Cosmologia Básica: 2 - as equações de Friedmann-Lemaitre

Laerte Sodré Jr.

August 15, 2011

Cosmologia Relativística

- equações de Einstein: estabelecem uma relação entre a geometria do espaço-tempo e a distribuição de matéria e energia

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

- a geometria é caracterizada pelo tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, que depende dos coeficientes da métrica e de suas derivadas até segunda ordem
- a distribuição de matéria e energia é descrita pelo tensor de momentum-energia $T_{\mu\nu}$

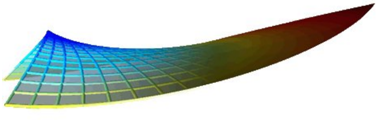
Métrica e curvatura de superfícies

vamos exemplificar com superfícies bi-dimensionais:

- métrica: distância entre dois pontos vizinhos, num dado sistema de coordenadas
- por exemplo, numa superfície plana

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 = ...$$

(em coordenadas cartesianas, polares, ...)

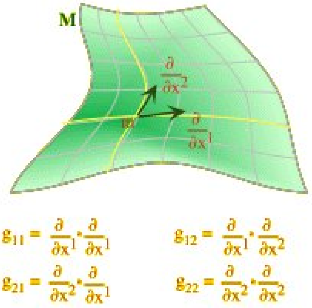


Métrica e curvatura de superfícies

- coordenadas (x_1, x_2) arbitrárias:

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}(x_1, x_2) dx_i dx_j$$

- g_{ij}: são as componentes do chamado "tensor métrico", que caracteriza a geometria e depende da curvatura



Métrica e curvatura de superfícies

- superfície esférica de raio R:
  superfície de *curvatura constante e positiva*
- coordenadas esféricas:

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

- vamos mudar a coordenada θ para $A = R\sin\theta$:
  nesse caso

$$dA = R\cos\theta d\theta = R\sqrt{1-\sin^2\theta} = R\sqrt{1-\frac{A^2}{R^2}}$$

  e, portanto, a métrica pode ser reescrita como

$$ds^2 = \frac{dA^2}{1-\frac{A^2}{R^2}} + A^2 d\phi^2$$

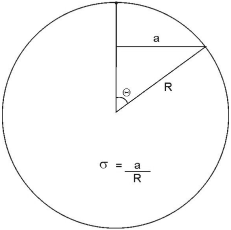
Métrica e curvatura de superfícies

- superfície esférica de raio R:

$$ds^2 = \frac{dA^2}{1 - \frac{A^2}{R^2}} + A^2 d\phi^2$$

- introduzindo a coordenada comóvel $\sigma = A/R$, a métrica fica:

$$ds^2 = R^2 \left[\frac{d\sigma^2}{1 - k\sigma^2} + \sigma^2 d\phi^2 \right]$$



- reescrevendo como

$$ds^2 = R^2 \left[\frac{d\sigma^2}{1 - k\sigma^2} + \sigma^2 d\phi^2 \right]$$

vale para qualquer superfície de curvatura constante!

- $k = 0$: plano;
- $k = +1$: superfície esférica
- $k = -1$ superfície de curvatura constante negativa não "cabe" num espaço tri-dimensional, mas podemos projetá-la sobre um plano

Métrica e curvatura de superfícies

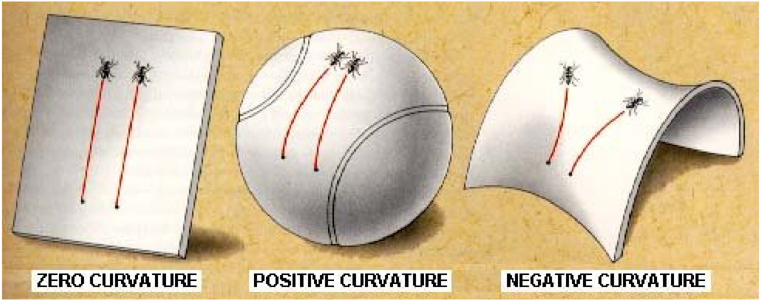


Figure: Superfícies de curvatura nula, positiva e negativa.

