Introdução à Cosmologia: 1 - a cosmologia newtoniana

Laerte Sodré Jr.

August 15, 2011

objetivos:

- abordagem rápida dos principais conceitos de cosmologia
- foco no modelo cosmológico padrão
- veremos como interpretar e calcular algumas quantidades importantes

programa:

1. Introdução: a Cosmologia Newtoniana
2. As equações de Friedmann-Lemaitre
3. A dinâmica do universo
4. A era radiativa
5. A evolução das estruturas
6. O modelo ΛCDM
7. Idades, distâncias e volumes

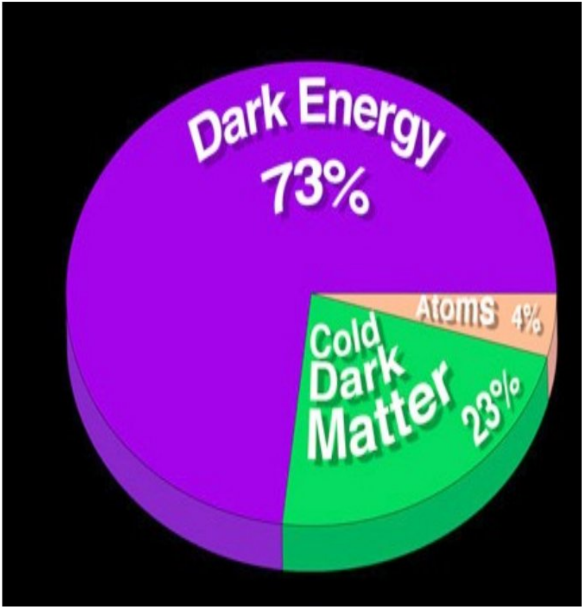


Figure: A composição do universo no modelo ΛCDM.

O modelo de trabalho atual: ΛCDM

- o universo é plano e dominado por energia escura e matéria escura fria (*Cold Dark Matter*)
- a matéria bariônica constribui com apenas ∼4% do conteudo de matéria e energia do universo
- a constante cosmológica Λ é a forma mais simples de energia escura
- a energia escura é necessária para explicar a *aceleração* do universo, descoberta a partir da observação de supernovas distantes

O modelo de trabalho atual: ΛCDM

- a matéria escura fria (CDM) explica as galáxias e as estruturas em grandes escalas
- CDM- principais propriedades:
  - ela é escura, não interage com os fótons
  - ela só interage gravitacionalmente
  - ela é não-bariônica
  - ela é fria
  - ela é estável
    (algumas dessas propriedades podem ser relaxadas...)

A Teoria da Gravitação

- Teoria da Relatividade Geral (TRG) (Einstein, 1915)
- Porquê a gravitação ?
  - em grandes escalas é a gravitação que determina a dinâmica dos objetos no universo
  - apenas as interações gravitacionais e eletromagnéticas são de longo alcance
  - como a matéria é em média eletricamente neutra, em grandes distâncias apenas a gravitação é cosmologicamente relevante

Fundamental Forces

		Strength	Range (m)	Particle
Strong	Force which holds nucleus togeher	1	10^{-15} (diameter of a medium sized nucleus)	gluons, π(nucleons)
Electro-magnetic		$\frac{1}{137}$	Infinite	photon mass = 0 spin = 1
Weak	neutrino interaction induces beta decay	10^{-6}	10^{-18} (0.1% of the diameter of a proton)	Intermediate vector bosons W^{+}, W^{-}, Z_0, mass > 80 GeV spin =1
Gravity		6×10^{-39}	Infinite	graviton ? mass = 0 spin = 2

A Teoria da Gravitação

- TRG: matéria+energia determinam a geometria do ET
- equações de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

  - $G_{\mu\nu}$: tensor de Einstein- depende da geometria do espaço-tempo através de $g_{\mu\nu}$, o tensor métrico
  - $T_{\mu\nu}$: o tensor de energia-momentum- depende da distribuição de matéria+energia
  - lado esquerdo: depende apenas da geometria
  - lado direito: distribuição de matéria+energia
  - *a distribuição de matéria e energia pode distorcer a geometria*

