

Cosmologia Básica

1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar uma abordagem rápida da cosmologia e de como algumas quantidades importantes para este curso podem ser calculadas. Focaremos no modelo cosmológico padrão.

Esta discussão de cosmologia está longe de ser completa, e ao longo do curso serão abordados outros aspectos, como a evolução de pequenas perturbações de densidade e a formação de estruturas.

2 A Teoria da Gravitação

O modelo cosmológico padrão, que é o paradigma atual para descrever o universo como um todo, é baseado na Teoria da Relatividade Geral (TRG), formulada por Einstein em 1915.

A razão disso é que em grandes escalas é a gravitação que determina a dinâmica dos objetos no universo, e a TRG é justamente uma teoria da gravitação. Apenas as interações gravitacionais e eletromagnéticas são de longo alcance, mas como a matéria é em média eletricamente neutra, em grandes distâncias apenas a gravitação é cosmologicamente relevante.

Na TRG tem-se que matéria e energia determinam a geometria do espaço-tempo. As equações de Einstein podem ser escritas como

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, que depende da geometria do espaço-tempo através de $g_{\mu\nu}$, o tensor métrico, $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momentum, que depende da distribuição de matéria e energia, e G é a constante da gravitação. Assim, o lado esquerdo da equação depende apenas da geometria, enquanto que o lado direito depende da distribuição de matéria e energia. A figura 1 ilustra como a distribuição de matéria pode distorcer a geometria.

A TRG passou por diversos testes (sistema solar; pulsar binário; lentes gravitacionais), mas é ainda mal testada no limite de campos fortes (como buracos negros) ou muito fracos (halo das galáxias). Por outro lado, a TRG não incorpora efeitos quânticos, de modo que se espera que esta teoria seja incompleta em escalas menores que a escala de Planck:

$$r_{Pl} = \left(\frac{Gh}{c^3}\right)^{1/2} = 4.0 \times 10^{-33} \text{ cm.}$$

Também se espera que a TRG não seja aplicável no começo do universo, antes do tempo de Planck:

$$t_{Pl} = \left(\frac{Gh}{c^5}\right)^{1/2} = 1.3 \times 10^{-43} \text{ s.}$$

Imagina-se que esses casos requeiram uma teoria quântica da gravitação.

3 O Princípio Cosmológico

O Princípio Cosmológico (PC) estabelece que em escalas suficientemente grandes o universo é homogêneo e isotrópico. Homogêneo significa que todos os lugares são equivalentes; isotrópico que todas as direções são equivalentes.

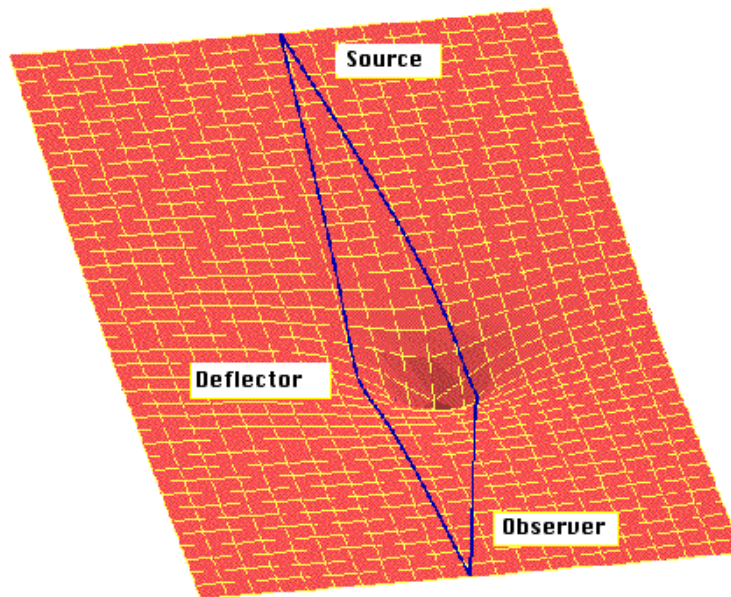


Figure 1: A matéria distorce o espaço-tempo, como neste exemplo de lente gravitacional.

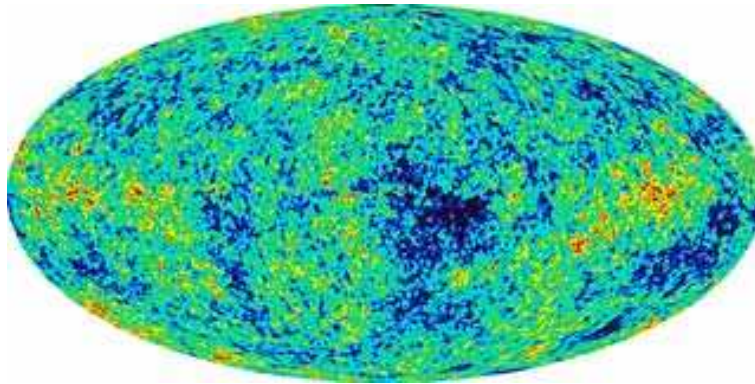


Figure 2: Mapa com as flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo medida pelo satélite WMAP. Este mapa é notavelmente uniforme; a amplitude média das flutuações é $\sim 10^{-5}$.

Há várias observações que apoiam o PC. Por exemplo, em escalas muito grandes (centenas de Mpc), a distribuição de galáxias é bastante uniforme (a uniformidade aumenta com a escala). Outro exemplo é dado pela homogeneidade da radiação cósmica de fundo, cujas flutuações de temperatura têm uma amplitude muito pequena, $\sim 10^{-5}$ (figura 2).

4 A cosmologia newtoniana

Vamos começar discutindo um modelo cosmológico baseado na gravitação newtoniana. O interesse neste tipo de modelo é sobretudo didático, pois sabemos que, nas escalas em que estamos interessados, os efeitos relativísticos são importantes e, portanto, precisam ser considerados de forma consistente.

O aspecto que torna atraente o estudo da Cosmologia Newtoniana é que, como veremos, as equações que descrevem a dinâmica do universo são muito parecidas com as da Cosmologia

Relativística, embora o significado físico dos termos envolvidos seja muito diferente.

Vamos supor que o universo é ocupado por um fluido, o **fluido cosmológico**, que obedece ao Princípio Cosmológico. As partículas deste fluido seriam as galáxias. Note que, para ser consistente com o PC, este fluido deve estar em repouso ou em expansão ou contração isotrópica. Vamos supor que ele está se expandindo. Os observadores que estão localmente em repouso com o fluido, que o acompanham em sua expansão, são chamados de **observadores comóveis**.

Note que não é por acaso que uma Cosmologia Newtoniana (no sentido da que descreveremos) não tenha sido elaborada por Newton ou um dos outros grandes físicos dos séculos XVIII e XIX. O modelo que vamos discutir foi proposto apenas em 1934, por Milne e McCrea – depois, portanto, da publicação da Relatividade Geral (1916), dos modelos de Friedmann (1922) e Lemaitre (1927) e da descoberta da recessão das galáxias (1929). O problema é que aparecem algumas dificuldades conceituais que não são comportadas pela física newtoniana.

Para que as leis de Newton sejam válidas, os referenciais usados devem ser inerciais. Suponha que nossa galáxia seja um referencial inercial. Como, pelo Princípio Cosmológico, todos os observadores que participam da expansão (os observadores comóveis) têm a mesma visão do universo, vemo-nos na paradoxal situação de ter que admitir que todos os observadores comóveis são inerciais, embora possam apresentar acelerações entre si.

Por outro lado, na Cosmologia Newtoniana o universo deve ser infinito, caso contrário o Princípio Cosmológico não seria válido (nos bordos, por exemplo). Mas em um universo infinito e isotrópico, qual é a direção da aceleração gravitacional g ? Cada pedaço de matéria não seria atraído igualmente em todas as direções? Não deveríamos ter $g = 0$ em todos os lugares? Considere a lei de Gauss: a aceleração da gravidade produzida por uma região esférica homogênea de massa M centrada num ponto O é

$$g = \frac{G}{r^2} \int \rho dV = \frac{GM}{r^2}$$

Se $g = 0$ em todos os lugares, então $\rho = 0$, ou seja, o único universo que satisfaz o Princípio Cosmológico permitido pela física newtoniana é um universo completamente vazio!

Para evitar estas dificuldades vamos adotar a **Regra de Birkhoff** e vamos supor que ela se aplica a qualquer observador comóvel: a velocidade (radial) v de qualquer galáxia vista por um observador em O a uma distância r depende apenas da atração gravitacional das galáxias dentro da esfera de raio r centrada em O . A regra de Birkhoff não tem justificativa na teoria newtoniana, mas permite o desenvolvimento de uma cosmologia newtoniana...

4.1 O fator de escala

Considere duas galáxias A e B. Num certo instante t_1 (arbitrário) elas estão separadas por uma distância r_1 e, num outro instante t , a separação entre elas é r (figura 3).

Note que, pelo Princípio Cosmológico, os únicos movimentos permitidos são a expansão ou a contração isotrópica do universo. Podemos, então, escrever

$$\mathbf{r} = \frac{R(t)}{R(t_1)} \mathbf{r}_1$$

onde $R(t)$ é o **fator de escala**, que mede as variações nas escalas produzidas pela expansão (ou contração) do universo.

