

Cap. 10. Interiores Estelares

10.1 Equilíbrio Hidrostático

10.2 Equação de estado da Pressão

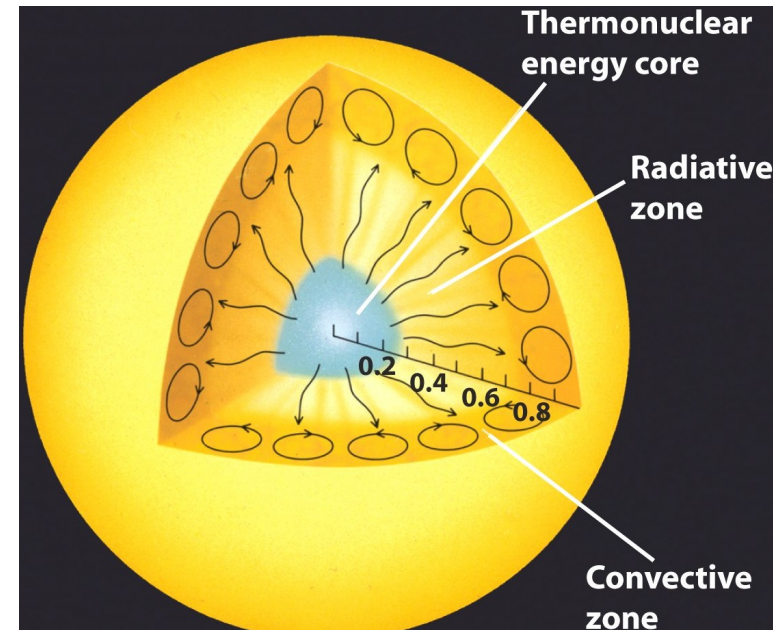
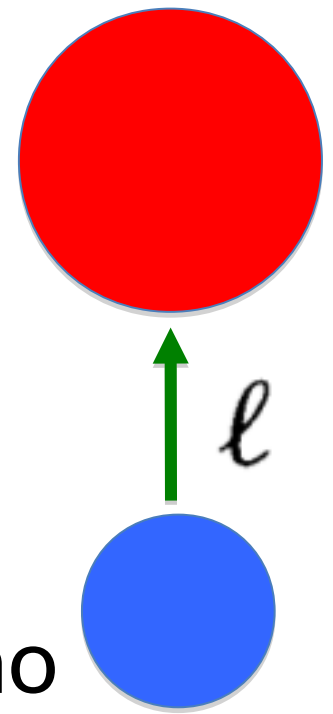
10.3 Fontes de energia

10.4 Transporte de energia: Radiação

10.4 Transporte de energia: Convecção

10.5 Modelos estelares

10.6 A Sequência Principal



AGA 0293, Astrofísica Estelar, IAG-USP

Jorge Meléndez

Equações básicas do interior estelar

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r \rho}{r^2} \quad \text{Equilíbrio hidrostático} \quad (10.6)$$

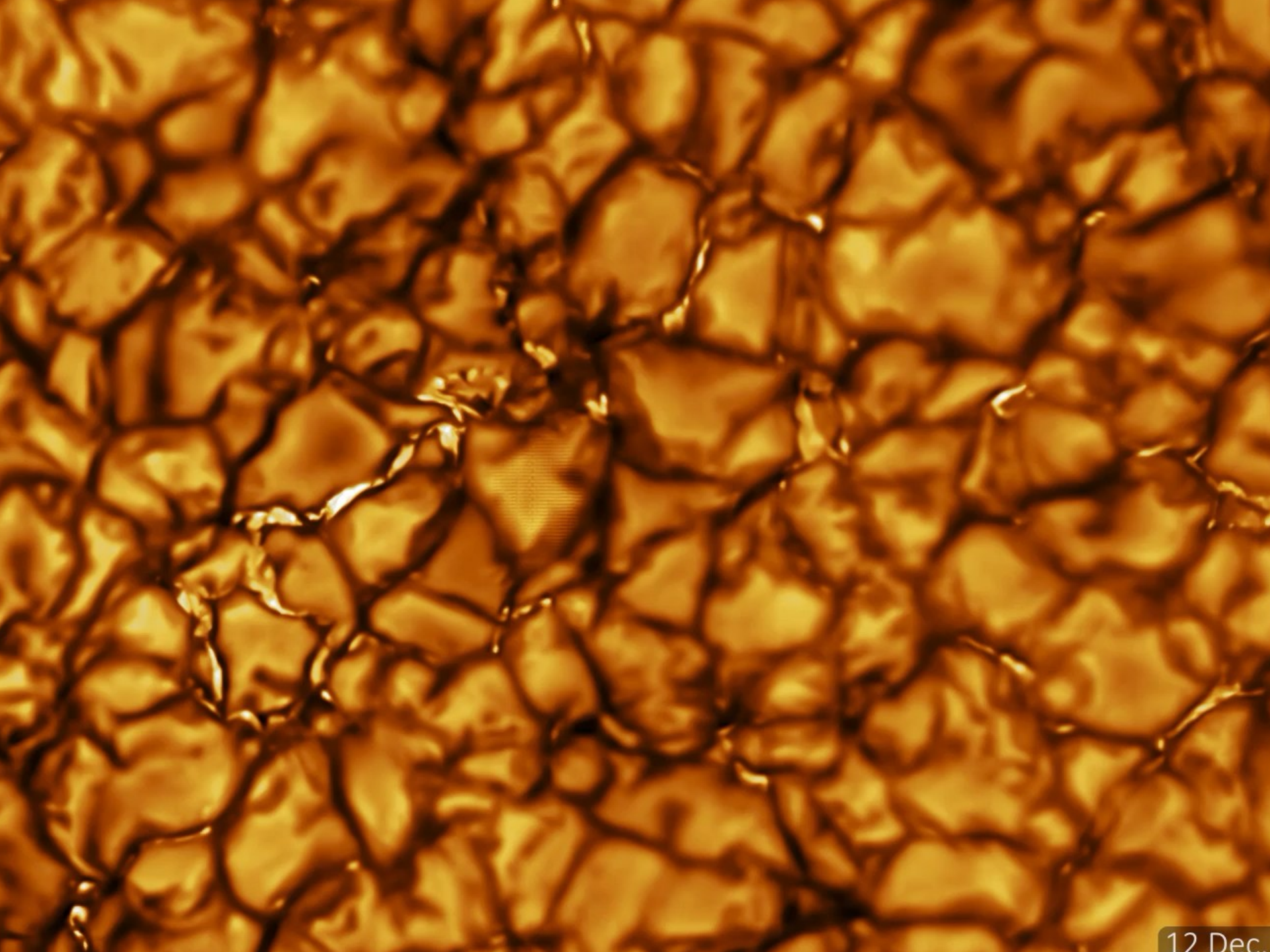
$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad \text{Conservação de massa} \quad (10.7)$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad \text{Gradiente de luminosidade} \quad (10.36)$$

