de distância denominada “parsec”.

- 1 parsec - é a distância a partir da qual um objeto vê o segmento Sol-Terra segundo um ângulo de 1”

logo

$$d(\text{parsec}) = \frac{1}{\pi''}$$

Por exemplo: a estrela Próxima Centauri (estrela mais próxima de nós), tem uma paralaxe de $0,76''$, o que corresponde a uma distância de $\frac{1}{0,76''}$ pc ou $d = 1,3 pc$.

Ainda como $1'' = \frac{1}{206265}$, logo $1 pc = 206265 UA$ ou $1 pc = 3,086 \times 10^{13} km$

Uma outra unidade utilizada em astronomia é o ano-luz (AL).

- 1 AL - é a distância percorrida pela luz em um ano

$$1 AL = 9,46 \times 10^{12} km$$

Como

$$1 pc = 3,086 \times 10^{13} km \Rightarrow 1 pc = 3,26 AL$$

Na Fig. 7.19, X representa a posição de uma estrela no sistema eclíptico de coordenadas. Seja Θ o ângulo que a direção da estrela faz com aquela do Sol. O deslocamento paraláctico se faz na direção do Sol e tem por expressão:

$$XX' = \pi \sin \theta$$

com π sendo o valor da paralaxe da estrela.

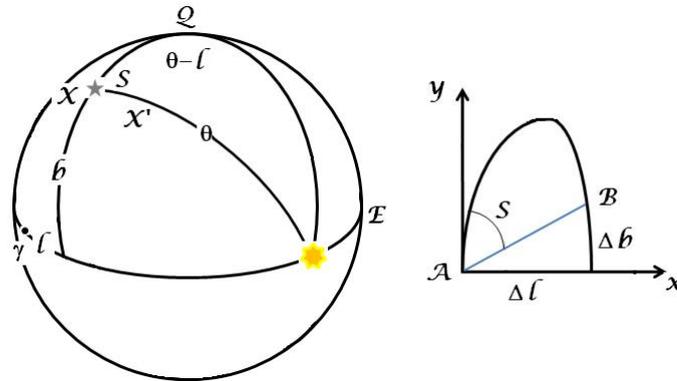


Figura 7.19: Efeito da paralaxe. Direção do movimento aparente

Na figura, l e b são as coordenadas eclíptica da estrela, θ representa a longitude do Sol e γ o equinócio, origem das medidas das longitudes.

As coordenadas diferenciais do ponto B em relação a A podem ser escritas como:

$$x = \widehat{AB} \sin S = \Delta l \cos b \quad e$$

$$y = \widehat{AB} \cos S = \Delta b$$

Para o caso em questão, escrevemos:

$$\Delta l \cos b = \widehat{XX'} \sin S = \pi \sin \theta \sin S$$

$$\Delta b = \widehat{XX'} \cos S,$$

7.2.3

Para o $\Delta XQ\odot$ temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\sin \theta \cos S &= -\sin \frac{\pi}{2} \cos(\theta - l) \text{ ou} \\ \sin \theta \cos S &= -\sin b \cos(\theta - l) \text{ ainda} \\ \frac{\sin(\theta - l)}{\sin \theta} &= \frac{\sin S}{\sin \frac{\pi}{2}} \text{ ou} \\ \sin \theta \sin S &= \sin(\theta - l)\end{aligned}$$

Substituindo-se nas expressões (7.2.3), temos:

$$\begin{aligned}x &= \Delta l \cos b = \pi \sin(\theta - l) \\ y &= \Delta b = -\pi \sin b \cos(\theta - l)\end{aligned}$$

resultando:

$$\frac{x^2}{\pi^2} + \frac{y^2}{\pi^2 \sin^2 b} = 1$$

que representa uma elipse com semi-eixos maior e menor iguais à π e $\pi \sin b$, respectivamente, e esquematizado na Fig. 7.20 a seguir.

O movimento orbital da Terra resulta em um movimento periódico da posição da estrela. Os eixos da elipse de paralaxe estão na razão inversa da distância dos astros. Para uma estrela situada no pólo da eclíptica, sua posição aparente descreve uma circunferência de raio π , enquanto para uma situada no plano da eclíptica a elipse se degenera em uma reta.

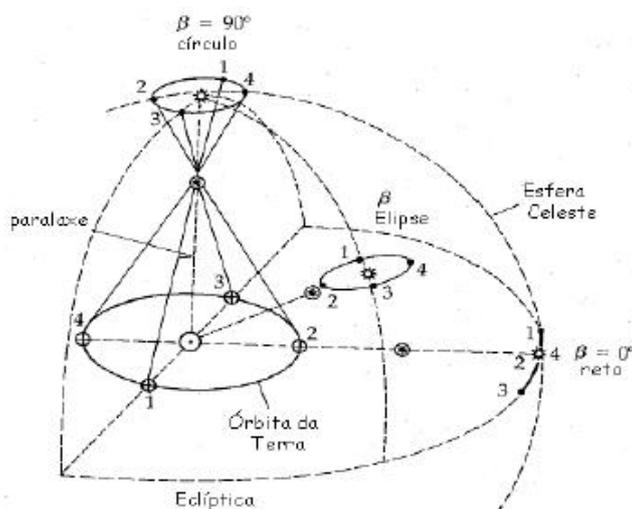


Figura 7.20: Paralaxe anual. Correção devido ao movimento orbital da terra

O tratamento matemático da paralaxe é feito de modo semelhante ao da aberração. É suficiente substituir k por π , e a longitude do Sol pelo apex, o que corresponde a somar $\frac{\pi}{2}$ à θ nas expressões da aberração. Logo sendo:

$$\begin{aligned}x &= -k[\cos(\theta - l) + e \cos(\varpi - l)] \\ y &= -k[\sin(\theta - l) + e \sin(\varpi - l)] \sin b\end{aligned}$$

para a aberração,

$$\begin{aligned}x &= +\pi \sin(\Theta - l) \\y &= -\pi \cos(\Theta - l) \sin b\end{aligned}$$

para a paralaxe.

