

# Cap. 16: Remanescentes degenerados de Estrelas

16.1 A descoberta de Sirius B

16.2 Anãs brancas

16.3 A física da matéria degenerada

16.4 O limite de Chandrasekhar



<http://beyondearthlyskies.blogspot.com/2015/12/the-hottest-white-dwarfs-in-galaxy.htm>



# A descoberta de Sirius B



Friedrich Bessel

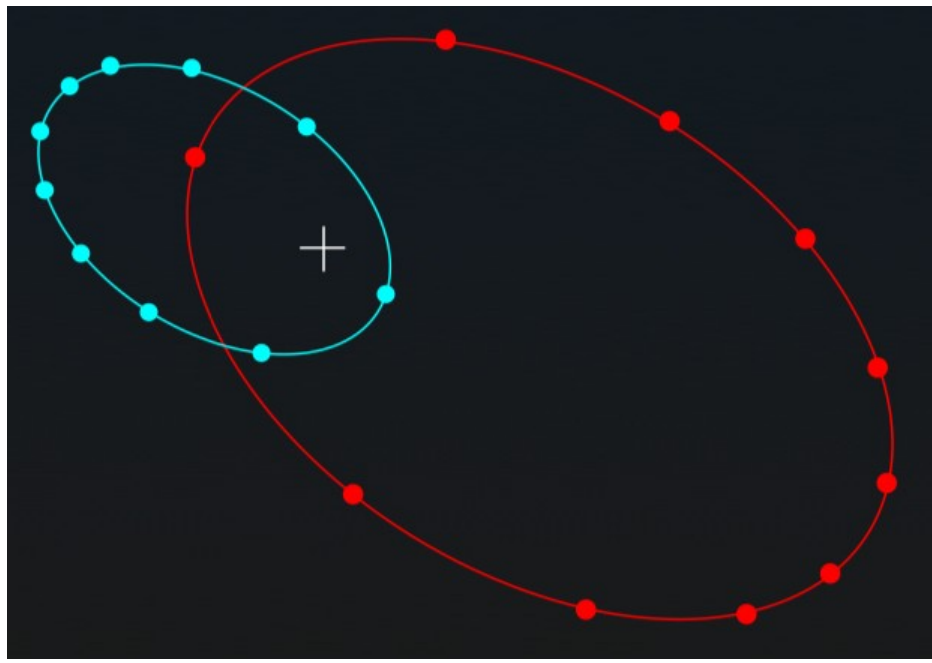
1838: paralaxe

61 Cyg

10 anos de pesquisa (1834 - 1844) → Sirius é binária com período de 50 anos

Morreu 16/3/1846 sem conseguir observar Sirius B

Motions of Sirius A and B (binary star system)

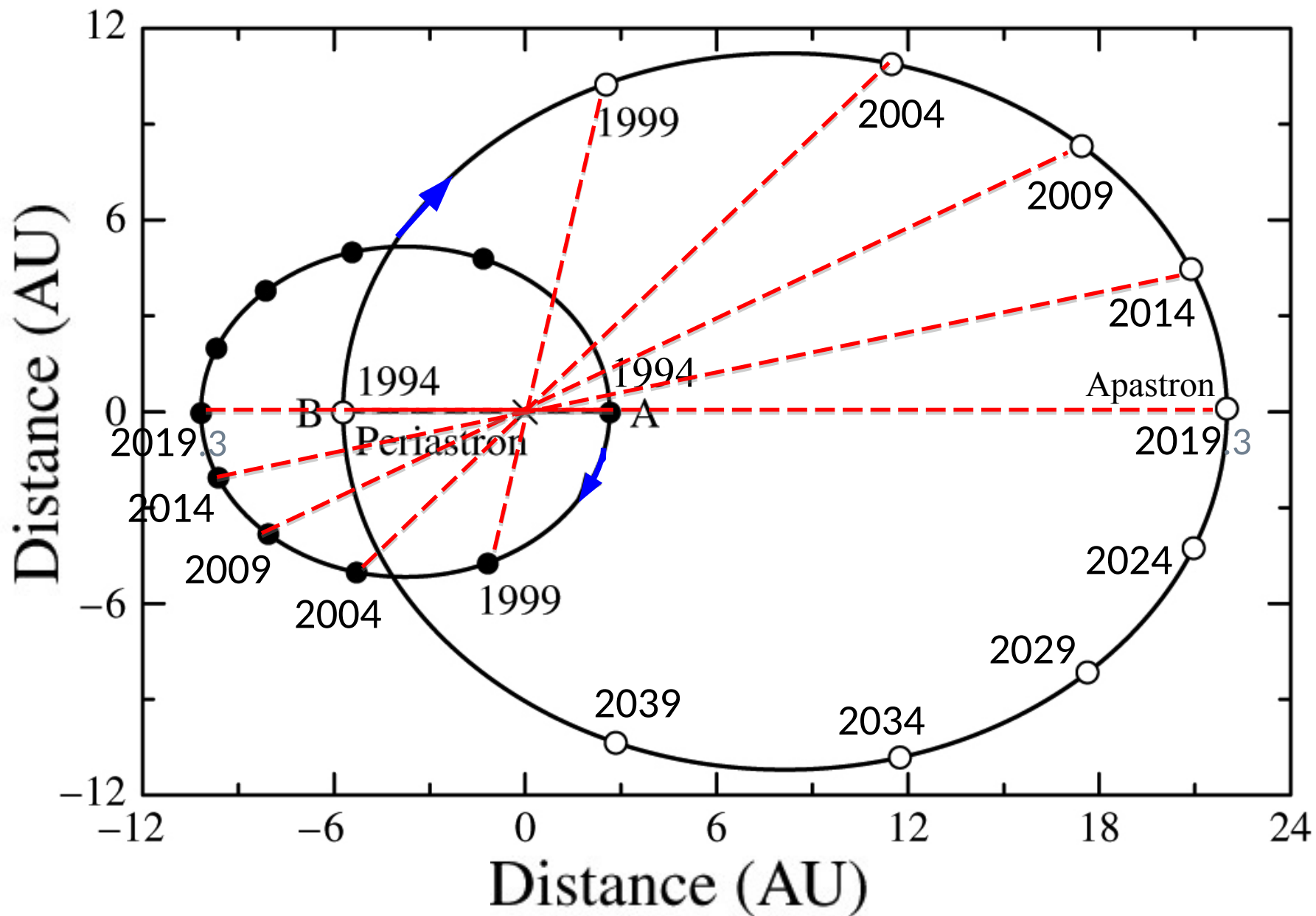


Alvan Graham Clark (1832-1897) testou em 31 Jan 1862 um novo refrator de 47 cm, o maior da época, e fez a primeira observação de Sirius B (separação 10")



Dearborn Observatory





**FIGURE 16.2** The orbits of Sirius A and Sirius B. The center of mass of the system is marked with an “x.”





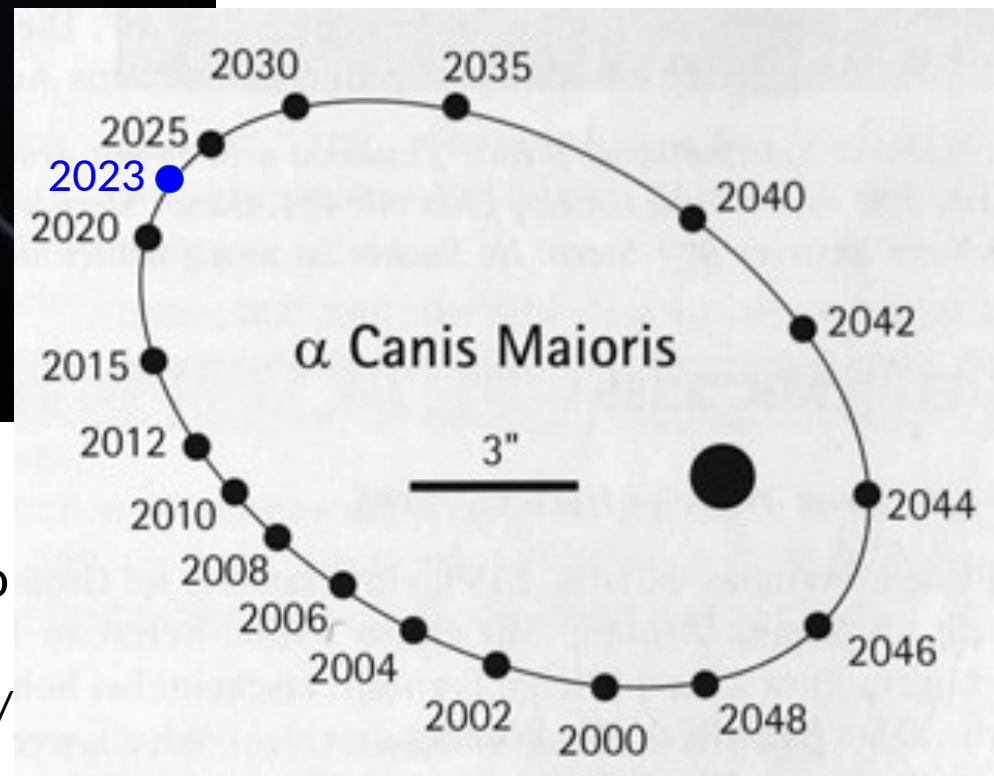
Massa (A) =  $2,06 M_{\odot}$

Massa (B) =  $1,02 M_{\odot}$

Luminosidade [visível]

L (Sirius A) =  $24,7 L_{\odot}$

L (Sirius B) =  $0,024 L_{\odot}$

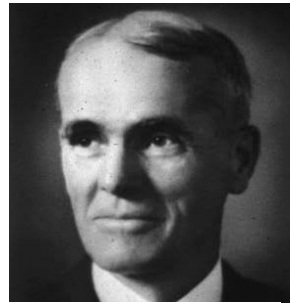


11/3/2017

Gabriela e Fábio Carvalho, Observatório OTUS, interior de São Paulo.

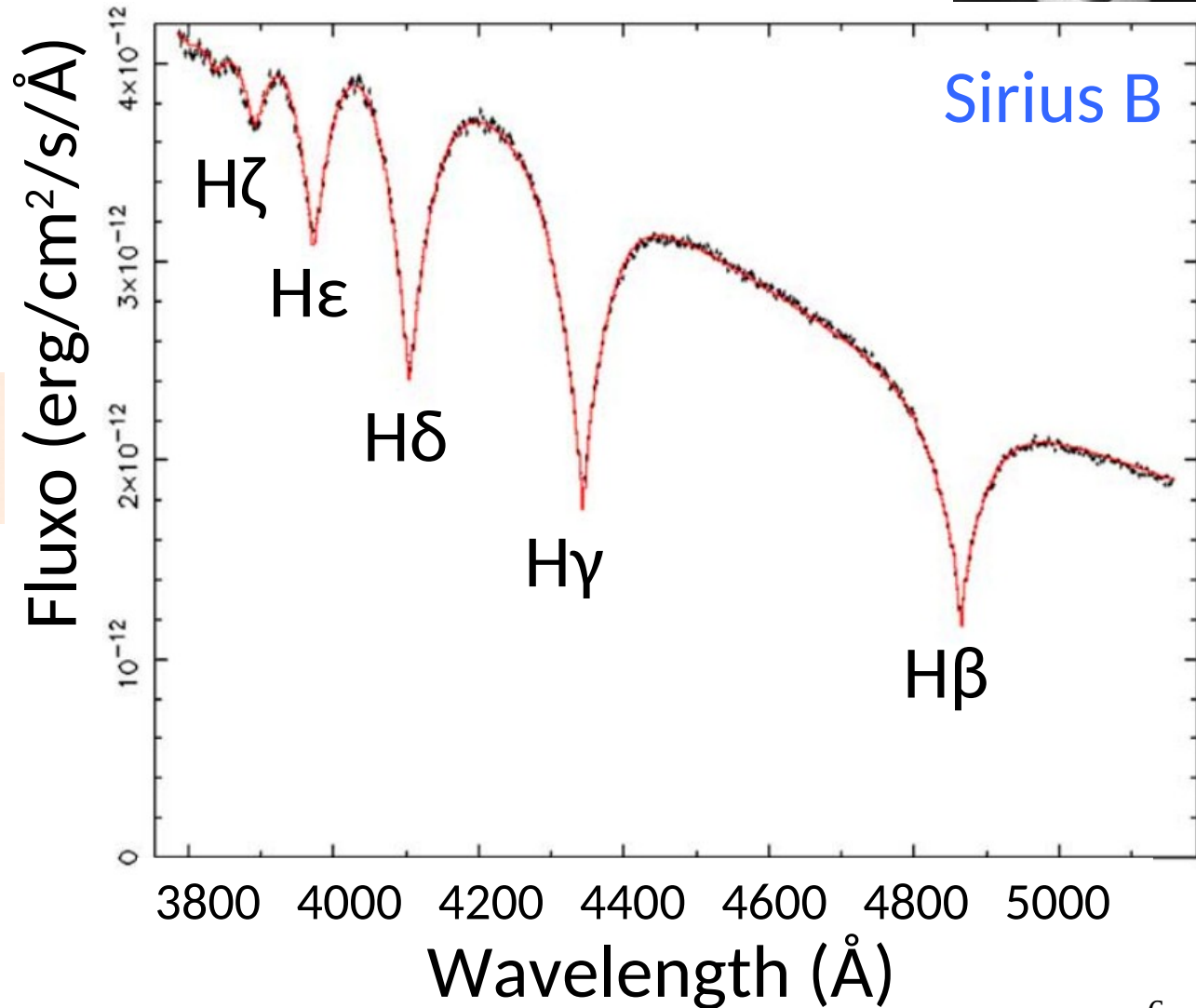
<https://www.facebook.com/observatoriootus/>

Na passagem perto do apastro em 1915, Walter Sydney Adams obteve um espectro de Sirius B, determinando que é uma estrela quente.