O fator de escala está associado à lei de Hubble:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{r}_1}{R(t_1)} \frac{dR(t)}{dt}$$

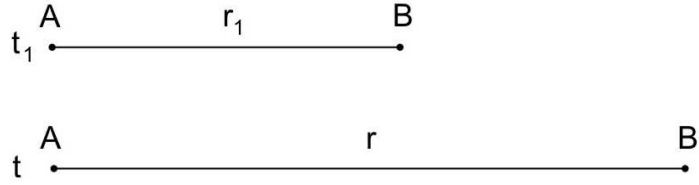


Figure 3: Fator de escala.

e se escrevermos que

$$\mathbf{v} = H\mathbf{r}, \quad (1)$$

então temos que

$$H\mathbf{r} = H \frac{R(t)}{R(t_1)} \mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{R(t_1)} \frac{dR(t)}{dt}$$

ou

$$H(t) = \frac{1}{R(t)} \frac{dR}{dt} = \frac{\dot{R}}{R} \quad (2)$$

Verificamos que, nesta formulação, H não é constante, mas sim uma função do tempo. $H(t)$, denominado *parâmetro de Hubble*, mede a taxa de expansão no instante t . Seja t_0 a idade do universo. Vamos chamar de H_0 o valor atual de $H(t)$, isto é, $H_0 = H(t_0)$.

Frequentemente usaremos o fator de escala normalizado em relação ao valor atual:

$$a(t) = \frac{R(t)}{R(t_0)},$$

de modo que $a(t_0) = 1$.

4.2 A densidade da matéria

Vamos supor que o fluido cosmológico é não-viscoso. Pela mecânica dos fluidos, três quantidades são relevantes nesse caso: o campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ e as distribuições de densidade, $\rho(\mathbf{r}, t)$, e pressão, $p(\mathbf{r}, t)$.

Devido à homogeneidade em grande escala, $\rho(\mathbf{r}, t)$ e $p(\mathbf{r}, t)$ devem ser os mesmos para todos os observadores comóveis em um tempo t , ou seja, $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(t)$ e $p(\mathbf{r}, t) = p(t)$.

Vamos agora desprezar a pressão, fazendo $p(t) = 0$. Como veremos mais tarde, os efeitos dinâmicos da pressão da matéria são muito pequenos hoje, tendo sido importantes apenas no início do universo.

Como evolui a densidade de matéria com o tempo? Devido à expansão, uma certa quantidade de matéria, M , que num instante t_0 ocupava uma esfera de raio r_0 , num instante t ocuparia uma esfera de raio r . Temos que $\rho(t_0) = 3M/4\pi r_0^3$ e $\rho(t) = 3M/4\pi r^3$. Logo, $\rho(t) = \rho_0 [r_0/r(t)]^3$ ou, em termos do fator de escala:

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 = \rho_0 a(t)^{-3}. \quad (3)$$

4.3 A equação de evolução do universo

Pela regra de Birkhoff, a dinâmica de uma galáxia de massa m , observada a uma distância r de um observador comóvel num ponto O , depende apenas da massa dentro da esfera de raio r centrada em O :

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

A força de atração gravitacional que essa massa exerce sobre a galáxia é dada por

$$F = m\ddot{r} = -\frac{GmM(r)}{r^2} = -\frac{4\pi}{3}Gm\rho r$$

ou,

$$\ddot{r} = -\frac{4\pi G\rho r}{3}$$

Introduzindo o fator de escala

$$r = \frac{R(t)}{R_0}r_0 = a(t)r_0$$

vem

$$\ddot{r} = \ddot{a}(t)r_0$$

e temos que

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho a \quad (4)$$

Note que nessa equação não aparece r : a dinâmica da expansão, descrita por $a(t)$, é determinada apenas pela densidade de matéria $\rho(t)$.

Esta equação é, a menos da interpretação física dos termos, idêntica à equação que aparece nos modelos de Cosmologia Relativística com pressão nula (e com a constante cosmológica também nula).

4.4 Conservação de energia e o futuro da expansão

A gravitação tende a desacelerar a expansão. Mas será a gravitação suficientemente forte para interromper a expansão e revertê-la? Em outros termos, o universo é gravitacionalmente ligado? (Note que não estamos sendo muito rigorosos nessa discussão).

Seja M a massa contida dentro da esfera de raio r centrada no observador em O . Considere uma galáxia de massa m a uma distância r de O . A energia total dessa galáxia, que deve se conservar durante a expansão, é

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{constante}$$

Se a energia total é negativa ($E < 0$), o universo é ligado, e à expansão deve se suceder uma fase de contração. Se a energia total é positiva ($E > 0$), o universo não é gravitacionalmente ligado e a expansão será perpétua. Se $E = 0$, temos um caso crítico, onde a expansão diminuirá sempre mas sem entrar numa fase de contração.

Se $E = 0$, temos que

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r}$$

ou

$$\frac{H^2 r^2}{2} = \frac{G}{r} \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3$$

ou

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Definimos a **densidade crítica** ρ_c como sendo a densidade que o universo deveria ter para que $E = 0$. O valor dessa densidade hoje é

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.88 \times 10^{-29} h^2 \text{g cm}^{-3} \quad (5)$$

onde $h \equiv H_0/(100 \text{ km/s/Mpc})$.

Se $\rho_0 > \rho_c$, então $E < 0$ e à expansão se sucederá uma contração, mas se $\rho_0 < \rho_c$, então $E > 0$ e a expansão será perpétua.

Estes aspectos gerais do modelo newtoniano são preservados na cosmologia relativística, como veremos a seguir.

Voltemos à equação de conservação de energia acima. Como $v = (\dot{a}/a)r$, $M = 4\pi r^3 \rho/3$ e $r = r_0 a$, ela pode ser reescrita como

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) a^2 - K \quad (6)$$

onde K é uma constante. Veremos que a forma dessa equação também é semelhante à que se obtém na cosmologia relativística.

5 As equações da cosmologia relativística

As equações de Einstein estabelecem uma relação entre a geometria do espaço-tempo e a distribuição de matéria e energia.

Nas equações da TRG, a geometria é caracterizada pelo tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, que depende dos coeficientes da métrica e de suas derivadas até segunda ordem.

5.1 Métrica e curvatura de superfícies

Vamos discutir o significado da métrica considerando, inicialmente, superfícies bi-dimensionais.

A métrica dá a distância entre dois pontos vizinhos, num dado sistema de coordenadas. Por exemplo, numa superfície plana

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 = \dots$$

(em coordenadas cartesianas, polares, ...). Se considerarmos um outro sistema, caracterizado por coordenadas (x_1, x_2) , a distância (ao quadrado) entre 2 pontos vizinhos pode ser escrita como

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}(x_1, x_2) dx_i dx_j$$

Note que ds^2 não depende do sistema de coordenadas: é um invariante. As quantidades g_{ij} , que são os coeficientes da métrica, são as componentes do chamado “tensor métrico”, que caracteriza a geometria e depende da curvatura.

Ilustremos a relação entre métrica e curvatura considerando uma superfície esférica de raio R , que é uma superfície de curvatura constante (e positiva). Em termos de coordenadas esféricas, a distância entre dois pontos próximos, medida sobre a superfície da esfera é

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

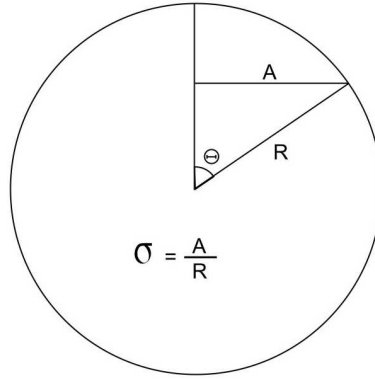


Figure 4: Significado das coordenadas da métrica em uma superfície esférica.

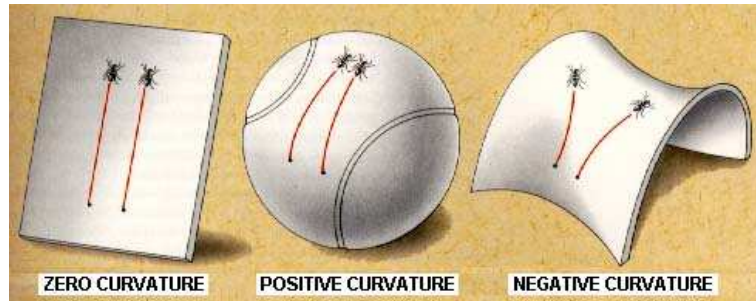


Figure 5: Superfícies de curvatura nula, positiva e negativa.

Se considerarmos um outro sistema de coordenadas onde $A = R \sin \theta$ (figura 4), temos

$$ds^2 = \frac{dA^2}{1 - \frac{A^2}{R^2}} + A^2 d\phi^2$$

que, com $\sigma = A/R$ e $k = +1$, pode ser escrita como

$$ds^2 = R^2 \left[\frac{d\sigma^2}{1 - k\sigma^2} + \sigma^2 d\phi^2 \right]$$

O interessante é que a métrica escrita dessa forma, dependendo do valor de k , vale para qualquer superfície de curvatura constante (figura 5): se $k = 0$ temos um plano, se $k = +1$ temos uma superfície esférica, se $k = -1$ temos uma superfície de curvatura constante negativa. Uma superfície com $k = -1$ não "cabe" num espaço tri-dimensional, mas podemos projetá-la sobre um plano. A figura 6 ilustra exatamente isso.