Fazendo-se a composição dos dois efeitos, podemos escrever:

$$\begin{aligned}x + ke \cos(\varpi - l) &= -k \cos(\Theta - l) + \pi \sin(\Theta - l) \\y + ke \sin(\varpi - l) \sin b &= -k \sin(\Theta - l) - \pi \cos(\Theta - l) \sin b\end{aligned}$$

Trata-se de uma elipse com centro no ponto

$$\begin{aligned}x_o &= -ke \cos(\varpi - l) \\y_o &= -ke \sin(\varpi - l) \sin b\end{aligned}$$

e como

$$(x + x_o)^2 + \frac{(y + y_o)^2}{\sin^2 b} = k^2 + \pi^2 \Rightarrow \frac{(x + x_o)^2}{k^2 + \pi^2} + \frac{(y + y_o)^2}{(k^2 + \pi^2) \sin^2 b} = 1$$

vemos que ela tem por semi-eixos

$$\sqrt{k^2 + \pi^2}, \quad e \quad \sqrt{k^2 + \pi^2} \sin b$$

cujos pontos máximos são alcançados por um ponto móvel nas épocas da oposição, da conjunção e da quadratura.

7.3.11 O Efeito Doppler e a medida da velocidade

As aplicações da análise espectral não se resumem à determinação da temperatura e da composição química de um objeto celeste. Uma outra informação importante é a velocidade do corpo observado.

Imagine-se observando um objeto que emite bips sonoros separados por um intervalo de tempo constante - a este intervalo damos o nome de período. Quando o objeto está parado, você espera os bips uns após os outros, sempre separados pelo mesmo intervalo de tempo. Mas imagine agora que o objeto aproxima-se de você a uma velocidade não desprezível frente aquela do som. A transmissão dos bips a partir do objeto até nós não pode ser considerada como instantânea sendo necessário levar-se em conta o tempo de propagação do som.

Se o primeiro “bip” for produzido a partir de uma dada posição, o segundo é emitido a uma distância menor. O tempo de transmissão do primeiro é portanto maior que o do segundo. Para nós, o intervalo de tempo entre o dois bips não é mais igual ao período real do sinal porque o segundo bip estava a uma distância menor e, por conseguinte chega mais cedo. Assim, se o objeto aproxima-se de nós, o período aparente do som é menor que o período real. Contrariamente, se o objeto se afasta, o período aparente é maior que o período real. Este fenômeno é chamado de efeito Doppler, nome do físico que o descobriu. No caso das ondas sonoras, a consequência bem conhecida é a mudança do som de uma sirene de uma ambulância que passa rapidamente na frente de nós. Quando a sirene se aproxima, o período do som diminui e este fica mais agudo, mas quando se afasta, o período aumenta e o som torna-se mais grave.

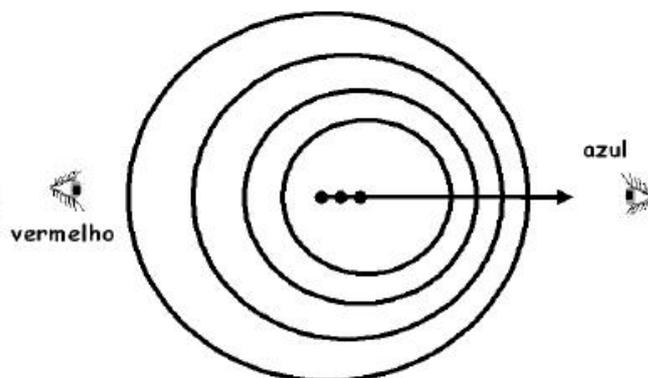


Figura 7.21: Efeito Doppler: devido à propagação do som, a frequência aparente do objeto central depende da sua velocidade e da posição do observador

O efeito Doppler se produz igualmente para as ondas luminosas. Assim, quando uma fonte aproxima-se de nós, o comprimento de onda aparente da sua radiação diminui, deslocando-se para a parte azul do espectro visível e fala-se de um deslocamento para o azul (“blueshifted”). Contrariamente, se a fonte afasta-se, o comprimento de onda aumenta deslocando-se para o vermelho (“redshifted”). Como o deslocamento em comprimento de onda está ligado diretamente à velocidade do objeto, uma das grandezas permite determinar a outra. Por exemplo, se se quer conhecer a velocidade relativa de uma estrela de tipo solar, é suficiente tomar um espectro da estrela, comparar este com o espectro do Sol. Medindo-se os deslocamentos entre os dois, deduzimos imediatamente a velocidade procurada.

Imaginemos uma fonte de luz deslocando-se com uma velocidade v em relação a um observador, enquanto emite uma radiação com comprimento de onda λ e frequência ν . Em dado instante $t = 1/\nu$, uma onda com comprimento λ_o que emerge do objeto fonte é vista por um observador, como uma onda de comprimento:

$$\lambda = (c + v)t = c[1 + (v/c)]/\nu_o$$

pois λ e ν estão relacionados pela equação $\nu = c/\lambda$

A frequência observada vale:

$$\nu = c/\lambda = \nu_o/[1 + (v/c)] \quad (7.2.4)$$

então: se $\lambda > \lambda_o$ e $\nu < \nu_o$ então a radiação está deslocada para o vermelho (objeto afastando-se do observador). Quando $\lambda < \lambda_o$ e $\nu > \nu_o$ então a fonte está se aproximando (a radiação está deslocada para o azul).

Da equação 7.2.4 podemos obter uma relação bastante útil para a astrofísica:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} = \frac{(\lambda - \lambda_o)}{\lambda_o} = \frac{v}{c}$$

Lembrar que o sinal de v é positivo quando o corpo está se afastando e negativo quando se aproxima.

A utilização deste método de medida das velocidades está disseminada por todos os domínios da astronomia. Utiliza-se, por exemplo, para determinar a velocidade de deslocamento e de

rotação das estrelas. De forma mais aprimorada pode-se conhecer a velocidade de ejeção de gases emitidos por certos corpos em formação, assim como a velocidade de recessão das galáxias mais remotas. Lembramos, entretanto, que este método fornece apenas a velocidade do objeto ao longo da linha de visada. Com efeito, a velocidade perpendicular à linha de visada não produz o efeito Doppler.

7.4 Exercícios

1ª **Questão.** Qual das estrelas caracterizadas na tabela abaixo está mais próxima da Terra?

	d(pc)	P(")
A	100	
B		0.1
C	25	0.040
D		0.025

2ª **Questão.** A distância até a estrela mais próxima, além do Sol, vale:

- a) \sim 1 unidade astronômica
- b) \sim 10 unidades astronômicas
- c) \sim 1 parsec
- d) \sim 10 parsecs

3ª **Questão.** As paralaxes das estrelas são medidas em unidades de:

- a) parsecs
- b) graus
- c) segundos de graus
- d) anos-luz

4ª **Questão.** A estrela A tem uma paralaxe que é 7 vezes menor do que a da estrela B. Qual das seguintes afirmativas é verdadeira?

