

Cap. 8: Classificação de espectros estelares

8.1 A formação de linhas espectrais

- Classificação espectral

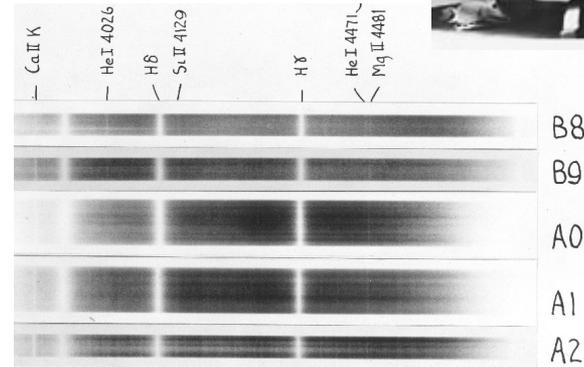
- Distrib. Velocidades: Maxwell-Boltzmann

- A equação de Boltzmann: $e^{-E_{\text{nível}}/kT}$

- A equação de Saha: $e^{-E_{\text{ion}}/kT}$



8.2 O diagrama HR



AGA 0293, IAG/USP

Slides based on the book “An Introduction to Modern Astrophysics”, unless otherwise noticed.

Prof. Jorge Meléndez





<https://www.fraunhofer.de/en/about-fraunhofer/profile-structure/chronicles/joseph-von-fraunhofer.html>

Joseph von Fraunhofer
1787 -1826

- ~ 1814 - 1817: Fraunhofer catalogou 574 linhas escuras no espectro solar (**linhas de Fraunhofer**). Notou que as linhas D apareciam na mesma posição que linhas de chama de sódio
- ~ 1817: Fraunhofer observou algumas estrelas, mostrando que elas apresentam diferentes espectros
- ~ 1860: Kirchhoff: leis de absorção e emissão.
Identificação de linhas no Sol com linhas observadas em elementos químicos na Terra

Classificação de estrelas: 4 classes



Tipo I: branco-azul; linhas fortes de H.
 Atual classe A & F "cedo"

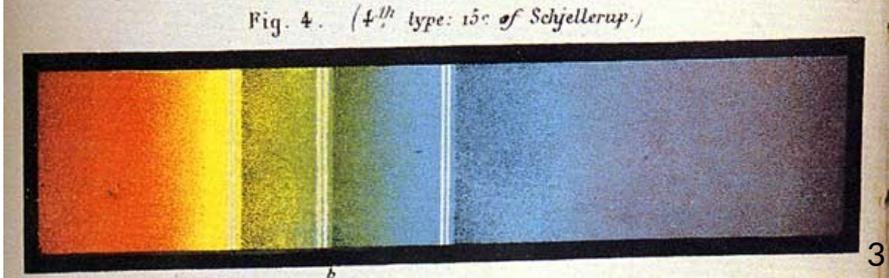
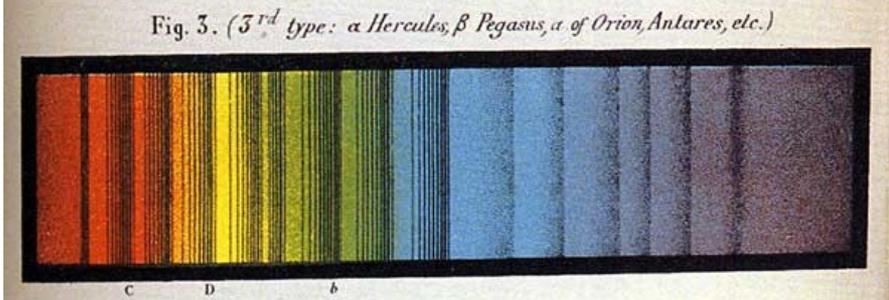
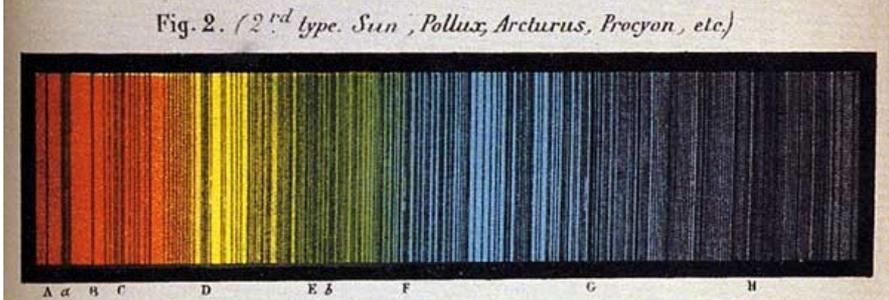
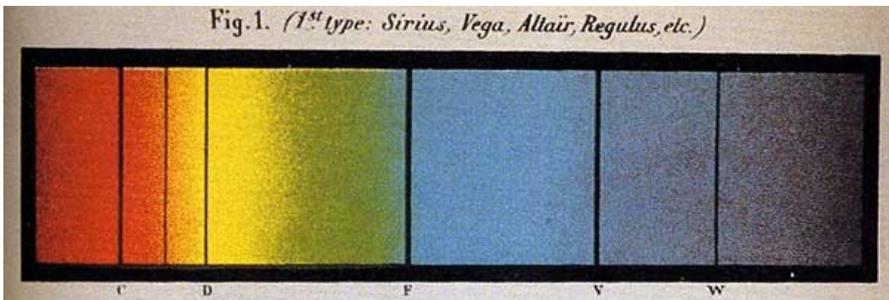
Tipo II: amarelas, de tipo solar.
 Numerous metallic lines (Na, Ca, Fe), with weaker H. Atual classe G, K, F tardio

Tipo III: laranja-vermelho; metallic lines and bands.
 atual classe M

Tipo IV: estrelas com linhas de emissão

Secchi's Classes of Stellar Spectra (1863-1870)

Secchi's four classes of stellar spectra, from a colored lithograph in a book published around 1870. The principal spectral lines are identified underneath by letters that Fraunhofer assigned.



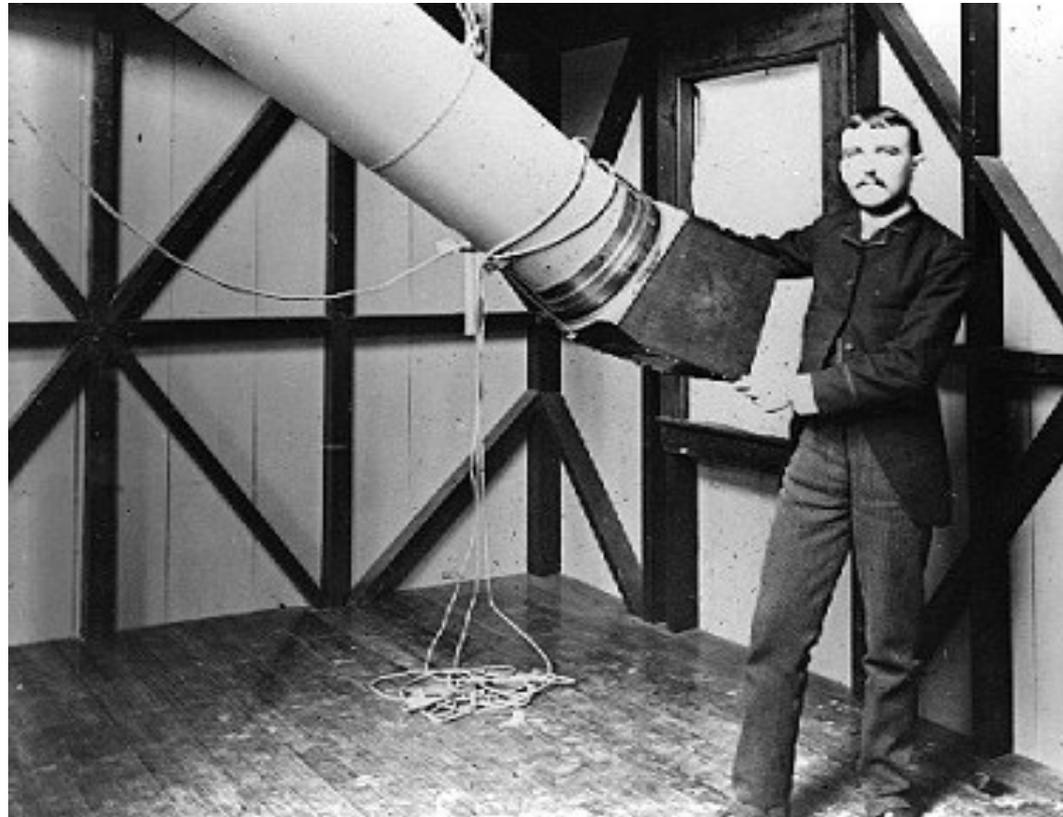
Henry Draper (Mar 7, 1837 – Nov 20, 1882)

pioneer of astrophotography.