$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4$$

Anãs brancas  
(Willy Luyten, 1922)



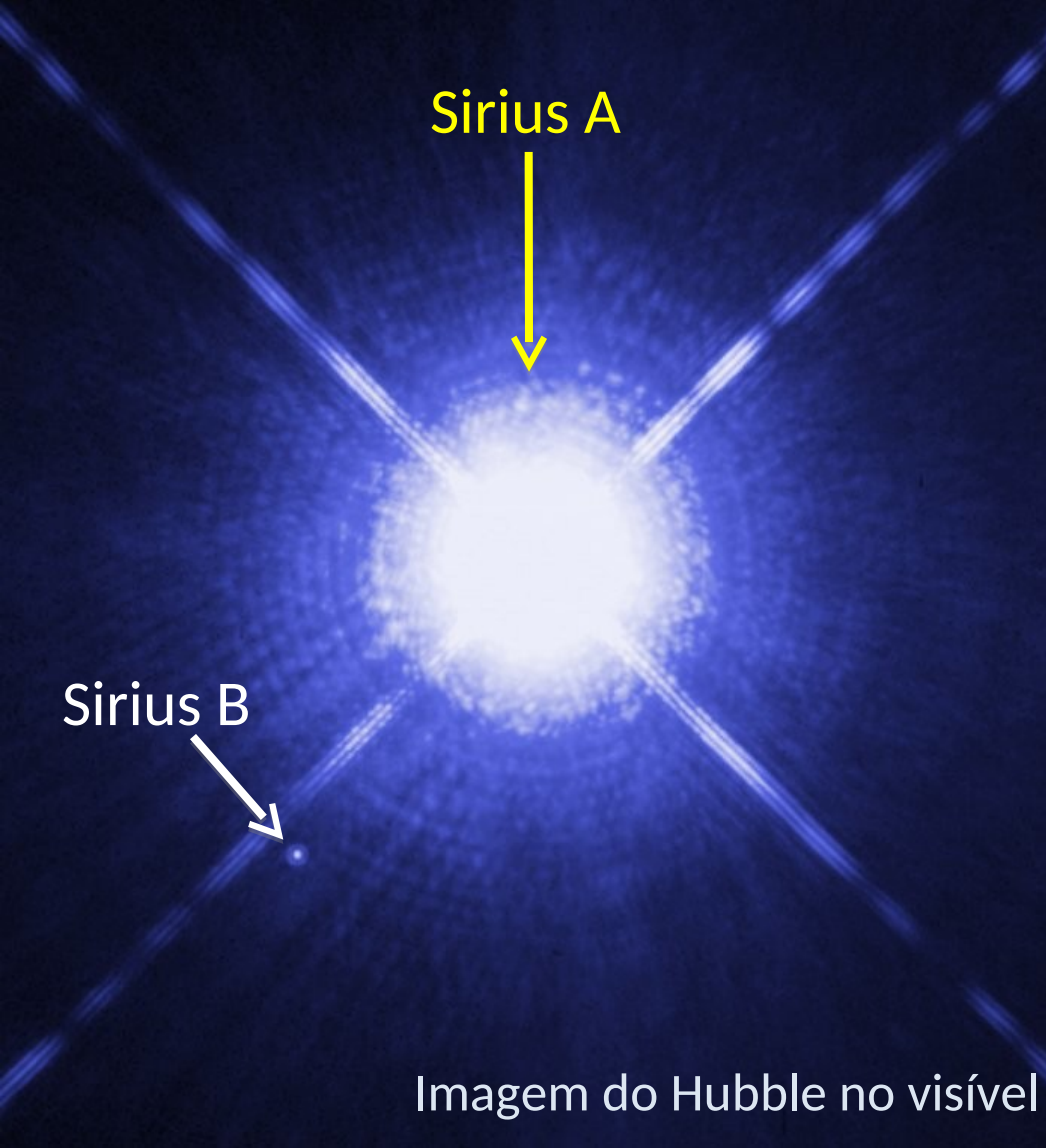


Imagem do Hubble no visível

### Hubble in the optical

<https://www.spacetelescope.org/images/heic0516a/>

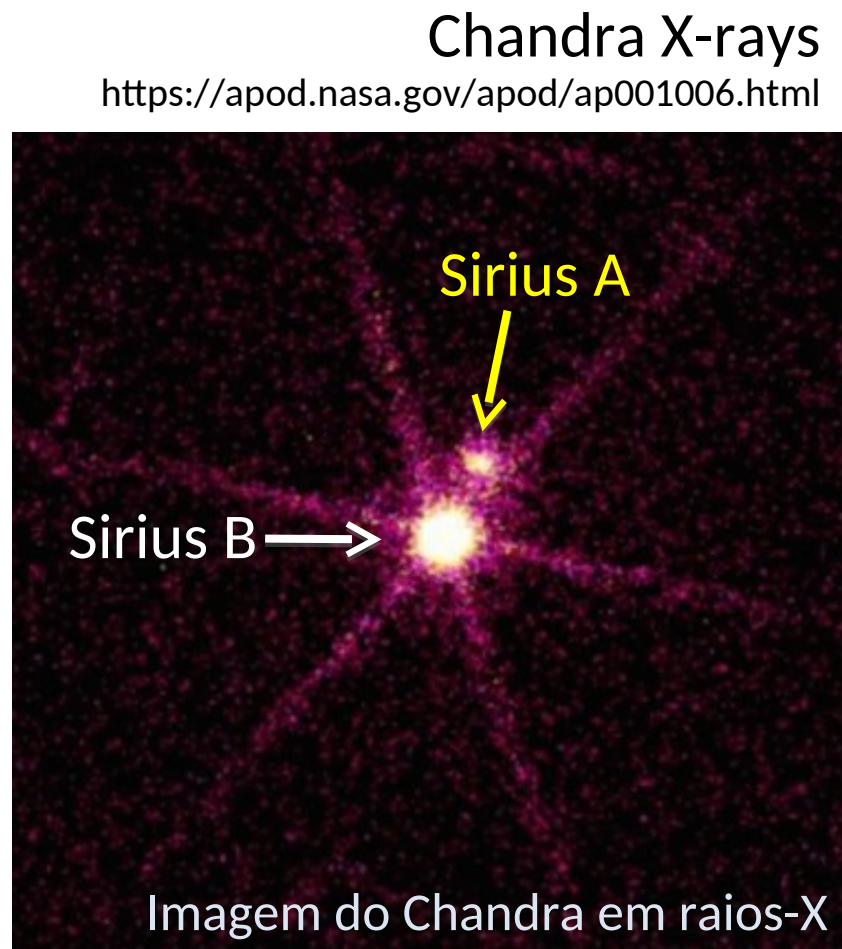
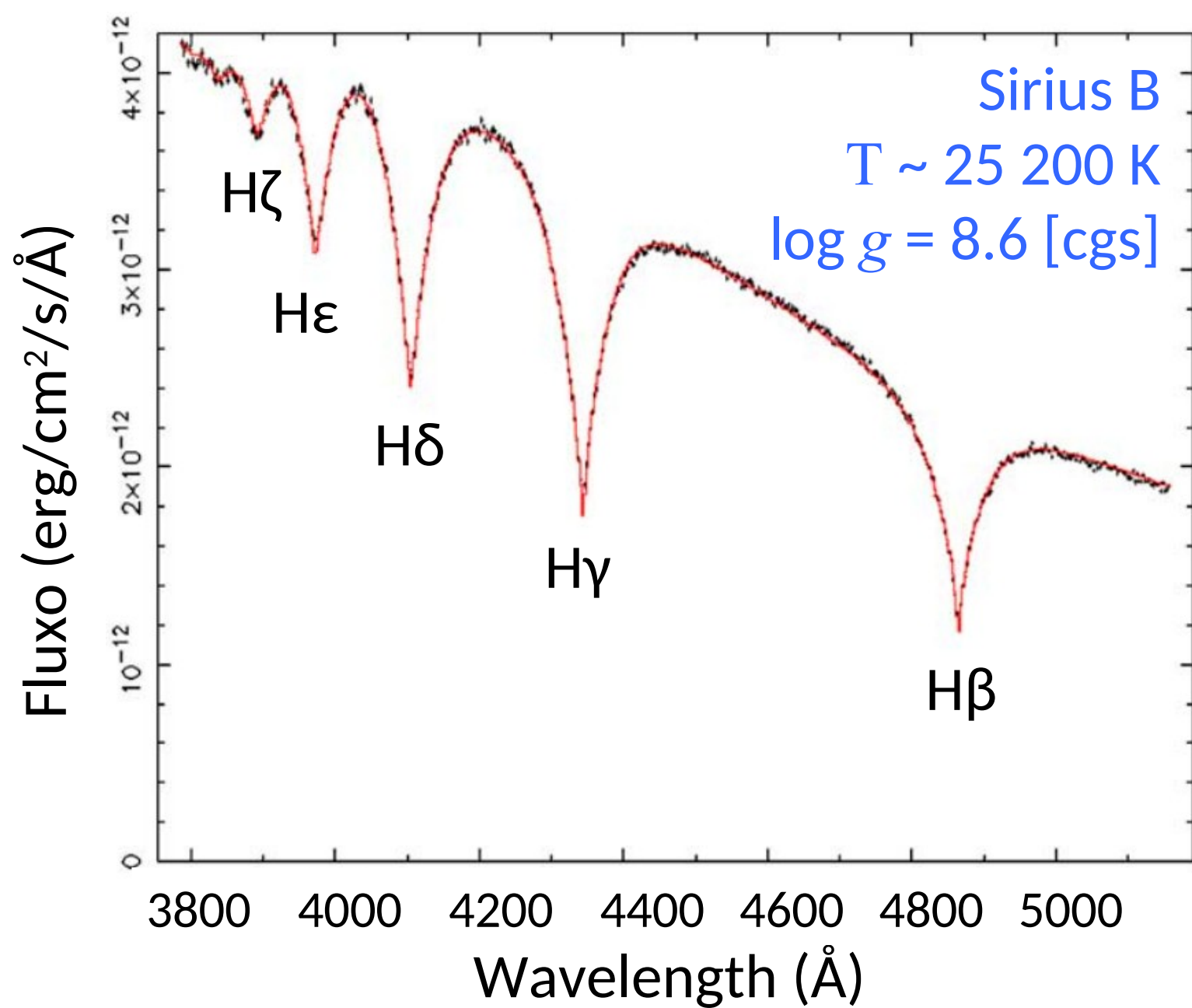


Imagem do Chandra em raios-X



**Figure 5.** Section of the G430L Sirius B spectrum spanning the wavelength range 3800–5200 Å (small black crosses, size indicating the statistical errors) with the best-fitting synthetic spectrum (smooth curve – red on-line) corresponding to  $T_{\text{eff}} = 25\,193\text{ K}$  and  $\log g = 8.556$ .



	Sirius A	Sirius B
Massas	2,06 $M_{\odot}$	1,02 $M_{\odot}$
Luminosidade	24,7 $L_{\odot}$	0,024 $L_{\odot}$
<b>Temperatura</b>	<b>9850 K</b>	<b>25 400 K</b>
Raio	1,71 $R_{\odot}$	0,008 $R_{\odot}$