5.2 A métrica de Robertson-Walker (MRW)

No caso da Teoria da Relatividade Restrita, a métrica de Minkowski,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

dá a separação entre dois eventos (pontos no espaço-tempo, ET) próximos. Note que a métrica da parte espacial é euclidiana.

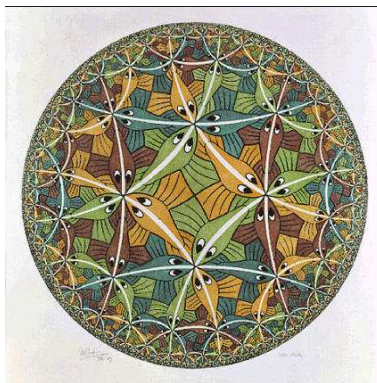


Figure 6: Obra de Escher, representando a projeção de uma superfície de curvatura negativa constante sobre um plano.

Na TRG, uma distribuição arbitrária de matéria pode levar a um espaço de curvatura arbitrária. É aí que entra o Princípio Cosmológico. Para um modelo de universo descrito pela TRG ser consistente com o PC devemos considerar espaços de curvatura constante.

A métrica de um espaço-tempo com espaço de curvatura constante é denominada métrica de Robertson-Walker (MRW) e pode ser escrita como

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{d\sigma^2}{1 - k\sigma^2} + \sigma^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (7)$$

onde t é o tempo; $R(t)$ é denominado fator de escala; σ, θ, ϕ são coordenadas comóveis e k é o “sinal da curvatura” (-1, 0, +1).

As coordenadas comóveis acompanham a expansão, como ilustrado na figura 7. O fator de escala $R(t)$ determina como a distância entre 2 observadores comóveis varia com o tempo. Observadores comóveis são aqueles que estão em repouso em um sistema de coordenadas comóveis.

O tempo próprio τ é definido como $ds \equiv c d\tau$. Para um observador comóvel, $d\sigma = d\theta = d\phi = 0$ e, então, $ds = c dt$ e, portanto, $dt = d\tau$. Logo, o tempo t é o tempo próprio dos observadores comóveis.

Na TRG as trajetórias das partículas livres são geodésicas no ET. Geodésicas são linhas de comprimento mínimo (ou máximo) entre 2 eventos no ET. A luz segue “geodésicas nulas”, $ds^2 = 0$, enquanto que partículas com massa seguem trajetórias *time-like*: $ds^2 > 0$.

5.3 O desvio espectral

O desvio espectral observado no espectro das galáxias é uma medida direta da expansão do universo.

Consideremos a observação de uma galáxia, G . Suponha que o observador O esteja na origem do sistema de coordenadas comóveis, isto é, suas coordenadas no sistema de coordenadas que estamos usando para definir a MRW são $(\sigma_G, \theta_G, \phi_G) = (0, 0, 0)$. Vamos supor (sem perda de generalidade) que as coordenadas da galáxia G são $(\sigma_G, \theta_G, \phi_G) = (\sigma_G, 0, 0)$.

Suponha que, no instante t_0 , o observador recebeu um fóton que foi emitido por G no tempo t . Como a luz viaja por geodésicas nulas ($ds^2 = 0$) temos, da MRW (eq. 7) que

$$c \frac{dt}{R(t)} = \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}}$$

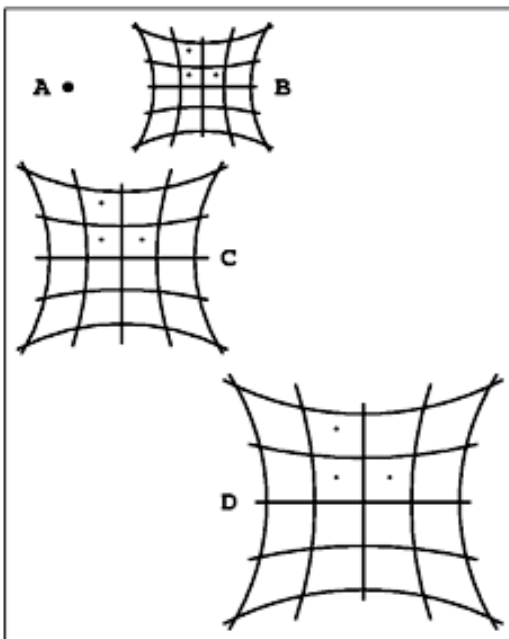


Figura 4. Expansão no modelo de Friedmann hiperbólico:
 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow \dots$

Figure 7: Coordenadas comóveis.

e, portanto,

$$\int_0^{\sigma_G} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}} = c \int_t^{t_0} \frac{dt}{R(t)}.$$

Suponha que um segundo fóton é emitido em $t + \Delta t$ e recebido em $t_0 + \Delta t_0$. Então

$$\int_0^{\sigma_G} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}} = c \int_{t+\Delta t}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{R(t)}.$$

Logo,

$$\int_t^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t+\Delta t}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{R(t)}$$

Vamos supor que Δt e Δt_0 são muito menores que t e t_0 . Nesse caso,

$$\frac{\Delta t}{R(t)} \simeq \frac{\Delta t_0}{R(t_0)}$$

Vamos supor que Δt e Δt_0 sejam o período da radiação emitida e recebida, de modo que seus comprimentos de onda sejam λ_e e λ_0 , respectivamente: $\lambda_e = c\Delta t$ e $\lambda_0 = c\Delta t_0$. Então,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{R(t_0)}{R(t)} = \frac{R_0}{R}$$

O desvio espectral é definido como

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} \tag{8}$$

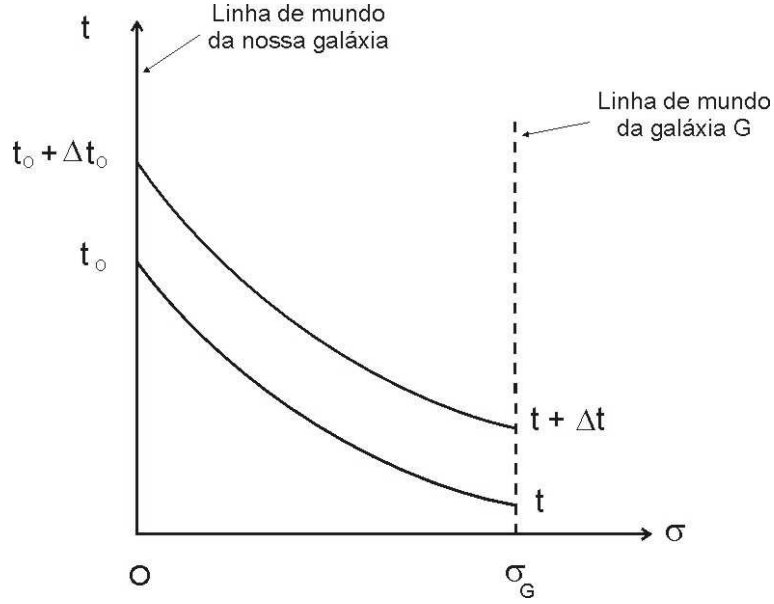


Figure 8: Linhas de mundo de fótons emitidos por uma galáxia G.

Portanto, $R_0/R = 1 + z$ e, então,

$$a(z) = \frac{R}{R_0} = \frac{1}{1 + z} \quad (9)$$

Note que z depende apenas da razão entre os fatores de escala quando a luz foi emitida e quando foi recebida e, portanto, é uma medida de quanto o universo se expandiu desde que a luz foi emitida. Por exemplo, em $z = 1$ temos que $a = 1/2$, ou seja, as escalas no universo eram metade do que são hoje.

Em um universo em expansão, $R(t_0) > R(t)$ e, portanto, $z > 0$ e $\lambda_0 > \lambda_e$, isto é, a radiação sofre redshift. Hoje ($a = 1$): $z = 0$; no Big-Bang ($a = 0$): $z = \infty$.

5.4 Equações de Friedmann - Lemaître (EFL)

A cosmologia newtoniana não é, evidentemente, consistente com a relatividade, mas as equações de evolução do fator de escala que derivamos a partir dela são, na forma, parecidas com a que se obtém das equações de campo da TRG, com a MRW.

Na cosmologia, o tensor de energia-momentum, que depende da distribuição de matéria e energia, pode ser descrito em termos da densidade $\rho(t)$ e da pressão $p(t)$, já que ela também contribui para a energia. Das equações de Einstein, com a métrica de RW, obtém-se as equações que descrevem a evolução do fator de escala, e que são denominadas Equações de Friedmann - Lemaître (EFL):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} \quad (10)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \quad (11)$$

onde K é uma constante cujo sinal depende da curvatura, $K = 2k/(3R_0^2)$. Compare essas equações com as da cosmologia newtoniana, equações 6 e 4.

