Cap. 10. Interiores Estelares

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

10.1 Equilíbrio Hidrostático

10.2 Equação de estado da Pressão

10.3 Fontes de energia

10.4 Transporte de energia: Radiação

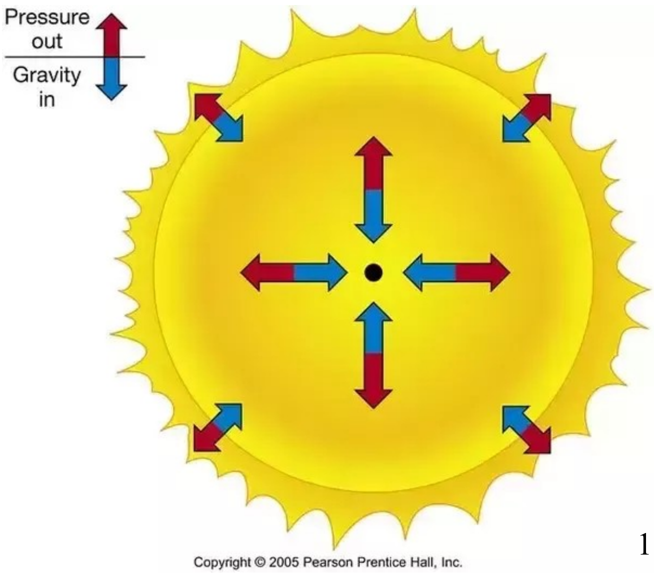
10.4 Transporte de energia: Convecção

10.5 Modelos estelares

10.6 A Sequência Principal