(progenitora de 5  $M_{\odot}$ )  
 Howard E. Bond et al. 2017,  
 ApJ, 840, 70

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4$$

## Planeta Terra

R: 6371 km

M:  $6 \times 10^{24}$  kg

$\rho$ :  $5,5 \times 10^3$  kg  $m^{-3}$

g:  $9,8$  m  $s^{-2}$



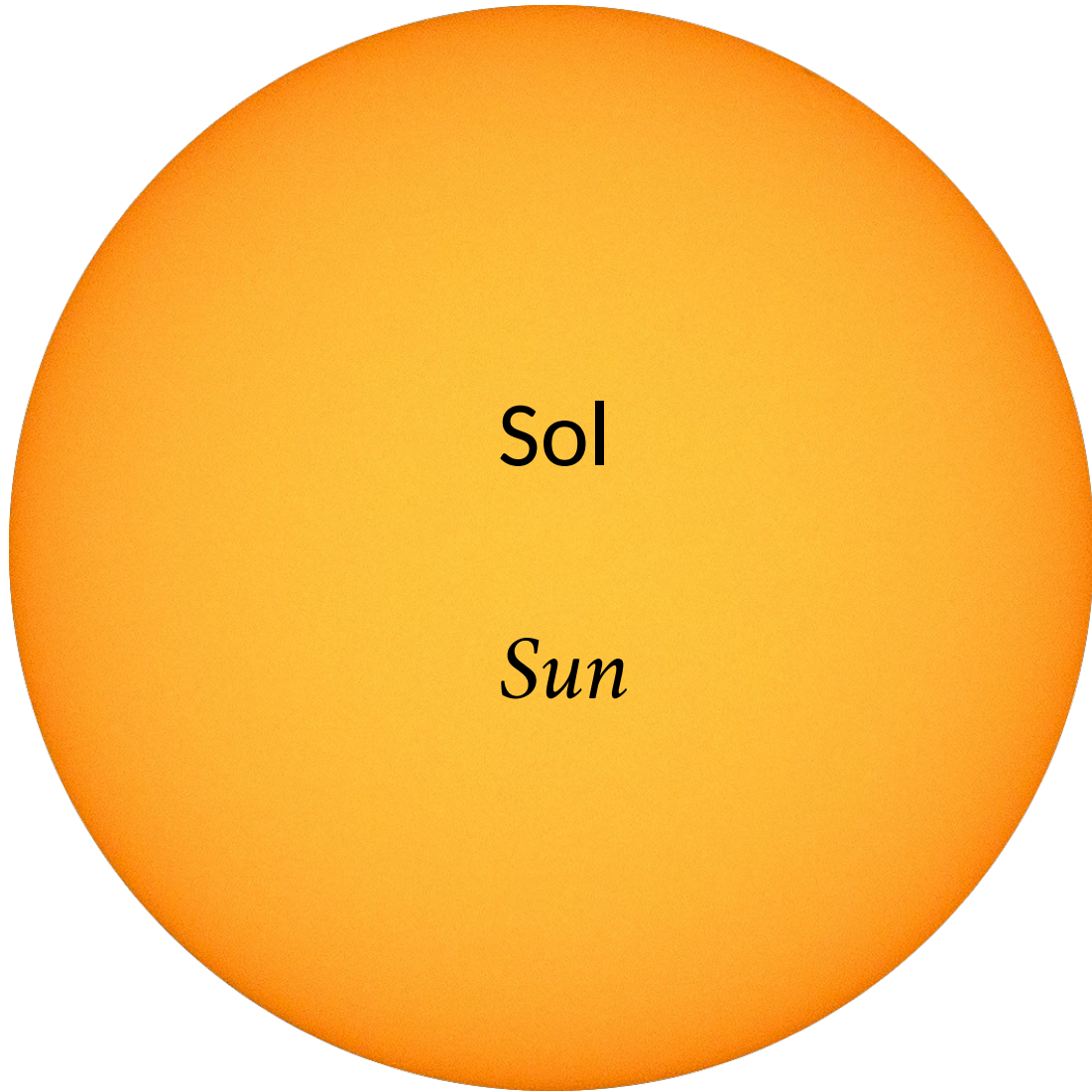
## Estrela anã branca Sirius B

R: 5600 km

M:  $2 \times 10^{30}$  kg

$\rho$ :  $3 \times 10^9$  kg  $m^{-3}$

g:  $4 \times 10^6$  m  $s^{-2}$



Terra	Anã branca
•	•
<i>Earth</i>	<i>White dwarf</i>

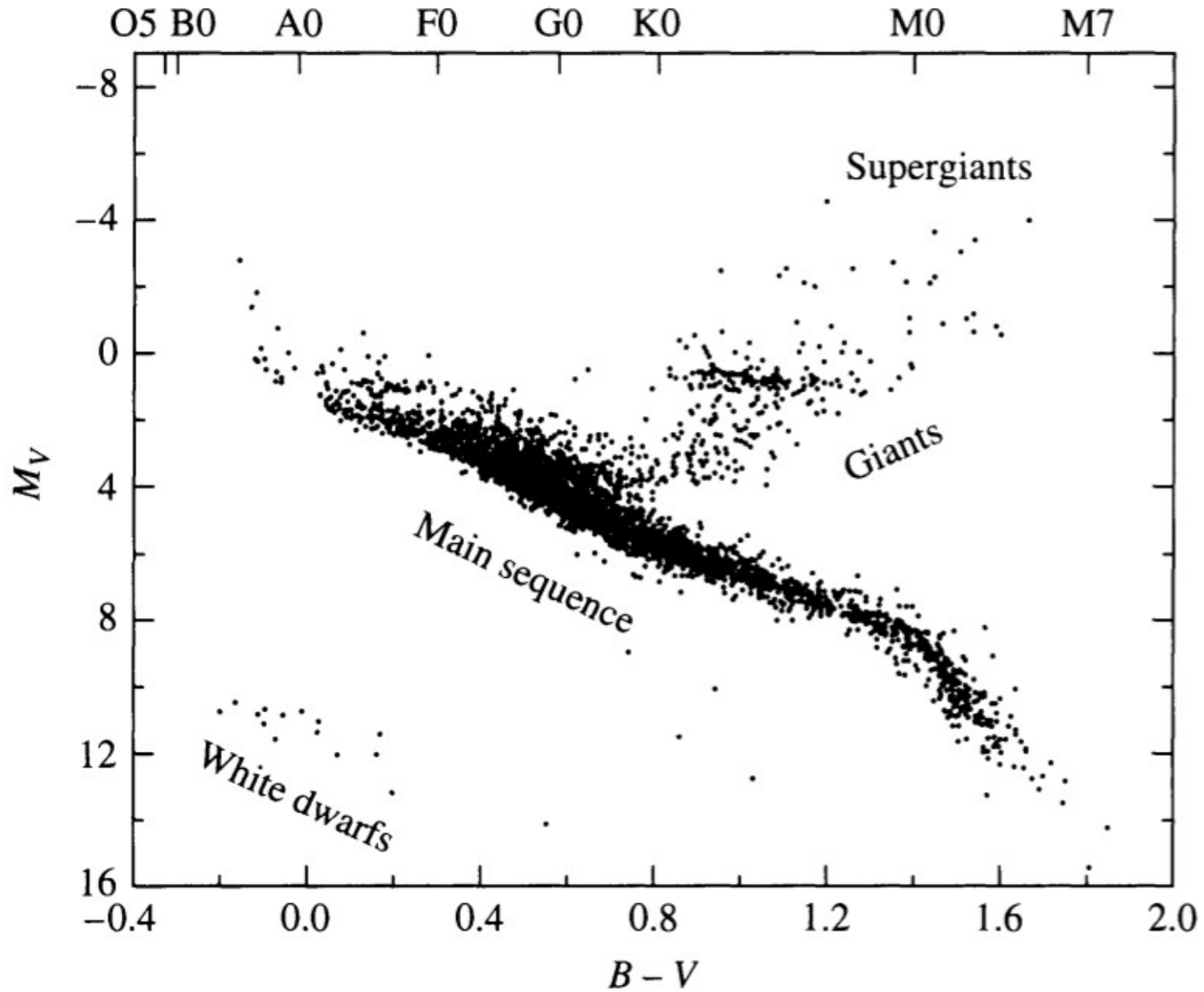
Massa inicial  $< 8 M_{\odot}$ : Nebulosa planetária e anã branca



Planetary Nebula PK 164 +31.1  
(c) Calar Alto Observatory. Vicent Peris, Jack Harvey

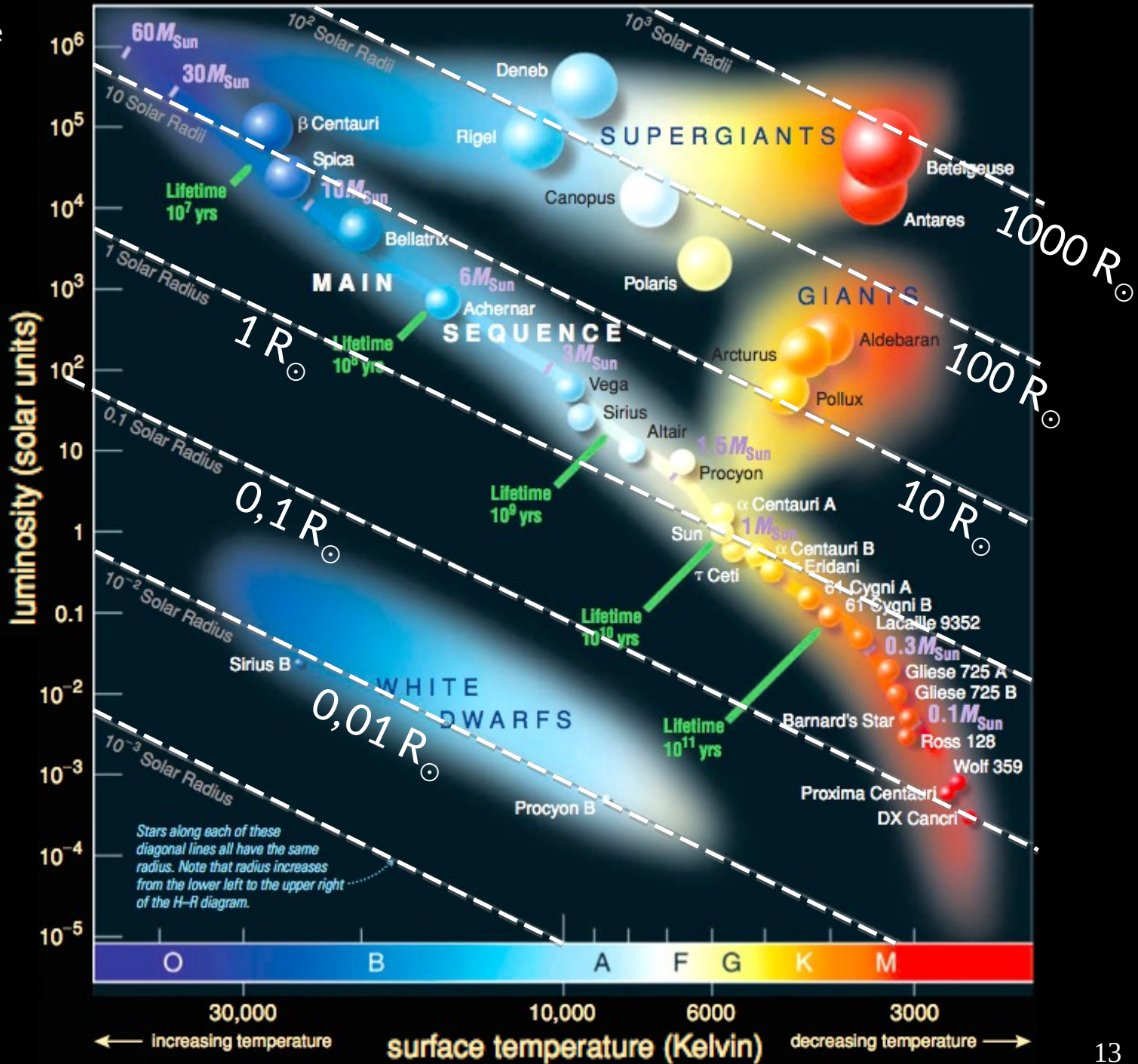


# Anãs Brancas



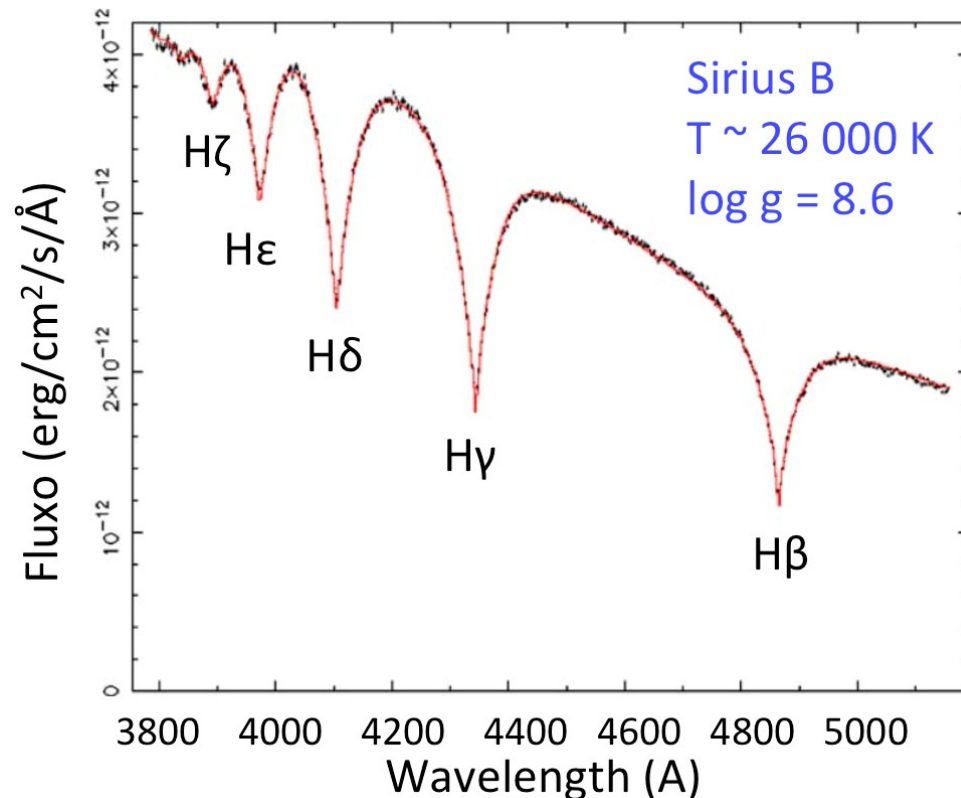


Anãs  
brancas  
vão  
esfriando  
aos  
poucos →  
diferentes  
cores



# Anãs Brancas: tipo espectral D

- DA (~2/3 de todas as anãs brancas): linhas de H
- DB (~8%): apenas linhas de hélio
- DC (~14%): sem linhas ou muito fracas (<5 % do contínuo)
- DQ: linhas de carbono (atômicas ou moleculares)
- DZ: linhas de metais (podem ter engolido material planetário)



# Condições no centro das Anãs Brancas

Da equação de equilíbrio hidrostático:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r \rho}{r^2} = -\frac{G \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right) \rho}{r^2} = -\frac{4}{3}\pi G \rho^2 r.$$

Integrando e  
supondo  $P = 0$  na  
superfície ( $r = R$ ):

$$P(r) = \frac{2}{3}\pi G \rho^2 (R^2 - r^2)$$

No centro,  $r = 0 \rightarrow P_c \approx \frac{2}{3}\pi G \rho^2 R_{\text{wd}}^2$   $R_{\text{WD}}$ : raio da  
anã branca

Sirius B

$R_{\text{wd}}$ : 5600 km

$\rho$ :  $3 \times 10^9 \text{ kg m}^{-3}$

$$\approx 3.8 \times 10^{22} \text{ N m}^{-2}$$

$\sim 1,5$  milhão de vezes  $P_c$  [Sol]

# Condições no centro das Anãs Brancas

Podemos estimar  $T_c$   
usando o gradiente de  
temperatura radiativo

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\bar{\kappa} \rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2}$$

$R_{\text{WD}}, T_{\text{WD}}, L_{\text{WD}}$  :

Raio, Temp. e Lum.  
da anã branca

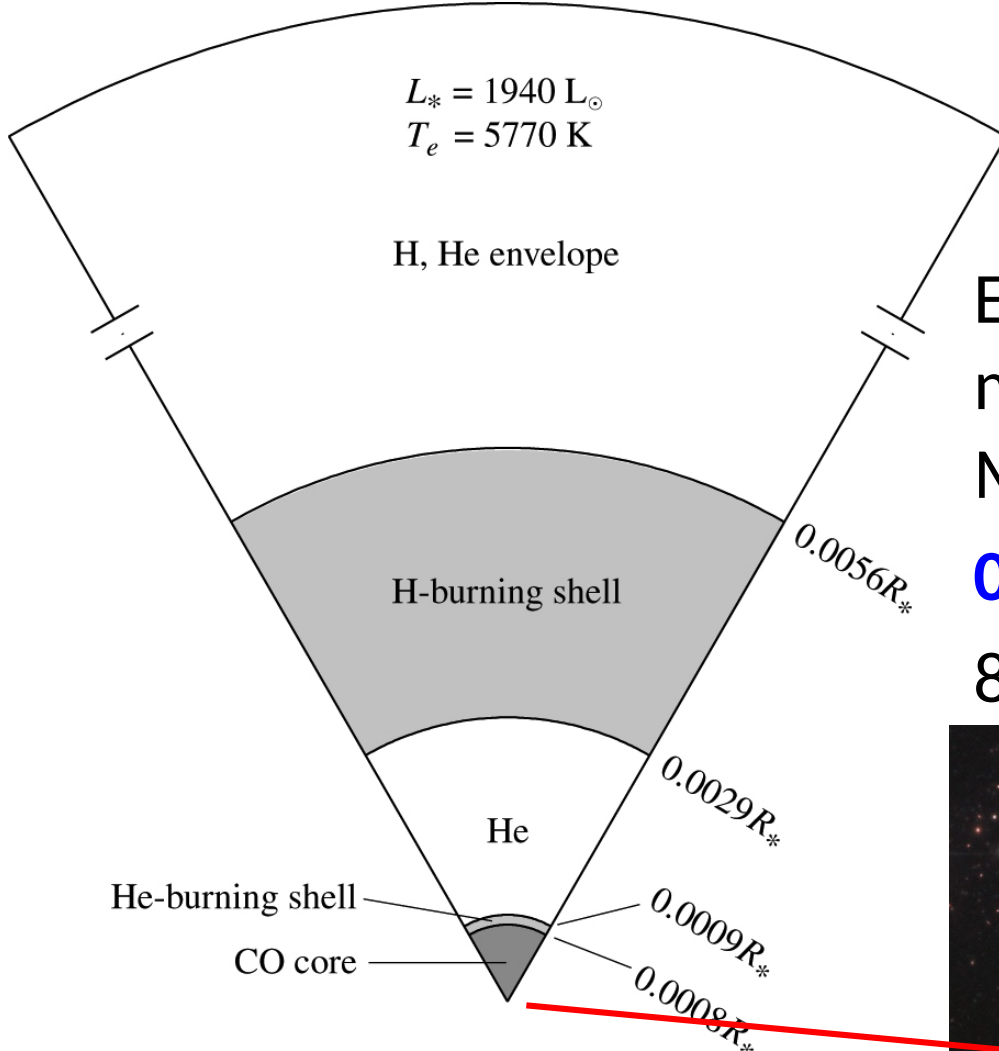
$$\frac{T_{\text{wd}} - T_c}{R_{\text{wd}} - 0} = -\frac{3}{4ac} \frac{\bar{\kappa} \rho}{T_c^3} \frac{L_{\text{wd}}}{4\pi R_{\text{wd}}^2}$$

$$T_c \approx \left[ \frac{3\bar{\kappa} \rho}{4ac} \frac{L_{\text{wd}}}{4\pi R_{\text{wd}}} \right]^{1/4}$$
$$\approx 7.6 \times 10^7 \text{ K}$$

Adotando  $\bar{\kappa} = 0.02 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$   
(espalhamento e-):

→ Quase sem hidrogênio, ou as anãs brancas  
seriam muito mais luminosas (queima de H)