- a) A estrela A está 7 vezes mais próxima do que a estrela B
- b) A estrela A está 7 vezes mais distante do que a estrela B
- c) A estrela A é intrinsecamente mais brilhante do que a estrela B
- d) A estrela A é intrinsecamente mais fraca do que a estrela B

5ª **Questão.** O comprimento da linha-base usada para a determinação das paralaxes das estrelas é:

- a) o diâmetro da Terra
- b) a distância Terra-Lua
- c) o raio da órbita da Terra
- d) o parsec

6ª **Questão.** A estrela Sirius tem uma paralaxe heliocêntrica de 0,40 segundos de graus.

- a) Qual sua distância em parsecs? Em anos-luz?
- b) Qual seria a paralaxe de Sirius se ela fosse observada com um telescópio em Marte?

7ª **Questão.** Para uma certa estrela é medida uma paralaxe de $0,185''$.

- a) Qual a distância da estrela?
- b) Se essa estrela tiver uma companheira, a uma distância de 1 UA dela, qual a separação angular entre elas?

8ª **Questão.** O deslocamento Doppler de uma observação espectroscópica de uma binária permite que os astrônomos calculem:

- as massas das componentes
- os tamanhos (raios) das estrelas
- ambas as afirmações estão corretas
- nenhuma das afirmações está corretas

7.5 As forças gravitacionais diferenciais

7.5.1 Movimento diurno (diário).

O movimento diurno é o mais banal dos fenômenos astronômicos e interpretado, desde Copérnico, como consequência do movimento de rotação da Terra. Causa nos astros um movimento de leste para oeste (contrário ao movimento de rotação) provocando para uma parte deles seu nascer e ocaso.

Estudaremos o movimento das estrelas, consideradas fixas, desprezando, para a caracterização de suas coordenadas os efeitos de refração, assim como da precessão, da aberração e da paralaxe.

Para representarmos de forma comoda o movimento do conjunto de estrelas, vamos supor duas esferas: uma interna, que constitui a esfera celeste local onde traçamos os elementos de um sistema de referência, em relação a qual os sistemas definidos para todas as localidades serão imóveis, e uma exterior onde figuram os pontos diretores da direção das estrelas, cujas posições relativas são invariáveis, e que denominamos de esfera celeste.

Como o movimento diurno não altera a forma das constelações, ele pode ser representado pelo movimento da esfera das fixas em relação a esfera local. O movimento mais geral, da esfera das fixas em relação a local, pode ser assimilada a uma rotação em torno do eixo instantâneo, cujos traços sobre cada uma das esferas são os pólos instantâneos de rotação. Estes podem ser móveis sobre cada uma das esferas, o que é, aliás, o que se constata. Seus movimentos sobre cada uma das esferas, têm amplitude pequena sobre a esfera local, e lento sobre a esfera das fixas.

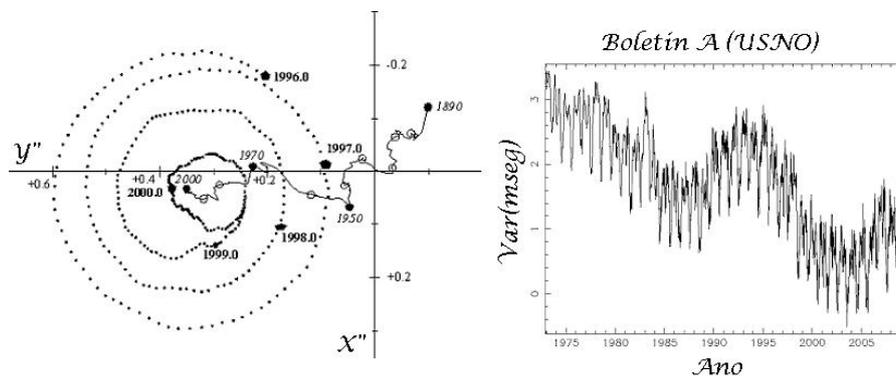


Figura 7.22: O movimento dos pólos. Resultado das observações com o Astrolábio *Andrè Danjon* (ver refratores - apostila parte 2)

Denominamos de deslocamento do pólo seu movimento sobre a esfera local, e de precessão

aquele sobre a esfera das fixas.

O Astrolábio *A. Danjon* é um instrumento astronômico de observações que se baseia no método das alturas iguais. Observa a passagem dos astros a uma dada altura instrumental fixa por um prisma equilátero. Permite durante um longo tempo estudar o movimento de rotação da Terra e variação da posição do pólo. Sua utilização nas observações de objetos extensos, como a Lua, Sol e pequenos planetas foi possível devido a introdução de modificações na óptica e mecânica permitiu sua sobrevivência até recentemente.

7.5.2 Variações da velocidade de rotação da Terra.

A velocidade de rotação da Terra não é uniforme, e portanto o comprimento do dia não é constante ao longo do tempo.

De início sabe-se que o pólo desvia-se de 10 a 20 m de sua posição média na superfície da Terra. Essas informações fornecem indicações de que sua estrutura interna é líquida e inhomogênea. A duração do dia está ligada às estações do ano e uma variação de seu comprimento

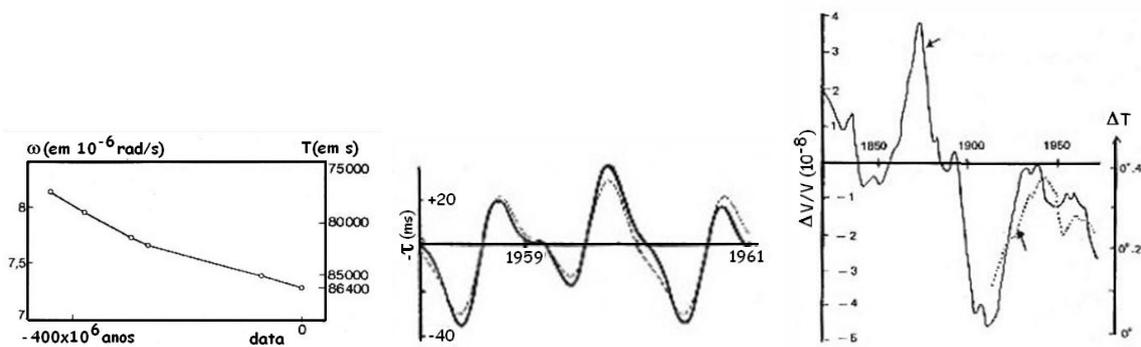


Figura 7.23: Variações na duração do dia. (a) variações sazonais, (b) variações seculares, (c) variações irregulares

parece relacionada com fenômenos atmosféricos. Por outro lado, uma variação sobreposta a essa, parece fazer com que a Terra gire mais lentamente ao longo de um século. Essa variação, da ordem de $0,0016^s$ por século, só pode ser evidenciada por intermédio do acúmulo de observações ao longo do tempo.