Métrica e curvatura de superfícies

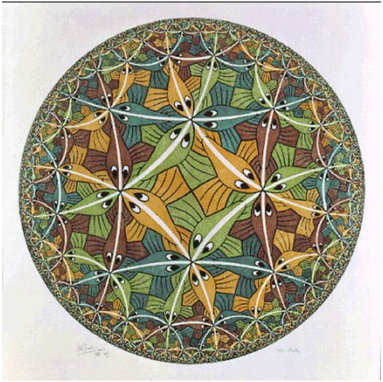


Figure: Obra de Escher, representando a projeção de uma superfície de curvatura negativa constante sobre um plano.

A métrica de Minkowski

- Teoria da Relatividade Restrita: métrica de Minkowski,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

separação entre dois eventos (pontos no espaço-tempo, ET) próximos

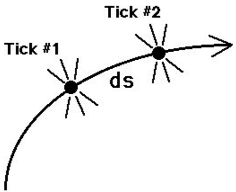
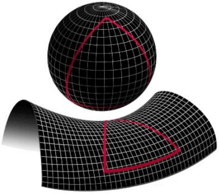


Figure 1. Trajectory of a stone through space. The stone wears a wristwatch that emits two flashes as it ticks sequentially at #1 and #2, an incremental distance ds apart and time separation dt as measured in this frame.

A métrica de Robertson-Walker (MRW)

- TRG: distribuição arbitrária de matéria pode levar a um espaço de curvatura arbitrária
- PC: o espaço deve ter curvatura constante
- nesse caso temos a métrica de Robertson-Walker:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{d\sigma^2}{1 - k\sigma^2} + \sigma^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]$$



A métrica de Robertson-Walker

- MRW:

$$ds^2 = c^2dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{d\sigma^2}{1 - k\sigma^2} + \sigma^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]$$

  - t: tempo
  - $R(t)$: fator de escala
  - σ, θ, ϕ: coordenadas comóveis
  - k: "sinal da curvatura" (-1, 0, +1)
- $R(t)$ determina como a distância entre 2 observadores comóveis varia com o tempo
- observadores comóveis: em repouso em um sistema de coordenadas comóveis

A métrica de Robertson-Walker

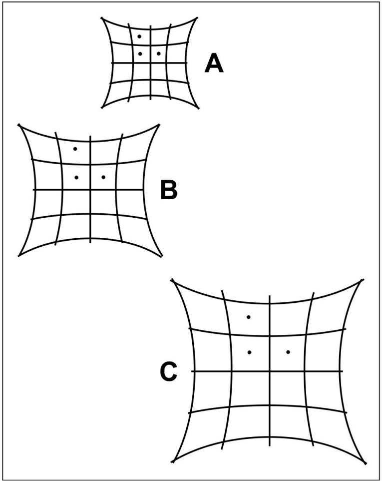
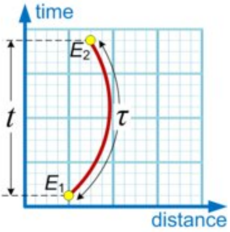


Figure: Coordenadas comóveis.

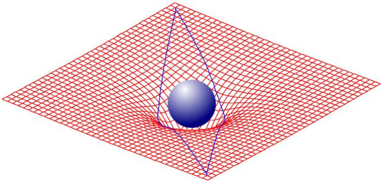
A métrica de Robertson-Walker

- tempo próprio τ: $ds \equiv cd\tau$
- observador comóvel:
  $d\sigma = d\theta = d\phi = 0 \longrightarrow ds = cdt \longrightarrow dt = d\tau$
  o tempo t é o tempo próprio dos observadores comóveis



A métrica de Robertson-Walker

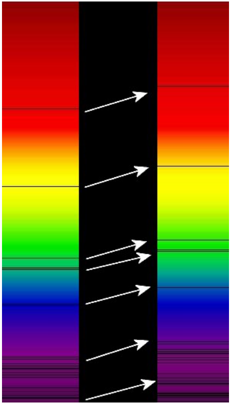
- TRG: as trajetórias das partículas livres são geodésicas no ET
- Geodésicas: linhas de comprimento mínimo (ou máximo) entre 2 eventos no ET
- a luz segue "geodésicas nulas", $ds^2 = 0$, enquanto que partículas com massa seguem trajetórias *time-like*: $ds^2 > 0$



O desvio espectral

- desvio espectral observado no espectro das galáxias: uma medida direta da expansão do universo