Primeiro espectro estelar em 1872: Vega,
observado com sua esposa Mary Anna Draper



Mãe de Henry Draper:
Antonia Coetana de Paiva
Pereira Gardner (filha do
médico do Emperador do Brasil)





Mary Anna Draper: doação de instrumentos e fundos para o Henry Draper (HD) memorial



Sobrinha:
Antonia Maury,
Astrônoma de
Harvard

Mary Anna
Draper

O catálogo de espectros estelares HD foi nomeado em homenagem a Henry Draper. P.ex. Vega = HD 172167

Williamina Fleming

(May 15, 1857 - May 21, 1911)

Edward Charles Pickering, diretor do Harvard College Observatory, estava frustrado com seus assistentes masculinos e declarou que até sua empregada faria um trabalho melhor. **Em 1881 contratou sua empregada Williamina Fleming para classificar espectros.**



O sistema de classificação de Harvard

- 1890-1900s: classificação de Harvard (E. Pickering + Williamina Fleming + Antonia Maury + Annie J. Cannon):

Mulheres astrônomas @ Harvard



O B A

F G K M

L T

Classificação estelar:

O, B, A, F, G, K, M

O, B, A, F, G, K, M

Baseado em espectros das estações Harvard Norte (U.S.A.) & Sul (Arequipa, Peru)

Annie J. Cannon classificou mais de 250 000 espectros!

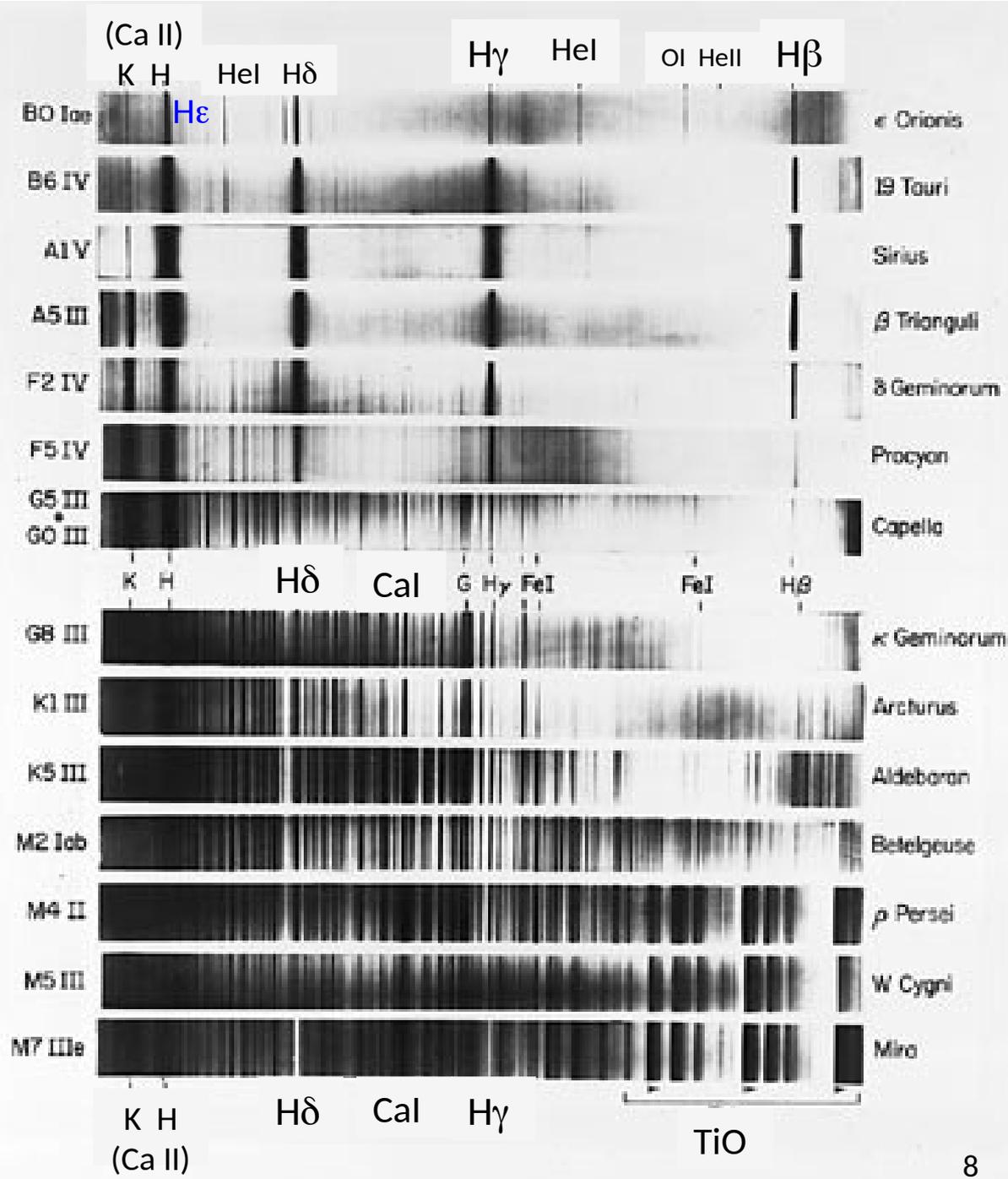


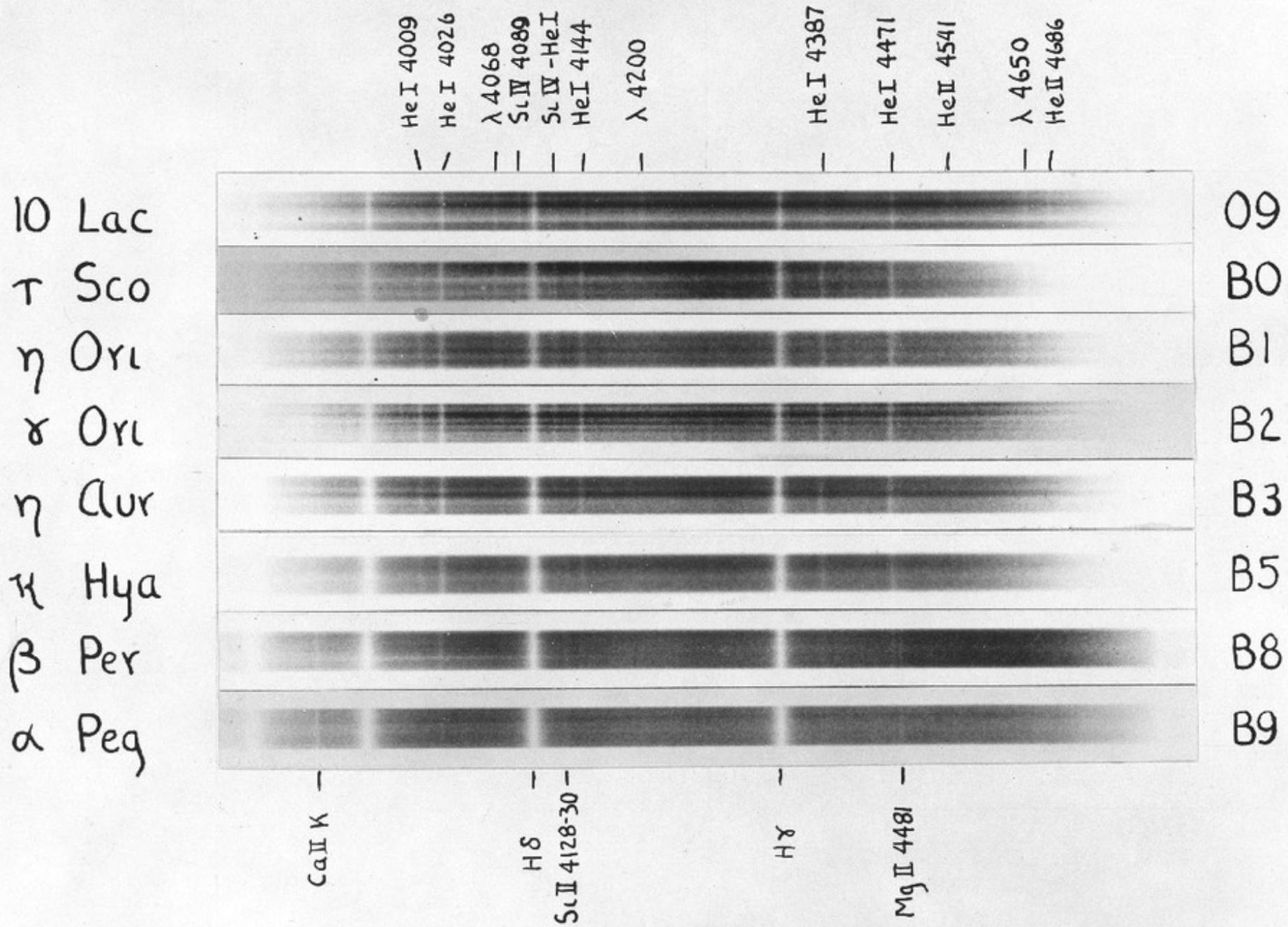
TABLE 8.1 Harvard Spectral Classification.