$\epsilon = \epsilon_{\text{nuclear}} \quad \text{OU} \quad \epsilon = \epsilon_{\text{nuclear}} + \epsilon_{\text{gravity}}$

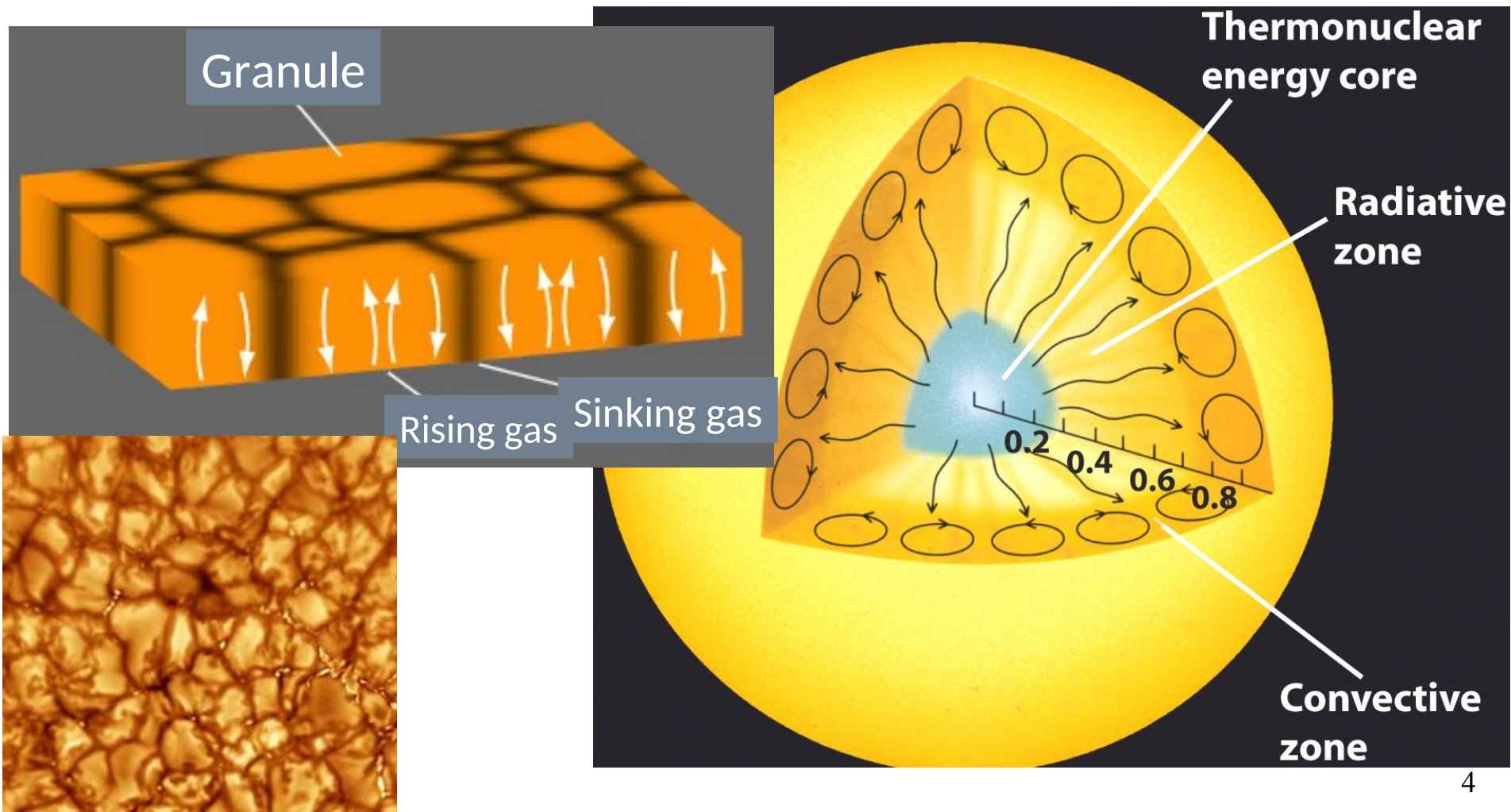
$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\bar{\kappa} \rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2} \quad \text{Gradiente radiativo de temperatura} \quad (10.68)$$

$$\frac{dT}{dr} = ??? \quad \text{Gradiente convectivo de temperatura} \quad (10.89)$$



Transporte de energia: convecção

A convecção é 3D: **hidrodinâmica**. Devido a limitações, os modelos estelares são 1D (dependem só de raio r) e o tratamento da convecção é simplificado.