Estrela de massa inicial  $M < 0,5 M_{\odot}$

Composição da anã branca  $\rightarrow \text{He}$

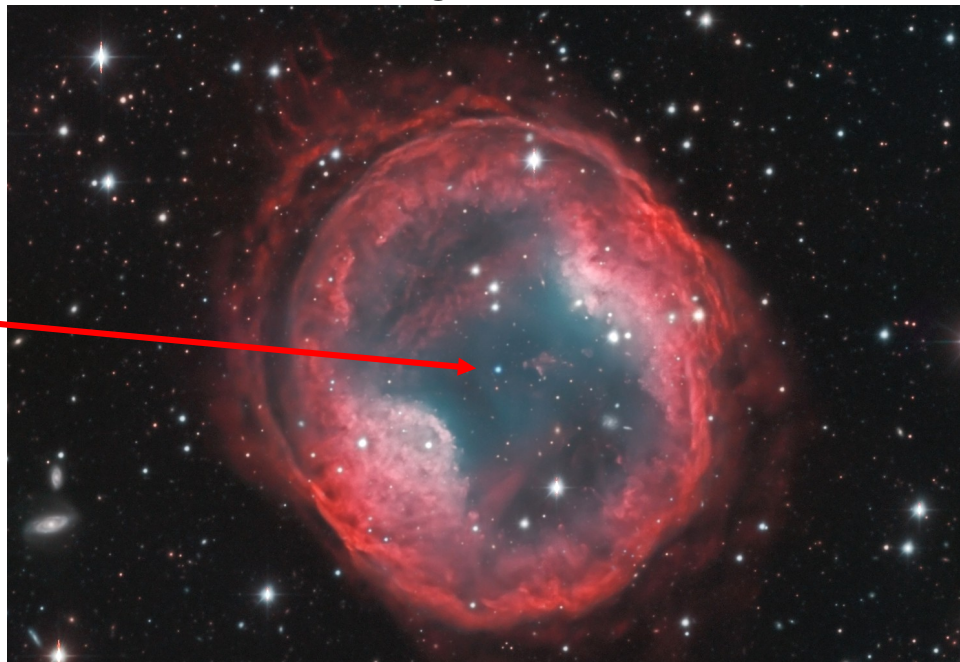
**$0,5 < M < 8 M_{\odot} \rightarrow \text{C-O}$**

**$\rightarrow \text{C-O}$**

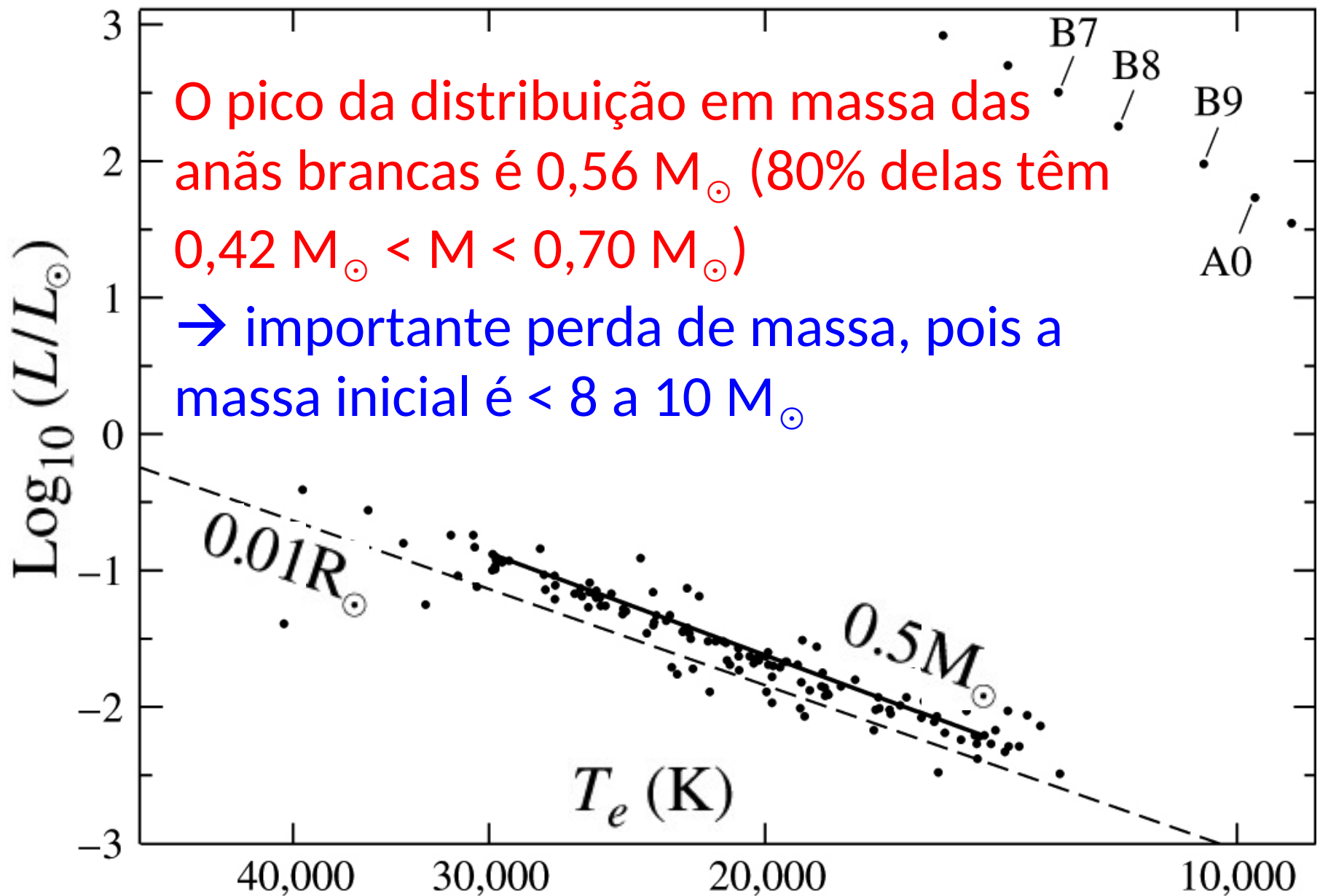
$8 < M < 10 M_{\odot} \rightarrow \text{O-Ne-Mg}$

$\rightarrow \text{O-Ne-Mg}$

**Estrutura de estrela de massa inicial  $M = 5 M_{\odot}$  no começo da fase AGB**



Planetary Nebula PK 164 +31.1  
 (c) Calar Alto Observatory, Vicent Peris, Jack Harvey

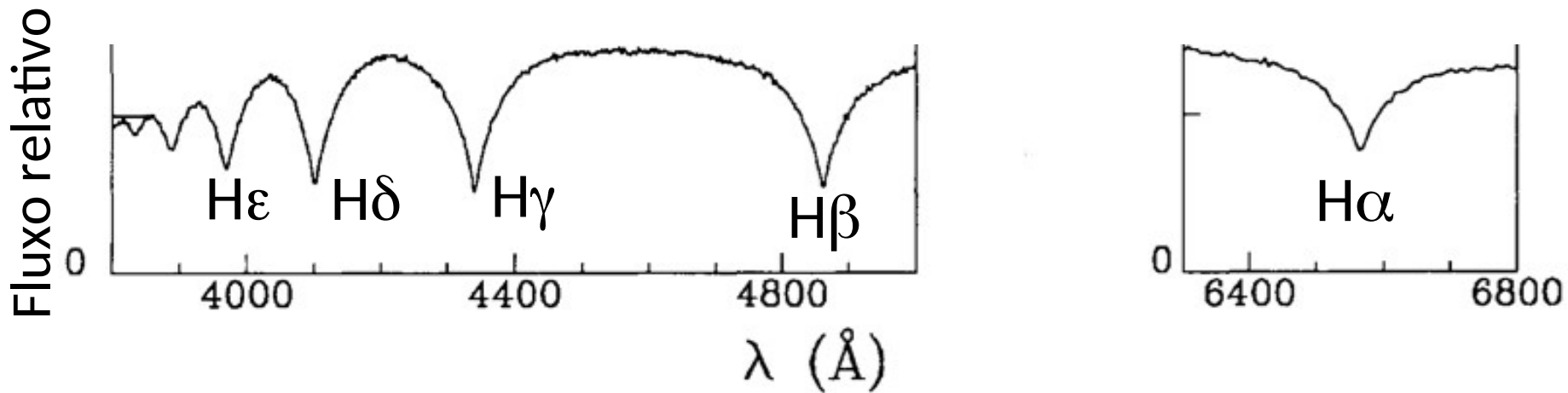
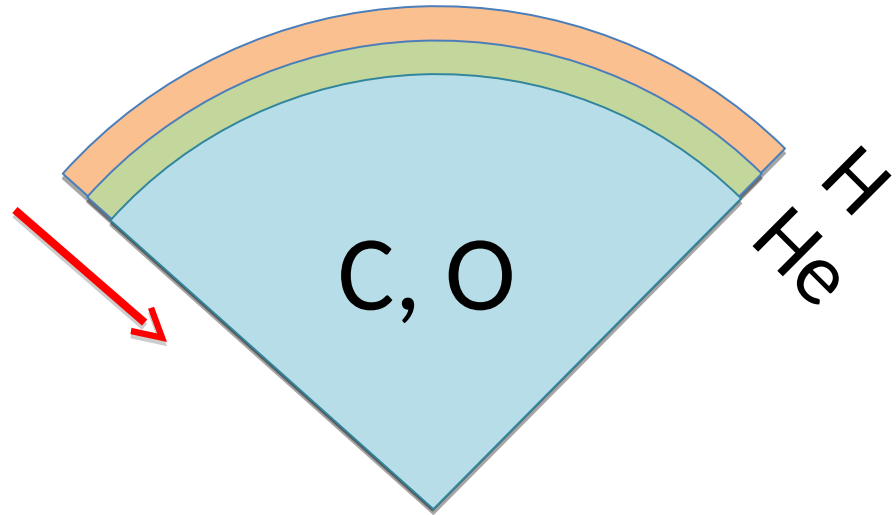


**FIGURE 16.3** DA white dwarfs on an H–R diagram. A line marks the location of the  $0.50 M_{\odot}$  white dwarfs, and a portion of the main sequence is at the upper right. (Data from Bergeron, Saffer, and Liebert, *Ap. J.*, 394, 228, 1992.)

# Espectro e composição superficial de Anãs Brancas

Devido à altíssima gravidade → elementos mais pesados para o interior: fina atmosfera do pouco H restante.

Escala de tempo ~100 anos

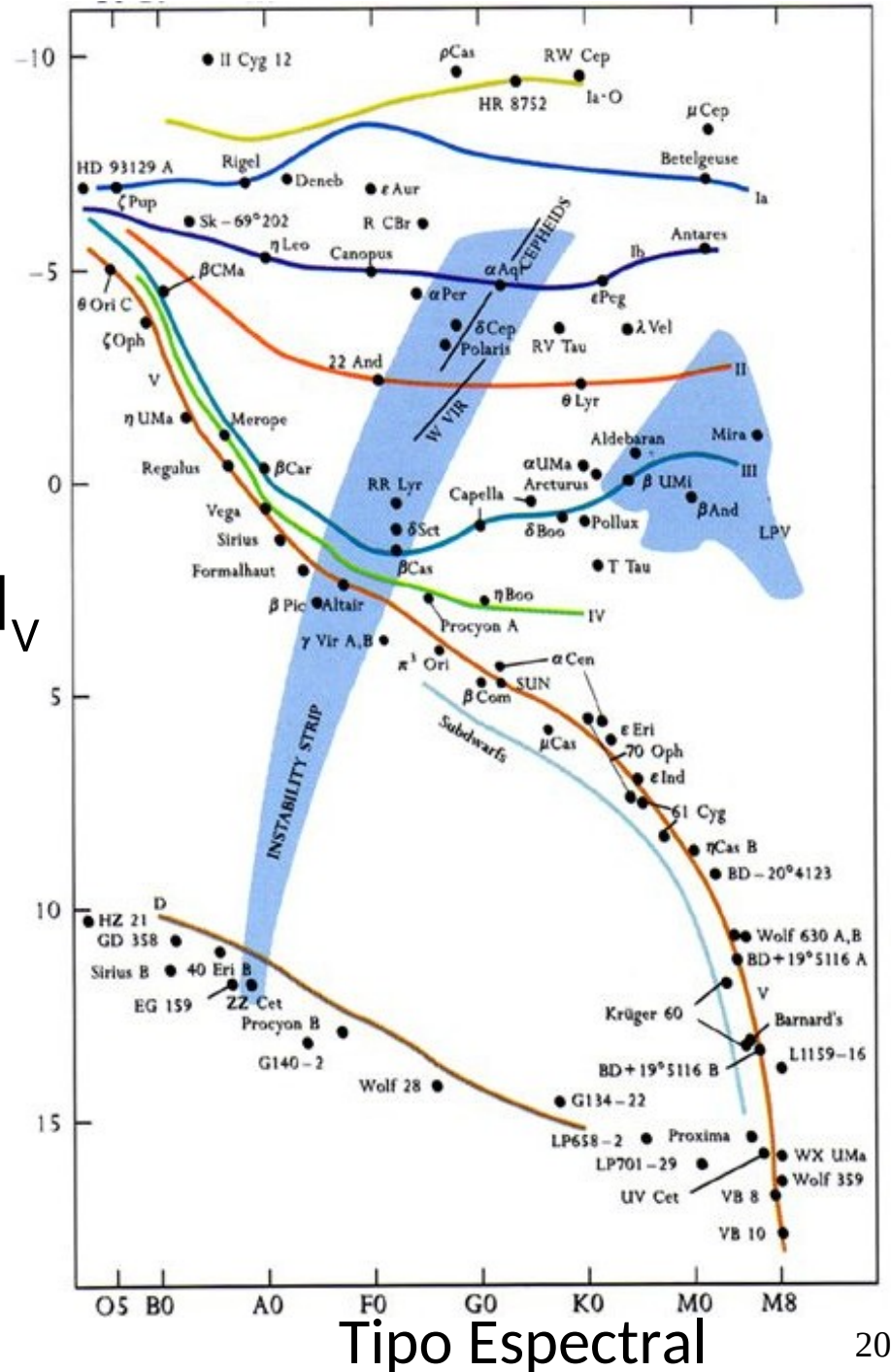


G 207-9, anã branca de tipo DA4.5

# Anãs Brancas Pulsantes:

$T_e \sim 12\,000\text{ K}$  estão na faixa de instabilidade  $\rightarrow$  pulsações