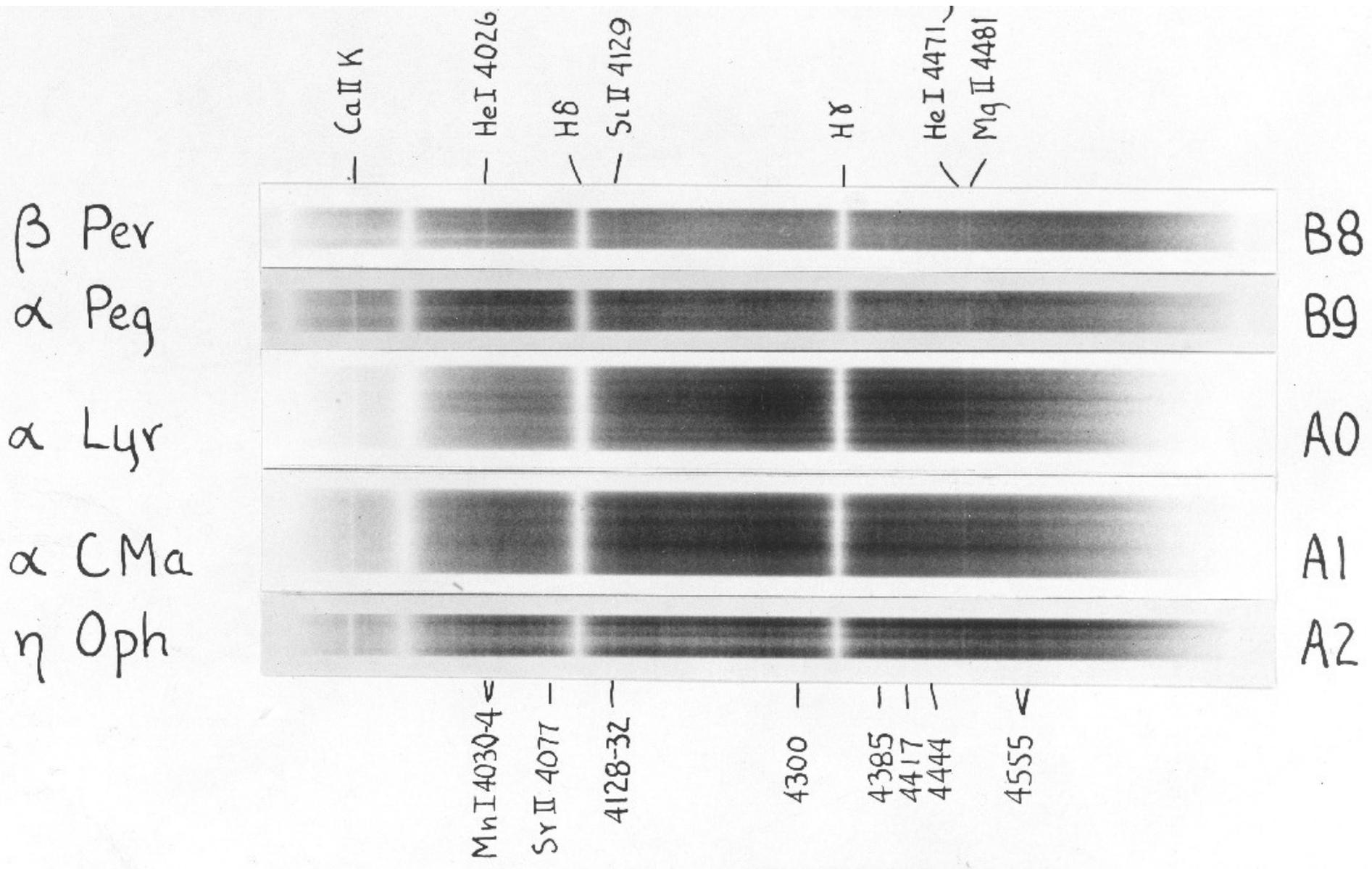
Spectral Type	Characteristics
O	Hottest blue-white stars with few lines Strong He II absorption (sometimes emission) lines. He I absorption lines becoming stronger.
B	Hot blue-white He I absorption lines strongest at B2. H I (Balmer) absorption lines becoming stronger.
A	White Balmer absorption lines strongest at A0, becoming weaker later. Ca II absorption lines becoming stronger.
F	Yellow-white Ca II lines continue to strengthen as Balmer lines continue to weaken. Neutral metal absorption lines (Fe I, Cr I).

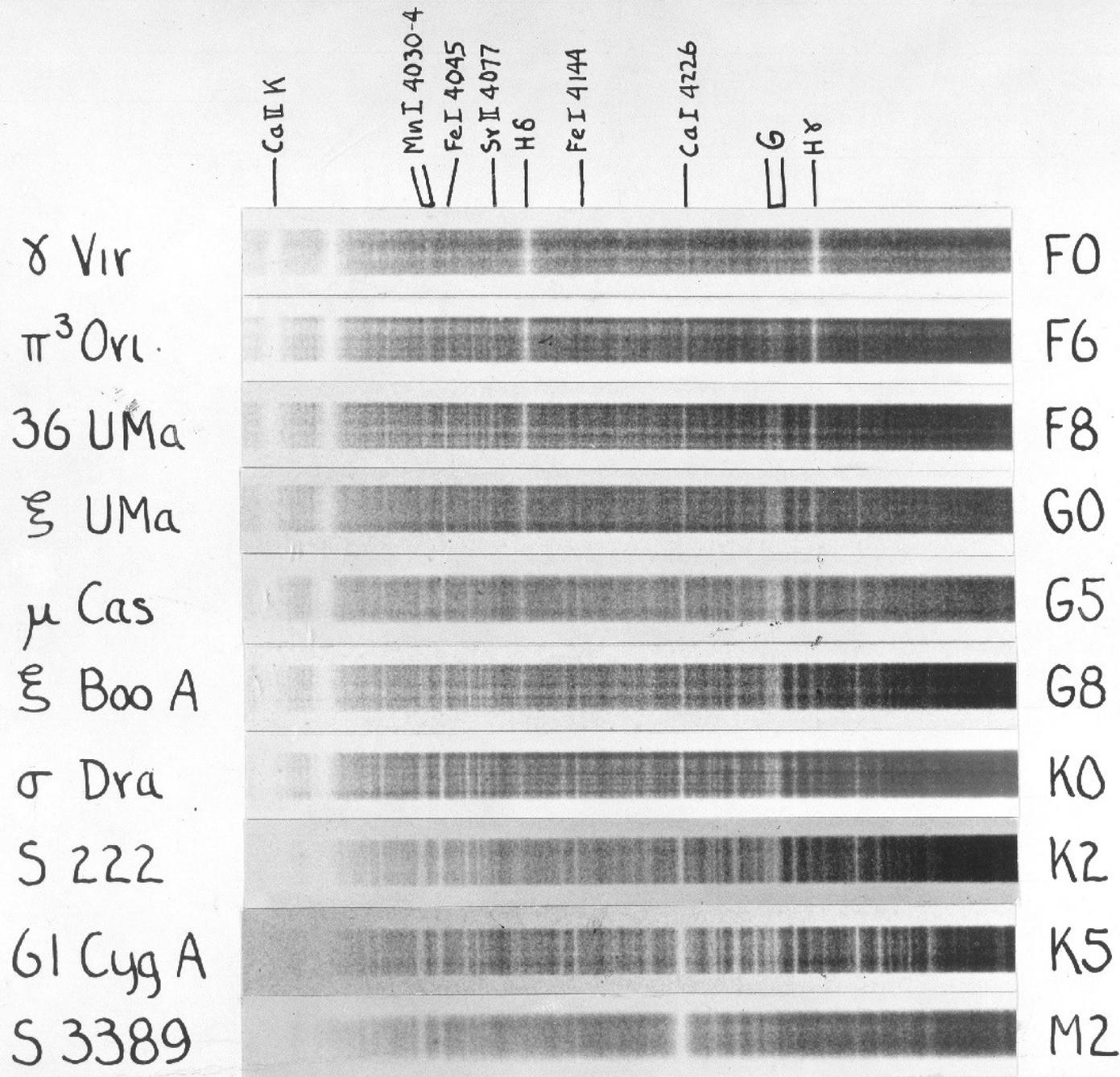
- G Yellow
Solar-type spectra.
Ca II lines continue becoming stronger.
Fe I, other neutral metal lines becoming stronger.
- K Cool orange
Ca II H and K lines strongest at K0, becoming weaker later.
Spectra dominated by metal absorption lines.
- M Cool red
Spectra dominated by molecular absorption bands,
 especially titanium oxide (TiO) and vanadium oxide (VO).
Neutral metal absorption lines remain strong.