$$dP/dr = -\rho\, g$$

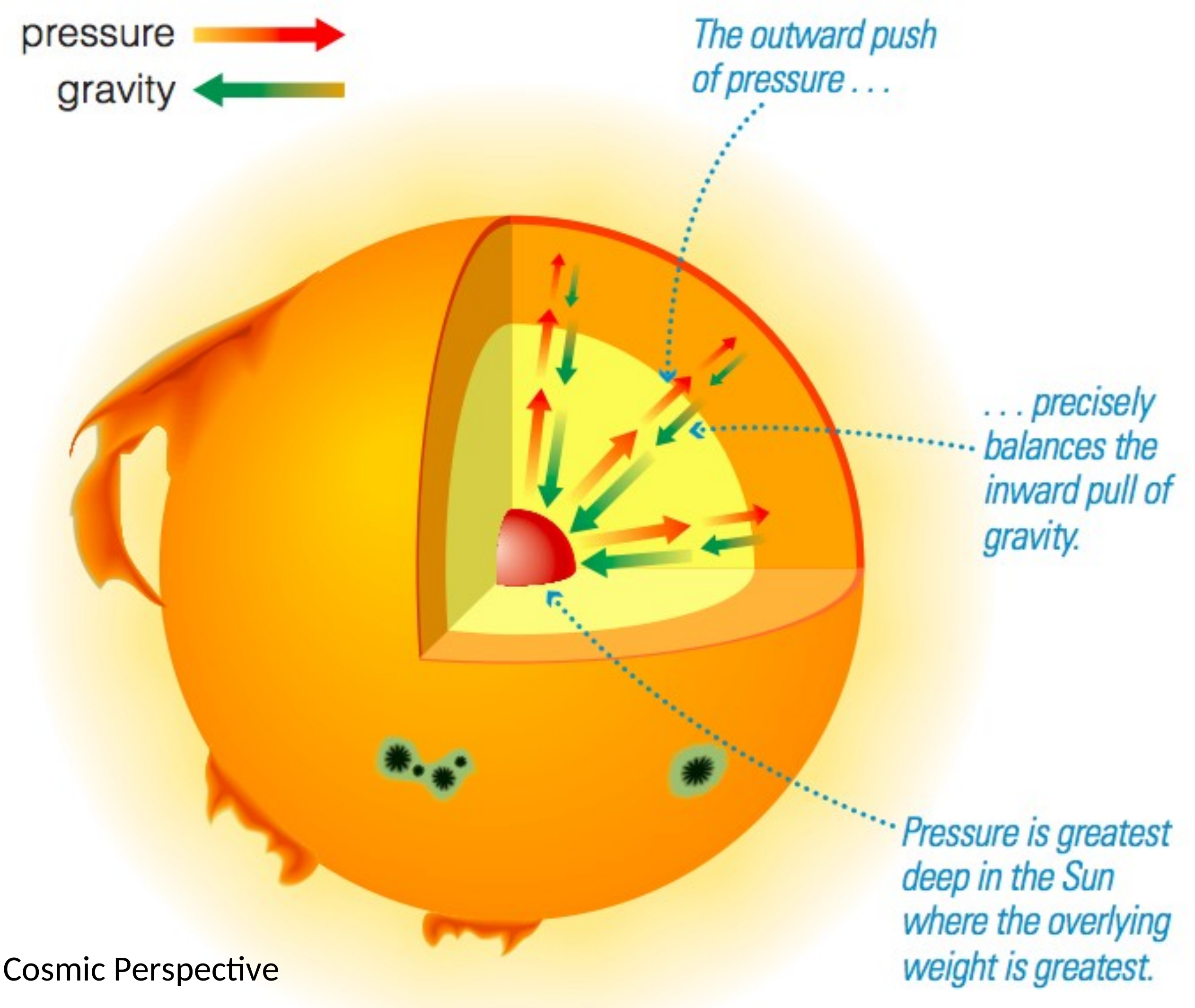
$$P_g = \frac{\rho k T}{\mu m_H}$$



AGA 0293, Astrofísica Estelar, IAG-USP

Jorge Meléndez

Equilíbrio gravitacional



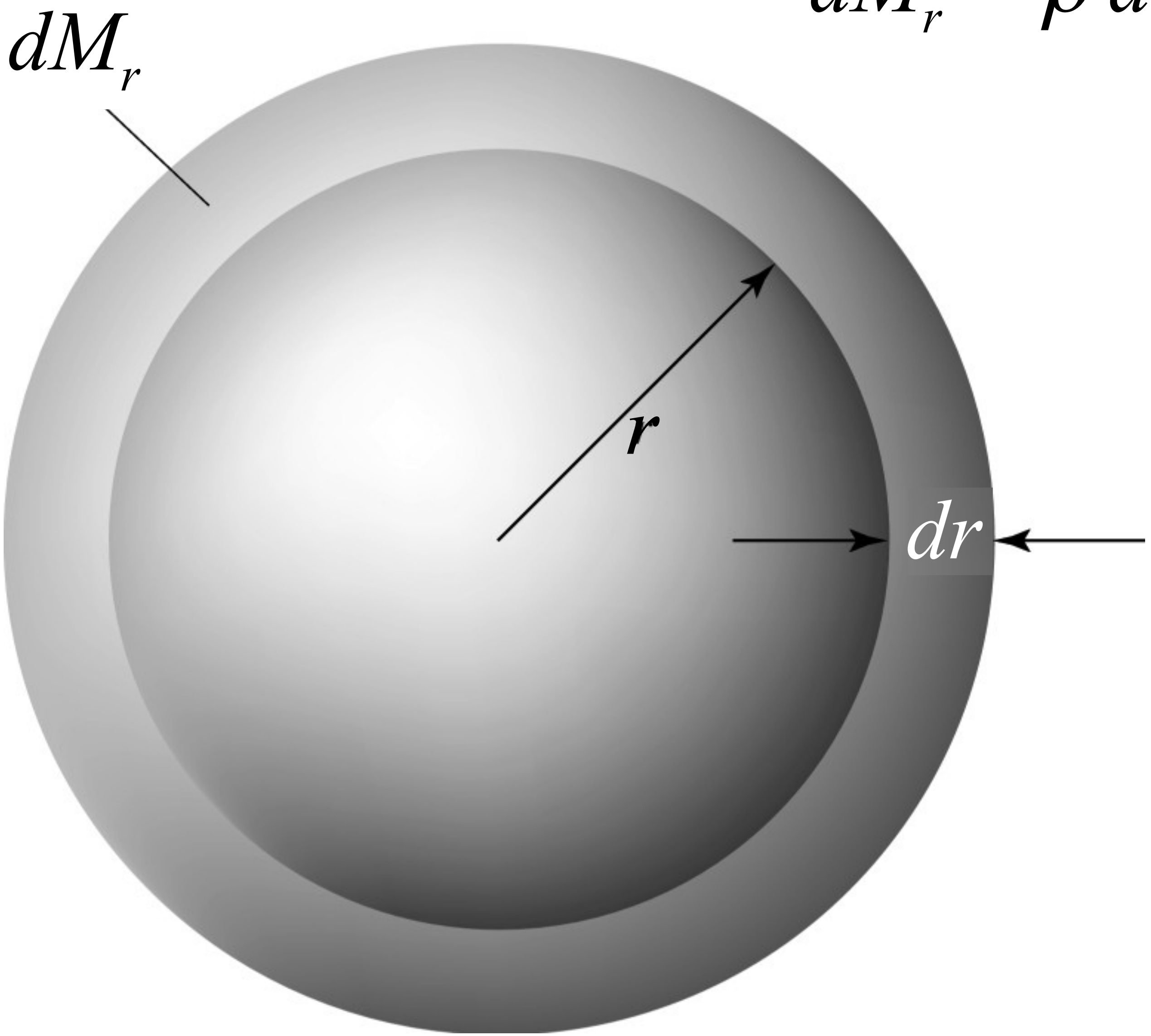
No interior das estrelas, temos o equilíbrio entre a força de pressão para fora e a gravidade para dentro