Altura de escala da variação da pressão H_P

Definição: $\frac{1}{H_P} \equiv -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \rightarrow dP/P = -dr/H_P$

Considerando H_P constante: $\ln P = -r / H_P$

Adotando $P = P_0$ para $r = 0$: $P = P_0 e^{-r/H_P}$

Para $r = H_P \rightarrow P = P_0 e^{-1} = P_0 / e$

A altura de escala é a distância para uma quantidade diminuir por um fator de e

Altura de escala da variação da pressão H_p

Definição: $\frac{1}{H_p} \equiv -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr}$

Lembrando que

$$dP/dr = -\rho g$$

$$1/H_p = (-1/P)(-\rho g)$$

$$\rightarrow H_p = P/\rho g$$

Exemplo 10.4.1. Estimar o valor da altura de escala de pressão (H_P) no Sol. Usar uma pressão média = $P_c/2$ e usar a densidade média do Sol.

$$H_P = P/\rho g$$

$$\bar{g} = \frac{G(M_\odot/2)}{(R_\odot/2)^2} = 550 \text{ m s}^{-2}$$

$$H_P \simeq 1.8 \times 10^8 \text{ m} \sim R_\odot/4.$$

Cálculos mais detalhados mostram: $H_P \sim R_\odot/10$

Primeira lei da termodinâmica

$$dU = dQ - dW$$

Mudança da energia interna de um elemento de massa

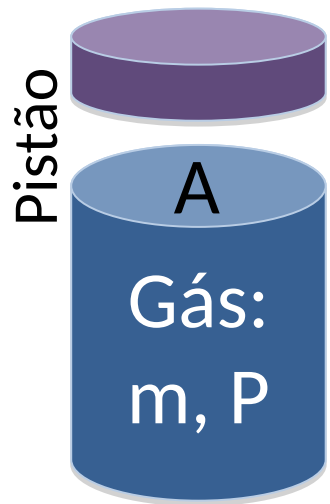
Energia térmica recebida (calor acrescentado)

Energia cedida pelo elemento ao entorno na forma de trabalho

No texto, as mudanças da energia acima são por unidade de massa

Primeira lei da termodinâmica: $dU = dQ - dW$

As mudanças da energia acima são por unidade de massa



Força pelo gás: $F = P A$

Trabalho pelo gás $= F dr$

Trabalho por

unidade de massa:

$$dW = F dr/m$$

$$dW = P A dr/m = P dV$$

$$\rightarrow dU = dQ - P dV$$

V: volume específico
(volume/massa)
ou $V = 1/\rho$

Energia interna para um gás ideal monoatômico neutro (sem ionização)

Energia total interna por unidade de massa é:

$U = (\text{energia média/partícula}) \times (\text{número de partículas/massa})$

$$= \overline{K} \times \frac{1}{\overline{m}} \quad \text{onde } \overline{m} = \mu m_H \text{ é a massa média de uma partícula no gás}$$

Para um gás ideal: $\overline{K} = 3kT/2$

→ A energia interna:

$$nR = \frac{k}{\mu m_H}$$

$$U = \frac{3}{2} \left(\frac{k}{\mu m_H} \right) T = \frac{3}{2} n R T$$

n : número de moles por unidade de massa
 $R = 8,314472 \text{ J mole}^{-1} \text{ K}^{-1}$ (cte. univ. gases)

1 mole = N_A partículas, $N_A = 6,02214199 \times 10^{23}$
(número de Avogadro)

Calores específicos

A mudança de calor dQ é expressada em termos do **calor específico** C (quantidade de calor requerida para elevar a temperatura de uma unidade de massa de material por unidade de intervalo de temperatura):

$$C_V \equiv \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right|_V$$

Calor específico
a volume
constante

$$C_P \equiv \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right|_P$$

Calor
específico a
pressão
constante

Para um gás ideal
monoatômico:

$$C_V = \frac{3}{2}nR$$

$$C_P = C_V + nR$$

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

$$dU = C_V dT$$

$$dU = \frac{3}{2}nRdT$$

Definição do
parâmetro γ :