A Teoria da Gravitação

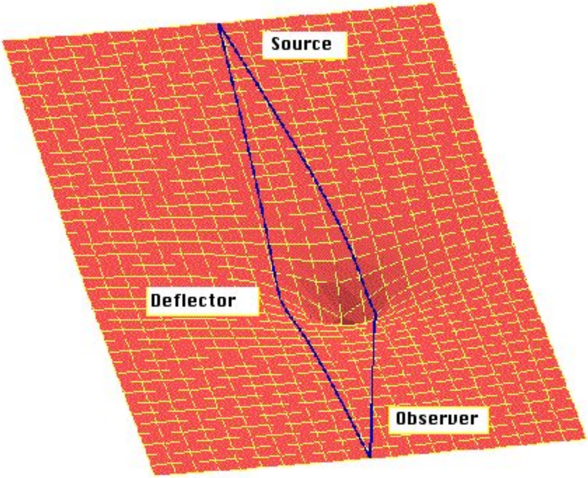


Figure: A matéria distorce o espaço-tempo, como neste exemplo de lente gravitacional.

- testes da TRG:
  - sistema solar; pulsar binário; lentes gravitacionais
  - mal testada no limite de campos fortes (como buracos negros) ou muito fracos (halo das galáxias)
- limitação da TRG: não incorpora efeitos quânticos
  - incompleta em escalas menores que a escala de Planck:

$$r_{Pl} = \left(\frac{G\hbar}{c^3}\right)^{1/2} = 1.62 \times 10^{-33}\ \mathrm{cm}.$$

  - ou antes do tempo de Planck:

$$t_{Pl} = \left(\frac{G\hbar}{c^5}\right)^{1/2} = 5.39 \times 10^{-44}\ \mathrm{s}.$$

  - precisamos de uma teoria quântica da gravitação

O Princípio Cosmológico

- *em escalas suficientemente grandes o universo é homogêneo e isotrópico*
- homogêneo: todos os lugares são equivalentes
- isotrópico: todas as direções são equivalentes
- evidências:
  - em escalas muito grandes (centenas de Mpc), a distribuição de galáxias é bastante uniforme
    (a uniformidade aumenta com a escala)
  - homogeneidade da radiação cósmica de fundo:
    as flutuações de temperatura têm uma amplitude muito pequena

O Princípio Cosmológico

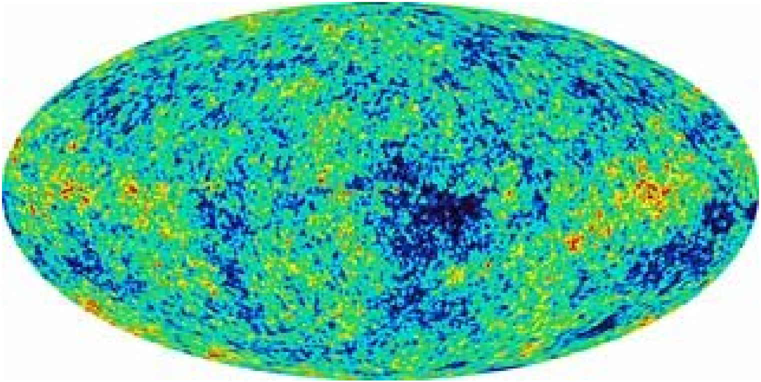


Figure: Mapa com as flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo medida pelo satélite WMAP. Este mapa é notavelmente uniforme; a amplitude média das flutuações é $\sim 10^{-5}$.

A cosmologia newtoniana

- modelo cosmológico baseado na gravitação newtoniana
- as equações que descrevem a dinâmica do universo são muito parecidas com as da Cosmologia Relativística
- modelo proposto por Milne e McCrea em 1934
- problema: aparecem algumas dificuldades conceituais que não são comportadas pela física newtoniana

A cosmologia newtoniana

- vamos supor que o universo é ocupado por um fluido: o **fluido cosmológico**
- as partículas deste fluido seriam, por exemplo, as galáxias
- esse fluido obedece ao Princípio Cosmológico: deve estar em repouso ou em expansão ou contração isotrópica - observamos a expansão
- os observadores que estão localmente em repouso com o fluido, que o acompanham em sua expansão, são chamados de **observadores comóveis**

A cosmologia newtoniana

- para que as leis de Newton sejam válidas, os referenciais usados devem ser inerciais
- suponha que nossa galáxia seja um referencial inercial
- PC: todos os observadores que participam da expansão (os observadores comóveis) têm a mesma visão do universo
- Logo, todos os observadores comóveis são inerciais, embora possam apresentar acelerações entre si!