Entretanto informações paleontológica mostram que determinada espécie de coral, e de outros organismos marinhos, depositam a cada dia um anel calcário sobre suas conchas. A espessura desses anéis depende da duração do dia, pois o ritmo de seu crescimento está ligado a quantidade de luz recebida. Atualmente o número de anéis é de 365 para um período de 1 ano. Entretanto o exame desses fósseis tem mostrado que esse número já foi bem maior, de modo a confirmar que o dia já foi mais curto, se levarmos em conta que o período de translação da Terra é fixo (Tab. 7.3.1). Este tipo de fenômeno parece estar ligado a ação das forças diferenciais que agem sobre o bôjo equatorial da Terra.

Variações irregulares também são notados no seu movimento de rotação. Ainda que especulativos, tais variações podem estar ligadas a variações climáticas e da temperatura média da superfície da Terra. Atividades vulcânicas modificam a capacidade de refletir calor de nosso planeta devido ao acúmulo de poeira e de aerossóis expelidos durante a atividade vulcânica. Por outro lado, este fato promove uma redistribuição da massa interna da Terra.

Tabela 7.3.1 Variação secular da duração do dia (*Stoiko*).

Idade (milhões de anos)	Duração do ano (em dias)	Duração do dia (em horas)
0	365,25	24,0
70	370,33	23,7
300	387,50	22,6
440	407,10	21,5

7.5.3 Os maremotos (*Tsunami*) e a rotação da Terra

O terremoto da *Sumatra* provocou algum efeito sobre a posição do eixo de rotação da Terra?

O terremoto, de magnitude 9,3, que teve origem na *Sumatra* do dia 26 de dezembro de 2004, foi o segundo maior em intensidade desde aquele que ocorreu no Alasca em 27 de março de 1964, com magnitude 9,2. Dentre as inúmeras questões surgidas sobre as conseqüências que fenômenos dessa intensidade provocam sobre nosso planeta está aquela se tais eventos poderiam causar um efeito perceptível na rotação da Terra?

Pesquisadores responsáveis por monitorar, por meio de observações astronômicas (laser satélite e Lua), interferométricas de radio fontes extragalácticas e de técnicas espaciais (GPS), associados ao IERS (“International Earth Rotation Service”) mostram que o efeito não é discernível.

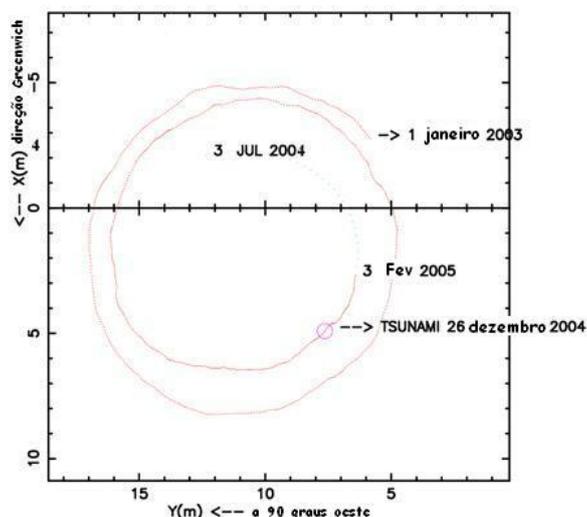


Figura 7.24: O eixo de rotação instantâneo não é fixo na crosta de Terra. Projetado em um plano tangente pelo pólo, descreve “o movimento do pólo” ou a “Polodia” (curva pontilhada) contida em um quadrado de 20 m de lado. As componentes principais do movimento são um termo de período 432 dias, o termo do *Chandler* atribuído ao modo livre da Terra, assim como um termo periódico de um ano devido ao transporte das massas de ar. Um eventual salto devido ao terremoto do dia 26 de dezembro de 2004 (representado por um pequeno círculo) não é atualmente separável dos sinais atmosféricos

Correlações entre a atividade sísmica e as variações do movimento de rotação da Terra

não podem ser desprezadas, pois além das "sacudidelas" provadas pelos terremotos, que são claramente perceptíveis, estas envolvem uma redistribuição de massa na Terra. Este fato provoca

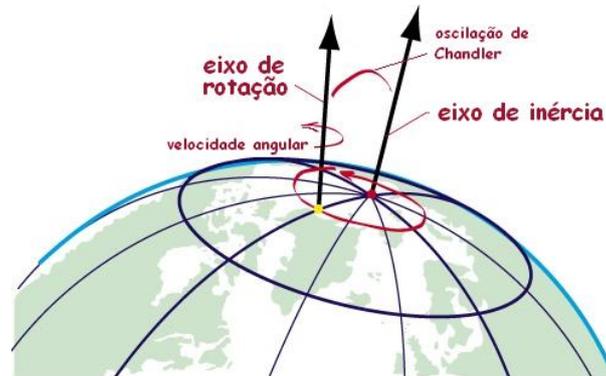


Figura 7.25: O movimento do pólo sobre a superfície da Terra

uma modificação do momento de inércia que teoricamente pode afetar a posição do eixo de rotação instantâneo da Terra (movimento do pólo) quando comparada com seu eixo de figura. Pode também haver um efeito sobre o movimento de rotação da Terra que de acordo com o princípio da conservação do momento angular compensaria o deslocamento da crosta terrestre causada pelo terremoto.

Na literatura encontramos trabalhos que mostram variações de poucos microsegundos de tempo na duração do comprimento do dia e de $0,1mas$ a $1mas$ (poucos milímetros a poucos centímetros) no movimento do pólo. Estas variações podem estar relacionadas com as atividades sísmicas provenientes dos grandes terremotos. Entretanto estas amplitudes são mascaradas por aquelas associadas com o transporte das massas atmosféricas e oceânicas que são uma ou duas ordens de grandezas maior (ver variações da velocidade de rotação da Terra). Ainda assim, apesar dos sinais fracos gerados pelos sismos, pode existir um fenômeno de amplificação devido à viscosidade do meio de propagação que poderia causar efeitos visíveis na rotação da Terra.