É fácil verificar que dessas equações vem que:

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -\frac{p}{c^2} \frac{d}{dt}(a^3) \quad (12)$$

5.5 A equação de estado

A equação de estado estabelece a relação entre a pressão e a densidade: $p = p(\rho)$. Alguns exemplos de equações de estado importantes em cosmologia:

- matéria (“poeira”, $p = 0$): $\rho_m \propto a^{-3}$
- radiação ($p = \rho_r c^2/3$): $\rho_r \propto a^{-4}$
- vácuo: $p = -\rho_v c^2$, $\rho_v = \Lambda/(8\pi G)$
- modelo simples para energia escura: $p = w\rho c^2$, com w constante

Diferentes modelos e comportamentos para $a(t)$ aparecem com diferentes equações de estado.

5.6 A constante cosmológica

Consideremos um universo onde, além de matéria e radiação (com densidade e pressão ρ e p), haja também a energia do vácuo. Assim, incluindo-a nas EFL, $\rho \rightarrow \rho + \rho_v$ e $p \rightarrow p + p_v$, é fácil ver que, com $p_v = -\rho_v c^2$ ($w = -1$),

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (13)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3} \quad (14)$$

onde

$$\Lambda \equiv 8\pi G\rho_v$$

é a chamada **constante cosmológica**. Note que, se p e ρ são positivos, não existe solução estática das EFL (ver equação 11). A constante cosmológica foi proposta por Einstein (1919) para se obter uma solução estática (isto é, independente do tempo). Nessa época se imaginava que o universo era estático; a lei de Hubble só seria descoberta em 1929. Mais tarde Einstein teria dito (numa conversa com George Gamow) que isso foi o maior erro de sua vida. Como a história prega peças, ela foi e voltou várias vezes ao longo dos anos. Hoje em dia ela é associada à “energia do vácuo”, pois esta tem uma equação de estado com pressão negativa. Vácuo aqui significa o estado de menor energia de um certo campo físico e é a “explicação” mais simples para a “energia escura”.

5.7 Parâmetros cosmológicos

Os parâmetros cosmológicos são definidos como:

- parâmetro de Hubble:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (15)$$

- parâmetro de densidade:

$$\Omega = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} \quad (16)$$

onde

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G} = 1.88 \times 10^{-29} h^2 \text{g cm}^{-3}$$

é a densidade crítica (eq. 5). Quando se tem várias espécies simultaneamente, pode-se definir um parâmetro de densidade para cada espécie, $\Omega_i = \rho_i(t)/\rho_c(t)$. Por exemplo, Ω_b para os bárions.

- parâmetro de densidade do vácuo (ou constante cosmológica):

$$\Omega_\lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad (17)$$

- parâmetro de curvatura:

$$\Omega_k \equiv -\frac{kc^2}{H^2 R^2} \quad (18)$$

- parâmetro de desaceleração:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} \quad (19)$$

Note que esses parâmetros dependem do tempo. Os valores atuais desses parâmetros, de acordo com a equipe do WMAP (Hinshaw et al. 2008), são (assumindo $\Omega_k = 0$):

- $H_0 = 70.1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
- $\rho_{c,0} = 1.88 \times 10^{-29} h^2 \text{g cm}^{-3} = 9.2 \times 10^{-30} \text{g cm}^{-3}$
- $\Omega_{m,0} = 0.28$
- $\Omega_\lambda = 0.72$
- $\Omega_{b,0} = 0.0462$

O sub-índice 0 denota o tempo atual, t_0 .

6 As 4 eras do Universo

O paradigma cosmológico atual sugere que o universo passou por 4 “eras” distintas:

- o Big-Bang e a inflação
- a era da radiação
- a era da matéria
- a era da energia escura

6.1 A inflação

O Big-Bang corresponde a $t = 0$ e $a = 0$. É uma singularidade nas equações e seu entendimento possivelmente vai requerer uma nova física (do tipo gravitação quântica).

A inflação corresponderia a uma fase muito curta, de expansão exponencial, que teria ocorrido logo após o Big-Bang, talvez logo após a quebra espontânea de simetria da grande unificação em $t \sim 10^{-34}$ s (num certo cenário). Na inflação o universo pode ser considerado dominado pela energia do vácuo de um campo escalar (o *inflaton*), agindo como uma constante cosmológica, isto é, $\rho \simeq \rho_I = \text{cte}$. Se ρ_I domina a expansão, então pode-se mostrar que o parâmetro de Hubble H_I é constante e que o fator de escala evolui como

$$a \propto \exp(H_I t) \quad (20)$$

O fenômeno da inflação foi proposto para resolver vários problemas do modelo padrão que requerem condições iniciais muito especiais (*fine tuning*). Por exemplo,

- o problema da "planura" (*flatness*):

As observações do WMAP indicam que o universo tem curvatura nula. Em termos do parâmetro de densidade, isso corresponde a $\Omega = 1$. Para se ter Ω entre 0.95 e 1.05 hoje, na época da recombinação ($z \sim 10^3$) se deveria ter Ω entre 0.99995 e 1.000005, a menos que a curvatura seja estritamente nula ($k = 0$).

- o problema do horizonte

Como a informação viaja no máximo à velocidade da luz, há uma distância limite a que se tem acesso causal que é a distância que a luz pode viajar desde o começo do universo. Essa distância é denominada raio do horizonte e, em ordem de grandeza, é dada por ct , onde t é a idade do universo. A observação da radiação cósmica de fundo mostra que ela é notavelmente uniforme. Na época em que ela foi emitida ($z \sim 1000$), o tamanho do horizonte era muito menor que o universo observável hoje. Isso implica que nem todo o universo observável estava dentro de uma região causalmente conexa e, portanto, não se esperaria que os fótons da radiação de fundo vindo de regiões diferentes do céu tivessem essencialmente a mesma temperatura!

A "solução" desses problemas é a inflação: o universo passou por uma breve fase de expansão acelerada (crescimento exponencial), tendo se expandido por um fator e^N , com N maior que 50 - 70 (dependendo do modelo). Durante o período de crescimento inflacionário do fator de escala a curvatura diminui dramaticamente, ficando praticamente nula. O horizonte também cresce exponencialmente e todo o universo observável hoje estaria dentro de uma região causalmente conexa antes da inflação.

6.2 A era da radiação

Logo após o Big-Bang o universo é extremamente quente e sua dinâmica é regida pela radiação, cuja equação de estado é dada por $p = \rho c^2/3$. Nesse caso, com a equação 12, pode-se verificar que a densidade varia com o fator de escala como

$$\rho \propto a^{-4} \quad (21)$$

No expoente, 3 é devido à variação na densidade de fótons e 1 é devido à variação da energia de cada fóton.

6.2.1 A dinâmica do universo

No modelo padrão considera-se que a radiação está em equilíbrio termodinâmico. Nesse caso, o espectro da radiação é planckiano e depende apenas da temperatura T . A densidade de radiação, em erg cm^{-3} , é

$$u = aT^4 = 7.566 \times 10^{-15} T^4 \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}, \quad (22)$$

e, em g cm^{-3} , é

$$\rho = \frac{4\sigma_{SB}}{c^3} T^4 = 8.4 \times 10^{-36} T^4 \text{ g cm}^{-3} \text{ K}^{-4}, \quad (23)$$

onde σ_{SB} é a constante de Stefan-Boltzmann. Logo, a temperatura varia com o fator de escala como

$$T \propto a^{-1} \quad (24)$$

Para verificarmos como o fator de escala evolui com o tempo, consideremos a equação 10. Como, no começo do universo, a densidade é muito grande, o primeiro termo do lado direito domina o segundo termo, de modo que temos que

$$\dot{a}^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} \rho a^2$$

que, com $\rho \propto a^{-4}$, implica em

$$a \propto t^{1/2} \quad (25)$$

6.2.2 A origem da matéria

Vários fenômenos importantes ocorrem durante a era radiativa. Dentre eles: a inflação, a origem da matéria e a nucleosíntese primordial.

Supõe-se que a matéria seja formada a partir do campo de radiação via um processo denominado *interconversão de partículas*. No começo do universo pares de partícula e antipartícula de massa m estão em equilíbrio termodinâmico se $kT \gg mc^2$:

$$p + \bar{p} \rightleftharpoons 2\gamma$$

Quando a temperatura cai abaixo de $kT \sim 2mc^2$, o par se “desacopla” do campo de radiação: p e \bar{p} se aniquilam e as partículas que sobrevivem constituem as *reliquias*. Uma possibilidade é que as partículas de matéria escura sejam justamente relíquias da era radiativa. Voltaremos a isso mais tarde.

6.2.3 A nucleosíntese primordial e a abundância dos bárions

As abundâncias típicas (em massa) observadas no universo hoje são: H: $\sim 75\%$; He $\sim 25\%$; o resto: $\sim 1\%$.

Consideremos, inicialmente, a abundância do hélio. A abundância observada é tal, que a maior parte dela não pode ter-se formado em estrelas: a nucleosíntese estelar só pode converter $\sim 5\%$ da massa em He; não pode explicar a totalidade do He observado. Foi Gamow, nos anos 40, quem sugeriu um mecanismo alternativo: a nucleosíntese do He no começo do universo. Boas revisões sobre a nucleosíntese primordial: Steigman (2007) e Kneller & Steigman (2004).