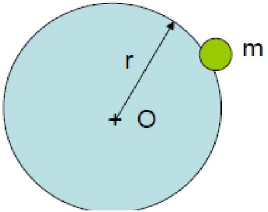
A cosmologia newtoniana

- Cosmologia Newtoniana: o universo deve ser infinito, caso contrário o PC não seria válido (nos bordos, por exemplo)
- mas em um universo infinito e isotrópico, qual é a direção da aceleração gravitacional g?
- lei de Gauss:
  a aceleração da gravidade produzida por uma região esférica homogênea de massa M centrada num ponto O é

$$g = \frac{G}{r^2} \int \rho dV = \frac{GM}{r^2}$$

- se $g = 0$ em todos os lugares, então $\rho = 0$: o único universo que satisfaz o PC é um universo completamente vazio!

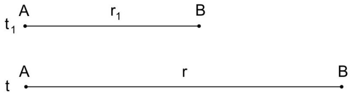
- **Regra de Birkhoff**:
  a velocidade (radial) v de qualquer galáxia vista por um observador em O a uma distância r depende apenas da atração gravitacional das galáxias dentro da esfera de raio r centrada em O
- não tem justificativa na teoria newtoniana, mas permite o desenvolvimento de uma cosmologia newtoniana...



- O fator de escala
  - galáxias A e B: num certo instante t_1 elas estão separadas por uma distância r_1 e, num outro instante t, a separação entre elas é r
  - fator de escala $R(t)$:

$$\mathbf{r} = \frac{R(t)}{R(t_1)}\mathbf{r}_1$$

mede as variações nas escalas produzidas pela expansão (ou contração) do universo.



- lei de Hubble:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{r}_1}{R(t_1)}\frac{dR(t)}{dt} = \frac{R(t)}{R(t_1)}\mathbf{r}_1\frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt}$$

Sendo

$$H(t) = \frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt} = \frac{\dot{R}}{R}$$

temos

$$\mathbf{v} = H(t)\mathbf{r}$$

- nesta formulação, H não é constante, mas uma função do tempo: o *parâmetro de Hubble*
- H mede a *taxa de expansão* no instante t
- t_0: idade do universo; $H_0 = H(t_0)$
- fator de escala normalizado em relação ao valor atual:

$$a(t) = \frac{R(t)}{R(t_0)} \qquad a(t_0) = 1$$

A cosmologia newtoniana

A densidade da matéria

- o fluido cosmológico é não-viscoso:
  caracterizado pelo campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ e pelas distribuições de densidade, $\rho(\mathbf{r}, t)$, e pressão, $p(\mathbf{r}, t)$
- homogeneidade em grande escala (PC): $\rho(\mathbf{r}, t)$ e $p(\mathbf{r}, t)$ devem ser os mesmos para todos os observadores comóveis em um tempo t
  - $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(t)$
  - $p(\mathbf{r}, t) = p(t)$
- na cosmologia newtoniana assumimos $p(t) = 0$:
  os efeitos dinâmicos da pressão da matéria são muito pequenos hoje

- evolução da densidade de matéria com o tempo:
  devido à expansão comóvel, uma certa quantidade de matéria, M, que num instante t_0 ocupava uma esfera de raio r_0, num instante t ocuparia uma esfera de raio r

$$\rho(t_0) = 3M/4\pi r_0^3$$

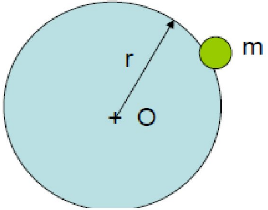
$$\rho(t) = 3M/4\pi r^3$$

  ou $\rho(t) = \rho_0 [r_0/r(t)]^3$
  ou, em termos do fator de escala:

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = \rho_0 \ a(t)^{-3}$$

- regra de Birkhoff: a dinâmica de uma galáxia de massa m, observada a uma distância r de um observador comóvel num ponto O, depende apenas da massa dentro da esfera de raio r centrada em O:

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

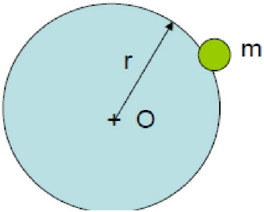


- força de atração gravitacional que essa massa exerce sobre a galáxia:

$$F = m\ddot{r} = -\frac{GmM(r)}{r^2} = -\frac{4\pi}{3}Gm\rho r$$

ou,

$$\ddot{r} = -\frac{4\pi G\rho r}{3}$$



A cosmologia newtoniana

- Introduzindo o fator de escala

$$r = \frac{R(t)}{R_0} r_0 = a(t) r_0$$

vem

$$\ddot{r} = \ddot{a}(t) r_0$$

e temos que

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho a$$

- nessa equação não aparece r: a dinâmica da expansão, descrita pelo fator de escala $a(t)$, é determinada apenas pela densidade de matéria $\rho(t)$
  (na cosmologia relativística depende também da pressão)

A cosmologia newtoniana

Introduzindo a constante cosmológica Λ:

- vamos supor que, além da gravitação newtoniana, também atua uma constante cosmológica Λ , tal que

$$F = m\ddot{r} = -\frac{GmM(r)}{r^2} + \frac{1}{3}\Lambda mr$$

ou,

$$\ddot{r} = -\frac{4\pi G\rho r}{3} + \frac{1}{3}\Lambda r$$

- $\Lambda > 0$ é um tipo de antigravidade
- a força associada a Λ pode ser associada ao potencial ($\mathbf{F} = -\nabla\Phi$)

$$\Phi_\Lambda = -\frac{\Lambda mr^2}{6}$$

A cosmologia newtoniana

- temos que

$$\ddot{r} = -\frac{4\pi G\rho r}{3} + \frac{1}{3}\Lambda r$$

- como $r = r_0\ a$, tmos que

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G\rho a}{3} + \frac{1}{3}\Lambda a$$

Conservação de energia e o futuro da expansão

- a gravitação tende a desacelerar a expansão. Mas será a gravitação suficientemente forte para interromper a expansão e revertê-la?
- newtonianamente, o universo é gravitacionalmente ligado?
- galáxia de massa m a uma distância r de O
  energia total dessa galáxia (que deve se conservar durante a expansão):
  $$E = \frac{1}{2}mv^2 + \Phi = \text{constante}$$
  onde a energia potencial é
  $$\Phi = -\frac{GMm}{r} - \frac{\Lambda m r^2}{6}$$

A cosmologia newtoniana

- galáxia de massa m a uma distância r de O:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} - \frac{\Lambda m r^2}{6} = \text{constante}$$

- $E < 0$: o universo é ligado, e à expansão deve se suceder uma fase de contração
- $E > 0$: o universo não é gravitacionalmente ligado e a expansão será perpétua
- $E = 0$: caso crítico, onde a expansão diminuirá sempre mas sem entrar numa fase de contração

A cosmologia newtoniana

- equação de conservação de energia:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} - \frac{\Lambda m r^2}{6} = \text{constante}$$

como $v = (\dot{a}/a)r$, $M = 4\pi r^3 \rho/3$ e $r = r_0\ a$,

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t)a^2 - \frac{\Lambda a^2}{3} - K$$

onde K é uma constante

A cosmologia newtoniana

- resumo: equações dinâmicas básicas da cosmologia newtoniana:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G\rho a}{3} + \frac{1}{3}\Lambda a$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t)a^2 - \frac{\Lambda a^2}{3} - K$$

A densidade crítica

- vamos supor que $E = 0$ e $\Lambda = 0$. Nesse caso,

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r}$$

ou

$$\frac{H^2 r^2}{2} = \frac{G}{r} \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3$$

ou

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

- **densidade crítica** ρ_c: a densidade que o universo deveria ter para que $E = 0$ se $\Lambda = 0$:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.88 \times 10^{-29} h^2 \mathrm{g\ cm}^{-3}$$

onde $h \equiv H_0/(100\ \mathrm{km/s/Mpc})$

Exercícios

1. A densidade de Planck é definida como

$$\rho_{Pl} = \left(\frac{c^5}{\hbar G^2}\right) = 5.16 \times 10^{93}\ \mathrm{g\ cm}^{-3}.$$

   Quanto vale a densidade de Planck em termos da densidade crítica?

2. Mostre que com $\Lambda = 0$ o universo não pode ser acelerado.