Os dados obtidos pelo IERS, em tempo real, permite monitorar e analisar de forma minuciosa o movimento do pólo, e essas análises mostram que no fenômeno ocorrido nenhum efeito foi possível evidenciar (Fig. 7.24).

Dois corpos esféricos se comportam gravitacional como massas pontuais. Se esses corpos são elásticos ou não esféricos, ou ainda se vários corpos interagem gravitacionalmente, forças diferenciais gravitacionais podem ficar importantes. Este efeito surge porque a gravitação depende da distância entre esses corpos, e partes diferentes de um corpo extenso (ou sistema) sofre então acelerações gravitacionais diferenciais.

7.5.4 O efeito de maré (Albert A. Michelson)

A Lua e o Sol são os principais causadores das marés na Terra. A água responde mais depressa a essa ação, devido a menor coesão de suas moléculas quando comparadas aquela dos sólido. Assumindo-se a Terra em equilíbrio e com uma forma esférica, subtraindo-se o vetor aceleração do centro para cada ponto de sua superfície, obtemos a aceleração diferencial. Essa resulta uma força que pode provocar marés de aproximadamente $1m$ de altura, nos pontos A e B extremos do segmento de reta que passa pelo centro e na direção dos corpos perturbadores (Fig. 7.26).



Figura 7.26: Força de maré sobre a Terra. Atração gravitacional da Lua e do Sol

A expressão relativa às forças de maré, devido a Lua na Terra, pode ser obtida pela diferenciação da lei da gravitação de Newton em relação a R :

$$\frac{dF}{dR} = -2 \frac{GM_L}{R^3},$$

onde dF é a força gravitacional diferencial na direção de R . dR é o diâmetro do corpo ou a separação entre dois corpos. O Sol produz um efeito de maré, que relativo àquela produzido pela Lua, pode ser estimado por:

$$\frac{(dF/dR)_\odot}{(dF/dR)_L} = \frac{M_\odot/R_\odot^3}{M_L/R_L^3}$$

$$\frac{(dF/dR)_\odot}{(dF/dR)_L} = \frac{M_\odot R_L^3}{M_L R_\odot^3}$$

$$\frac{(dF/dR)_\odot}{(dF/dR)_L} = 5/11$$

O efeito de maré depende das posições do Sol e da Lua em relação a Terra. Quando a Lua estiver em conjunção ou oposição, as forças se somam produzindo marés altas, e quando ela estiver em quadratura, as forças parcialmente se anulam produzindo um efeito menor.

As consequências que este processo acarreta é o de dissipar energia na forma de calor, sendo parte dele dissipado na própria superfície do mar. Esse atrito reduz a rotação da Terra, fazendo com que o comprimento do dia diminua em aproximadamente de $0,002^s$ por século. Para o caso do sistema Terra-Lua dois fenômenos interessantes acontecem sobre a Lua.

7.5.5 Sincronismo rotacional e a evolução do efeito de maré

A Terra gera um efeito de maré sobre a Lua que é: $M_\oplus R_L / M_L R_\oplus \approx 20$ (20 vezes maior que o efeito da Lua sobre a Terra). A energia dissipada provoca uma diminuição de seu período de rotação, levando-o a se igualar a seu período de translação ao redor da Terra (“rotação síncrona”). O momento angular do sistema Terra-Lua permanece constante (torques externos são desprezíveis), logo enquanto o momento angular da Terra diminui, causado pela diminuição de sua velocidade de rotação, o da Lua aumenta fazendo com que ela se mova para fora aumentando sua distância da Terra. Pela terceira lei de *Kepler*, o aumento da distância Terra-Lua

implica que seu período de translação deve alongar-se, de modo que em um futuro longínquo o dia e o mês tenderão a se igualar (~ 50 dias atuais).

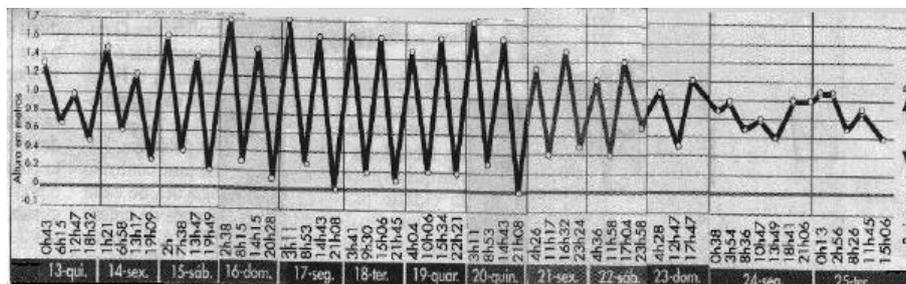


Figura 7.27: Efeito da força de maré no nível da águas do mar

7.5.6 O limite de Roche (Edouard Roche).

Já vimos que dois corpos gravitando um ao redor do outro têm suas órbitas definidas pela Lei de *Newton*. Vamos considerar, novamente, a ação de forças diferenciais agindo em corpos elásticos. Seja um corpo de massa m , raio r , distante d de um mais massivo de massa M e de raio R . Para um satélite de $r \gg 500km$, e sendo $M \gg m$, as forças gravitacionais dominam as de coesão, determinando sua forma e intensidade, podendo romper o limite de coesão do satélite. *Roche* obteve que a distância entre esses corpos não pode ser menor que:

$$d = 2.44R \left(\frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{1/3}$$

onde ρ_M e ρ_m são, respectivamente, as densidades média dos corpos. Para o caso do sistema Terra-Lua, por exemplo, $d \approx 2.9R_{\oplus} \approx 18.500km$ do centro da Terra. Dois outros exemplos: um

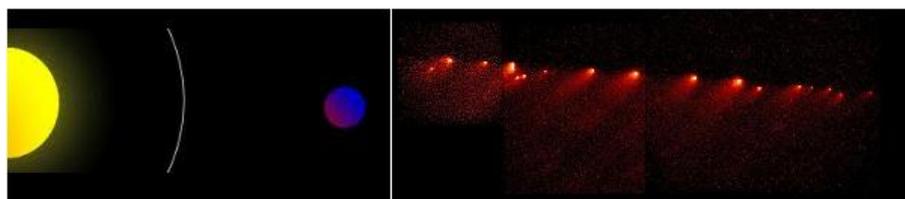


Figura 7.28: Limite de Roche - Cometa Shoemaker Levy

parece ter ocorrido com o cometa Biela, que em uma de suas aparições estava fragmentado duas partes, e outro pode ter ocorrido com o cometa *Shoemaker-Levy* quando de sua aproximação final de Júpiter em 1992 (Fig. 7.28).

