

Cosmologia Básica:

3 - a dinâmica do universo

Laerte Sodré Jr.

August 16, 2011

Equações de Friedmann - Lemaître

- ▶ Na TRG, as equações que descrevem a evolução de universos que obedecem o PC são as *Equações de Friedmann - Lemaître* (EFL):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)$$

onde $K = k/R_0^2$

$p(t)$, $\rho(t)$ são a pressão e a densidade da matéria e energia

- ▶ dessas equações vem que:

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -\frac{p}{c^2} \frac{d}{dt}(a^3)$$

A equação de estado

- ▶ pelas equações de Friedmann - Lemaître, para se determinar $a(t)$ é preciso conhecer $\rho(t)$ e $p(t)$
- ▶ a equação de estado é a relação entre a pressão e a densidade:
 $p = p(\rho)$
- ▶ exemplos de equação de estado:
 - ▶ “poeira”: $p = 0$
 - ▶ radiação : $p = \rho_r c^2 / 3$
 - ▶ vácuo: $p = -\rho_v c^2$ (pressão negativa, constante),
 $\rho_v = \Lambda / (4\pi G)$
 - ▶ modelo simples para energia escura: $p = w\rho c^2$, com w constante e negativo
- ▶ diferentes equações de estado levam a diferentes comportamentos para $a(t)$

A equação de estado

- ▶ com a relação

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -\frac{p}{c^2} \frac{d}{dt}(a^3)$$

pode-se obter uma relação entre ρ e a :

- ▶ “poeira” ($p = 0$): $\rho_m \propto a^{-3}$
- ▶ radiação ($p = \rho_r c^2/3$): $\rho_r \propto a^{-4}$
- ▶ vácuo: ($p = -\rho_v c^2$), $\rho_v = \Lambda/(4\pi G)$
- ▶ energia escura (com $p = w\rho c^2$ e w constante e negativo):
 $\rho_{DE} \propto a^{-3(1+w)}$

A constante cosmológica

- ▶ vamos considerar um modelo de universo onde, além de matéria e radiação (com densidade e pressão ρ e p), tem também uma constante cosmológica Λ
- ▶ a constante cosmológica tem uma equação de estado com *pressão negativa* $p_v = -\rho_v c^2$, onde $\Lambda \equiv 4\pi G \rho_v$
- ▶ nesse caso, as equações de Friedmann - Lemaître ficam:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3}$$

- ▶ note que, se p e ρ são positivos, não existe solução estática das EFL sem constante cosmológica

A constante cosmológica

- ▶ proposta por Einstein (1919) para se obter uma solução cosmológica estática (isto é, um modelo de universo independente do tempo; a lei de Hubble só seria descoberta em 1929)
- ▶ Einstein: “o maior erro de sua vida”
- ▶ hoje: a constante cosmológica é um tipo de “energia escura”
- ▶ “energia escura”: a misteriosa componente responsável pela aceleração do universo
- ▶ Λ é associada à “energia do vácuo”

A energia escura

- ▶ a equação de estado da energia escura é $p = w\rho c^2$, e a constante cosmológica corresponde a $w = -1$
- ▶ mas w pode não ser constante e pode depender do desvio espectral z
- ▶ modelos simples:

$$w = w_0 + w_a z$$

ou

$$w = w_0 + w_a[1 - a(z)] = w_0 + w_a \frac{z}{1+z},$$

com w_0 e w_a constantes

- ▶ este tipo de modelo deverá ser testado nos *surveys* dos próximos anos

Parâmetros cosmológicos

Vamos agora definir alguns parâmetros cosmológicos:

- ▶ parâmetro de Hubble:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$$

- ▶ parâmetro de densidade:

$$\Omega = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}$$

onde

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

é a densidade crítica

- ▶ Quando se tem várias espécies simultaneamente, pode-se definir um parâmetro de densidade para cada espécie,

$$\Omega_i = \rho_i(t)/\rho_c(t)$$

Por exemplo, para os bárions:

$$\Omega_b = \frac{\rho_b(t)}{\rho_c(t)}$$

Parâmetros cosmológicos

- ▶ parâmetro de densidade do vácuo (ou constante cosmológica):

$$\Omega_\lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$$

- ▶ parâmetro de curvatura:

$$\Omega_k \equiv -\frac{kc^2}{H^2 R^2}$$

- ▶ parâmetro de desaceleração:

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}$$

- ▶ todos esses parâmetros dependem do tempo

- ▶ valores atuais desses parâmetros, de acordo com a equipe do WMAP (Hinshaw et al. 2008; assumindo $\Omega_k = 0$):
 - ▶ $H_0 = 70.1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
 - ▶ $\rho_{c,0} = 1.88 \times 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3} = 9.2 \times 10^{-30} \text{ g cm}^{-3}$
 - ▶ $\Omega_{m,0} = 0.28$
 - ▶ $\Omega_\lambda = 0.72$
 - ▶ $\Omega_{b,0} = 0.0462$

- ▶ modelos de Friedmann: dominados pela matéria ($\rho = \rho_m$), com constante cosmológica e pressão nulas
- ▶ nesse caso, $q = \Omega/2$
- ▶ 3 soluções possíveis:
 - ▶ se $q > \frac{1}{2}$ ou $\Omega > 1$, então $k = +1$
universo fechado e oscilante
 - ▶ se $q = \frac{1}{2}$ ou $\Omega = 1$, então $k = 0$
universo aberto em expansão perpétua
 - ▶ se $q < \frac{1}{2}$ ou $\Omega < 1$, então $k = -1$
universo aberto em expansão perpétua

Dinâmica dos universos de Friedmann

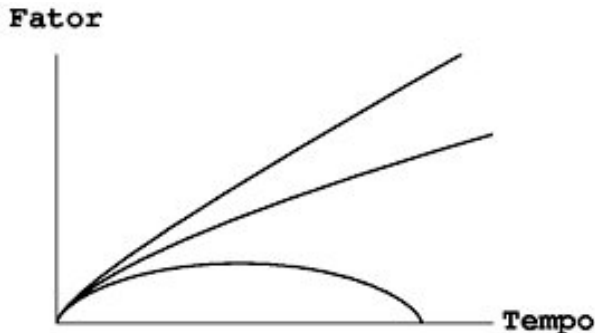


Figura 6. Fator de escala nos modelos de Einstein-de Sitter (a curva do meio), de Friedmann esférico (em baixo) e Friedmann hiperbólico (no topo).

Figure: Evolução do fator de escala nos modelos de Friedmann: (i) $k=-1$; (ii) $k=0$; (iii) $k=+1$.

Exemplo: o modelo de Einstein-de Sitter

- ▶ modelo cosmológico muito simples: universo “plano”, apenas com matéria: $k = 0$, $\Lambda = 0$, $p = 0$ $\rho = \rho_m = \rho_0 a^{-3}$
- ▶ a primeira das EFL fica:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 a^{-3}$$

- ▶ esta equação é fácil de resolver e dá

$$a(t) = (6\pi G\rho_0)^{1/3} t^{2/3}$$

- ▶ logo,

$$\rho(t) = \frac{1}{6\pi G t^2}$$

$$H(t) = \frac{2}{3t}$$

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{1}{6\pi G t^2} = \rho(t) \quad \longrightarrow \quad \Omega = 1$$

1. Suponha que $k = 0$ e $\Lambda = 0$. Calcule $H(t)$ para um universo dominado apenas por radiação .
2. Suponha que a densidade de energia e a pressão estão relacionadas como $p = w\rho c^2$, com w constante. Mostre que $\rho \propto a^{-3(1+w)}$.
3. Mostre que, se $k = 0$ e $p = w\rho c^2$, com w constante, então $a \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$.