Os nucleons- p, n - se desacoplam em $T \sim 10^{13} \text{K}$ ($t \sim 10^{-6} \text{s}$). Depois da aniquilação sobra mais matéria que anti-matéria (porquê? essa é uma questão ainda em aberto). Os p e n que sobram ficam em equilíbrio, via interações fracas:

$$p + e^- \rightleftharpoons n + \nu$$

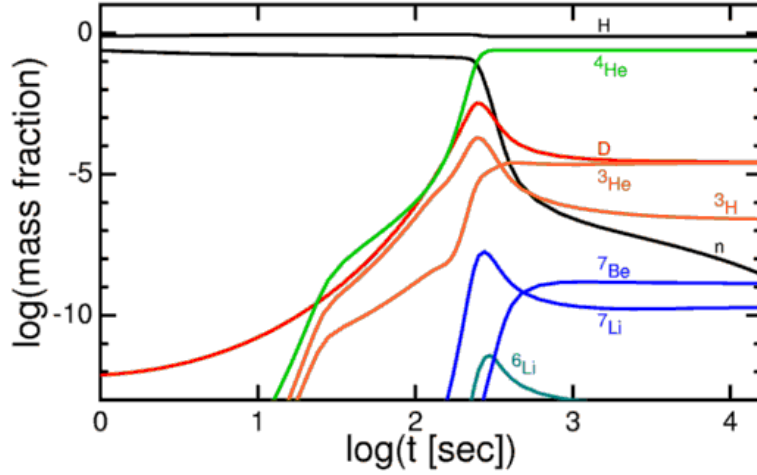
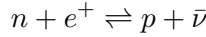


Figure 9: Síntese dos elementos leves no universo primordial.

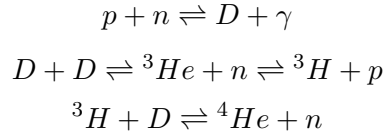


Enquanto isso acontece, a densidade relativa de p e n é dada pelo fator de Boltzmann baseado na diferença de massa $\Delta m = m_n - m_p$:

$$r = n_n/n_p = \exp(-\Delta mc^2/kT) \simeq \exp(-1.5 \times 10^{10} K/T)$$

Além disso, os n livres são instáveis (tempo de decaimento = 890 s) e a razão pela qual os n existem é que estas interações fracas desacoplam logo e a nucleossíntese primordial ocorre poucos minutos depois disso, de modo que a maior parte deles termina no núcleo de He e de outros elementos leves.

Via uma série de reações nucleares, os p e n se combinam para formar núcleos atômicos mais pesados que o do ^1H . Uma das mais importantes cadeias de reações forma o ^4He via reações que têm o deutério D como intermediário:



O D pode ser formado via $n + p \rightarrow D$. Mas o D é frágil e é facilmente destruído acima de $\sim 10^9\text{K}$ por fotodissociação : $D + \gamma \rightarrow n + p$. Mas logo abaixo de $\sim 10^9\text{K}$ o D pode sobreviver.

A figura 9 mostra a história da formação dos elementos leves durante a nucleossíntese primordial. A abundância em massa do He prevista é $Y \simeq 0.24$.

Além do ^4He e do D, na nucleossíntese primordial forma-se um pouco de ^3He , ^7Li , ^7Be . Elementos mais pesados não se formam porque não há núcleos estáveis com massa atômica 5 e 8.

Uma quantidade muito útil na discussão da nucleossíntese primordial é o parâmetro η , o número de bárions sobre o número de fótons:

$$\eta \equiv \frac{n_p + n_n}{n_\gamma} \quad (26)$$

A densidade numérica de fótons para um corpo negro pode ser escrita como

$$n_\gamma = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{k_B}{\hbar c}\right)^3 T^3 \simeq 20.2 \times T^3 \text{ cm}^{-3}$$

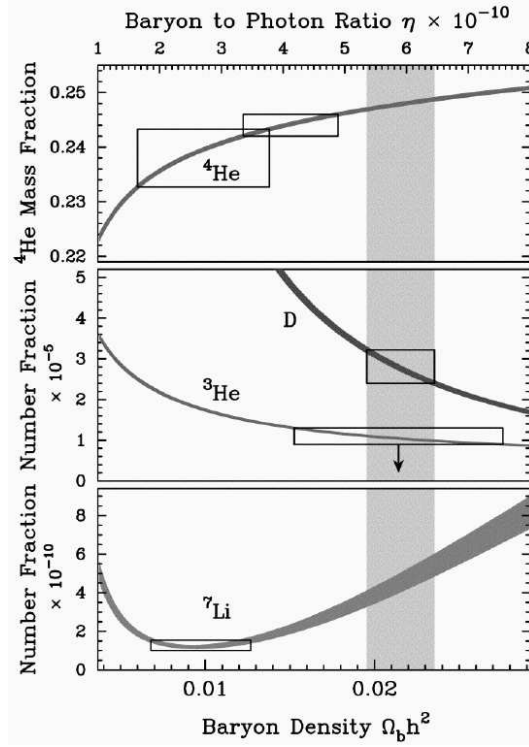


Figure 10: Abundância dos elementos leves produzidos na nucleosíntese primordial em função da abundância de bárions (e de η).

(onde $\zeta(x)$ é a função zeta de Riemann). Daí, é fácil ver que (note que a maior parte dos neutrons está no núcleo dos átomos de He):

$$\eta \simeq 2.74 \times 10^{-8} (T/2.73\text{K})^{-3} \Omega_b h^2, \quad (27)$$

onde Ω_b é o parâmetro de densidade dos bárions. η é o principal parâmetro que controla a nucleosíntese primordial. De fato, a abundância dos elementos leves depende fundamentalmente de η : conhecendo-se η , a temperatura da radiação cósmica de fundo e H_0 , pode-se determinar Ω_b .

Dos elementos leves formados na nucleosíntese primordial, qual é o melhor *bariômetro*? Que isótopo é melhor para se determinar η ? Um exame da figura 10 mostra que a abundância do ^4He é pouco sensível a η . No caso do ^3He , sua formação e destruição em estrelas é pouco conhecida. A abundância do D parece ser a melhor opção pois apresenta forte dependência com η , além dele não ser produzido em estrelas. O ^7Li apresenta uma evolução com η não-monotônica.

A abundância dos bárions, obtida pela determinação das abundâncias dos elementos leves pode ser sumarizada como (Kneller & Steigman, 2004):

- ^4He : $\Omega_b h^2 = 0.0103 \pm 0.0025$
- D: $\Omega_b h^2 = 0.0221 \pm 0.0025$
- ^7Li : $\Omega_b h^2 = 0.0118 \pm 0.0016$

Assim, supondo $\Omega_b h^2 \simeq 0.022$ e $h = 0.7$, temos que $\Omega_b \simeq 0.045$. Note que $\Omega_m \simeq 0.3$, ou seja, a maior parte da matéria é não bariônica! É a matéria escura.

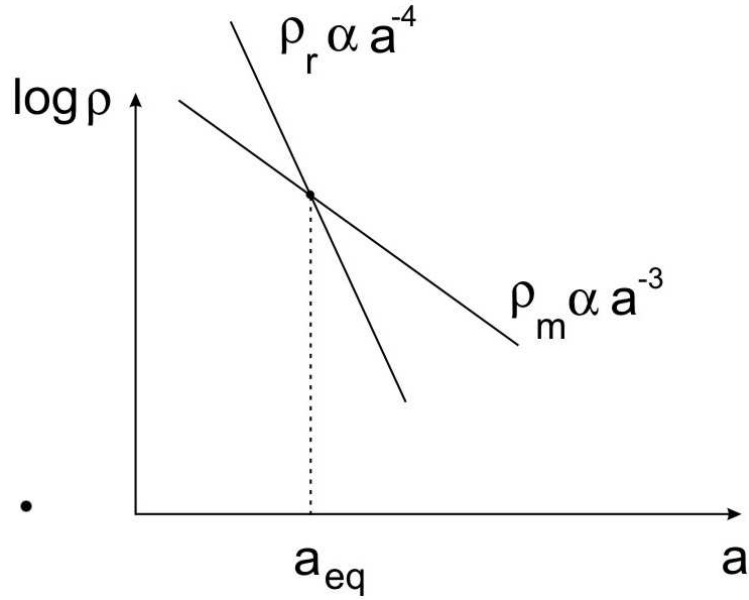


Figure 11: Definição da época da igualdade.

6.3 A era da matéria

No caso de um universo dominado pela matéria, $p \sim \rho v^2$, onde v é a velocidade típica das galáxias. Como $v \ll c$, $p \ll \rho c^2$ e pode ser desprezado nas EFL. Nesse caso, a equação 12 mostra que

$$\rho_m \propto a^{-3} \quad (28)$$

6.3.1 A época da recombinação

Voltemos à era radiativa. Conforme o universo se expande, a densidade de radiação varia como $\rho_r \propto a^{-4}$ enquanto que a de matéria varia como $\rho_m \propto a^{-3}$. Assim, embora a radiação domine o começo da evolução do universo, depois de um certo tempo a matéria vai dominar.

Definimos a “época da igualdade” (designada pelo subscripto “eq”) como quando $\rho_r = \rho_m$. Considerando que a densidade de radiação de um corpo negro é dada pela equação 23, pode-se verificar que

$$z_{eq} \simeq 4.02 \times 10^4 \Omega_{m0} h^2 T_{2.73}^{-4} \quad (29)$$

Durante a era radiativa, como o universo era muito quente, a matéria era ionizada. Após o começo da era da matéria a temperatura cai abaixo do potencial de ionização do hidrogênio e torna possível a formação de átomos: é a época da recombinação. Ela ocorre em

$$z_{rec} \simeq 1100 \quad (30)$$

(um valor pouco sensível aos modelos cosmológicos). A partir daí, o universo, que era opaco aos fótons, fica transparente e a matéria bariônica fica praticamente neutra. A Radiação Cósmica de Fundo permite mapear este redshift. Apenas para $z \sim 10$ a “reionização” ocorrerá, quando as primeiras estrelas começarem a se formar.