7.5.7 O movimento conjunto do sistema solar.

O sistema solar como um todo movimentar-se a uma velocidade de 19,5 km/s na direção da região vizinha a Vega (“Apex do movimento”). Por outro lado o conjunto de estrelas vizinhas ao Sol, desloca-se em conjunto, girando ao redor do núcleo da Galáxia, com uma velocidade de 250km/s, aproximadamente, segundo uma curva senoidal, e portanto afastando-se e aproximando-se do

plano galático a cada 70 milhões de ano. Uma volta completa é dada em pouco mais que 250 milhões de anos. Como o Sol possui uma idade de 5 bilhões de anos, cerca de 20 voltas ao redor do centro já foram feitas. Atualmente o sistema solar penetra no braço de Orion, e a cada

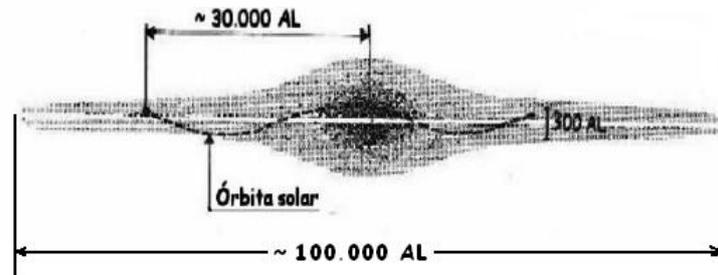


Figura 7.29: Trajetória do sistema solar na nossa Galáxia (*A.Acker* modificado)

passagem, que dura cerca de 50.000 anos, produz um acréscimo de matéria gasosa ao redor do Sol, modificando sua luminosidade, podendo causar um resfriamento global da Terra. Este deslocamento pode explicar certos fenômenos geológicos que a Terra ficou submetida, a cada 250 milhões de anos. Tais fatos podem estar relacionados com os períodos de glaciação de 50.000 anos de duração.

Capítulo 8

APÊNDICE

8.1 A visão do céu segundo um artista

O espetáculo do desfilarm dos objetos celestes pelo céu também exerceu atração sobre os artistas, que reproduziram em suas pinturas algumas das configurações estelares estudadas pela astronomia.

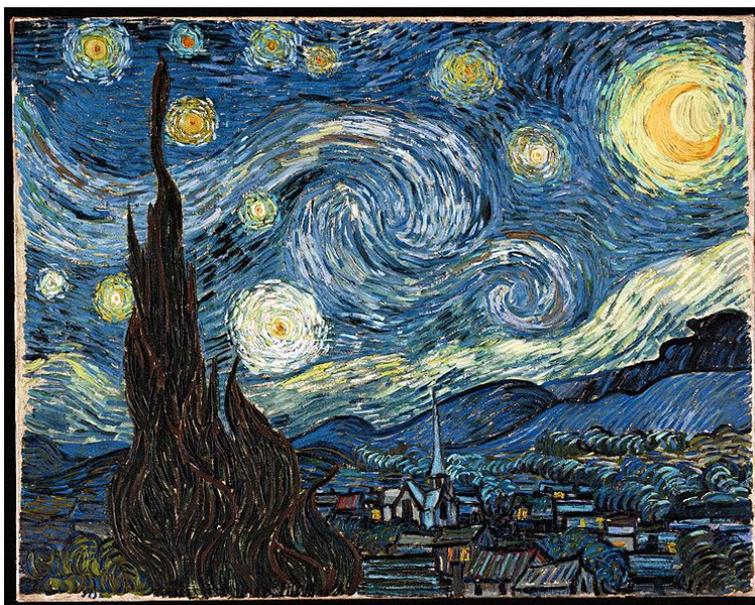


Figura 8.1: La Nuit Étoilée - Van Gogh. Céu noturno de Saint Rémy de Provence

A seguir, um texto do historiador da Universidade da Califórnia em Los Angeles (UCLA) Albert Boime que faz uma descrição documentada do quadro *La Nuit Étoilée*, de Vicent van Gogh. A obra revela o interesse do pintor pós-impressionista em apresentar detalhes característicos do céu noturno da cidade francesa de Saint Rémy-de-Provence nos idos de 1889. Este não é o único quadro de Van Gogh que dialoga com temas que dizem respeito à astronomia, como se observa na descrição que segue.

Assim escreve Boime:

“No dia 19 de Junho de 1889, Vicent, muito exaltado, escreveu a seu irmão, Théo, dizendo que finalmente havia pintado o quadro que intitulou *La Nuit Étoilée*. Sabe-se que se tratava do céu de Saint-Rémy-de-Provence¹ do início da manhã. Conhecendo-se, portanto, o dia, a hora aproximada e a latitude do local representado no quadro, o diretor do observatório do Griffith Park, de Los Angeles, pôde reconstituir o céu tal qual era quando Van Gogh o pintou.

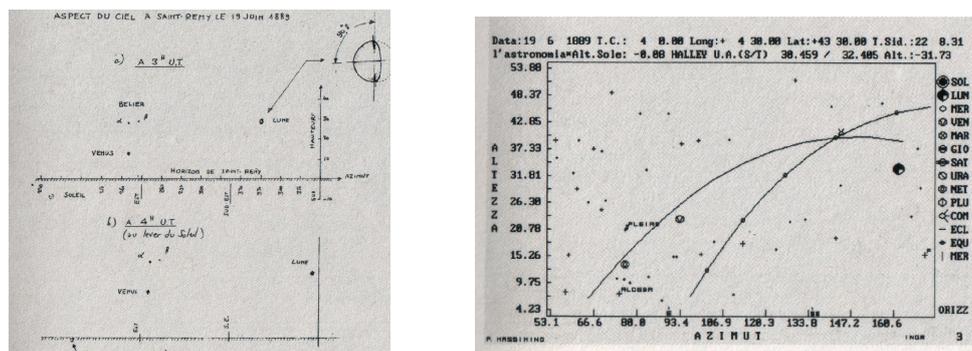


Figura 8.2: À esquerda, a reconstituição do céu noturno de Saint-Rémy em 19 de junho de 1889, por um astrônomo francês. À direita, a reconstituição realizada por astrônomos italianos

O que impressiona de imediato na reconstituição do céu daquela noite é a presença de dois objetos celestes brilhantes que se assemelham aos dois pontos luminosos maiores do quadro de Van Gogh: eles formam um triângulo escaleno com certa constelação (Fig. 8.1). Na reconstituição, confirmada por cálculos feitos individualmente por astrônomos franceses e italianos (Fig. 8.2), Vênus aparece próximo do horizonte, representado por um grande disco, acima do qual se pode reconhecer a constelação de Áries. Van Gogh desenha a Lua como um *croissant*, o pão francês, embora a reconstituição em planetário revele a lua em sua fase quarto-minguante, quando ela se assemelha mais a uma bola de *rugby*.