Equação de Conservação de Massa

$$dM_r = \rho \, dV$$

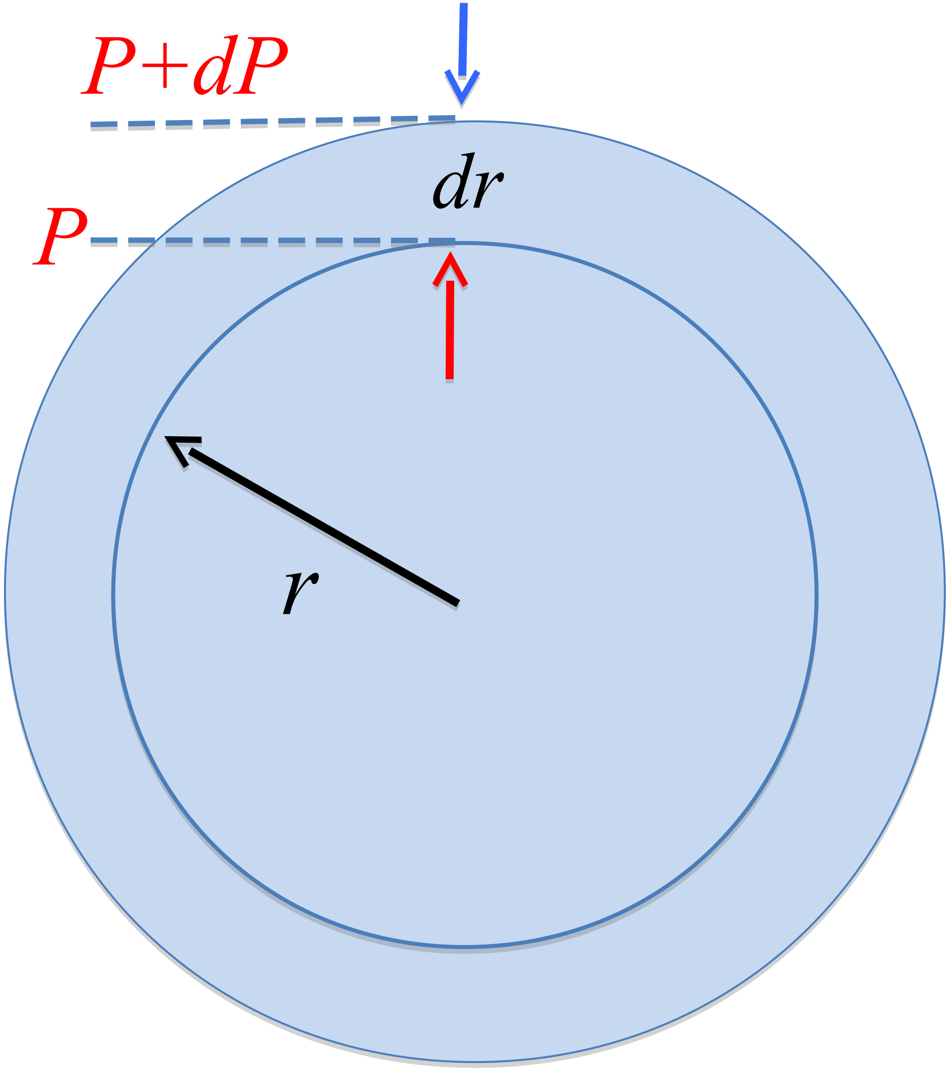
$$dV = A \, dr$$

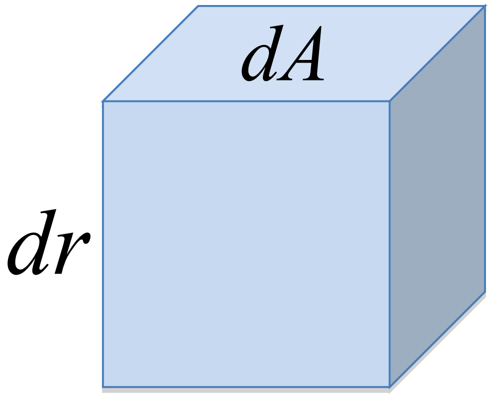
$$A = 4\pi r^2$$



$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

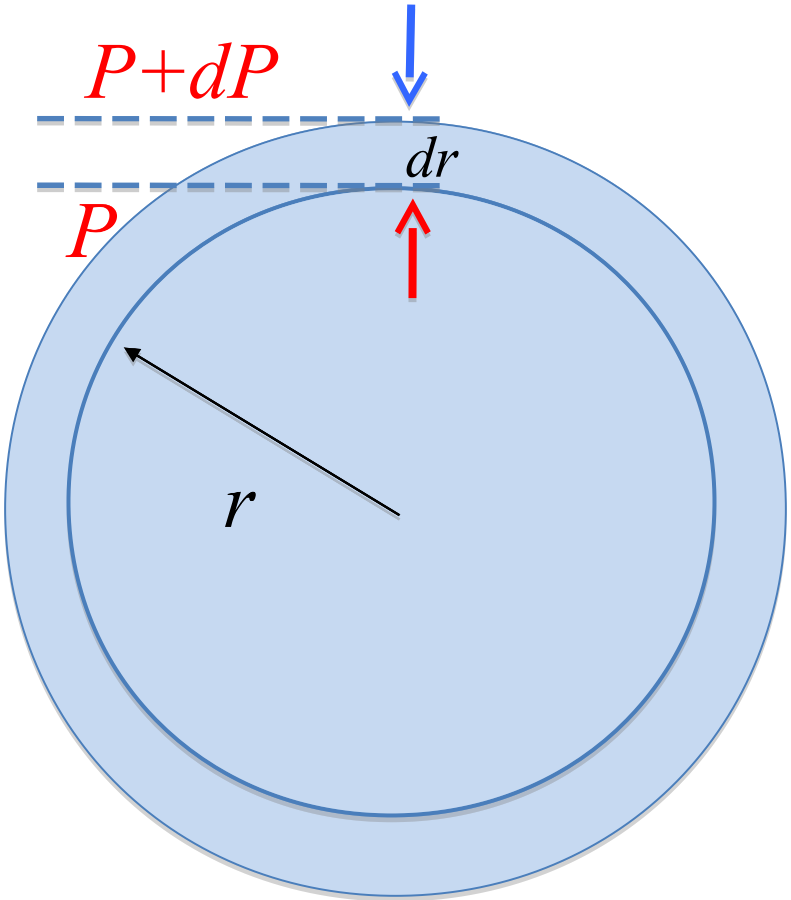
Equilíbrio hidrostático

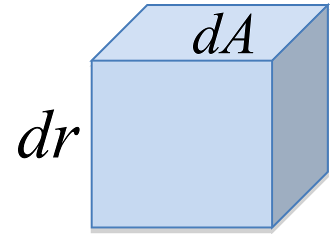