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{1}{a(t)} - 1$$



O desvio espectral

- coordenadas comóveis:
  - observador O: na origem - $(\sigma_G, \theta_G, \phi_G) = (0, 0, 0)$
  - galáxia G: $(\sigma_G, \theta_G, \phi_G) = (\sigma_G, 0, 0)$
- t_0: o observador recebe um fóton que foi emitido por G no tempo t
- $t_0 + \Delta t_0$: o observador recebe um outro fóton que foi emitido por G no tempo $t + \Delta t$

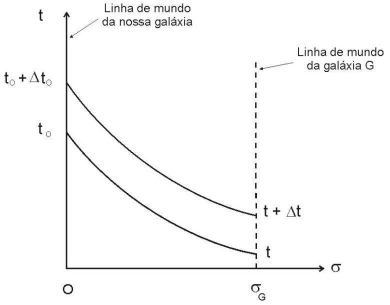


Figure: Linhas de mundo de fótons emitidos por uma galáxia G.

O desvio espectral

- como a luz viaja por geodésicas nulas ($ds^2 = 0$):

$$c\frac{dt}{R(t)} = \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}}$$

e, portanto,

$$\int_0^{\sigma_G} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}} = c\int_t^{t_0} \frac{dt}{R(t)}$$

- para o segundo fóton emitido em $t + \Delta t$ e recebido em $t_0 + \Delta t_0$:

$$\int_0^{\sigma_G} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}} = c\int_{t+\Delta t}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{R(t)}.$$

- logo,

$$\int_t^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t+\Delta t}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{R(t)}$$

O desvio espectral

- vamos supor que Δt e Δt_0 são muito menores que t e t_0:

$$\frac{\Delta t}{R(t)} \simeq \frac{\Delta t_0}{R(t_0)}$$

- vamos associar a Δt e Δt_0 o período da radiação emitida e recebida
- os comprimentos de onda correspondentes são $\lambda_e = c\Delta t$ e $\lambda_0 = c\Delta t_0$
- Então,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{R(t_0)}{R(t)} = \frac{R_0}{R} = \frac{1}{a(t)}$$

O desvio espectral

- temos

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{R(t_0)}{R(t)} = \frac{R_0}{R} = \frac{1}{a(t)}$$

- desvio espectral:

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}$$

- portanto,

$$a(z) = \frac{R}{R_0} = \frac{1}{1+z}$$

O desvio espectral

- relação entre desvio espectral e fator de escala:

$$1 + z = \frac{1}{a}$$

- z depende apenas da razão entre os fatores de escala quando a luz foi emitida e quando foi recebida e, portanto, é uma medida de quanto o universo se expandiu desde que a luz foi emitida
  Ex.: $z = 1 \longrightarrow a = 1/2$ - as escalas no universo eram metade do que são hoje
- universo em expansão: $R(t_0) > R(t)$ (ou $a < 1$) $\longrightarrow z > 0$ e $\lambda_0 > \lambda_e \longrightarrow$ a radiação sofre redshift
  Hoje ($a = 1$): $z = 0$
  Big-Bang ($a = 0$): $z = \infty$

Equações de Friedmann - Lemaître (EFL)

- as equações de evolução do fator de escala que derivamos na cosmologia newtoniana são, na forma, parecidas com a que se obtém das equações de campo da TRG, com a MRW
- tensor de energia-momentum: depende da distribuição de matéria e energia (densidade e pressão $\rho(t)$ e $p(t)$) (note que na TRG p contribui para a energia!)
- as equações de evolução do fator de escala na cosmologia relativística para universos que obedecem o PC são as Equações de Friedmann - Lemaître

Equações de Friedmann - Lemaître

- Equações de Friedmann - Lemaître (EFL):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)$$

$K = k/R_0^2$

- dessas equações vem que:

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -\frac{p}{c^2}\frac{d}{dt}(a^3)$$

Exercícios

1. Compare as equações de Friedmann - Lemaître com as da cosmologia newtoniana. Entenda a razão das diferenças.
2. Mostre que, com a constante cosmológica, é possível obter-se uma solução estática para o universo: o "universo de Einstein". Como Λ se relaciona com ρ? Em termos de curvatura, que tipo de universo é esse? Qual é seu "raio"?
3. Um quasar em $z = 1$ varia com uma escala de tempo observada de 1 ano. Qual é a escala de tempo de variabilidade no referencial do quasar? Esse resultado depende do modelo cosmológico?
4. Mostre que
$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -\frac{p}{c^2}\frac{d}{dt}(a^3)$$