Figura 8.3: De Van Gogh, à esquerda, *Uma Alameda de Ciprestes*, esboço na carta de outubro de 1888 Rijksmuseum, Amsterdam e, à direita, *Os Ciprestes* (Metropolitam Museum, Nova York).

Um exame mais atento do quadro revela, contudo, que Van Gogh ficou indeciso ao desenhar a Lua, o que resultou em uma curiosa modificação de seu aspecto. Em primeiro lugar, a figura

¹Cidade histórica situada na região da Provença e que foi construída sobre um dos mais antigos sítios arqueológicos da Europa. Os vestígios de Glanum (antiga cidade do império Romano, situada na vila de Saint-Remy) datam do século III a.C. e foram seguidamente alterados pelos romanos.

em forma de *croissant* está deformada e não possui a mesma regularidade da Lua que se vê no famoso quadro *Os Ciprestes*, do Metropolitan Museum de Nova York (Fig. 8.3D), ou mesmo no esboço de sua carta datada de 1888 (Fig. 8.3E).

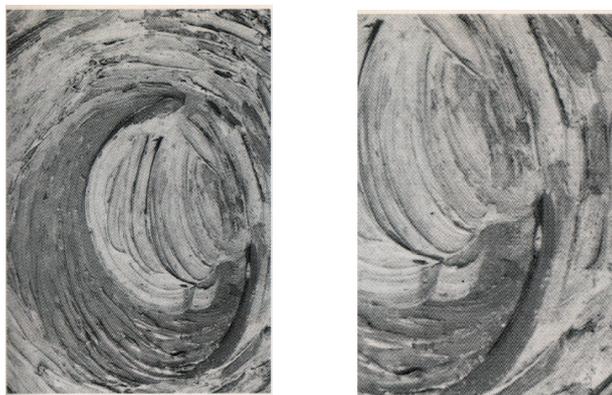


Figura 8.4: Detalhes da Lua no quadro *La Nuit Étoilée*.

Ao se observar o contorno interior do *croissant* desenhado por Van Gogh, constata-se claramente que eram inicialmente mais espessos: uma zona amarelo-alaranjada (na figura, em cinza escuro) foi retirada da face interna das duas pontas em forma de chifres, sendo acrescentados retoques na forma de vírgulas que parecem escavar o *croissant*, a fim de afiná-lo (Fig. 8.4). Por último, prolongando-se imaginariamente o contorno externo da figura, constata-se que ela não forma um círculo, mas tem o aspecto da Lua na fase quarto-minguante. Este fato aparece mais claramente no esboço do quadro, feito anteriormente (Fig. 8.5), o qual explicita a auréola brilhante ao redor da lua, incompatível com a forma de *croissant*. Isso levou inúmeros especia-



Figura 8.5: *La Nuit Étoilée*, esboço de 1889, destruído.

alistas a imaginar o desenho como o resultado da combinação entre Lua e Sol ou, ainda, como a representação de um eclipse anular do Sol. Parece que Van Gogh começou por dar à Lua a sua forma característica da fase minguante, entretanto, por achá-la sem graça preferiu uma imagem que conservasse sua auréola ao mesmo tempo em que preservava o aspecto preciso da fase minguante.

A impressão que se tem é que a fonte de inspiração para *La Nuit Étoilée*, é a visão a partir de um ponto elevado, o que caracteriza mais realisticamente a representação pictórica do céu que motivou o artista. À época, Van Gogh estava internado em um aposento do segundo e último



Figura 8.6: Painei publicitáriu do asilo Saint-Paul-de-Mausole, no qual Van Gogh estava internado.

andar do internato Saint-Rémy, localizado no mosteiro de Saint-Paul-de-Mausole, edificado no século XII.

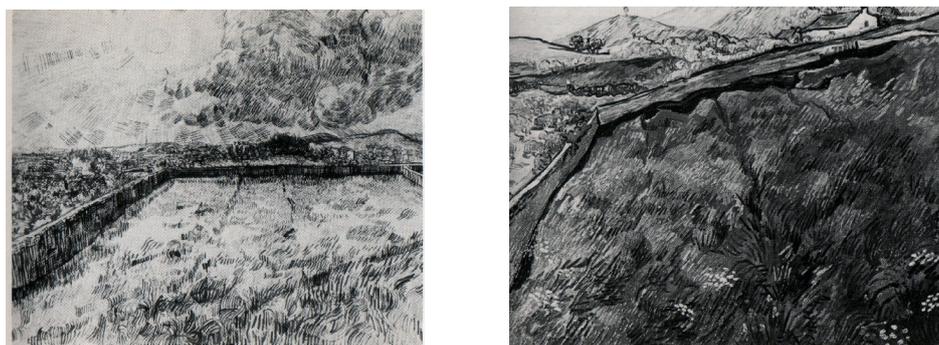


Figura 8.7: De Van Gogh, à esquerda, *Sol Sobre um Cercado de Trigo*, de maio de 1889, e, à direita, *O Campo Cercado*, de junho de 1889.

O aposento era orientado para o sudeste, com visão para um campo de trigo sobre os Alpilles², atrás do asilo. Os mapas da região, bem como as observações realizadas a partir da janela do quarto de Van Gogh, confirmam a orientação leste do aposento. Ao longo da vida, Van Gogh habitualmente se levantava antes do nascer do Sol, a fim de estudar a paisagem retratada da janela de seu quarto (Fig. 8.7). No internato em Saint-Rémy, procedia com a mesma regularidade, em razão da insônia. Em uma carta do início de junho daquele mesmo ano, ele escreveu ao irmão: “Esta manhã, da minha janela observei por muito tempo, antes do nascer do Sol, que nada de significativo se via no céu senão a estrela matutina, que parecia muito grande”. A estrela a que se referia Van Gogh era o planeta Vênus, ao fim de seu ciclo (conjunção) de oito anos, quando está mais brilhante. O fato se revestia de importância por ter sido assunto corriqueiro e alvo de discussões na época. Na primavera de 1889, Vênus dominava o céu ao alvorecer e Van Gogh lhe deu um lugar de destaque em sua obra, perto de um cipreste retorcido que nos dá impressão de se endireitar de forma dramática.