$M_V$



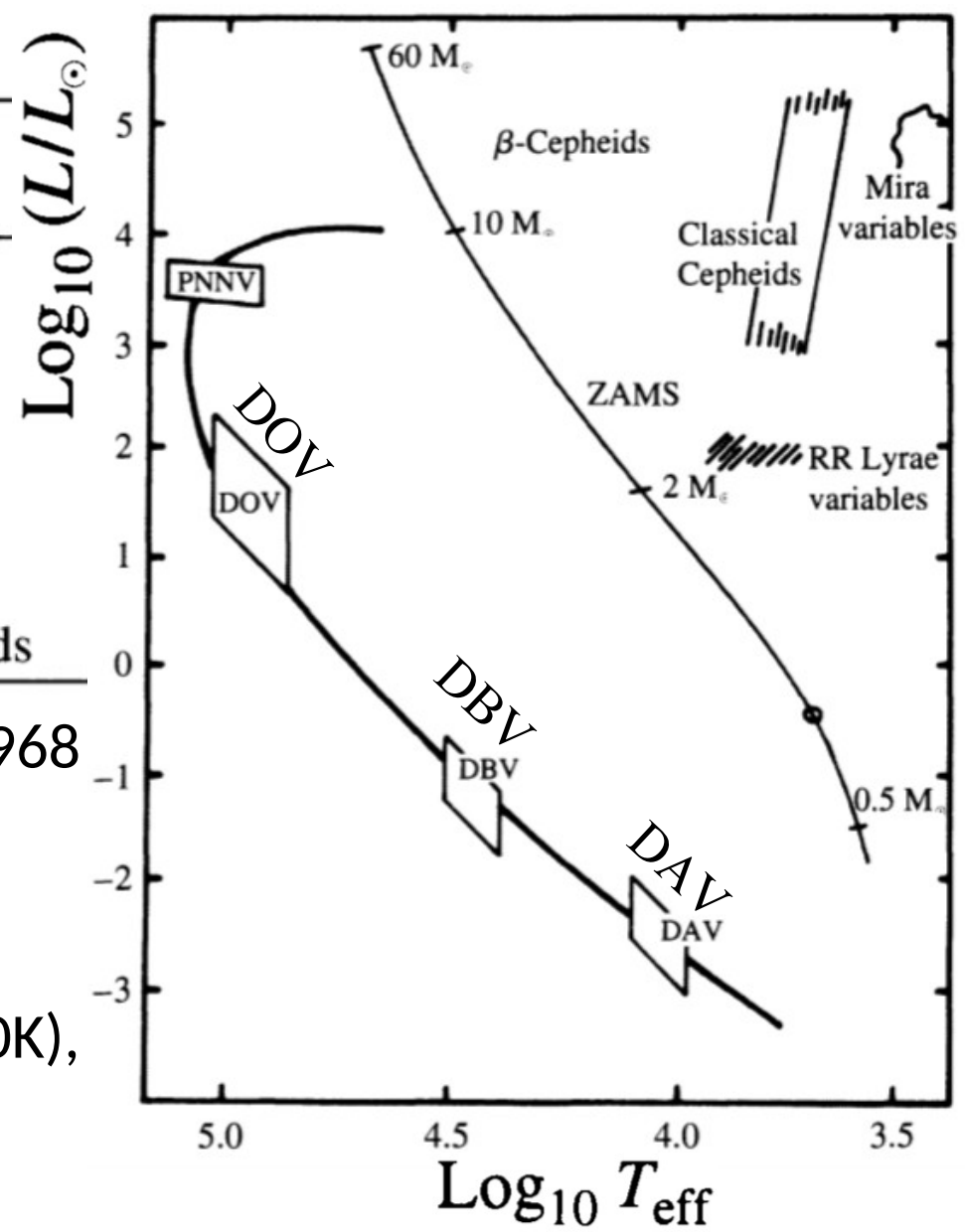


**14.1 Pulsating Stars.** (Adopted from Cox, *The Theory of Stellar Pulsation*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1980.)

Type	Range of Periods
Long-Period Variables	100–700 days
Classical Cepheids	1–50 days
W Virginis stars	2–45 days
RR Lyrae stars	1.5–24 hours
$\delta$ Scuti stars	1–3 hours
$\beta$ Cephei stars	3–7 hours
ZZ Ceti stars	100–1000 seconds

Estrelas ZZ Ceti (descoberta em 1968 por Arlo Landolt): anãs brancas pulsantes com  $P = 100 - 1000$  s.

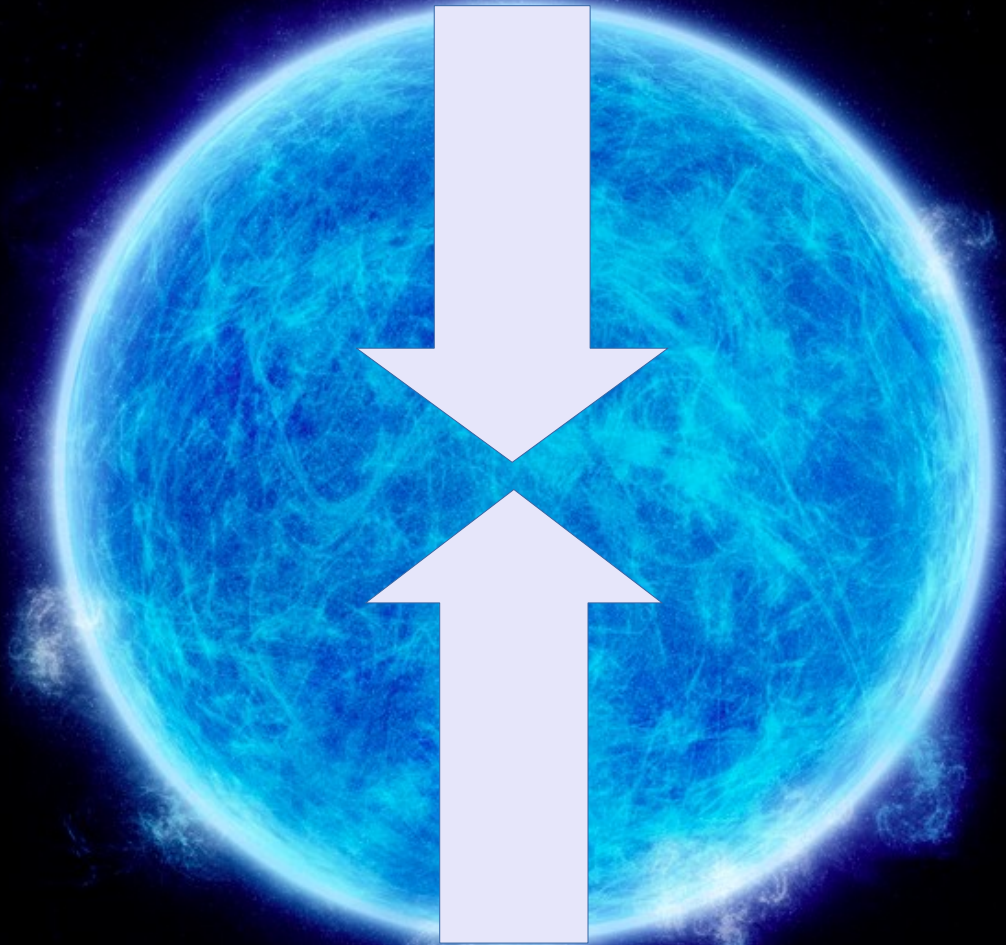
Anãs brancas variáveis: DAV (12000K), DBV (27000 K), DOV ( $10^5$ K)



Ralph Fowler (1926), aplicou o principio de exclusão de Pauli aos elétrons na anã branca.

→ A pressão que suporta as altas densidades das **anãs brancas** é a pressão de degenerescência de elétrons.

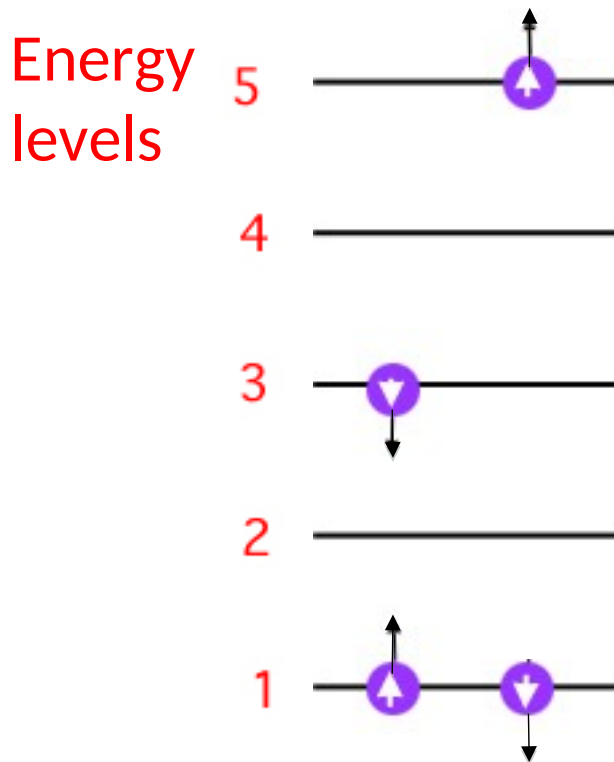
Gravitational pressure



Electron degeneracy pressure

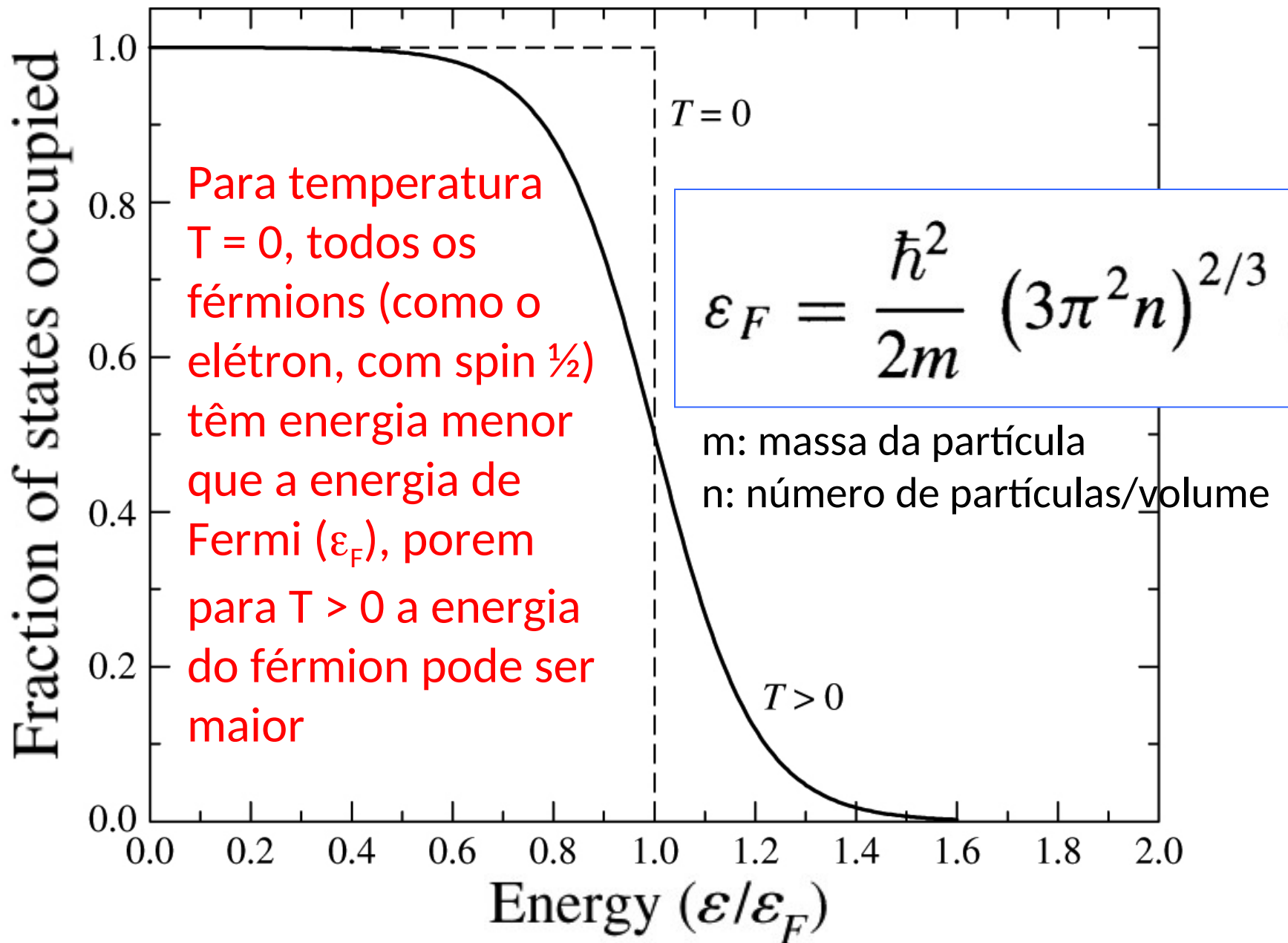
# Matéria degenerada

Para  $T \gg 0$ , o gás pode ocupar diferentes níveis de energia



Porém se  $T \rightarrow 0$ , temos menor energia e a maioria dos elétrons ocupa os níveis mais baixos. Pelo princípio de Pauli, só 1 partícula é permitida por cada estado. O movimento dos elétrons, causa uma pressão

Para  $T = 0$ , **todos os elétrons ocupam os níveis mais baixos de energia: gás completamente degenerado**

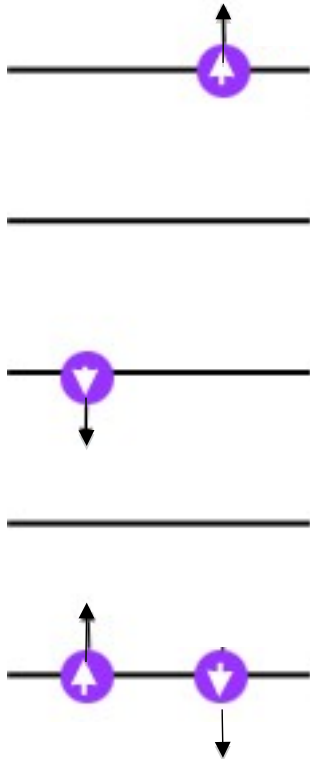


**FIGURE 16.5** Fraction of states of energy  $\varepsilon$  occupied by fermions. For  $T = 0$ , all fermions have  $\varepsilon \leq \varepsilon_F$ , but for  $T > 0$ , some fermions have energies in excess of the Fermi energy.