$$dV = dA\, dr$$
$$dM = \rho\, dV$$

Equilíbrio hidrostático

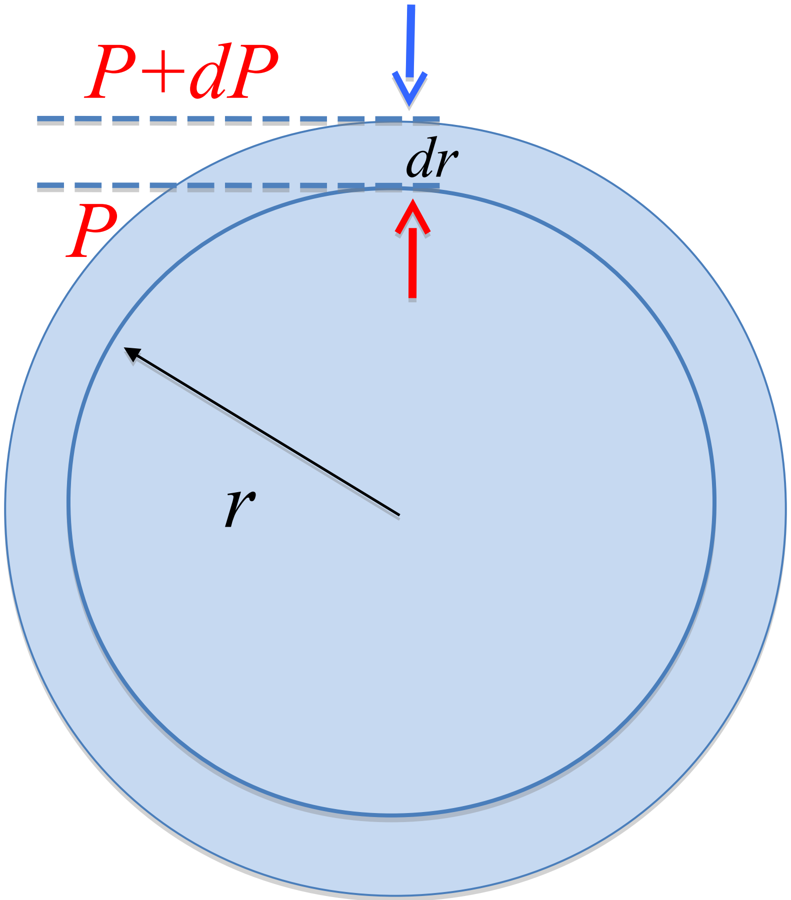


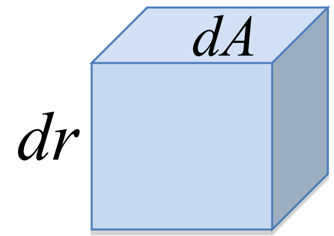


$$dV = dA\, dr$$
$$dM = \rho\, dV$$

$$F_{\mathrm{grav}} = -dM \times g = -\rho\, dV\, g$$

Equilíbrio hidrostático



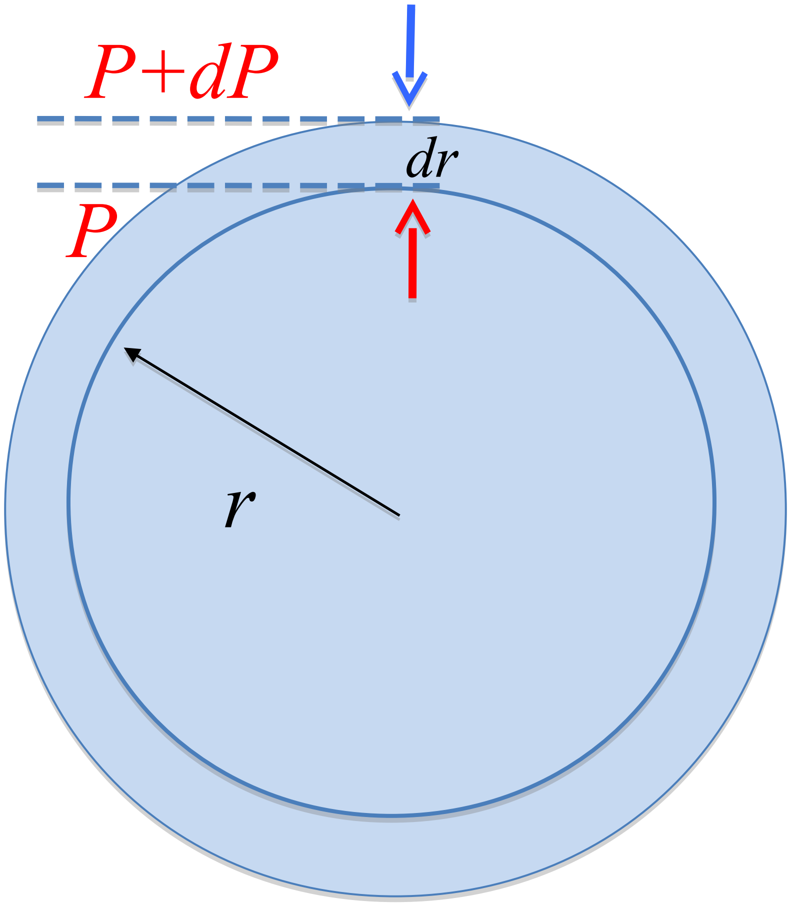