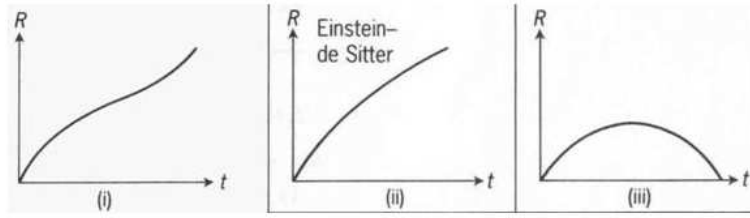


Figure 12: Evolução do fator de escala nos modelos de Friedmann: (i) $k=-1$; (ii) $k=0$; (iii) $k=+1$.

6.3.2 Dinâmica

Para ilustrar a dinâmica de modelos de universo dominados pela matéria, vamos considerar os modelos de Friedmann, onde, ademais, supomos que a constante cosmológica é nula.

Nesse caso é fácil de ver que $q = \Omega/2$. Esses modelos têm 3 soluções possíveis (ver figura 12):

- se $q > \frac{1}{2}$ ou $\Omega > 1$, então $k = +1$
universo fechado e oscilante
- se $q = \frac{1}{2}$ ou $\Omega = 1$, então $k = 0$
universo aberto em expansão perpétua
- se $q < \frac{1}{2}$ ou $\Omega < 1$, então $k = -1$
universo aberto em expansão perpétua

O modelo de Einstein - de Sitter, que corresponde ao caso em que $k = 0$ (ou $\Omega = 1$) é dado por

$$R(t) = (6\pi G)^{1/3} t^{2/3} \quad (31)$$

Nesse caso, a densidade de matéria evolui como:

$$\rho_m(t) = \frac{1}{6\pi G t^2}$$

6.4 A era da energia escura

Observações de SNs tipo Ia distantes levaram à descoberta de que o universo está se acelerando ($\ddot{a} < 0$). Um exame da equação 11 sugere que, para isso acontecer, é necessário ter-se pressão negativa.

Essa aceleração seria produzida por uma *energia escura*, cuja natureza (como a da matéria escura), é um tremendo mistério.

Normalmente se considera um modelo simples para a equação de estado da energia escura:

$$p = w\rho c^2$$

onde w pode depender do tempo (e talvez da posição).

O modelo mais simples corresponde à constante cosmológica, $w = -1$. Outras opções incluem a energia fantasma ($w < -1$), paredes de domínio ($w = -2/3$), e cordas cósmicas ($w = -1/3$), entre outros.

6.4.1 O modelo padrão: Λ CDM

O modelo mais “canônico” hoje em dia para descrever o universo é o Λ CDM: um universo dominado por matéria escura fria com uma constante cosmológica.

Consideremos um universo com matéria, radiação e constante cosmológica. Nesse caso temos (da equação 13 mais as definições da seção 5.7)

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\lambda + \Omega_k = 1 \quad (32)$$

Seja

$$H(z) = H_0 E(z) \quad (33)$$

onde $E(z)$ caracteriza a dependência em redshift do parâmetro de Hubble. Vamos reescrever cada termo da expressão acima. Por exemplo,

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{8\pi G \rho_m}{3H^2}$$

Como $\rho_m = \rho_{m0}(R_0/R)^3 = \rho_{m0}(1+z)^3$ e $H = H_0 E(z)$, temos:

$$\Omega_m = \frac{8\pi G \rho_{m0}(1+z)^3}{3H_0^2 E^2} = \frac{\Omega_{m0}(1+z)^3}{E(z)^2}$$

Analogamente, pode-se mostrar que

$$\Omega_r = \frac{\Omega_{r0}(1+z)^4}{E(z)^2},$$

$$\Omega_\lambda = \frac{\Omega_{\lambda 0}}{E(z)^2},$$

$$\Omega_k = \frac{\Omega_{k0}(1+z)^2}{E(z)^2},$$

de modo que, usando 32, fica fácil ver que

$$E(z) = [\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{\lambda 0} + \Omega_{k0}(1+z)^2]^{1/2}$$

As observações do WMAP e SNIa mais as considerações teóricas da inflação sugerem que o universo tem curvatura nula ($k = 0$, $\Omega_k = 0$) e é dominado por matéria escura, $\Omega_{m0} \simeq 0.3$, e energia escura, $\Omega_{\lambda 0} \simeq 0.7$. Ω_{r0} é muito pequeno e a radiação pode ser desprezada (exceto na era radiativa, claro!).

Nesse caso, um bom modelo para o universo atual é obtido considerando $k = 0$, matéria e energia escura (e assumindo que a energia escura é uma constante cosmológica). Então, pode-se verificar que

$$a = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\lambda 0}} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3H_0 \Omega_{\lambda 0}^{1/2}}{2} t \right)$$

A figura 13 ilustra alguns modelos cosmológicos.

De fato, o universo passou a maior parte de sua vida em expansão desacelerada mas, mais recentemente, a constante cosmológica sobrepujou a densidade de matéria, produzindo uma fase de expansão acelerada.

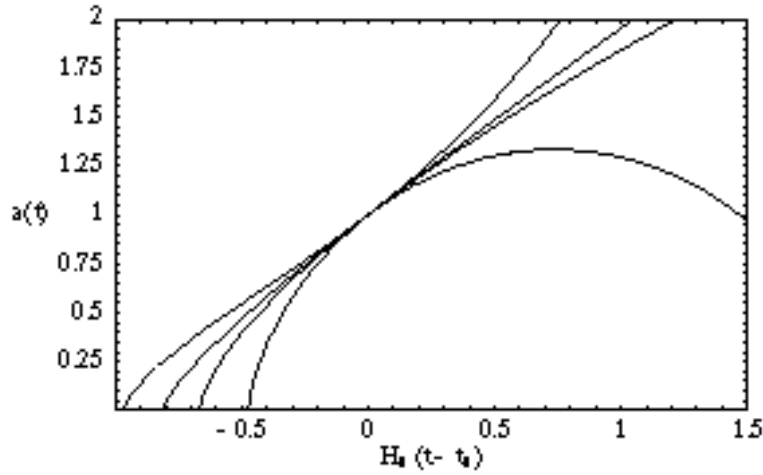


Figure 13: Expansão para diferentes valores de Ω_m e Ω_λ . De cima para baixo as curvas descrevem $(\Omega_m, \Omega_\lambda) = (0.3, 0.7), (0.3, 0), (1, 0), (4, 0)$.

A inflexão desaceleração - aceleração corresponde a $\ddot{a} = 0$ e ocorre quando

$$a_I = \left(\frac{\Omega_{m0}}{2\Omega_{\lambda0}} \right)^{1/3}$$

Isso acontece em

$$t_I = \frac{2}{3H_0\Omega_{\lambda0}^{1/2}} \operatorname{arcsinh} \left[\sqrt{\frac{1}{2}} \right]$$

Os valores dos parâmetros cosmológicos implicam em $t_0/t_I \simeq 1.84$ e $z_I \simeq 0.7$.

Num universo com $k = 0$, o termo Λ domina a densidade ($\Lambda > 8\pi G\rho$) para $z < z_c$, onde

$$z_c = (\Omega_{\lambda0}/\Omega_{m0})^{1/3} - 1 \simeq 0.3$$

7 Idade do Universo

Vamos ver agora como se pode relacionar tempo e redshift na cosmologia relativística.

Num universo dominado por matéria e constante cosmológica, podemos escrever

$$H = H_0 E(z)$$

onde

$$E(z) = \left[\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{\lambda0} \right]^{1/2}$$

Como $H = \dot{a}/a$ e $a = (1+z)^{-1}$, temos

$$H = -\frac{\dot{z}}{1+z}$$

ou,

$$dt = -\frac{dz}{(1+z)H}$$

A idade do universo (t_0) é então dada por

$$\int_0^{t_0} dt = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)H}$$

ou

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)E(z)} = \tau_H \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)E(z)}$$

onde τ_H é o *tempo de Hubble*:

$$\tau_H = H_0^{-1} = 9.78 h^{-1} \text{ Ganos} \quad (34)$$

Por exemplo, num universo de Einstein-de Sitter ($\Omega_{\lambda 0} = 0$, $\Omega_{m 0} = 1$) temos

$$t_0 = \frac{2}{3}\tau_H$$

Podemos determinar a idade do universo no redshift z como

$$t(z) = \tau_H \int_z^\infty \frac{dz'}{(1+z')E(z')} \quad (35)$$

O *look-back time* de um objeto no redshift z é definido como:

$$t_l(z) = t_0 - t(z) = \tau_H \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')E(z')} \quad (36)$$

Para um universo de curvatura nula pode-se mostrar que

$$t(z) = \frac{2}{3}\tau_H \Omega_{\lambda 0}^{-1/2} \operatorname{arcsinh} \left[\left(\frac{\Omega_{\lambda 0}}{\Omega_{m 0}(1+z)^3} \right)^{1/2} \right] \quad (37)$$

No intervalo de interesse ($0.1 \lesssim \Omega_{m 0} \lesssim 1$, $\Omega_{\lambda 0} \lesssim 1$), a solução exata pode ser aproximada dentro de alguns % por (Peacock, 1999):

$$t_0 \simeq \frac{2}{3}\tau_H (0.7\Omega_{m 0} - 0.3\Omega_{\lambda 0} + 0.3)^{-0.3}$$

Note que o universo não pode ser mais jovem que os objetos que contém: isso permite por limites nos valores dos parâmetros cosmológicos.