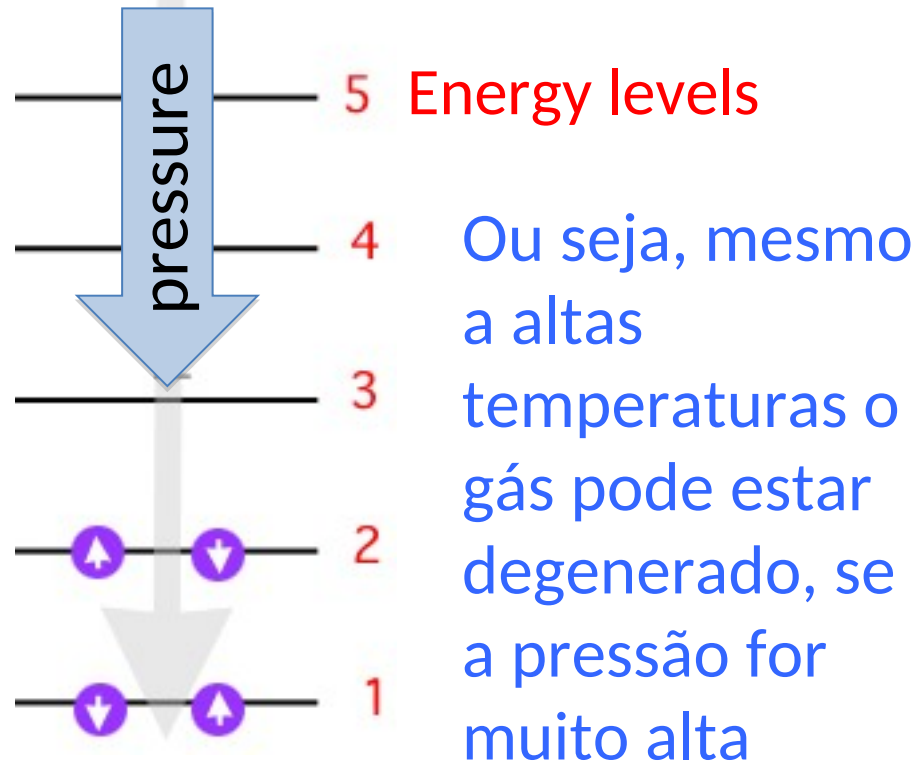
## Gás normal

Em um gás normal, os elétrons podem ocupar diversos níveis de energia



## Gás degenerado (alta pressão)

Alta pressão também pode resultar em um gás degenerado: e- são forçados a ocupar o nível base



# Condição para degenerescência

Primeiro, vamos reescrever a energia de Fermi. Para altas temperaturas, a densidade de elétrons:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

$$n_e = \left( \frac{\# \text{ electrons}}{\text{nucleon}} \right) \left( \frac{\# \text{ nucleons}}{\text{volume}} \right) = \left( \frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_H}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left[ 3\pi^2 \left( \frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{2/3}$$

Se a energia térmica ( $3/2 kT$ ) for menor que a energia de Fermi  $\rightarrow$  gás degenerado

$$\frac{3}{2} kT < \frac{\hbar^2}{2m_e} \left[ 3\pi^2 \left( \frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{2/3}$$

Ou, rearranjando em função da  $T$  e  $\rho$ :  $\frac{T}{\rho^{2/3}} < \frac{\hbar^2}{3m_e k} \left[ \frac{3\pi^2}{m_H} \left( \frac{Z}{A} \right) \right]^{2/3}$

Definindo:

$$\mathcal{D} \equiv 1261 \text{ K m}^2 \text{ kg}^{-2/3} = 1261 \text{ K m}^2 \text{ kg}^{-2/3}$$

para  
( $Z/A$ ) = 0,5

Condição para degenerescência:  $\frac{T}{\rho^{2/3}} < \mathcal{D}$

Condição para  
degenerescência:

$$\frac{T}{\rho^{2/3}} < \mathcal{D}$$

$$\mathcal{D} \equiv 1261 \text{ K m}^2 \text{ kg}^{-2/3}$$

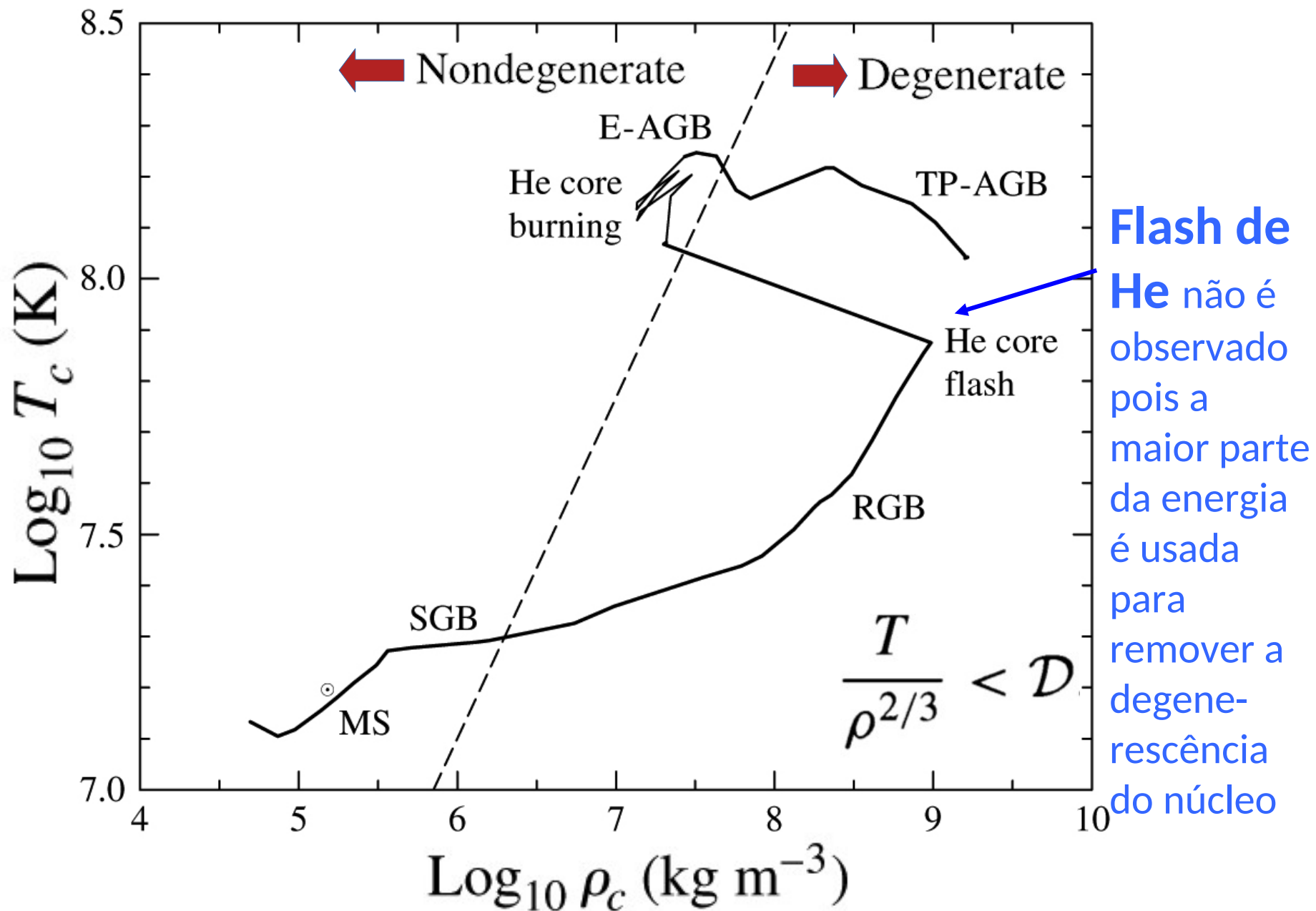
**Exemplo 16.3.1. Quão importante é a degenerescência no centro do Sol?**

No centro do Sol:  $T = 1,57 \times 10^7 \text{ K}$  e  $\rho = 1,5 \times 10^5 \text{ kg/m}^3$

$$\frac{T_c}{\rho_c^{2/3}} = 5500 \text{ K m}^2 \text{ kg}^{-2/3} > \mathcal{D}$$

→ no Sol a pressão de degenerescência de elétrons é pequena





**FIGURE 16.6** Degeneracy in the Sun's center as it evolves. (Data from Mazzitelli and D'Antona, *Ap. J.*, 311, 762, 1986.)

Condição para  
degenerescência:

$$\frac{T}{\rho^{2/3}} < \mathcal{D}$$

$$\mathcal{D} \equiv 1261 \text{ K m}^2 \text{ kg}^{-2/3}$$

**Exemplo 16.3.1. Quão importante é a degenerescência no centro de Sirius B?**

Para Sirius B:  $T_c \sim 7.6 \times 10^7 \text{ K}$  e  $P_c \approx 3.8 \times 10^{22} \text{ N m}^{-2}$

$$\frac{T_c}{\rho_c^{2/3}} = 37 \text{ K m}^2 \text{ kg}^{-2/3} \ll \mathcal{D}$$

→ Anã branca é completamente degenerada

# Pressão de degenerescência de e-

Os elétrons são forçados a ocupar os níveis mais baixos de energia, mas respeitando os princípios de Incerteza e Exclusão.

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar$$

Pressão de degenerescência:  $P = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_e} n_e^{5/3}$

PROVINHA,  
 $P_e = n_e kT$

$$P = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_e} \left[ \left( \frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{5/3}$$

(16.12)

Usando  $(Z/A) = 0,5 \rightarrow$  para Sirius B temos  $P = 2 \times 10^{22} \text{ N/m}^2$   
 $\rightarrow$  pressão de degenerescência de e- suporta a anã branca

$Z/A = 0,5$  por exemplo se considerarmos anã branca de C-O (para C:  $Z = 6$  e  $A = 12$ )

# Relação Massa - Volume em anãs brancas

Pressão central do  
equilíbrio hidrostático:

Pressão de degenerescência:

$$\frac{2}{3} \pi G \rho^2 R_{\text{wd}}^2 = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_e} \left[ \left( \frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{5/3}$$

Supondo densidade constante:  $\rho = M_{\text{wd}} / \frac{4}{3} \pi R_{\text{wd}}^3$

$$R_{\text{wd}} \approx \frac{(18\pi)^{2/3}}{10} \frac{\hbar^2}{G m_e M_{\text{wd}}^{1/3}} \left[ \left( \frac{Z}{A} \right) \frac{1}{m_H} \right]^{5/3}$$

Para  $M = 1 M_{\odot}$  e  $(Z/A) = 0,5 \rightarrow$  raio  $R_{\text{WD}} = 3 \times 10^6$  m, muito pequeno por um fator de 2, mas ordem de grandeza OK



$$R_{\text{wd}} \approx \frac{(18\pi)^{2/3}}{10} \frac{\hbar^2}{Gm_e M_{\text{wd}}^{1/3}} \left[ \left( \frac{Z}{A} \right) \frac{1}{m_H} \right]^{5/3}$$

→  $M_{\text{wd}} R_{\text{wd}}^3 = \text{constante}$

ou  $M_{\text{wd}} V_{\text{wd}} = \text{constante}$

Anãs brancas mais massivas têm raio  $R_{\text{wd}}$  menor!

É possível termos anãs brancas com  $R \sim 0$ ?

Exemplo, velocidade de  $e^-$  em Sirius B (sem considerar a relatividade, usando eq. 16.10):

$$v \approx \frac{\hbar}{m_e} \left[ \left( \frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{1/3} = 1.1 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$v > 1/3 c !$$

Anãs brancas não podem ter  $R \rightarrow 0$ . Efeitos da relatividade: velocidade  $e^-$  não pode exceder  $c$ .

**Pressão máxima:**

$$P = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \hbar c \left[ \left( \frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{4/3}$$

# Limite de Chandrasekhar

(descoberto quando tinha 21 anos)

Para ter uma ideia da massa limite de Chandrasekhar:

Pressão central do  
equilíbrio hidrostático:

Limite de pressão para  
estabilidade da anã branca:

$$\frac{2}{3} \pi G \rho^2 R_{\text{wd}}^2 = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \hbar c \left[ \left( \frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{4/3}$$

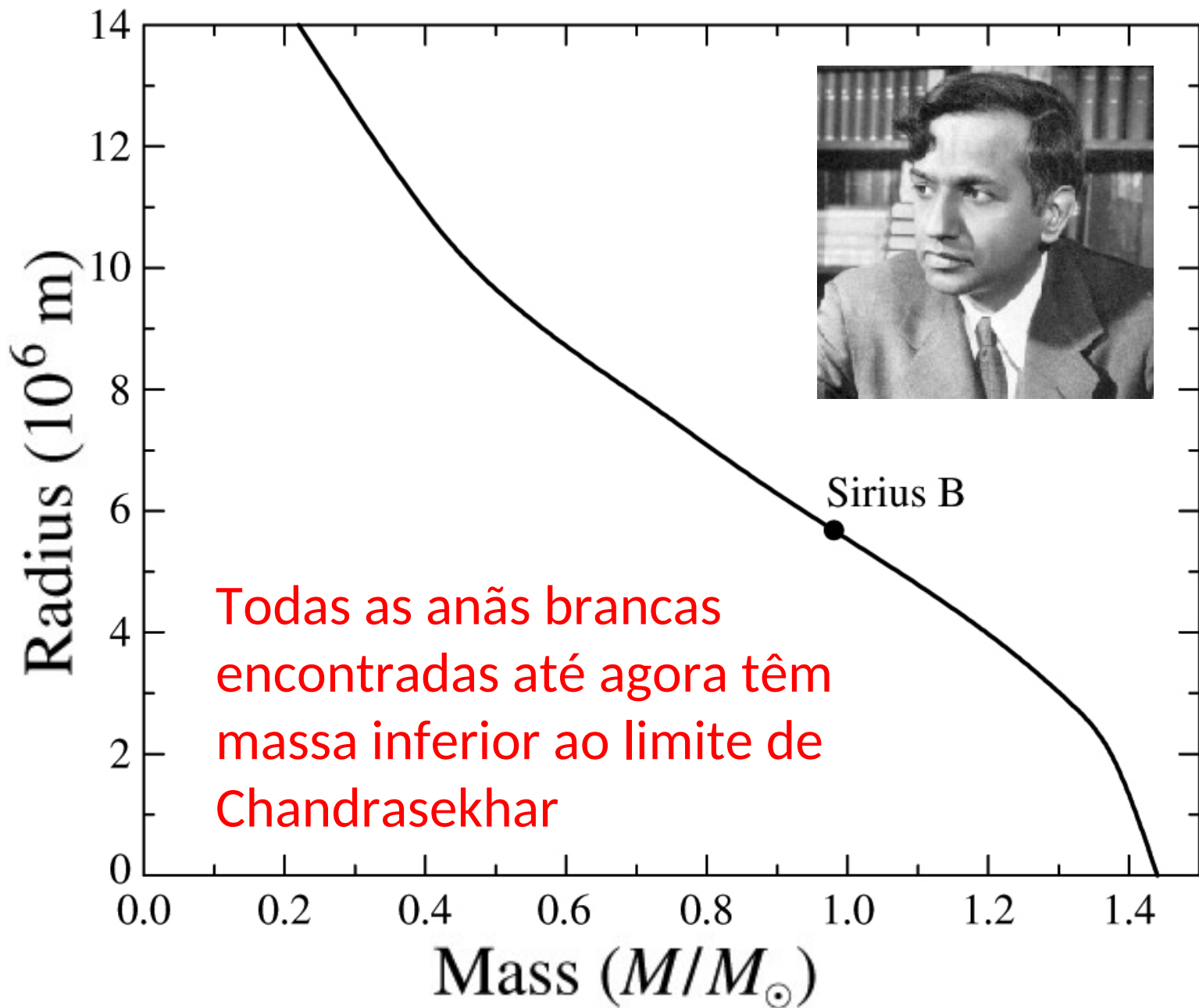
Usando:

$$\rho = M_{\text{wd}} / \frac{4}{3} \pi R_{\text{wd}}^3$$

$$\rightarrow M_{\text{Ch}} \sim \frac{3\sqrt{2\pi}}{8} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \left[ \left( \frac{Z}{A} \right) \frac{1}{m_H} \right]^2$$