$$\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V}$$

razão dos calores
específicos a pressão
e volume constantes

Gás neutro ou completamente
ionizado monoatômico: $\gamma = 5/3 = 1,67$

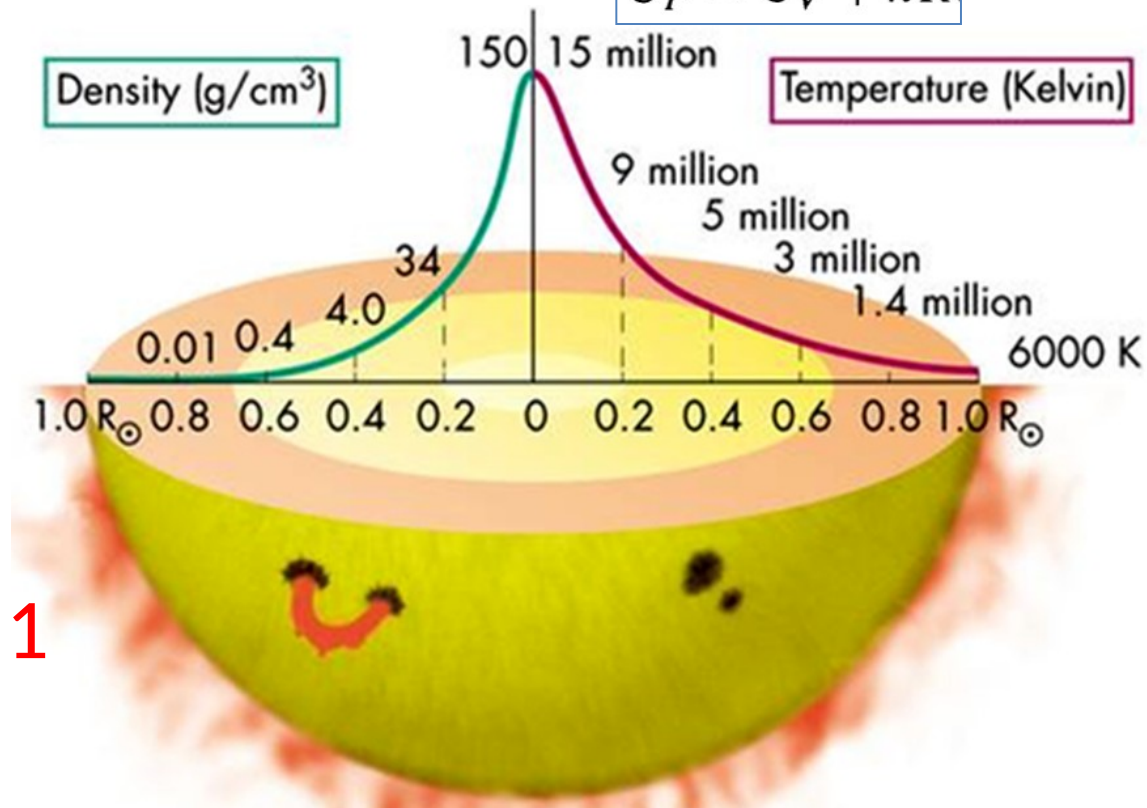
$$C_V = \frac{3}{2}nR$$

$$C_P = C_V + nR$$

Gás diatômico:
 $\gamma = 7/5 = 1,40$

Gás poliatômico:
 $\gamma = 4/3 = 1,33$

Ionização
acontecendo $\rightarrow \gamma \sim 1$



Mudança da energia interna dU em função do calor específico C_V

Primeira lei da termodinâmica: $dU = dQ - PdV$

→ A volume constante: $dU = dQ$
 $dU|_V = dQ|_V$

$$dU = \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right|_V dT = C_V dT$$

[It is important to note that because dU is independent of any specific process, the second equality of Eq. (10.74) is always valid, regardless of the type of thermodynamic process involved.]

$$dU = C_V dT$$

Lei do gás adiabático

Processo adiabático: $dQ = 0$

Primeira lei da termodinâmica: $dU = dQ - PdV$

$$\rightarrow dU = -PdV$$

Lembrando $dU = C_V dT \rightarrow dT = \frac{dU}{C_V}$

$$dT = -\frac{PdV}{C_V}$$

$$\text{Gás adiabático: } dT = - \frac{P dV}{C_V}$$

Lei do gás ideal: $PV = nRT$

Diferenciando: $PdV + V dP = RT dn + nR dT$

Para $n = \text{cte}$: $PdV + V dP = nR dT$

$$PdV + V dP = nR \left(- \frac{P dV}{C_V} \right)$$

$$C_V P dV + C_V V dP = -nR P dV$$

Fator comum $dV P \rightarrow dV P (C_V + nR) = -C_V V dP$

$$dV P C_P = -C_V V dP$$

Lembrando que
para um gás ideal:

$$C_P = C_V + nR$$

Lei do gás adiabático

$$\text{Gás ideal: } dV P C_P = - C_V V dP$$

Lembrando a
definição do
parâmetro γ :

$$\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V}$$

$$dV P \gamma = - V dP$$

$$\gamma dV/V = - dP/P$$

$$\ln V^\gamma = \ln P^{-1}$$

Resolvendo, temos a
lei do gás adiabático:

$$P V^\gamma = K$$

K : constante

Lei do gás adiabático

$$PV^\gamma = K$$

K : constante

Lei do gás ideal:

$$PV = nRT$$

$$P^{\gamma-1} PV^\gamma = K P^{\gamma-1}$$

$$(nRT)^\gamma = K P^{\gamma-1}$$

$$T^\gamma (n^\gamma R^\gamma / K) = P^{\gamma-1}$$

$$T^{\gamma/(\gamma-1)} (n^\gamma R^\gamma / K)^{1/(\gamma-1)} = P$$

$$\rightarrow P = K' T^{\gamma/(\gamma-1)} \quad K': \text{constante}$$

O γ é chamado de “ **γ adiabático**” e define as simples equações de estado acima

Velocidade do som adiabática: $v_s = \sqrt{\gamma P / \rho}$

Exemplo 10.4.2. Estimar a velocidade adiabática no interior do Sol.