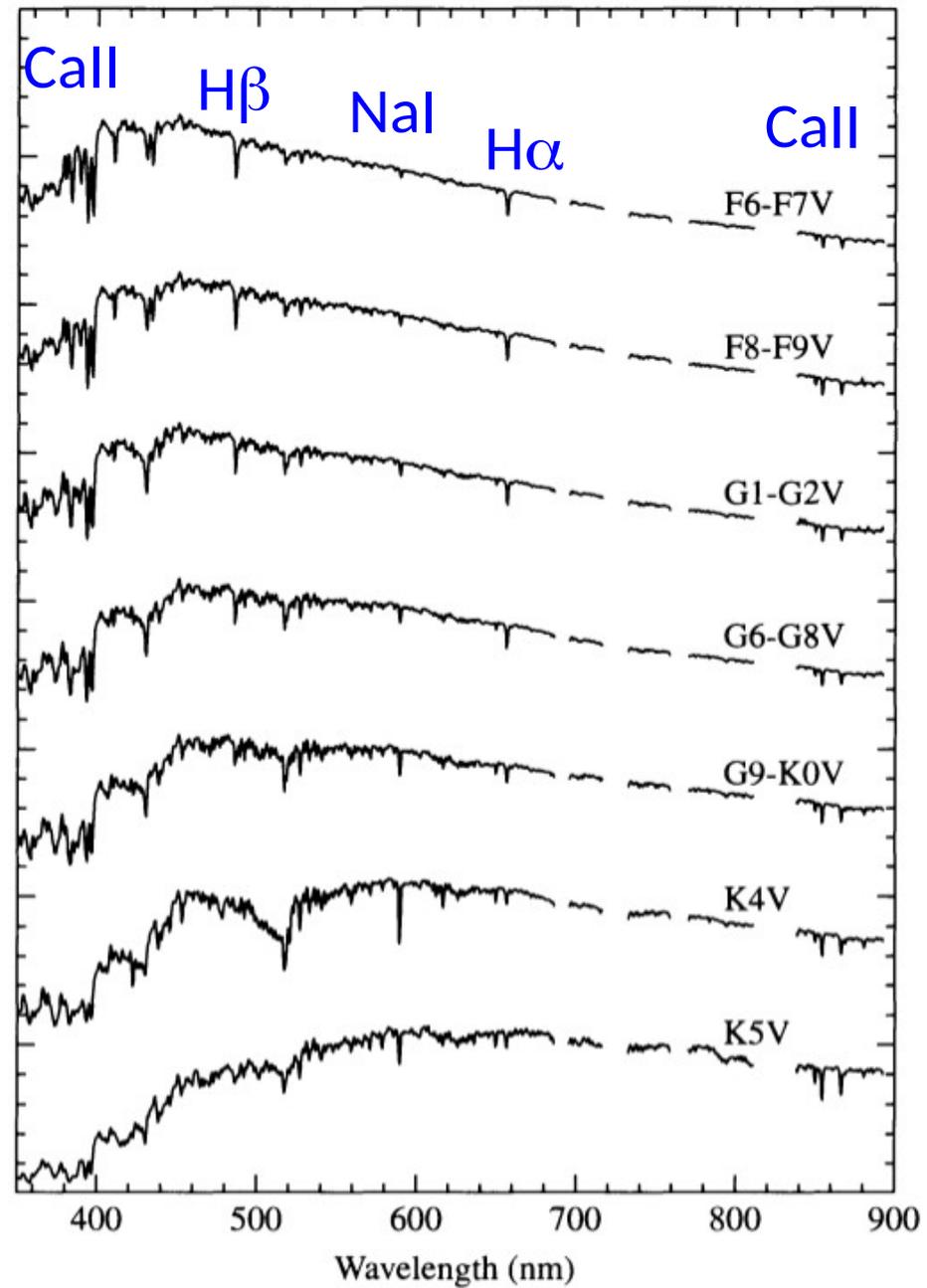
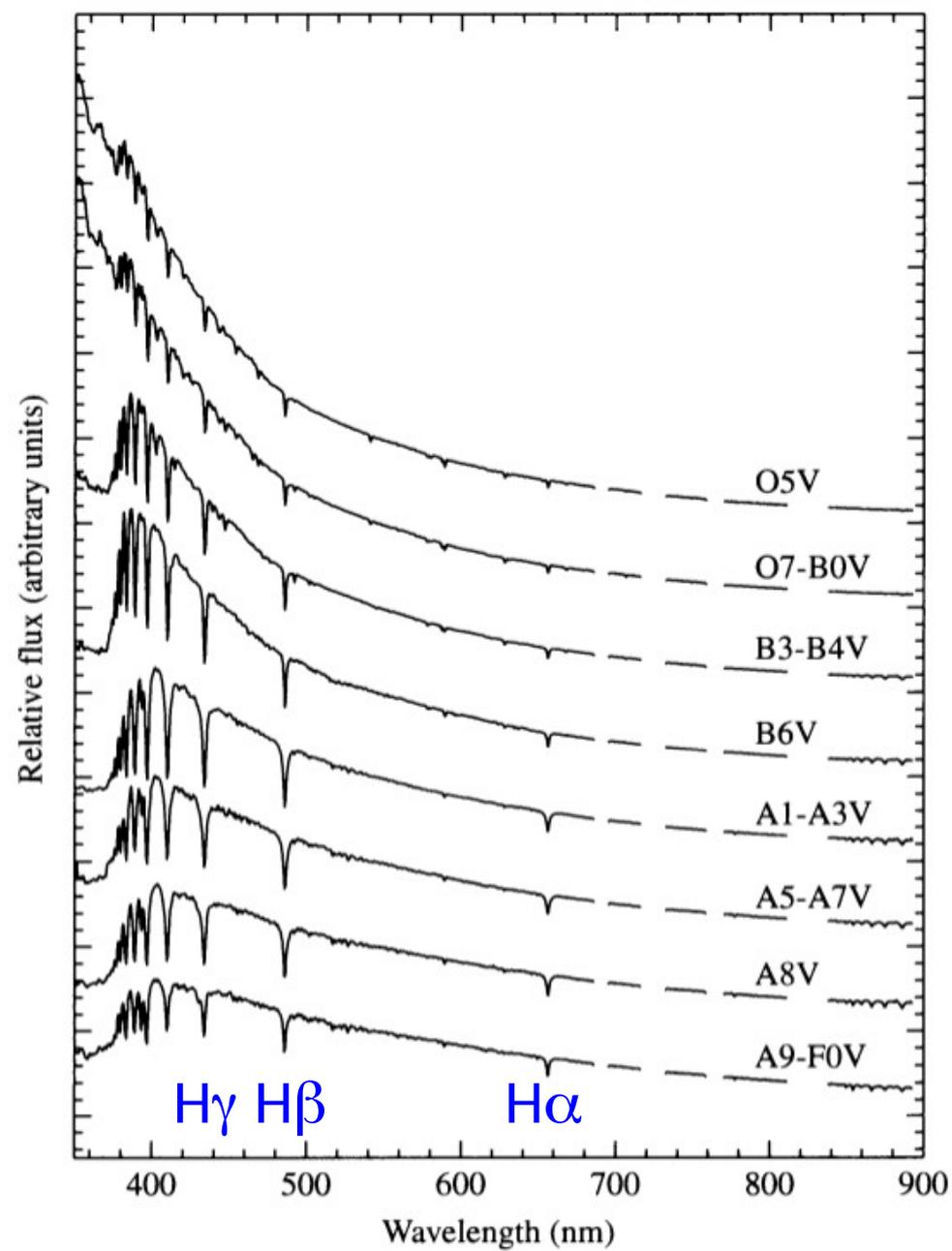
- L Very cool, dark red
Stronger in infrared than visible.
Strong molecular absorption bands of metal hydrides (CrH, FeH), water (H₂O), carbon monoxide (CO), and alkali metals (Na, K, Rb, Cs).
TiO and VO are weakening.
- T Coolest, Infrared
Strong methane (CH₄) bands but weakening CO bands.

S and C spectral types for evolved giant stars are discussed on page 466.



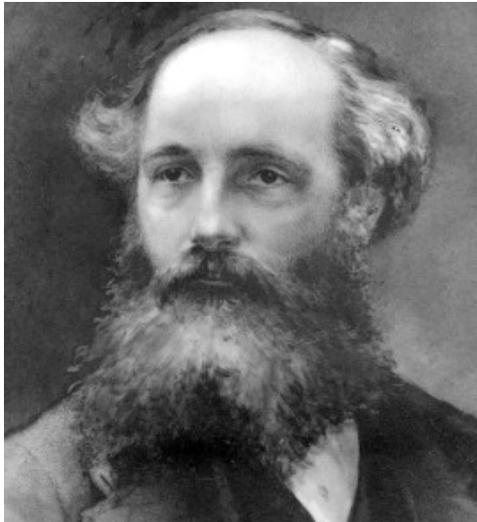






Como explicar os espectros observados?