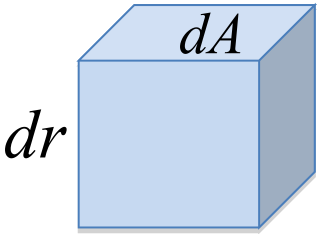
$$dV = dA\,dr$$
$$dM = \rho\,dV$$

$$F_{\text{grav}} = -dM \times g = -\rho\,dV\,g$$

$$F_{\text{pressão}} = dP \times dA = dP\,dV/dr$$

Equilíbrio hidrostático





$$dV = dA\; dr$$
$$dM = \rho\; dV$$

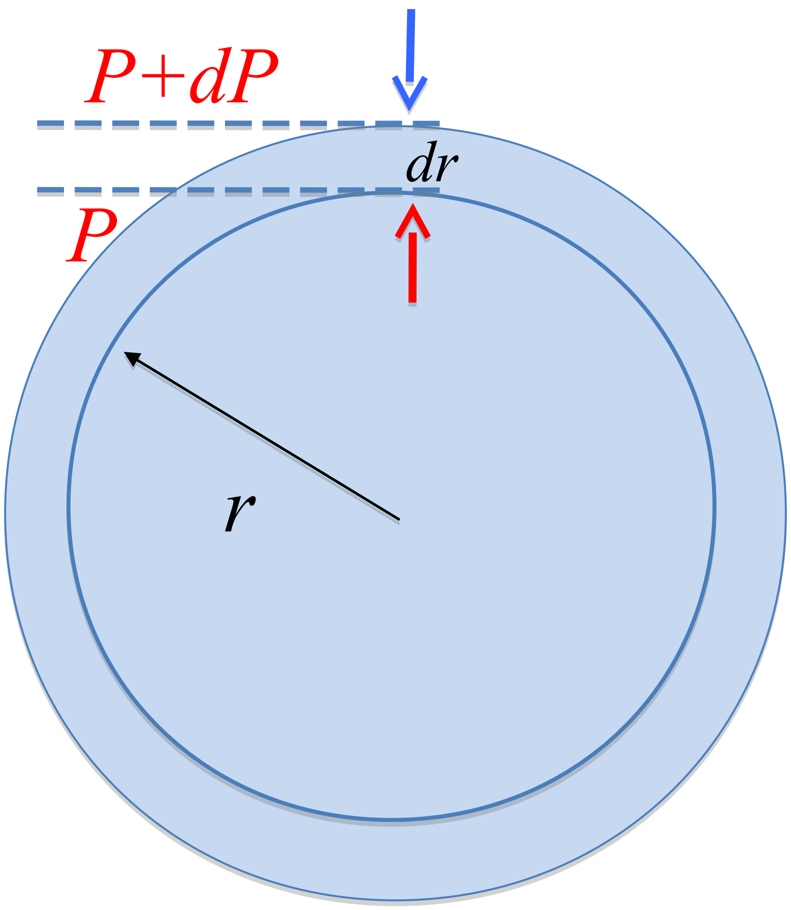
$$F_{\mathrm{grav}} = -dM \times g = -\rho\; dV\; g$$