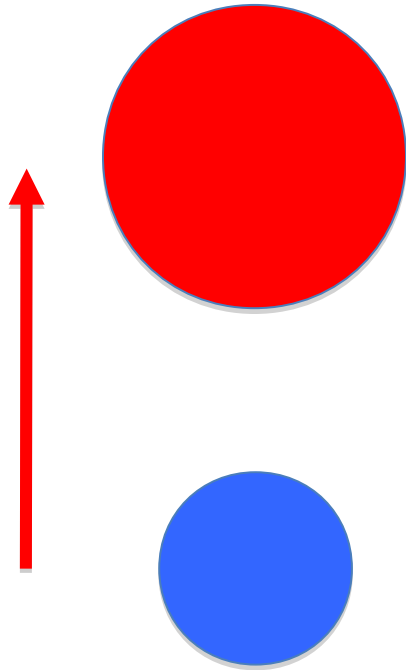
Usar uma pressão média = $P_c/2$, densidade média do Sol, e considerar gás monoatômico neutro ($\gamma = 5/3$)

$$\bar{v}_s \simeq \left(\frac{5}{3} \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}_\odot} \right)^{1/2} \simeq 4 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$$

→ Tempo para onda de som atravessar o Sol:

$$t \simeq R_\odot / \bar{v}_s \simeq 29 \text{ minutes}$$

Gradiente de temperatura adiabático



Para estudar a convecção, consideremos uma bolha que sobe e se expande adiabaticamente ($dQ = 0$)

Qual o gradiente de temperatura dT/dr ?

Gradiente de temperatura adiabático

Lei do gás
adiabático

$$PV^\gamma = K$$

V : volume específico

(volume/massa), $V = 1/\rho$

\rightarrow

$$P = K\rho^\gamma$$

Diferenciando: $dP/dr = K \gamma \rho^{\gamma-1} d\rho/dr$

$$dP/dr = \gamma K \rho^\gamma \rho^{-1} d\rho/dr$$

Como $P = K\rho^\gamma \rightarrow \frac{dP}{dr} = \gamma \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr}$

Gradiente de temperatura adiabático

Gás ideal: $P_g = \frac{\rho k T}{\mu m_H}$

Diferenciando: $\frac{dP}{dr} = -\frac{P}{\mu} \frac{d\mu}{dr} + \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{P}{T} \frac{dT}{dr}$

Considerando μ constante: $\frac{dP}{dr} = \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{P}{T} \frac{dT}{dr}$

Como: $\frac{dP}{dr} = \gamma \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr}$

Gradiente de
temperatura adiabático:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

Gradiente de temperatura adiabático

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

Usando a eq. de equilíbrio hidrostático e a lei do gás ideal:

$$P_g = \frac{\rho k T}{\mu m_H} \quad \frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r \rho}{r^2} = -\rho g$$



$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} = - \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\mu m_H}{k} \frac{G M_r}{r^2}$$

It is sometimes helpful to express Eq. (10.89) in another, equivalent form. Recalling that $g = G M_r / r^2$, $k / \mu m_H = n R$, $\gamma = C_P / C_V$, and $C_P - C_V = n R$, and that n , C_P , and C_V are per unit mass, we have

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} = - \frac{g}{C_P}$$

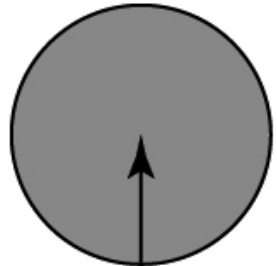
Critério para convecção estelar

s: entorno *b*: bolha

$$P_f^{(s)}$$

$$T_f^{(s)}$$

$$\rho_f^{(s)}$$



$$P_f^{(b)}$$

$$T_f^{(b)}$$

$$\rho_f^{(b)}$$

f: final

Se a densidade final da bolha *b* for maior que no entorno *s* → **estável**

$$\rho_f^{(b)} > \rho_f^{(s)}$$

Se a densidade final da bolha *b* for menor que no entorno *s* → **convecção**

$$\rho_f^{(b)} < \rho_f^{(s)}$$

$$P_i^{(s)}$$

$$T_i^{(s)}$$

$$\rho_i^{(s)}$$

Surrounding
gas

$$P_i^{(b)}$$

$$T_i^{(b)}$$

$$\rho_i^{(b)}$$

Bubble

i: inicial

Critério para convecção estelar

$$\rho_f^{(b)} < \rho_f^{(s)}$$

Podemos usar uma expansão de Taylor para determinar a densidade final da bolha **b** e do entorno **s**:

$$\rho_f^{(b)} \simeq \rho_i^{(b)} + \left. \frac{d\rho}{dr} \right|^{(b)} dr \quad \text{e} \quad \rho_f^{(s)} \simeq \rho_i^{(s)} + \left. \frac{d\rho}{dr} \right|^{(s)} dr$$

Supondo densidade inicial similar na bolha e no entorno:

$$\left. \frac{d\rho}{dr} \right|^{(b)} < \left. \frac{d\rho}{dr} \right|^{(s)}$$

Critério para convecção estelar

$$\left. \frac{d\rho}{dr} \right|^{(b)} < \left. \frac{d\rho}{dr} \right|^{(s)}$$

É possível demonstrar:

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} > \left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{act}}$$

act: actual

Quer dizer o
gradiente
real de
temperatura

O termo da esquerda é
o gradiente de
temperatura adiabático:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} > \left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{act}}$$

Como T diminui com o
aumento do raio ($dT/dr < 0$),
no valor absoluto a
desigualdade é revertida:

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{act}} > \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}}$$

Se o gradiente de temperatura for
super-adiabático → convecção

Critério para convecção estelar

Outras formas de escrever o critério de convecção:

$$\frac{T}{P} \frac{dP}{dT} < \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

$$\frac{d \ln P}{d \ln T} < \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

Considerando um gás monoatômico ($\gamma = 5/3$)

$$\rightarrow \gamma/(\gamma-1) = 5/3 / (5/3 - 3/3) = 5/3 / (2/3) = 5/2 = 2,5.$$

Gás monoatômico

→ convecção:

$$\frac{d \ln P}{d \ln T} < 2,5$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\bar{\kappa} \rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2}$$

Gradiente radiativo de T

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

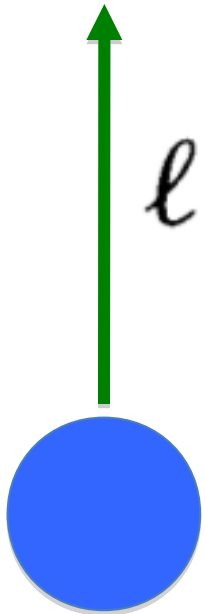
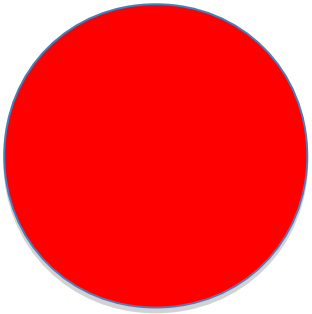
Gradiente adiabático de T

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{act}} > \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}}$$

Convecção:

- 1) Opacidade alta
- 2) Regiões onde acontece ionização (γ pequeno ~ 1)
- 3) Dependência muito forte da geração de energia com T

Convecção: a aproximação do comprimento de mistura ℓ



percurso da
bolha
convectiva
até ficar
termalizada

$$\ell = \alpha H_P$$

H_P : escala
de pressão

Parâmetro livre α :

$$\alpha \equiv \ell / H_P$$

Comparação entre modelos
e observações, $0,5 < \alpha < 3$

Fluxo convectivo

$$F_c = \rho C_P \left(\frac{k}{\mu m_H} \right)^2 \left(\frac{T}{g} \right)^{3/2} \beta^{1/2} \left[\delta \left(\frac{dT}{dr} \right) \right]^{3/2} \alpha^2$$

$$\bar{v}_c = \beta^{1/2} \left(\frac{T}{g} \right)^{1/2} \left(\frac{k}{\mu m_H} \right) \left[\delta \left(\frac{dT}{dr} \right) \right]^{1/2} \alpha$$

β : entra na
velocidade média
convectiva; $0 < \beta < 1$

Diferença no
gradiente de
temperatura:

$$\delta \left(\frac{dT}{dr} \right) = \left(\frac{dT}{dr} \Big|_{\text{ad}} - \frac{dT}{dr} \Big|_{\text{act}} \right)$$

Se todo o fluxo for carregado pela convecção:

$$F_c = \frac{L_r}{4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow \delta \left(\frac{dT}{dr} \right) = \left[\frac{L_r}{4\pi r^2} \frac{1}{\rho C_P \alpha^2} \left(\frac{\mu m_H}{k} \right)^2 \left(\frac{g}{T} \right)^{3/2} \beta^{-1/2} \right]^{2/3}$$

Exemplo 10.4.3. Estimar o gradiente de temperatura adiabático e a velocidade convectiva na base da zona convectiva. Usar $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$

Assume that $M_r = 0.976 M_\odot$, $L_r = 1 L_\odot$, $r = 0.714 R_\odot$, $g = GM_r/r^2 = 525 \text{ m s}^{-2}$, $C_P = 5nR/2$, $P = 5.59 \times 10^{12} \text{ N m}^{-2}$, $\rho = 187 \text{ kg m}^{-3}$, $\mu = 0.606$, and $T = 2.18 \cdot 10^6 \text{ K}$.

Usando: $\left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} = -\frac{g}{C_P} \rightarrow \left| \left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} \right| \sim 0.015 \text{ K m}^{-1}$

Usando:

$$\delta \left(\frac{dT}{dr} \right) = \left[\frac{L_r}{4\pi r^2} \frac{1}{\rho C_P \alpha^2} \left(\frac{\mu m_H}{k} \right)^2 \left(\frac{g}{T} \right)^{3/2} \beta^{-1/2} \right]^{2/3} \rightarrow \delta \left(\frac{dT}{dr} \right) \sim 6.7 \times 10^{-9} \text{ K m}^{-1}$$

$$\frac{\delta(dT/dr)}{|dT/dr|_{\text{ad}}} \sim 4.4 \times 10^{-7}$$

$$\bar{v}_c = \beta^{1/2} \left(\frac{T}{g} \right)^{1/2} \left(\frac{k}{\mu m_H} \right) \left[\delta \left(\frac{dT}{dr} \right) \right]^{1/2} \alpha \rightarrow \bar{v}_c \sim 50 \text{ m s}^{-1} \\ \sim 10^{-4} v_s$$