Com as equações da física estatística



James Clerk Maxwell
1831 - 1879

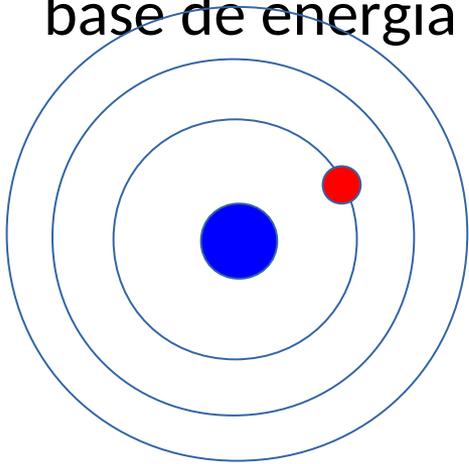


Ludwig Boltzmann
1844 - 1906

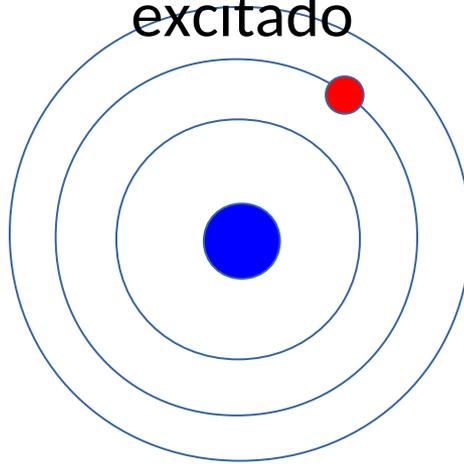


Meghnad Saha
1893 - 1956

H neutro,
 e^- em estado
base de energia



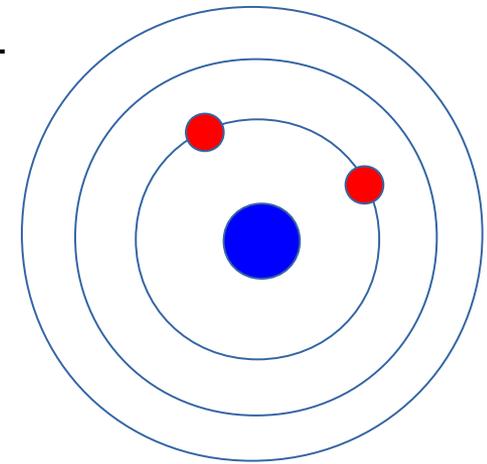
H neutro,
 e^- em estado
excitado



Átomo de
hidrogênio
ionizado H^+



Hidrogênio H^-



Equações da física estatística

- Distrib. Velocidades: Maxwell-Boltzmann
- Excitação dos níveis de energia: Boltzmann
- Ionização dos átomos: Saha

Distribuição de velocidades (Maxwell-Boltzmann)

Maxwell–Boltzmann velocity distribution function⁵ describes the fraction of particles having a given range of speeds. The number of gas particles per unit volume having speeds between v and $v + dv$ is given by

$$n_v dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv,$$

- n : número total de partículas por unidade de volume
- $n_v = dn/dv$
- m : massa
- k : Boltzmann's constant
- T : temperature in K

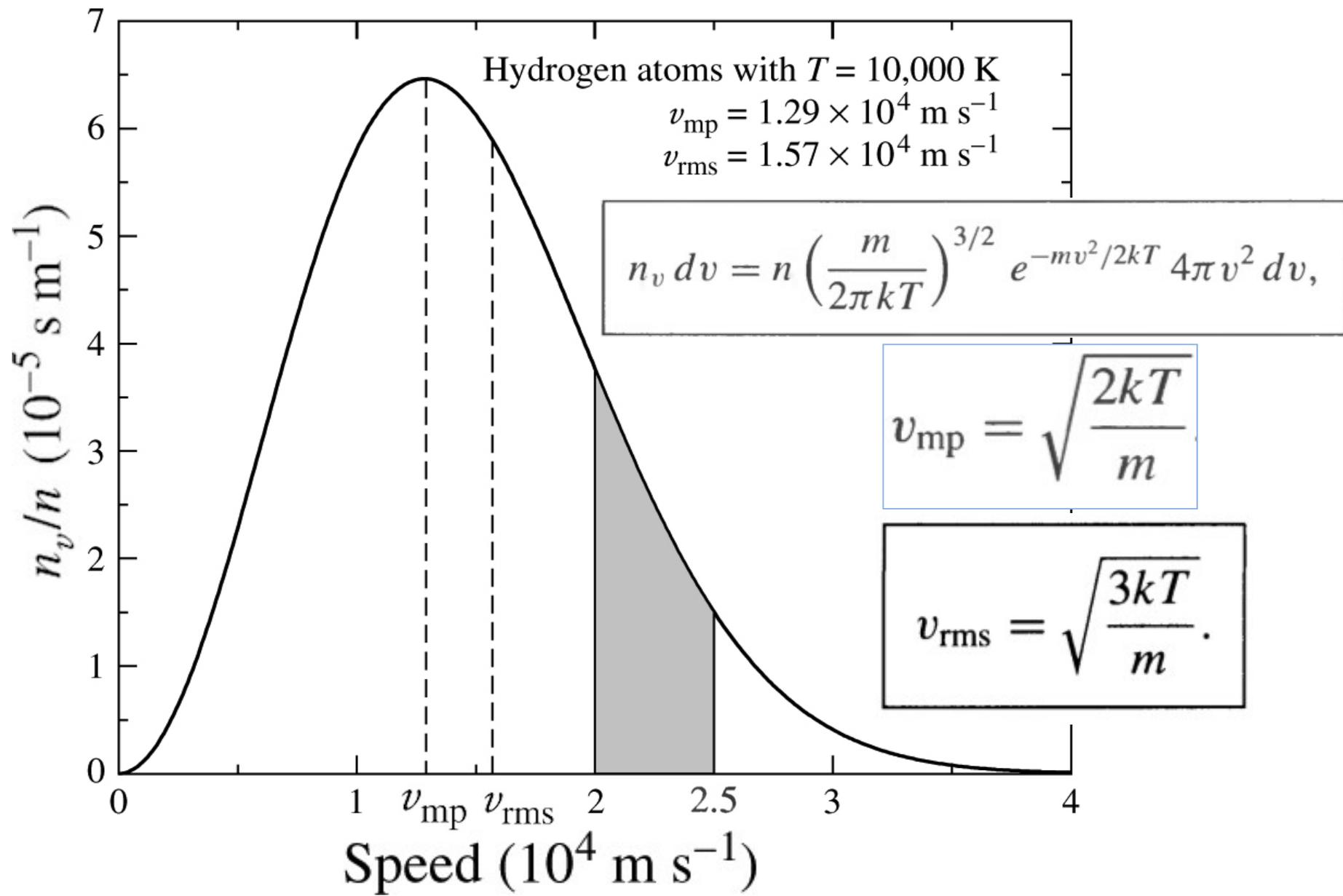
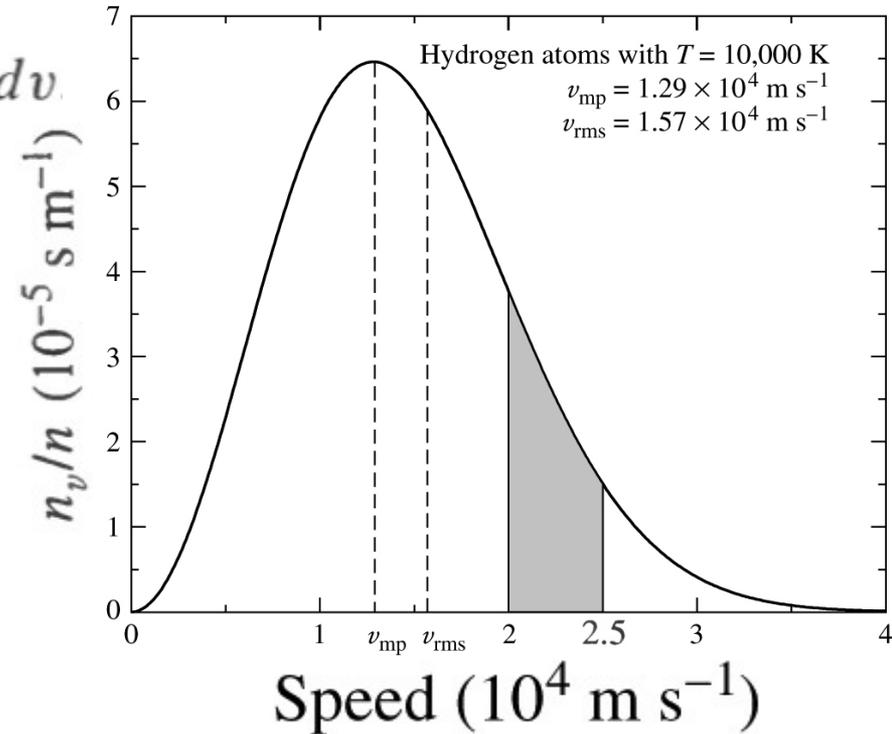