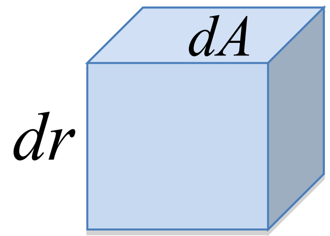
$$F_{\mathrm{pressão}} = dP \times dA = dP\; dV/dr$$

$$\rightarrow dP\; dV/dr = -\rho\; dV\; g$$

$$dP/dr = -\rho\; g$$

Equilíbrio hidrostático





$$dV = dA\,dr$$
$$dM = \rho\,dV$$

$$dP/dr = -\rho\,g$$

$$g \equiv GM_r/r^2$$

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r\rho}{r^2}}$$

Ex. 10.1.1. Obter uma estimativa da pressão no centro do Sol

Example 8.2.1. The Sun, a G2 main-sequence star, has a mass of $M_\odot = 1.9891 \times 10^{30}$ kg and a radius of $R_\odot = 6.95508 \times 10^8$ m. Its average density is thus

$$\overline{\rho}_\odot = \frac{M_\odot}{\frac{4}{3}\pi R_\odot^3} = 1410 \text{ kg m}^{-3}$$

Ex. 10.1.1. Obter uma estimativa da pressão no centro do Sol

Example 8.2.1. The Sun, a G2 main-sequence star, has a mass of $M_\odot = 1.9891 \times 10^{30}$ kg and a radius of $R_\odot = 6.95508 \times 10^{8}$ m. Its average density is thus

$$\overline{\rho}_\odot = \frac{M_\odot}{\frac{4}{3}\pi R_\odot^3} = 1410 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r \rho}{r^2}$$

$$\frac{dP}{dr} \sim \frac{P_s - P_c}{R_s - 0} \sim -\frac{P_c}{R_\odot}$$

Ex. 10.1.1. Obter uma estimativa da pressão no centro do Sol

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r \rho}{r^2}$$

$$\frac{dP}{dr} \sim -\frac{P_c}{R_\odot} = -G\frac{M_\odot \overline{\rho}_\odot}{R_\odot^2}$$

$$P_c \sim G\frac{M_\odot \overline{\rho}_\odot}{R_\odot} \sim 2.7 \times 10^{14}\ \mathrm{N\ m^{-2}}$$

$$M_\odot = 1.9891 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$$
$$R_\odot = 6.95508 \times 10^{8}\ \mathrm{m}$$
$$\overline{\rho}_\odot = 1410\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$$

Valor aproximado da pressão no centro do Sol

$$P_c \sim G\frac{M_\odot \bar{\rho}_\odot}{R_\odot} \sim 2.7 \times 10^{14}\ \mathrm{N\ m^{-2}}$$

Valor mais preciso integrando:

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r \rho}{r^2}$$

$$\int_{P_s}^{P_c} dP = P_c = -\int_{R_s}^{R_c} \frac{GM_r\rho}{r^2}\,dr.$$

$$\begin{aligned} P_c &= 2.34 \times 10^{16}\ \mathrm{N\ m^{-2}} \\ &= 2.3 \times 10^{11}\ \mathrm{atm!} \end{aligned}$$

$$1\ \mathrm{atm} = 1.013 \times 10^5\ \mathrm{N\ m^{-2}}$$

10.2 Equação de Estado da Pressão

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r\rho}{r^2}$$

Qual a origem da pressão?

10.2 Equação de Estado da Pressão

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r \rho}{r^2}$$

Qual a origem da pressão?

Precisamos uma "equação de estado" do material,

por exemplo da lei do gás ideal: $PV = NkT$

V: volume do gás

N: número de partículas

k: cte. Boltzmann

T: temperatura

10.2 Equação de Estado da Pressão

$$\frac{dP}{dr} = -G\frac{M_r \rho}{r^2}$$

Qual a origem da pressão?