10.5 Modelos estelares

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r \rho}{r^2} \quad \text{Equilíbrio hidrostático} \quad (10.6)$$

$$\rho \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{M_r \rho}{r^2} - \frac{dP}{dr} \quad (10.5)$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad \text{Conservação de massa} \quad (10.7)$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad \text{Gradiente de luminosidade} \quad (10.36)$$

$\epsilon = \epsilon_{\text{nuclear}} \quad \text{OU} \quad \epsilon = \epsilon_{\text{nuclear}} + \epsilon_{\text{gravity}}$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\bar{\kappa} \rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2} \quad \text{Gradiente radiativo de temperatura} \quad (10.68)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\mu m_H}{k} \frac{GM_r}{r^2} \quad \text{Gradiente convectivo de temperatura} \quad (10.89)$$

$$\frac{d \ln P}{d \ln T} < \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

Relações constitutivas

$$P = P(\rho, T, \text{composition})$$

$$P_t = \frac{\rho k T}{\mu m_H} + \frac{1}{3} a T^4$$

Aproximadamente gás ideal
+ pressão de radiação

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(\rho, T, \text{composition})$$

Interpolado em
tabelas. Formulas
aproximadas para
opacidade do contínuo

$$\epsilon = \epsilon(\rho, T, \text{composition})$$

Por exemplo: $\epsilon_{pp} = 0.241 \rho X^2 f_{pp} \psi_{pp} C_{pp} T_6^{-2/3} e^{-33.80 T_6^{-1/3}} \text{ W kg}^{-1}$

$$\epsilon_{\text{CNO}} = 8.67 \times 10^{20} \rho X X_{\text{CNO}} C_{\text{CNO}} T_6^{-2/3} e^{-152.28 T_6^{-1/3}} \text{ W kg}^{-1}$$

Calculo mais sofisticado: usando cadeias de reação para cada isótopo

Condições de contorno

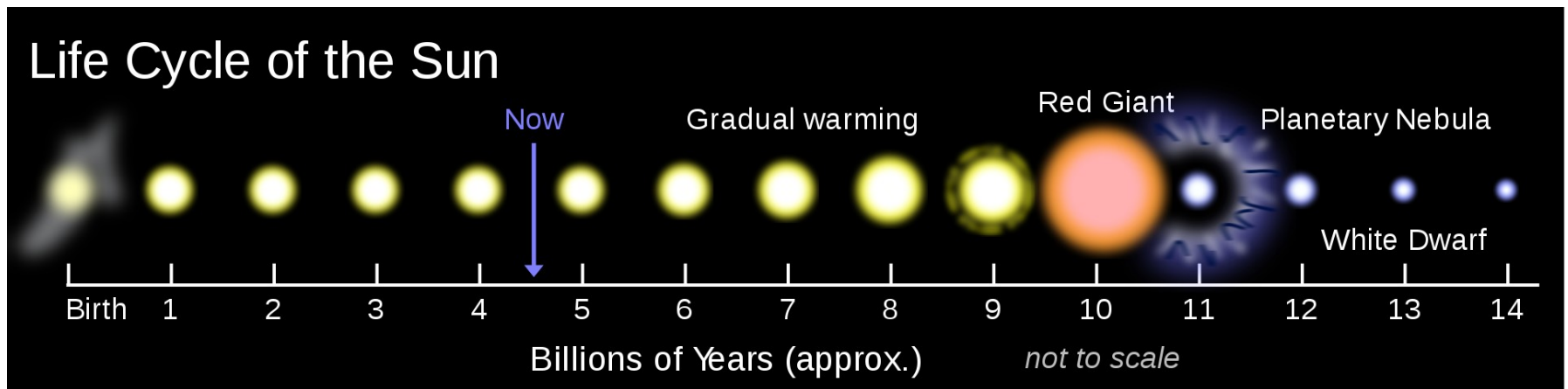
$$\left. \begin{array}{l} M_r \rightarrow 0 \\ L_r \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ as } r \rightarrow 0$$

$$\left. \begin{array}{l} T \rightarrow 0 \\ P \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ as } r \rightarrow R_\star$$

Teorema de Vogt-Russell

A massa e composição da estrela determinam seu raio, luminosidade e estrutura interna, assim como a sua evolução

Gêmeas solares são estrelas da sequência principal com massa e composição química similares ao Sol. Como elas seguem a evolução do Sol, podemos usar gêmeas solares de várias idades para estudar o passado e futuro do Sol



Modelagem numérica

•
•
•
•

$$P_{i+1} = P_i + \frac{\Delta P}{\Delta r} \delta r$$

$$\frac{dP}{dr}$$

Código StatStar:
modelo estelar
simples baseado
no material do
livro (apêndice L)

Link:

•
•
•
•
•

http://wps.aw.com/aw_carroll_ostlie_astro_2e/48/12319/3153834.cw/index.html



Código livre mais completo para estudo da estrutura e evolução das estrelas: MESA

<http://mesa.sourceforge.net>



- **Openness:** anyone can download sources from the website.
- **Modularity:** independent modules for physics and for numerical algorithms; the parts can be used stand-alone.
- **Wide Applicability:** capable of calculating the evolution of stars in a wide range of environments.
- **Modern Techniques:** advanced AMR, fully coupled solution for composition and abundances, mass loss and gain, etc.
- **Comprehensive Microphysics:** up-to-date, wide-ranging, flexible, and independently useable microphysics modules.
- **Performance:** runs well on a personal computer and makes effective use of parallelism with multi-core architectures.