8 Distâncias

O conceito de distância não é único em um espaço-tempo dinâmico. Medidas de distância relacionam 2 eventos em geodésicas separadas que estão em um mesmo cone de luz; podem ser caracterizados pelos tempos t_e e t_0 de emissão e observação, ou pelo fator de escala nesses tempos, $R(t_e)$ e $R(t_0)$, ou pelos redshifts correspondentes, z_e e z_0 . Uma boa revisão das distâncias em cosmologia encontra-se em Hogg (1999).

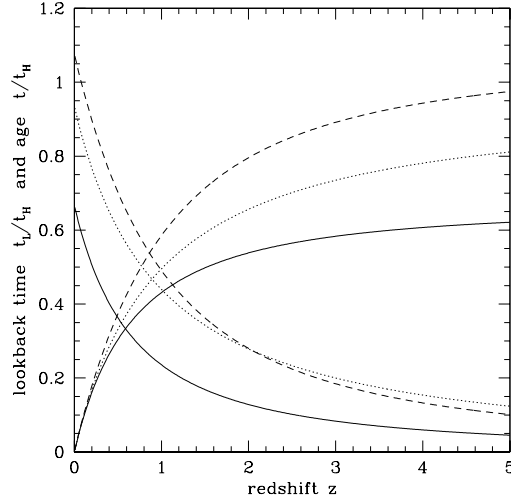


Figure 14: Idade do universo e lookback time (em unidades do tempo de Hubble) em função do redshift para vários modelos cosmológicos ($\Omega_{m0}, \Omega_{\lambda0}$). Linha sólida: (1,0); pontilhada: (0.05,0); tracejada: (0.2,0.8).

8.1 Distância própria e comóvel

Consideremos, inicialmente, a distância própria entre dois eventos ao longo de uma geodésica, D_p (note que não se mede D_p !). O elemento de distância própria: é $dD_p = -cdt$. Como $dt = -dz/[(1+z)H]$, é fácil verificar que $dD_p = D_H dz/[(1+z)E(z)]$, onde

$$D_H = \frac{c}{H_0} \simeq 3000 h^{-1} \text{ Mpc} \quad (38)$$

é a *distância de Hubble*. Assim, a distância própria entre dois eventos em z_1 e z_2 é dada por

$$D_p = D_H \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{(1+z')E(z')} \quad (39)$$

Note que toda a cosmologia está embutida em $E(z)$.

Consideremos, agora, a distância comóvel D_c . O elemento de distância comóvel se relaciona com dD_p como: $dD_p = (R/R_0) dD_c$. Logo, a distância comóvel entre z_1 e z_2 é

$$D_c = D_H \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{E(z')} \quad (40)$$

Como a luz viaja por geodésicas nulas ($ds^2 = 0$), tem-se que (vamos, por enquanto, considerar apenas distâncias “radiais”)

$$c \frac{dt}{R} = \frac{dD_c}{R_0} = \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}}.$$

A distância comóvel entre um observador na origem e outro na coordenada radial σ pode, então, ser escrita como

$$D_c = R_0 \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}} = R_0 S(\sigma) \quad (41)$$

Assim, para os vários sinais da curvatura temos:

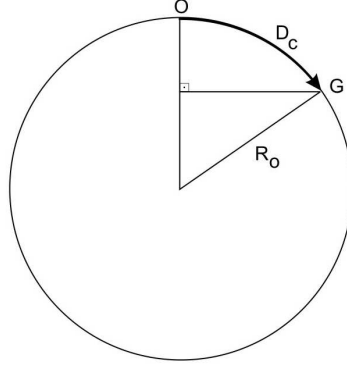


Figure 15: Distância comóvel entre O e G, D_c , sobre um círculo.

- $k = +1$: $D_c = R_0 \arcsin \sigma$
- $k = 0$: $D_c = R_0 \sigma$
- $k = -1$: $D_c = R_0 \operatorname{arcsinh} \sigma$

A figura 15 ilustra coordenadas comóveis sobre uma esfera.

Note que não se pode medir diretamente nem as distâncias próprias nem as distâncias comóveis. Entre as distâncias que se medem, as mais importantes são as de luminosidade e de diâmetro.

8.2 Distância de luminosidade

A distância de luminosidade (D_l) é aquela medida por métodos baseados na luminosidade aparente. Classicamente, fluxo, luminosidade e distância estão relacionados como

$$f = \frac{L}{4\pi D^2}$$

Consideremos um elemento de área (hoje) na métrica de RW:

$$dA = R_0^2 \sigma^2 \sin \theta d\theta d\phi = R_0^2 \sigma^2 d\Omega$$

A área de uma esfera de “raio” σ hoje é

$$A = 4\pi R_0^2 \sigma^2$$

Seja $L(\nu, t)d\nu$ a energia emitida por uma galáxia G por segundo com frequência ν entre ν e $\nu + d\nu$ no instante t . Esses fótons são recebidos com energia menor, devido ao redshift:

$$h\nu_0 = \frac{h\nu}{1+z}$$

Além disso, essa energia é recebida em um intervalo de tempo maior:

$$\Delta t_0 = (1+z)\Delta t$$

Assim, a energia recebida por cm^2 por s (fluxo) no intervalo $[\nu_0, \nu_0 + d\nu_0]$ será:

$$f(\nu_0, t_0)d\nu_0 = \frac{L(\nu, t)d\nu}{4\pi R_0^2 \sigma^2 (1+z)^2} = \frac{L(\nu, t)d\nu}{4\pi D_l^2}$$

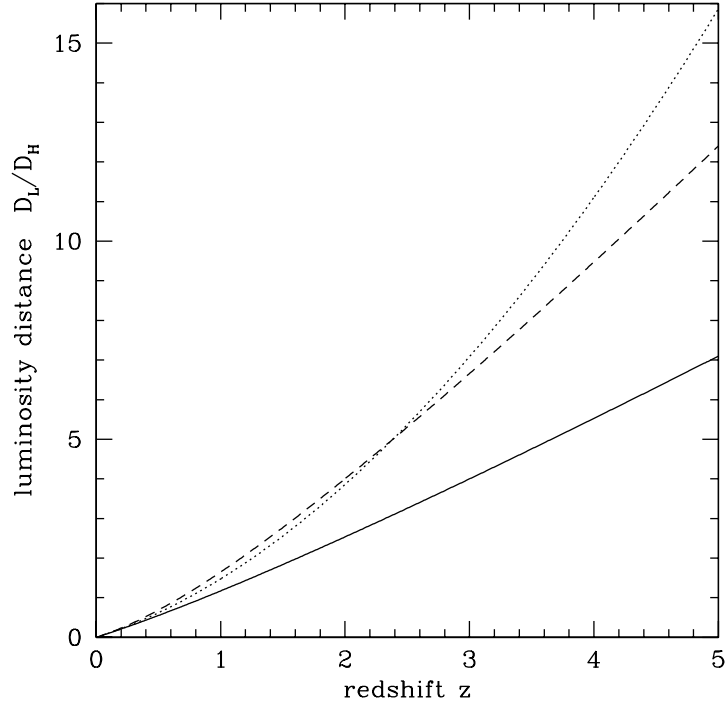


Figure 16: Distância de luminosidade normalizada em função do redshift para três modelos de mundo: $(\Omega_m, \Omega_\lambda) = (1, 0)$, linha sólida; $(0.05, 0)$, pontilhada; $(0.2, 0.8)$, tracejada.

onde

$$D_l = R_0 \sigma (1 + z) \quad (42)$$

A distância D_l é denominada *distância de luminosidade*.

A figura 16 ilustra a relação entre D_l e z para vários modelos cosmológicos.