FIGURE 8.6 Maxwell–Boltzmann distribution function, n_v/n , for hydrogen atoms at a temperature of 10,000 K. The fraction of hydrogen atoms in the gas having velocities between $2 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ and $2.5 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ is the shaded area under the curve between those two velocities; see Example 8.1.1. 19

Exemplo 8.1.1. Determinar a fração de átomos de hidrogênio em um gás com $T = 10\,000\text{K}$, para velocidades entre $v_1 = 2 \times 10^4\text{ m/s}$ e $v_2 = 2,5 \times 10^4\text{ m/s}$.

$$n_v dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv$$

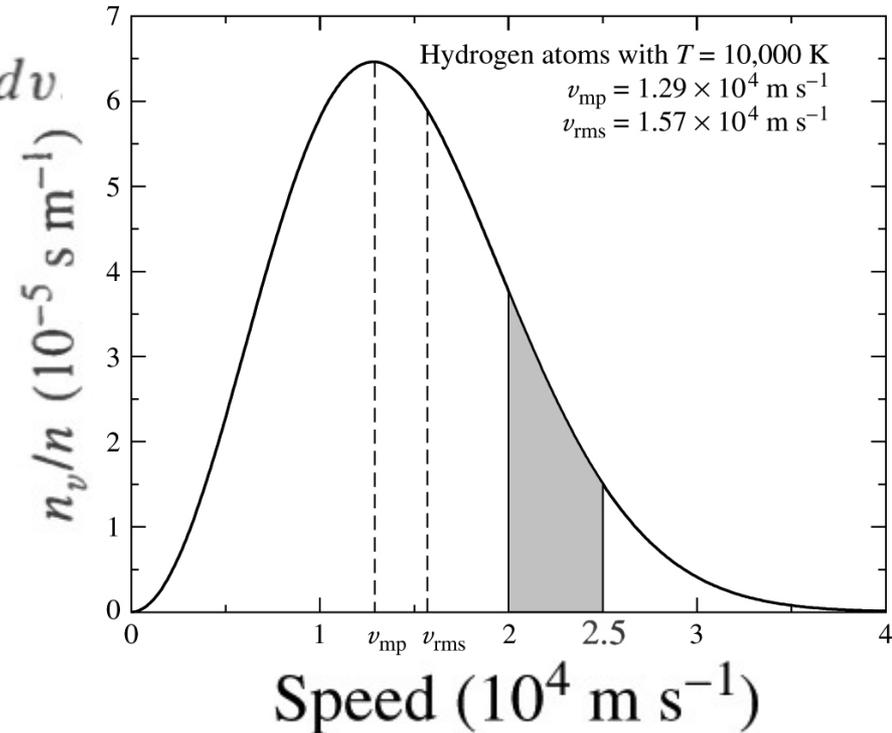


Exemplo 8.1.1. Determinar a fração de átomos de hidrogênio em um gás com $T = 10\,000\text{K}$, para velocidades entre $v_1 = 2 \times 10^4\text{ m/s}$ e $v_2 = 2,5 \times 10^4\text{ m/s}$.

$$n_v dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv$$

Para obter a fração entre v_1 e v_2 , integramos:

$$N/N_{\text{total}} = \frac{1}{n} \int_{v_1}^{v_2} n_v dv$$



Exemplo 8.1.1. Determinar a fração de átomos de hidrogênio em um gás com $T = 10\,000\text{K}$, para velocidades entre $v_1 = 2 \times 10^4\text{ m/s}$ e $v_2 = 2,5 \times 10^4\text{ m/s}$.

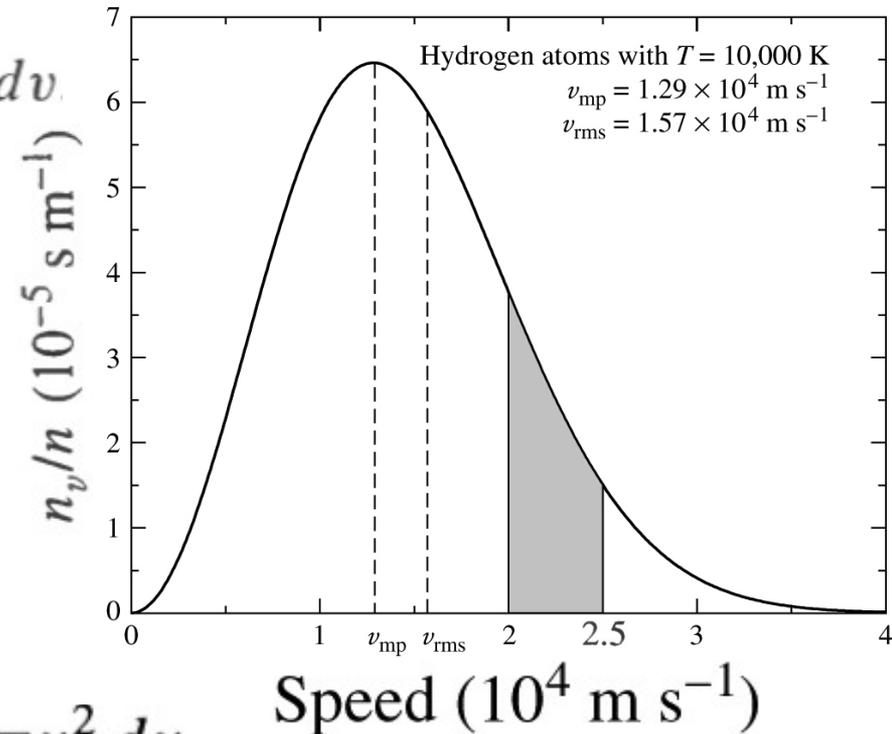
$$n_v dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv$$

Para obter a fração entre v_1 e v_2 , integramos:

$$N/N_{\text{total}} = \frac{1}{n} \int_{v_1}^{v_2} n_v dv$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{v_1}^{v_2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv$$

Precisamos integrar numericamente



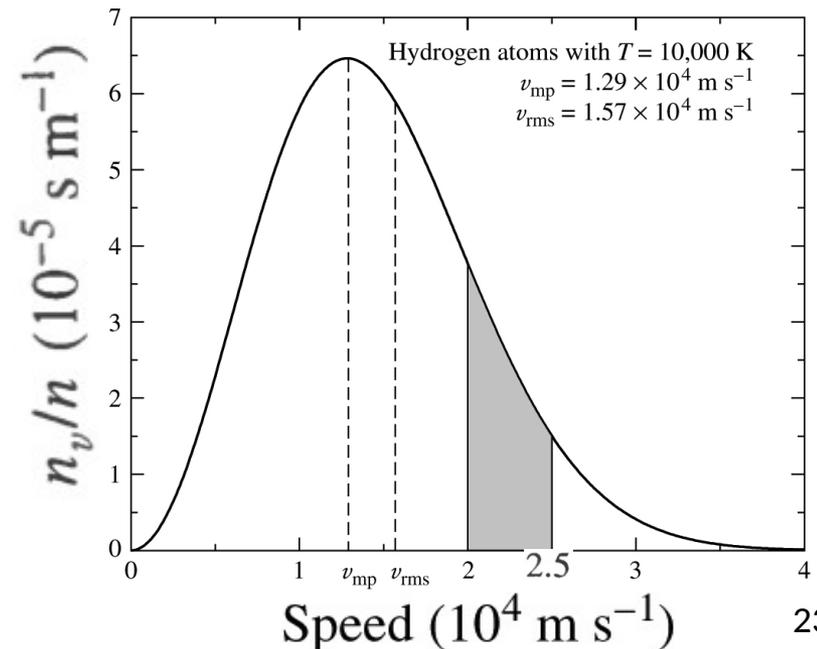
Exemplo 8.1.1. Determinar a fração de átomos de hidrogênio em um gás com $T = 10\,000\text{K}$, para velocidades entre $v_1 = 2 \times 10^4\text{ m/s}$ e $v_2 = 2,5 \times 10^4\text{ m/s}$.

Podemos aproximar:

where $\bar{v} \equiv (v_1 + v_2)/2$.

$$N/N_{\text{total}} = \frac{1}{n} \int_{v_1}^{v_2} n_v(v) dv \simeq \frac{1}{n} n_v(\bar{v}) (v_2 - v_1)$$

$$n_v dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv$$



Exemplo 8.1.1. Determinar a fração de átomos de hidrogênio em um gás com $T = 10\,000\text{K}$, para velocidades entre $v_1 = 2 \times 10^4\text{ m/s}$ e $v_2 = 2,5 \times 10^4\text{ m/s}$.