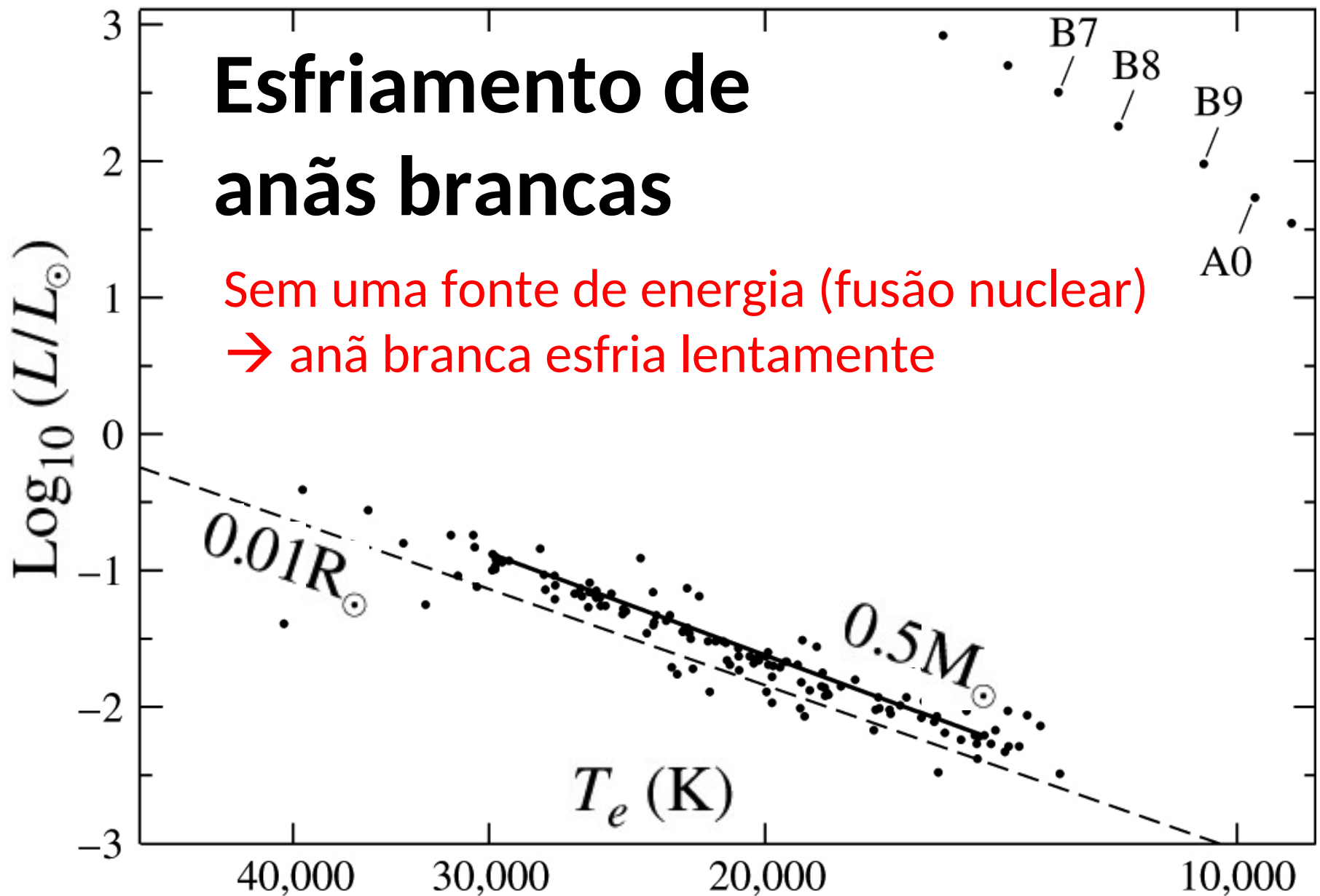
$$\text{Para } (Z/A) = 0,5 \rightarrow M_{\text{Ch}} = 0,44 M_{\odot}$$

Um procedimento rigoroso resulta em  $M_{\text{Ch}} = 1,44 M_{\odot}$

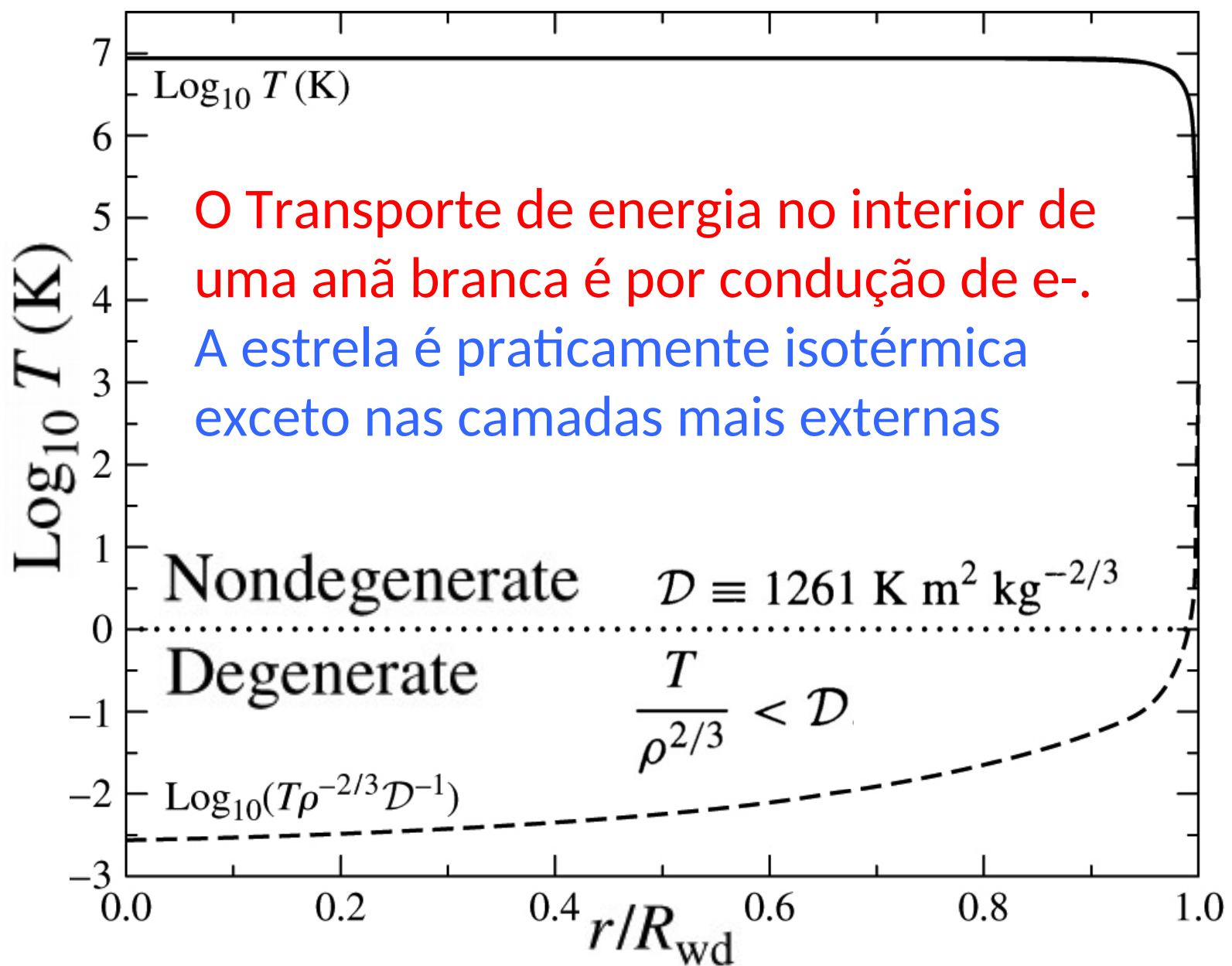


**FIGURE 16.7** Radii of white dwarfs of  $M_{\text{wd}} \leq M_{\text{Ch}}$  at  $T = 0$  K.





**FIGURE 16.3** DA white dwarfs on an H-R diagram. A line marks the location of the  $0.50 M_{\odot}$  white dwarfs, and a portion of the main sequence is at the upper right. (Data from Bergeron, Saffer, and Liebert, *Ap. J.*, 394, 228, 1992.)



**FIGURE 16.8** Temperature and degree of degeneracy in the interior of a white dwarf model. The horizontal dotted line marks the boundary between degeneracy and nondegeneracy as described by Eq. (16.6).

# Estrutura das camadas não degeneradas da anã branca

$$P = \left( \frac{4}{17} \frac{16\pi a c}{3} \frac{GM_{\text{wd}}}{L_{\text{wd}}} \frac{k}{\kappa_0 \mu m_H} \right)^{1/2} T^{17/4}$$

$a = 4 \sigma/c$

bound-free Kramers opacity law

$$\kappa_0 = 4.34 \times 10^{21} Z(1 + X) \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$$

$X, Z$ : fração de H e metais  
 $X + Y + Z = 1$

Usando a lei do gás ideal:

$$\rho = \left( \frac{4}{17} \frac{16\pi a c}{3} \frac{GM_{\text{wd}}}{L_{\text{wd}}} \frac{\mu m_H}{\kappa_0 k} \right)^{1/2} T^{13/4}$$

O limite entre o interior degenerado e a superfície é quando a energia térmica ( $3/2 kT$ ) for igual à energia de Fermi:

$$\frac{3}{2} kT = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left[ 3\pi^2 \left( \frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{2/3}$$

Usando:  $\rho = \left( \frac{4}{17} \frac{16\pi ac}{3} \frac{GM_{\text{wd}}}{L_{\text{wd}}} \frac{\mu m_H}{\kappa_0 k} \right)^{1/2} T^{13/4}$

$$L_{\text{wd}} = \frac{4D^3}{17} \frac{16\pi ac}{3} \frac{Gm_H}{\kappa_0 k} \mu M_{\text{wd}} T_c^{7/2} = CT_c^{7/2} \quad (16.19)$$

onde  $C \equiv 6.65 \times 10^{-3} \left( \frac{M_{\text{wd}}}{M_\odot} \right) \frac{\mu}{Z(1+X)}$

**Example 16.5.1.** Equation (16.19) can be used to estimate the interior temperature of a  $1 M_{\odot}$  white dwarf with  $L_{\text{wd}} = 0.03 L_{\odot}$ . Arbitrarily assuming values of  $X = 0$ ,  $Y = 0.9$ ,  $Z = 0.1$  for the nondegenerate envelope (so  $\mu \simeq 1.4$ ) results in<sup>16</sup>

$$T_c = \left[ \frac{L_{\text{wd}}}{6.65 \times 10^{-3}} \left( \frac{M_{\odot}}{M_{\text{wd}}} \right) \frac{Z(1+X)}{\mu} \right]^{2/7} = 2.8 \times 10^7 \text{ K.}$$

Densidade na  
base do  
envelope:

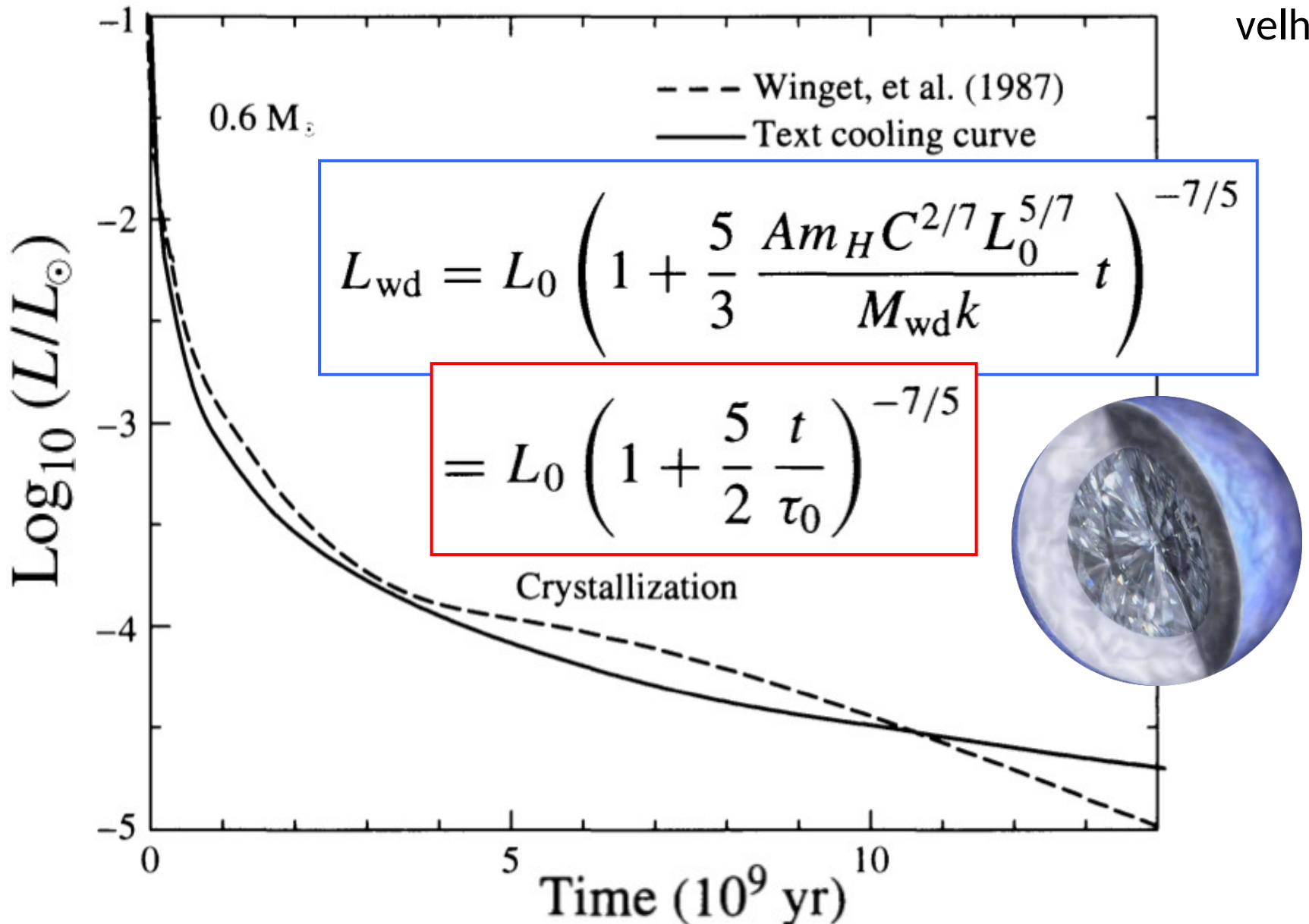
$$\rho = \left( \frac{T_c}{D} \right)^{3/2} = 3.4 \times 10^6 \text{ kg m}^{-3}$$

Muito menor que a densidade média da Sirius B  
( $3 \times 10^9 \text{ kg m}^{-3}$ )  $\rightarrow$  Envelope muito fino