Ao considerarmos o cipreste uma árvore puramente figurativa do artista, mencione-se que os ciprestes cercavam toda a construção do internato e se elevavam à frente das janelas (Fig.

²o maciço Alpilles é o prolongamento geológico dos Alpes.



Figura 8.8: À esquerda, a paisagem vista da janela do quarto de Van Gogh no internato; ao centro, a janela em detalhe; e, à direita, *Janelas com Grades*, de maio de 1889.

8.8). Como o monte Gaussier (visível à esquerda no painel publicitário da Fig. 8.6) se encontra geograficamente ao sul de Saint-Rémy, a orientação leste do quarto de Van Gogh permitia, por conseguinte, que ele visse um destes ciprestes, bem como os Alpillles, da maneira como são reproduzidos na grande quantidade de esboços realizados conforme o cenário visto do seu quarto Fig. 8.8. Embora as janelas fossem fechadas com grades, as malhas permitiam uma visão bastante generosa do panorama Fig. 8.8 (o que me foi possível constatar durante visita que fiz à Saint-Paul em junho de 1984). O fato também pode ser confirmado na carta de Van Gogh de 25 de maio de 1889: “[...] através da janela com grades de ferro, avisto um cercado com uma plantação de trigo em forma de quadrado, acima da qual, pela manhã, vejo o Sol nascer com toda sua formosura” - esta última citação confirma a orientação leste da janela de Van Gogh no internato.



Figura 8.9: À esquerda, *Le Café*, de setembro de 1888, e, à direita: *La Nuit Étoilée sur le Rhône*, de setembro de 1888.

As cartas de Van Gogh deixam claro seu interesse e conhecimento dos fenômenos celestes. Seu desejo de representar de forma precisa tal realidade está manifestado numa carta datada de setembro de 1888, dirigida à sua irmã. Ali, Van Gogh afirma que uma observação atenta do céu noturno revelava que “certas estrelas eram amarelcidas, enquanto outras tinham luzes cor-de-rosa, verdes, azuis, miosótis. Ele conclui: “Torna-se evidente que, para pintar um céu estrelado, não é suficiente [sic] representar pontos brancos sobre o preto-azul”. Constatamos esta mesma precisão de Van Gogh nos seus outros quadros representativos de céus noturnos. Ainda em

setembro de 1888, Van Gogh realizou dois importantes estudos com temas que retratavam o céu: *Le Café* e *La Nuit Étoillée sur le Rhône* (Fig. 8.9).

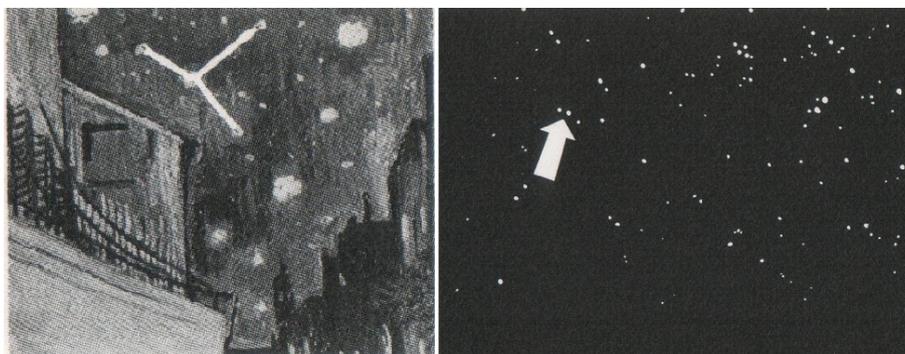


Figura 8.10: A constelação de Áries e a reconstituição do céu ao sul da cidade de Arles no início de setembro 1888.

O primeiro estudo, realizado no início do mês de setembro, corresponde a uma visão do sul da Prefeitura Municipal de Arles, cuja clarabóia aparece sob forma de uma silhueta. A julgar pelo pequeno número de transeuntes e de clientes no bar, a cena deve ter lugar pouco antes da meia-noite, ou mesmo por volta das onze horas da noite (era prática comum encerrar as atividades comerciais por volta da meia-noite). Um olhar direto no centro do quadro nos revela a constelação de Áries (Fig. 8.10E), sob a forma familiar em “Y” e visível ao sul, um pouco acima do horizonte (Fig. 8.10D). *La Nuit étoilée sur le Rhône*, por sua vez, mostra claramente a Grande Ursa. Van Gogh escreveu ao amigo Boch ter pintado uma noite estrelada com a Grande Ursa, constelação do norte cujas sete principais estrelas representam a figura de uma padiola.



Figura 8.11: À esquerda, *Le Grand Chariot*, uma noite estrelada na região do Rhône. E, à direita, a reconstituição do céu da região de Arles em setembro de 1888.

Confrontando-se a pintura com a reconstituição do céu das 21 horas de Arles, feita em planetário, constata-se que Van Gogh colocou a constelação em uma posição mais elevada do que ela estava na realidade. Em carta a Boch, lê-se claramente a intenção de Van Gogh de corrigir a posição juntando a estrela polar (Fig. 8.11). Ainda que tenha aumentado a escala e exagerado na distância, O artista pintou o céu como ele o impressionava a partir de sua janela em Saint-Rémy. A constelação de Áries, na forma de triângulo escaleno, encontra-se mais ou menos

na mesma posição de Vênus visto na reconstituição em planetário, embora a alguma distância da Lua. No quadro de Van de Gogh, ela está igualmente próxima do cipreste, cuidadosamente realçada por traços espirais, o que lhe confere ser um elemento chave na composição. Observações precisas feitas em Saint-Rémy nos dias 18, 19 e 20 de junho de 1984, por volta das três horas da manhã, confirmaram que a constelação de Áries se situa próxima do nascer do Sol.

Estes três objetos astronômicos - a Lua, os planetas e as constelações - estão sempre presentes nos quadros e nas reconstituições do céu noturno. Note-se, ademais, que Van Gogh nasceu sob o signo de Áries (30 de março). O carneiro de Áries era associado ao sacrifício de Abraham, para os astrólogos, um sinal inequívoco de um temperamento passional misturado ao sentimento de angústia. É sem dúvida útil recordar que no século XIX as pessoas consideravam com mais seriedade do que hoje a existência de uma relação entre o temperamento, o comportamento e as estrelas. Por exemplo..."