A sequência principal

- 70% massa de H ($X \sim 0.7$), metais $< 3\%$ ($Z = 0 - 0,03$); o resto é He ($Y \sim 0,3$)
- Supor composição inicial homogênea
- Quais as reações nucleares inicialmente favorecidas? p-p: baixa massa, CNO: alta massa
- Limite aproximado para uma estrela:
 $0,08 M_{\odot} < M < 100 M_{\odot}$

Limite de luminosidade de Eddington

Em alguns casos a pressão de radiação pode dominar sobre a pressão do gás

$$P_t = \frac{\rho k T}{\mu m_H} + \frac{1}{3} a T^4$$

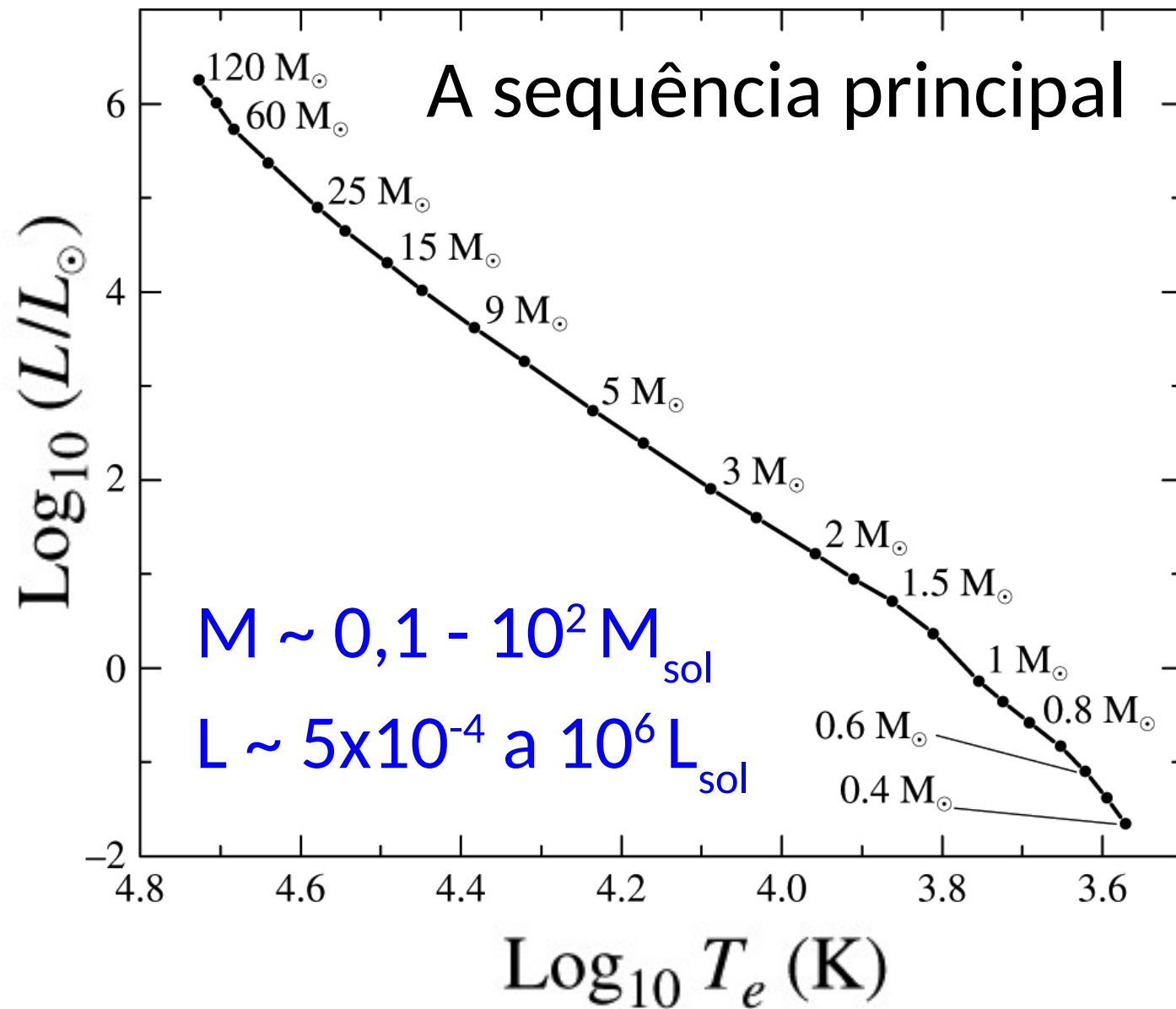
$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{\bar{\kappa}\rho}{c} F_{\text{rad}} \quad F = \frac{L}{4\pi r^2} \quad \frac{dP}{dr} \simeq -\frac{\bar{\kappa}\rho}{c} \frac{L}{4\pi r^2} \quad \frac{dP}{dr} = -G \frac{M\rho}{r^2}$$

Limite de Eddington: máxima luminosidade radiativa que a estrela pode ter e ainda se manter em equilíbrio

$$L_{\text{Ed}} = \frac{4\pi G c}{\bar{\kappa}} M$$

Importante em estrelas massivas

$$\frac{L_{\text{Ed}}}{L_{\odot}} \simeq 3.8 \times 10^4 \frac{M}{M_{\odot}}$$



$T_{\text{eff}} = 2000 - 40\,000 \text{ K}$ na sequência principal