Precisamos uma "equação de estado" do material, por exemplo da lei do gás ideal: $PV = NkT$

$$n \equiv N/V$$

$$\boxed{P_g = nkT}$$

V: volume do gás

N: número de partículas

k: cte. Boltzmann

T: temperatura

10.2 Equação de Estado da Pressão

$$\boxed{P_g = nkT}$$

$n = N / V$

$$\boxed{P_g = \frac{\rho k T}{\overline{m}}}$$

$n = \rho / \overline{m}$

$\overline{m}$: massa média

10.2 Equação de Estado da Pressão

$$\boxed{P_g = nkT}$$

$$n = N / V$$

$$\boxed{P_g = \frac{\rho k T}{\overline{m}}}$$

$$n = \rho / \overline{m}$$

$\overline{m}$: massa média

$$\boxed{P_g = \frac{\rho k T}{\mu m_H}}$$

$$\boxed{\mu \equiv \frac{\overline{m}}{m_H}}$$

μ: peso molecular médio

m_H: massa H

$$m_H = 1.673532499 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

$$\mu \equiv \frac{\overline{m}}{m_H}$$

Peso molecular médio μ depende do grau de ionização, pois os e- livres entram na massa média $\overline{m}$

Ou seja, precisamos usar a equação de Saha para calcular os números relativos de ionização.

Estudaremos 2 casos extremos: gás neutro e gás completamente ionizado.

Para um gás completamente neutro, $\overline{m}_{neutro}$:

$$\overline{m}_n = \frac{\sum_j N_j m_j}{\sum_j N_j}$$

m_j : massa do átomo j

N_j : número de átomos j

Para um gás completamente neutro, $\overline{m}_{neutro}$:

$$\overline{m}_n = \frac{\sum_j N_j m_j}{\sum_j N_j}$$

m_j : massa do átomo j

N_j : número de átomos j

dividindo por m_H , obtemos o peso molecular médio neutro:

$$\mu_n = \frac{\sum_j N_j A_j}{\sum_j N_j}$$

$$\boxed{\mu \equiv \frac{\overline{m}}{m_H}} \qquad \boxed{A_j \equiv m_j / m_H}$$

Ex.: j = 1 (hidrogênio), A = 1

j = 2 (hélio), A = 4

Para um gás completamente neutro:

$$\mu_n = \frac{\sum_j N_j A_j}{\sum_j N_j}$$

$$\boxed{A_j \equiv m_j / m_H}$$

Para um gás completamente ionizado:

$$\mu_i \simeq \frac{\sum_j N_j A_j}{\sum_j N_j (1 + z_j)}$$

$1 + z_j$: núcleo + elétrons livres

where $1 + z_j$ accounts for the nucleus plus the number of free electrons that result from completely ionizing an atom of type j. (Do not confuse z_j with Z, the mass fraction of metals.)

Peso molecular médio em função das frações de massa X_j

$$X_j = \frac{\text{Total mass of the chemical element } j}{\text{Total mass of the gas}}$$

$$\sum_j X_j = 1$$

$$X \equiv \frac{\text{total mass of hydrogen}}{\text{total mass of gas}}$$

$$Y \equiv \frac{\text{total mass of helium}}{\text{total mass of gas}}$$

$$Z \equiv \frac{\text{total mass of metals}}{\text{total mass of gas}}.$$

$$X + Y + Z = 1$$

Peso molecular médio em função das frações de massa X_j para gás neutro:

$$\frac{1}{\overline{m}} = \frac{\sum_j N_j}{\sum_j N_j m_j} = \frac{\text{total number of particles}}{\text{total mass of gas}}$$

Peso molecular médio em função das frações de massa X_j para gás neutro:

$$\frac{1}{\overline{m}} = \frac{\sum_j N_j}{\sum_j N_j m_j} = \frac{\text{total number of particles}}{\text{total mass of gas}}$$

$$= \sum_j \frac{\text{number of particles from } j}{\text{mass of particles from } j} \cdot \frac{\text{mass of particles from } j}{\text{total mass of gas}}$$