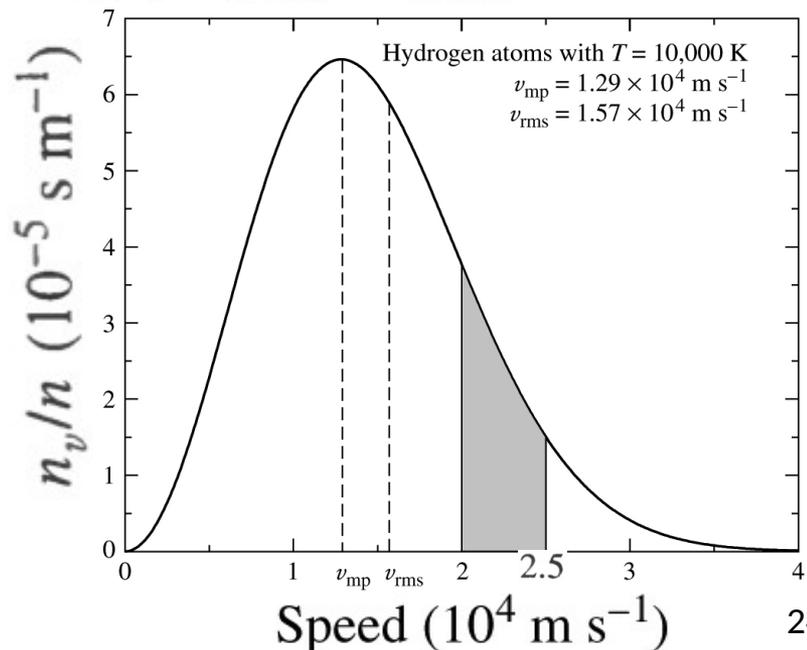
Podemos aproximar:

where $\bar{v} \equiv (v_1 + v_2)/2$.

$$N/N_{\text{total}} = \frac{1}{n} \int_{v_1}^{v_2} n_v(v) dv \simeq \frac{1}{n} n_v(\bar{v}) (v_2 - v_1)$$

$$N/N_{\text{total}} \simeq \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m\bar{v}^2/2kT} 4\pi \bar{v}^2 (v_2 - v_1)$$

$$n_v dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv$$



Exemplo 8.1.1. Determinar a fração de átomos de hidrogênio em um gás com $T = 10\,000\text{K}$, para velocidades entre $v_1 = 2 \times 10^4\text{ m/s}$ e $v_2 = 2,5 \times 10^4\text{ m/s}$.

Podemos aproximar:

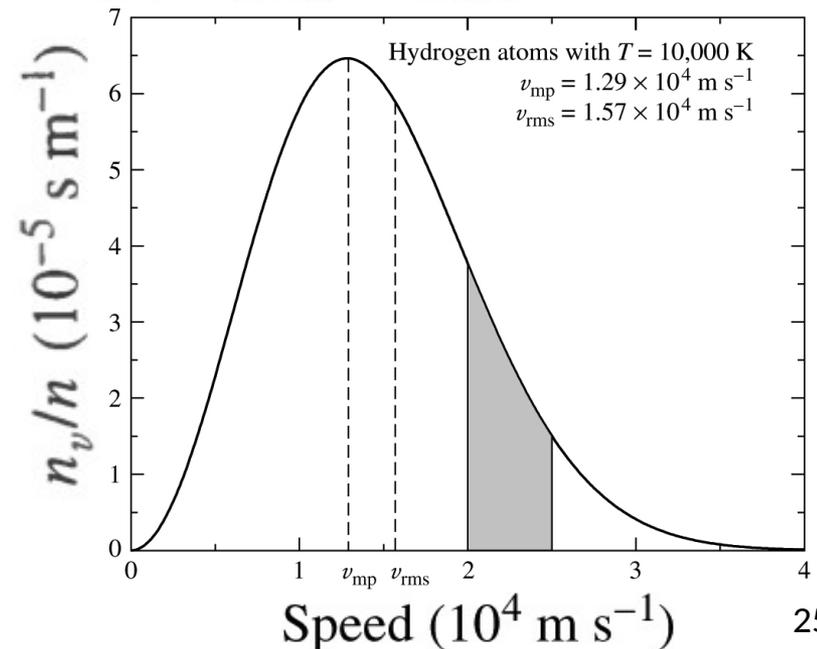
where $\bar{v} \equiv (v_1 + v_2)/2$.

$$N/N_{\text{total}} = \frac{1}{n} \int_{v_1}^{v_2} n_v(v) dv \simeq \frac{1}{n} n_v(\bar{v}) (v_2 - v_1)$$

$$N/N_{\text{total}} \simeq \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m\bar{v}^2/2kT} 4\pi \bar{v}^2 (v_2 - v_1)$$

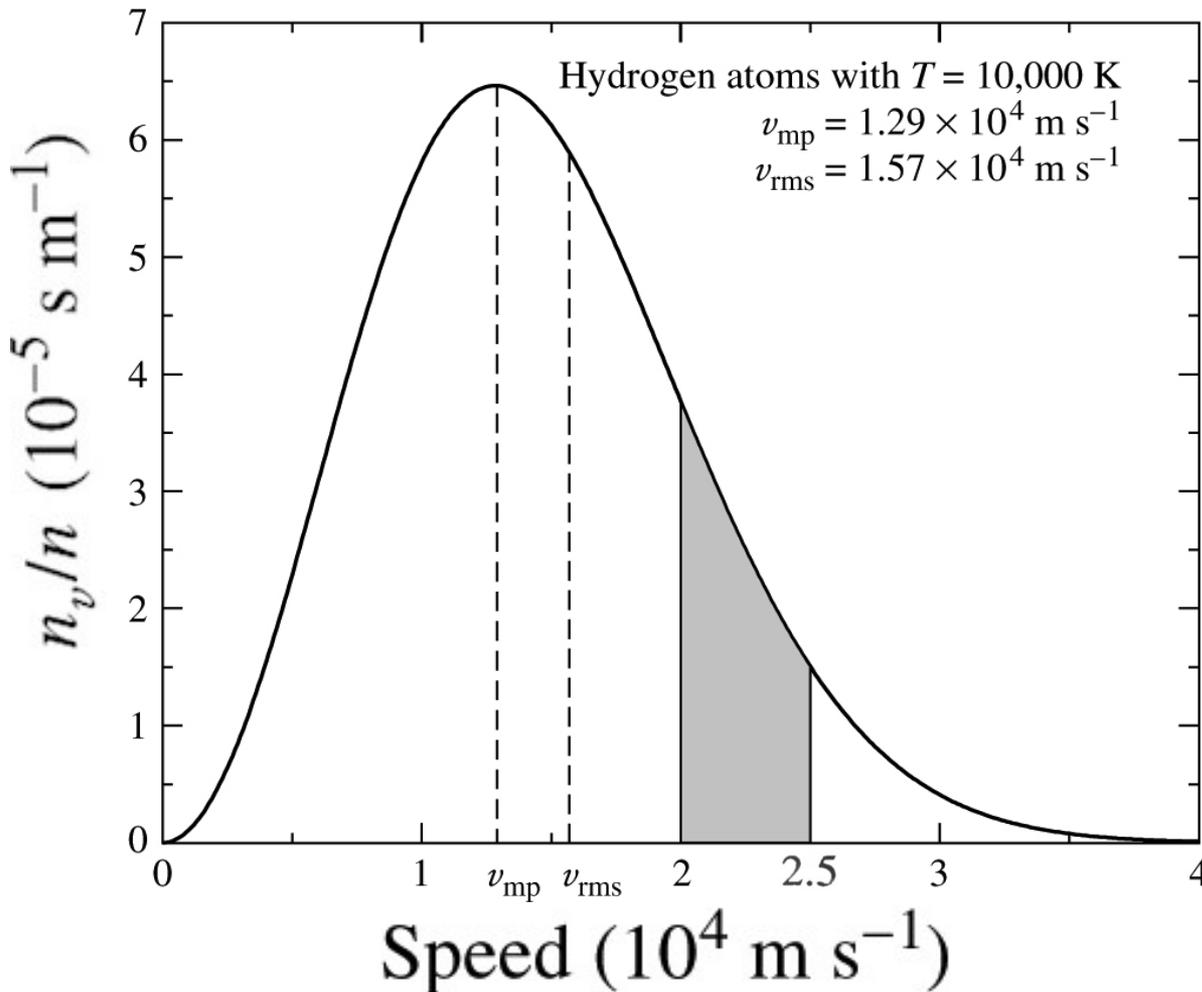
$$\simeq 0.125$$

$$n_v dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv$$



Exemplo 8.1.1. Determinar a fração de átomos de hidrogênio em um gás com $T = 10\,000\text{K}$, entre $v_1 = 2 \times 10^4\text{ m/s}$ e $v_2 = 2,5 \times 10^4\text{ m/s}$.