8.3 Distância de diâmetro

A distância de diâmetro (D_A ; “A” de *aperture*) é aquela obtida pelos métodos baseados no tamanho aparente. Sendo $\Delta\theta$ o tamanho aparente de um corpo de diâmetro D , a distância de diâmetro D_A é tal que

$$\Delta\theta = \frac{D}{D_A}$$

O diâmetro próprio pode ser escrito como (ver a MRW, eq. 7)

$$D = R\sigma\Delta\theta$$

Como $1 + z = R_0/R$, temos

$$D_A = \frac{R_0\sigma}{1+z} = \frac{D_l}{(1+z)^2} \quad (43)$$

Em estudos de lentes aparece a distância de diâmetro entre os redshifts z_1 e z_2 ($z_1 < z_2$), que é dada por:

$$D_A(z_1, z_2) = R_2\sigma_{12} = \frac{R_0\sigma_{12}}{1+z_2}$$

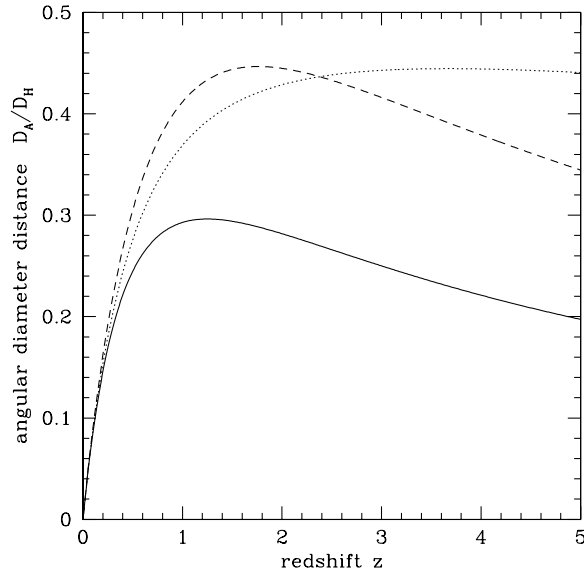


Figure 17: Distância de diâmetro normalizada em função do redshift para três modelos de mundo: $(\Omega_m, \Omega_\lambda) = (1, 0)$, linha sólida; $(0.05, 0)$, pontilhada; $(0.2, 0.8)$, tracejada.

onde σ_{12} é a distância de coordenadas entre z_1 e z_2 .

A figura 17 ilustra a relação entre D_A e z para vários modelos cosmológicos. Note que, em alguns casos, essa distância atinge um máximo e depois decresce com o aumento do redshift!

8.4 Cálculo das distâncias

Para os modelos de Friedmann (dominados pela matéria, com $\Omega_\lambda = 0$) vale a relação de Mattig:

$$R_0\sigma = \frac{2D_H}{\Omega_{m0}^2(1+z)} \{ \Omega_{m0}z + (\Omega_{m0} - 2)[(1 + \Omega_{m0}z)^{1/2} - 1] \}$$

Mas como calcular as distâncias de luminosidade e diâmetro numa cosmologia arbitrária? Seja $D_M \equiv R_0\sigma$ a "distância comóvel transversal". Então, $D_l = (1+z)D_M$ e $D_A = D_M/(1+z)$. Logo, se conhecermos $D_M(z)$ podemos calcular $D_l(z)$ e $D_A(z)$. Das equações 40 e 41 vemos que a distância comóvel de um objeto no redshift z pode ser escrita como

$$D_c = D_H \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} = R_0 S(\sigma)$$

Então, se

- $k = +1$: $D_M = R_0 \sin(D_c/R_0)$
- $k = 0$: $D_M = D_c$
- $k = -1$: $D_M = R_0 \sinh(D_c/R_0)$

Por outro lado, $\Omega_{k0} = -kc^2/(H_0^2 R_0^2)$, de modo que, se k for diferente de zero,

$$R_0 = d_H / \sqrt{|\Omega_{k0}|}$$

Juntando tudo, temos:

- $k = +1$: $D_M = D_H/\sqrt{|\Omega_{k0}|} \sin\left(\sqrt{|\Omega_{k0}|}D_c/D_H\right)$
- $k = 0$: $D_M = D_c$
- $k = -1$: $D_M = D_H/\sqrt{|\Omega_{k0}|} \sinh\left(\sqrt{|\Omega_{k0}|}D_c/D_H\right)$

onde $D_c/D_H = \int_0^z dz'/E(z')$.

8.5 Volumes

Como calcular volumes no espaço-tempo curvo?

Num espaço euclidiano o elemento de volume é $dV = r^2 d\Omega dr$. No caso de espaços curvos, com a MRW, temos que

$$dV = \frac{R^2 \sigma^2 d\Omega R d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}} \quad (44)$$

Substituindo $Rd\sigma/\sqrt{1 - k\sigma^2}$ por $cdt = -cdz/[(1+z)H]$, o elemento de volume fica:

$$dV = \frac{D_H D_A^2 d\Omega dz}{(1+z)E(z)} \quad (45)$$

O elemento de volume comóvel é dado por

$$dV_c = (1+z)^3 dV$$

Um problema muito comum é o da contagem de objetos: qual é o número de objetos dentro de $d\Omega$ e dz ? A resposta é

$$dN = n(z)dV \quad (46)$$

onde $n(z)$ é a densidade de objetos no redshift z .

A figura 18 mostra o comportamento do volume comóvel normalizado para várias cosmologias.

Exercícios

1. Mostre que, com a constante cosmológica, é possível obter-se uma solução estática para o universo: o “universo de Einstein”. Como Λ se relaciona com ρ ? Em termos de curvatura, que tipo de universo é esse? Qual é seu “raio”?
2. Um quasar em $z = 1$ varia com uma escala de tempo observada de 1 ano. Qual é a escala de tempo de variabilidade no referencial do quasar? Esse resultado depende do modelo cosmológico?
3. Suponha que $k = 0$ e $\Lambda = 0$. Calcule $H(t)$ para um universo dominado apenas por radiação e apenas por matéria.
4. Prove a equação 12.
5. Suponha que a densidade de energia e a pressão estão relacionadas como $p = w\rho c^2$, com w constante. Mostre que $\rho \propto R^{-3(1+w)}$.
6. Mostre que, se $k = 0$ e $p = w\rho c^2$, com w constante, então $R \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$.
7. Mostre que $\eta \simeq 2.74 \times 10^{-8} (T/2.73\text{K})^{-3} \Omega_b h^2$ (eq. 28).

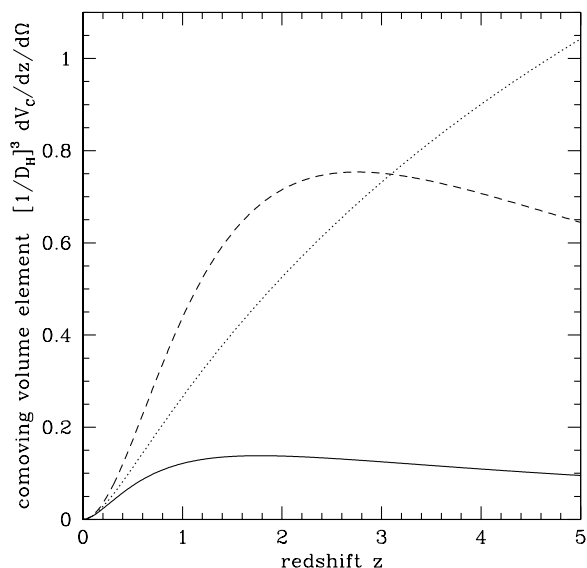


Figure 18: Elemento de volume comóvel normalizado, $(1/d_H)^3(dV_c/dz)$, em função do redshift para três modelos de mundo: $(\Omega_m, \Omega_\lambda) = (1, 0)$, linha sólida; $(0.05, 0)$, pontilhada; $(0.2, 0.8)$, tracejada.

8. Prove a equação 29. Calcule a temperatura da radiação nessa época e na época da recombinação.
9. Suponha que o modelo de Einstein-de Sitter esteja correto e que os aglomerados globulares tenham pelo menos 12 Ganos. O que voce diria sobre H_0 ?
10. Calcule t_l e $t(z)$ para o modelo de Einstein-de Sitter. Verifique, em termos do tempo de Hubble, o valor dessas quantidades em $z = 1$ e $z = 15$.
11. Mostre que

$$t(z) = \frac{2}{3} \tau_H \Omega_{\lambda 0}^{-1/2} \operatorname{arcsinh} \left[\left(\frac{\Omega_{\lambda 0}}{\Omega_{m 0} (1+z)^3} \right)^{1/2} \right]$$

é a idade do universo num redshift z para um universo de curvatura nula com matéria e constante cosmológica. Verifique, em termos do tempo de Hubble, o valor dessa quantidade em $z = 1$ e $z = 15$. Compare com Einstein-de Sitter.

12. Friaça, Alcaniz & Lima (2005) estudaram o quasar APM08279+5255, em $z = 3.91$. A razão de abundância Fe/O observada é 3.3 em unidades solares. Usando um modelo de evolução químico-dinâmico do quasar, concluem que sua idade é $t_q = 2.1$ Ganos. Discuta as implicações disso para a constante de Hubble, supondo um universo plano com $\Omega_{m 0} = 0.3$ e $\Omega_{\lambda 0} = 0.7$.
13. Use a relação de Mattig para obter uma aproximação para D_l no caso $z \ll 1$. Discuta como D_l é afetado por $\Omega_{m 0}$.
14. Mostre que num universo de Einstein-de Sitter, o diâmetro aparente em função do redshift tem um mínimo. Determine o redshift onde isso ocorre.

15. Use Einstein-de Sitter para estimar a quanto corresponde, em minutos de arco, um diâmetro de 1Mpc em z igual a 0.5, 1., 1.5 e 2.
16. Faça um programa para reproduzir as figuras 14, 16 e 17.

9 Referências

- Hinshaw, G. et al., 2008, arXiv:0803.0732
Hogg, D.W., 1999, astro-ph/9905116
Kneller, J.P., Steigman, G., 2004, astro-ph/0406320
Peacock, J.A., 1999, *Cosmological Physics*, CUP
Steigman, G., 2007, arXiv:0712.1100