Peso molecular médio em função das frações de massa X_j para gás neutro:

$$\frac{1}{\overline{m}} = \frac{\sum_j N_j}{\sum_j N_j m_j} = \frac{\text{total number of particles}}{\text{total mass of gas}}$$

$$= \sum_j \frac{\text{number of particles from } j}{\text{mass of particles from } j} \cdot \frac{\text{mass of particles from } j}{\text{total mass of gas}}$$

$$= \sum_j \frac{N_j}{N_j A_j m_H} X_j$$

Peso molecular médio em função das frações de massa X_j para gás neutro:

$$\frac{1}{\overline{m}} = \frac{\sum_j N_j}{\sum_j N_j m_j} = \frac{\text{total number of particles}}{\text{total mass of gas}}$$

$$= \sum_j \frac{\text{number of particles from } j}{\text{mass of particles from } j} \cdot \frac{\text{mass of particles from } j}{\text{total mass of gas}}$$

$$= \sum_j \frac{N_j}{N_j A_j m_H} X_j = \sum_j \frac{1}{A_j m_H} X_j$$

$$\boxed{\mu \equiv \frac{\overline{m}}{m_H}}$$

Peso molecular médio em função das frações de massa X_j para gás neutro:

$$\frac{1}{\overline{m}} = \frac{\sum_j N_j}{\sum_j N_j m_j} = \frac{\text{total number of particles}}{\text{total mass of gas}}$$

$$= \sum_j \frac{\text{number of particles from } j}{\text{mass of particles from } j} \cdot \frac{\text{mass of particles from } j}{\text{total mass of gas}}$$

$$= \sum_j \frac{N_j}{N_j A_j m_H} X_j = \sum_j \frac{1}{A_j m_H} X_j = \frac{1}{\overline{m}} = \frac{1}{\mu_n m_H}$$

$$\boxed{\mu \equiv \frac{\overline{m}}{m_H}}$$

Peso molecular médio em função das frações de massa X_j para gás neutro:

$$\frac{1}{\overline{m}} = \frac{\sum_j N_j}{\sum_j N_j m_j} = \frac{\text{total number of particles}}{\text{total mass of gas}}$$

$$= \sum_j \frac{\text{number of particles from } j}{\text{mass of particles from } j} \cdot \frac{\text{mass of particles from } j}{\text{total mass of gas}}$$

$$= \sum_j \frac{N_j}{N_j A_j m_H} X_j = \sum_j \frac{1}{A_j m_H} X_j = \frac{1}{\overline{m}} = \frac{1}{\mu_n m_H}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_n} = \sum_j \frac{1}{A_j} X_j$$

$$\boxed{\mu \equiv \frac{\overline{m}}{m_H}}$$

Peso molecular de gás neutro, em função das frações de massa X_j:

$$\frac{1}{\mu_n} = \sum_j \frac{1}{A_j} X_j$$

$$\boxed{A_j \equiv m_j / m_H}$$

Aproximação em função de X, Y, Z, para um gás completamente neutro:

$$\frac{1}{\mu_n} \simeq X + \frac{1}{4} Y + \left\langle \frac{1}{A} \right\rangle_n Z$$

$\langle 1/A \rangle_n$ é a média ponderada de todos elementos mais pesados que He. Para abundâncias solares, $\langle 1/A \rangle_n \sim 1/15.5$

Para um gás completamente ionizado:

$$\frac{1}{\mu_i} = \sum_j \frac{1+z_j}{A_j} X_j$$

Incluindo explicitamente hidrogênio (X), He (Y) e metais (Z):

$$\frac{1}{\mu_i} \simeq 2X + \frac{3}{4}Y + \left\langle \frac{1+z}{A} \right\rangle_i Z$$

Para elementos pesados, $1+z_j \sim z_j$, onde z_j é o número atômico.
Também, $A_j \sim 2\, z_j$ (# prótons ~ # nêutrons)

$$\left\langle \frac{1+z}{A} \right\rangle_i \simeq \frac{1}{2}$$

If we assume that $X = 0.70$, $Y = 0.28$, and $Z = 0.02$, a composition typical of younger stars, then with these expressions for the mean molecular weight, $\mu_n = 1.30$ and $\mu_i = 0.62$.

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT$$

A energia cinética média de uma partícula é ½kT por grau de liberdade.

Pressão de radiação: $$P_{\rm rad} = \frac{1}{3}aT^4$$

Pressão total: $$P_t = \frac{\rho kT}{\mu m_H} + \frac{1}{3}aT^4$$

Pressão total: $$P_t = \frac{\rho k T}{\mu m_H} + \frac{1}{3} a T^4$$

Example 10.2.1. Using the results of Example 10.1.1, we can estimate the central temperature of the Sun. Neglecting the radiation pressure term, the central temperature is found from the ideal gas law equation of state to be

$$T_c = \frac{P_c \mu m_H}{\rho k}$$

Using $\overline{\rho}_{\odot}$, a value of $\mu_i = 0.62$ appropriate for complete ionization,[3] and the estimated value for the central pressure, we find that

No centro do Sol, $P_C = 2{,}3 \times 10^{16}$ N m^{-2}

→ $T_C \sim 1{,}5 \times 10^7$ K

which is in reasonable agreement with more detailed calculations. One solar model gives a central temperature of 1.57×10^7 K. At this temperature, the pressure due to radiation is only 1.53×10^{13} N m^{-2}, 0.065% of the gas pressure.