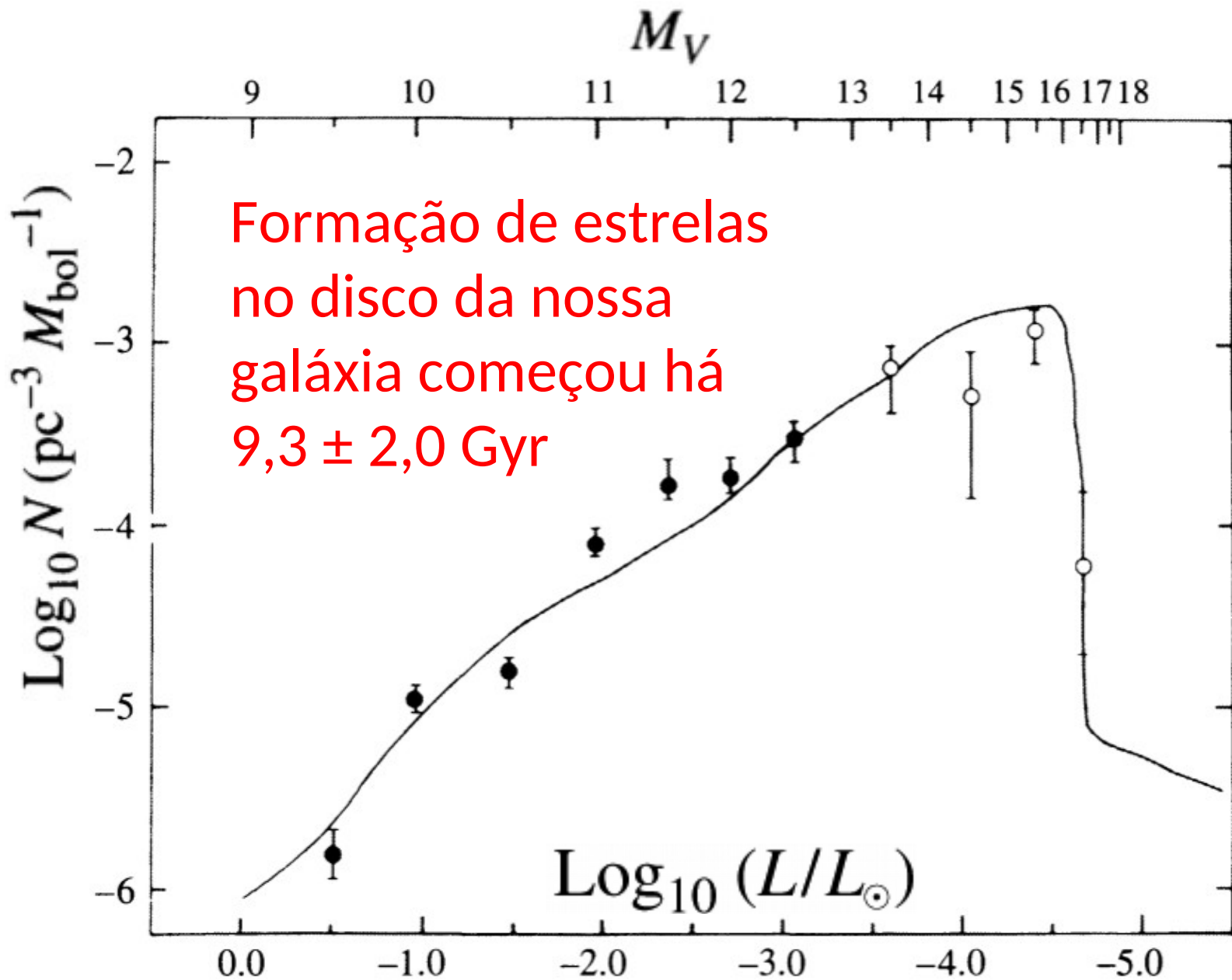


# Esfriamento das anãs brancas

menos luminosas → mais velhas

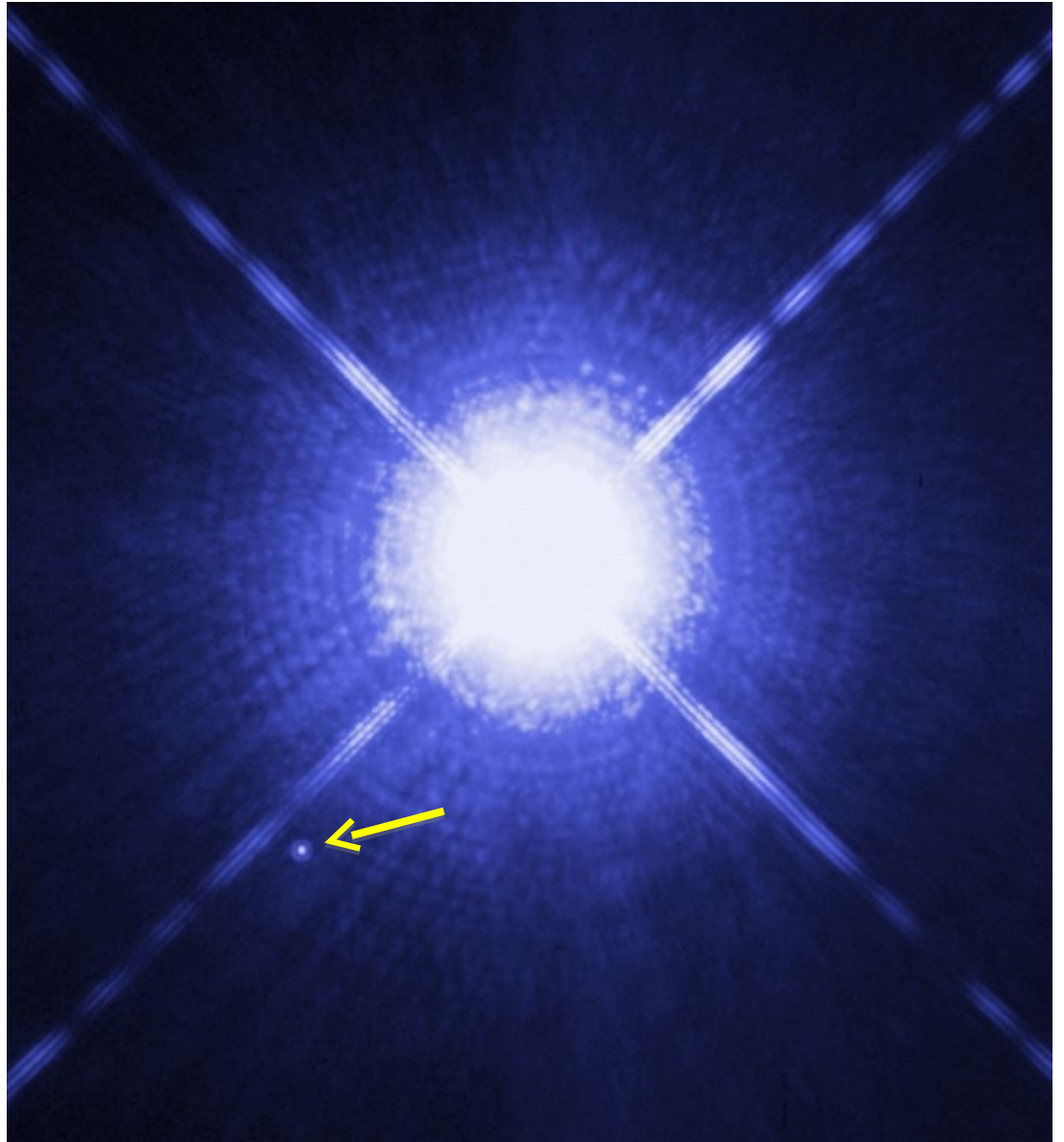


**FIGURE 16.9** Theoretical cooling curves for  $0.6 M_{\odot}$  white-dwarf models. [The solid line is from Eq. (16.23), and the dashed line is from Winget et al., *Ap. J. Lett.*, 315, L77, 1987.]

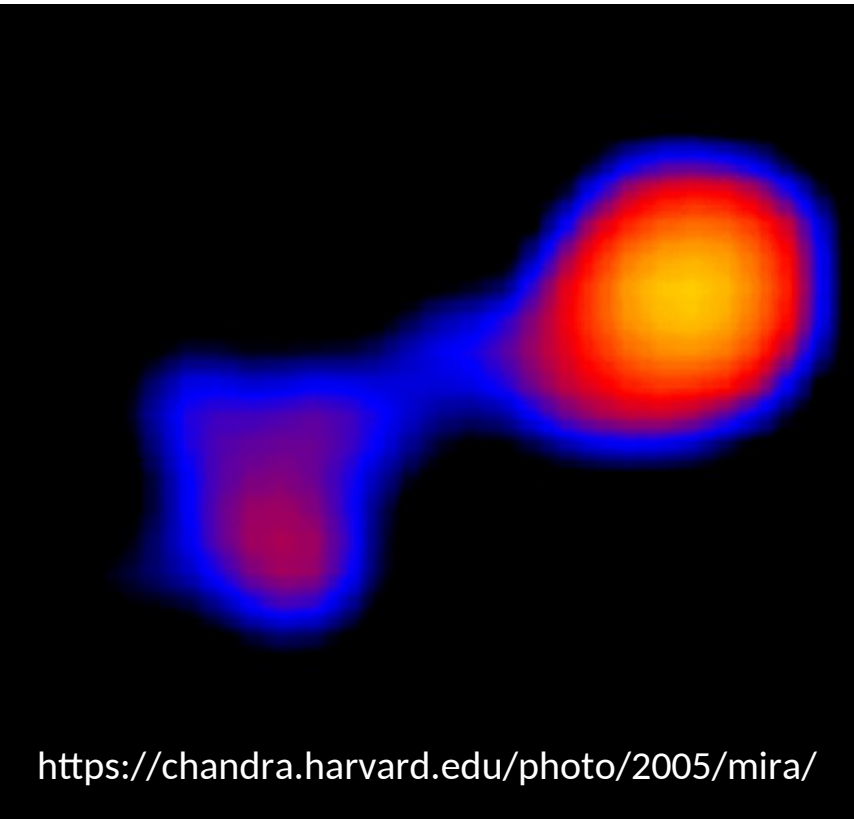


**FIGURE 16.10** Observed and theoretical distribution of white-dwarf luminosities. (Figure adapted from Winget et al., *Ap. J. Lett.*, 315, L77, 1987.)

**Idade em  
sistemas  
binários**  
(incluindo uma  
componente  
anã branca)



Sirius A e B



<https://chandra.harvard.edu/photo/2005/mira/>



Raios-X, Chandra/NASA

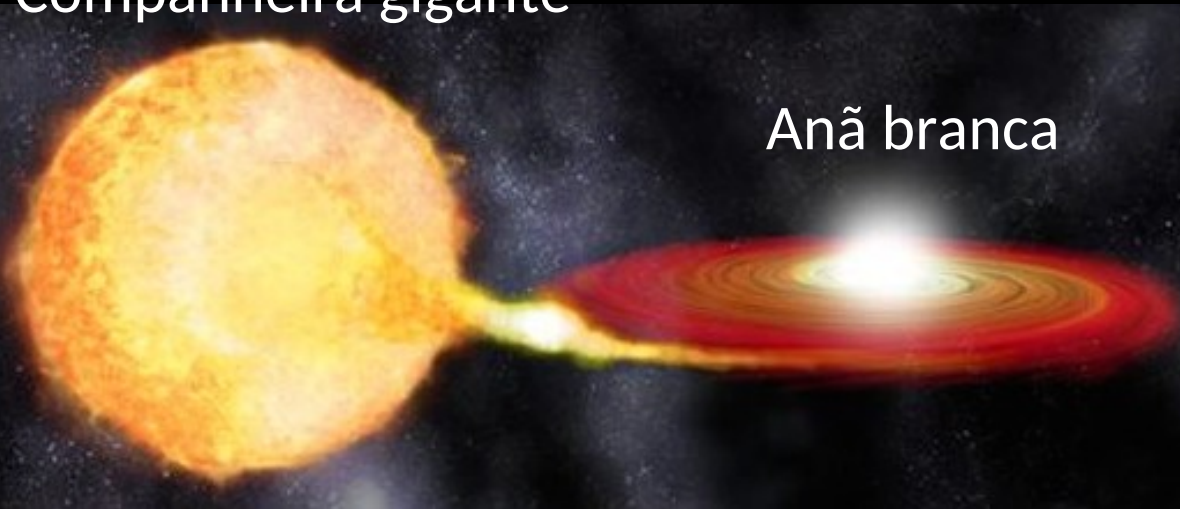
Imagem artística

## Anã branca e estrela gigante Mira (na fase AGB)

Uma anã branca que recebe massa de uma companheira, pode ter uma pequena explosão tipo nova, ou explodir como Supernova Ia se atingir a massa limite de Chandrasekhar



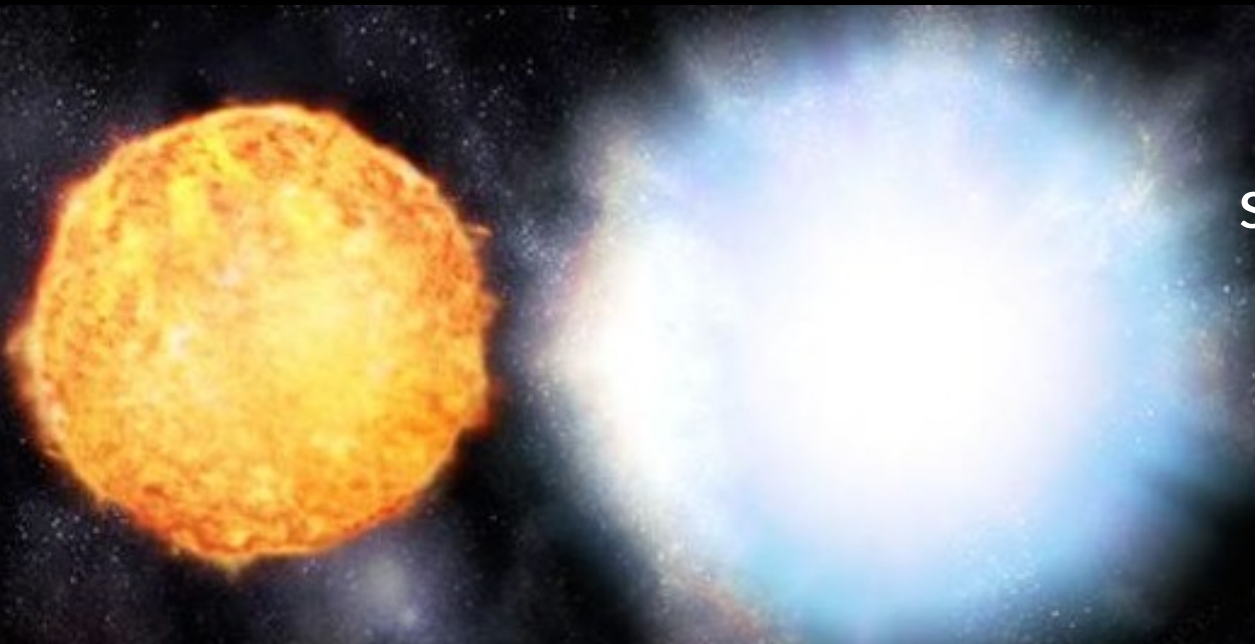
## Companheira gigante



Anã branca

Supernova tipo Ia

Supernovas de tipo Ia acontecem quando anãs brancas (massa inicial  $< 8M_{\odot}$ ) crescem com a massa de companheiras e superam o limite de massa de Chandrasekhar ( $\sim 1,4 M_{\odot}$ )





# Estudo de anãs brancas no Brasil

- Prof. Kepler Oliveira (UFRGS)



- Profa. Alejandra Romero (UFRGS)



UFRGS: observações e teoria de anãs brancas

IAG-USP. Estudo de novas e variáveis cataclísmicas:  
Prof. Marcos Diaz e Prof. Alessandro Ederoclite.  
Anãs brancas com gêmeas solares: Jorge Meléndez