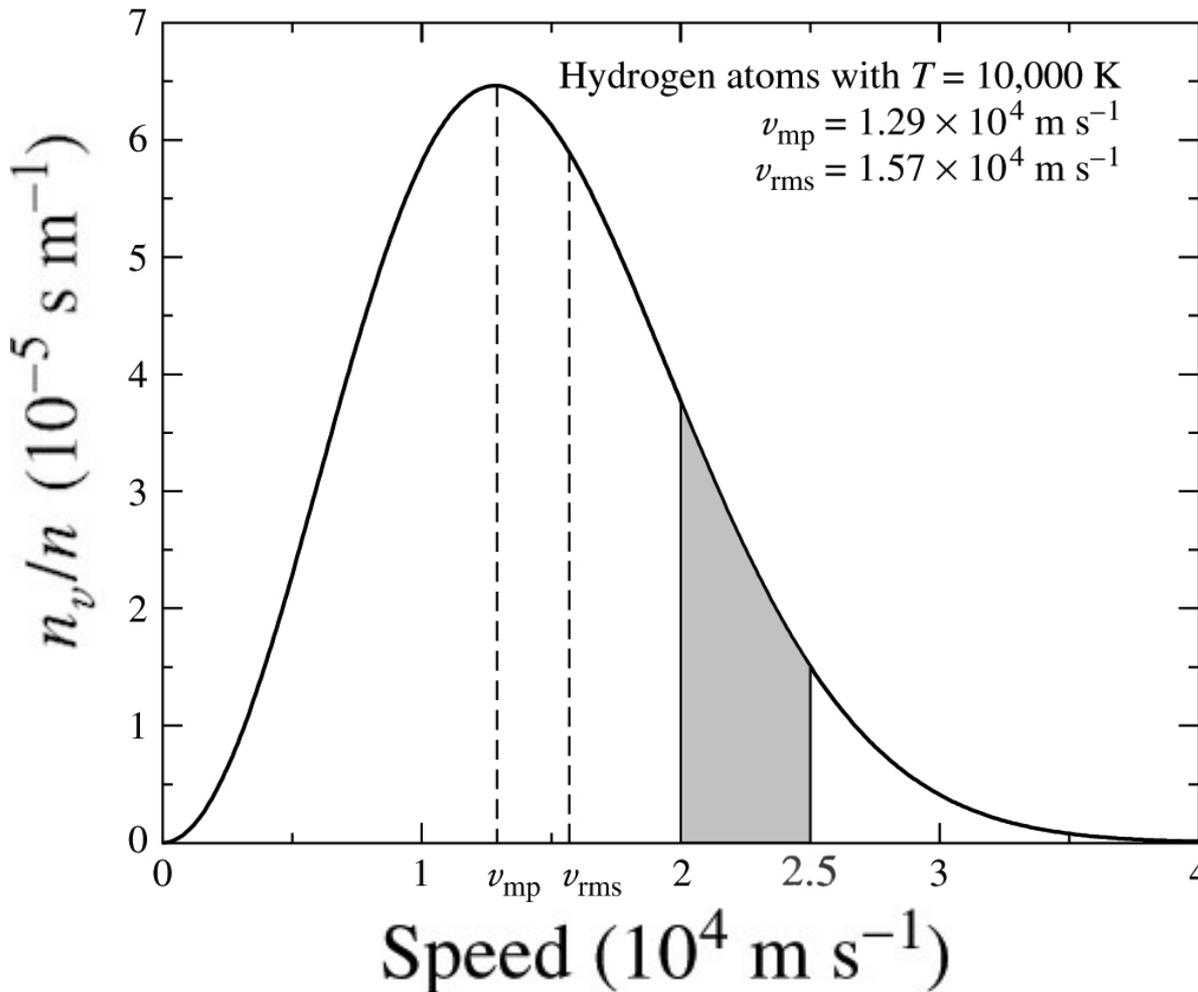
Aproximação:
$$N/N_{\text{total}} = \frac{1}{n} \int_{v_1}^{v_2} n_v(v) dv \simeq \frac{1}{n} n_v(\bar{v}) (v_2 - v_1) \simeq 0.125.$$



Aproximadamente 12,5% dos átomos de hidrogênio a 10000 K têm velocidades entre $2 \times 10^4 - 2,5 \times 10^4\text{ m/s}$

Exemplo 8.1.1. Determinar a fração de átomos de hidrogênio em um gás com $T = 10\,000\text{K}$, entre $v_1 = 2 \times 10^4\text{ m/s}$ e $v_2 = 2,5 \times 10^4\text{ m/s}$.

Aproximação:
$$N/N_{\text{total}} = \frac{1}{n} \int_{v_1}^{v_2} n_v(v) dv \simeq \frac{1}{n} n_v(\bar{v}) (v_2 - v_1) \simeq 0.125.$$



Aproximadamente 12,5% dos átomos de hidrogênio a 10000 K têm velocidades entre $2 \times 10^4 - 2,5 \times 10^4\text{ m/s}$

A integração numérica resulta em 12,75%

Linhas do espectro dependem do estado de **excitação (Boltzmann)** e **ionização (Saha)** na fotosfera estelar

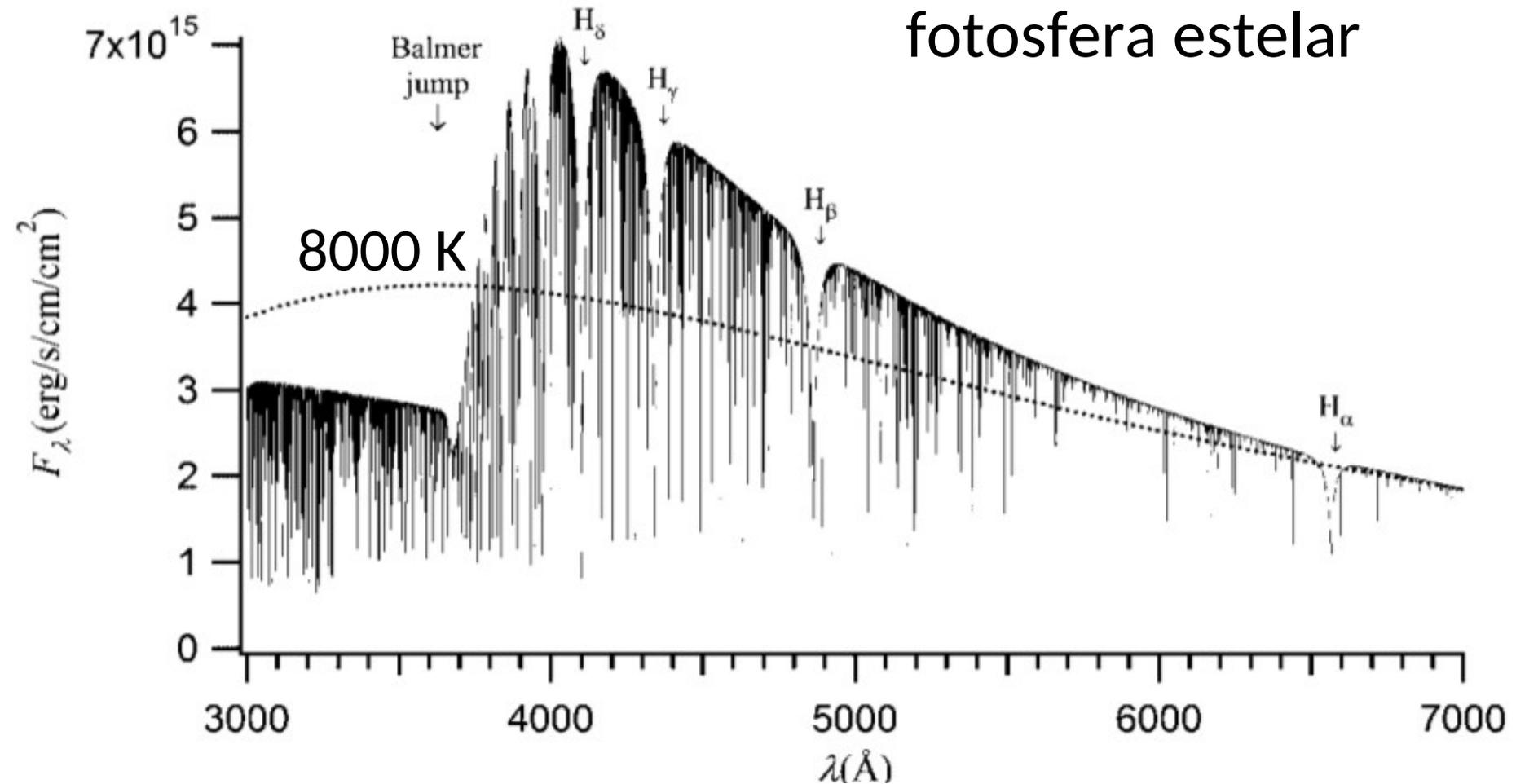
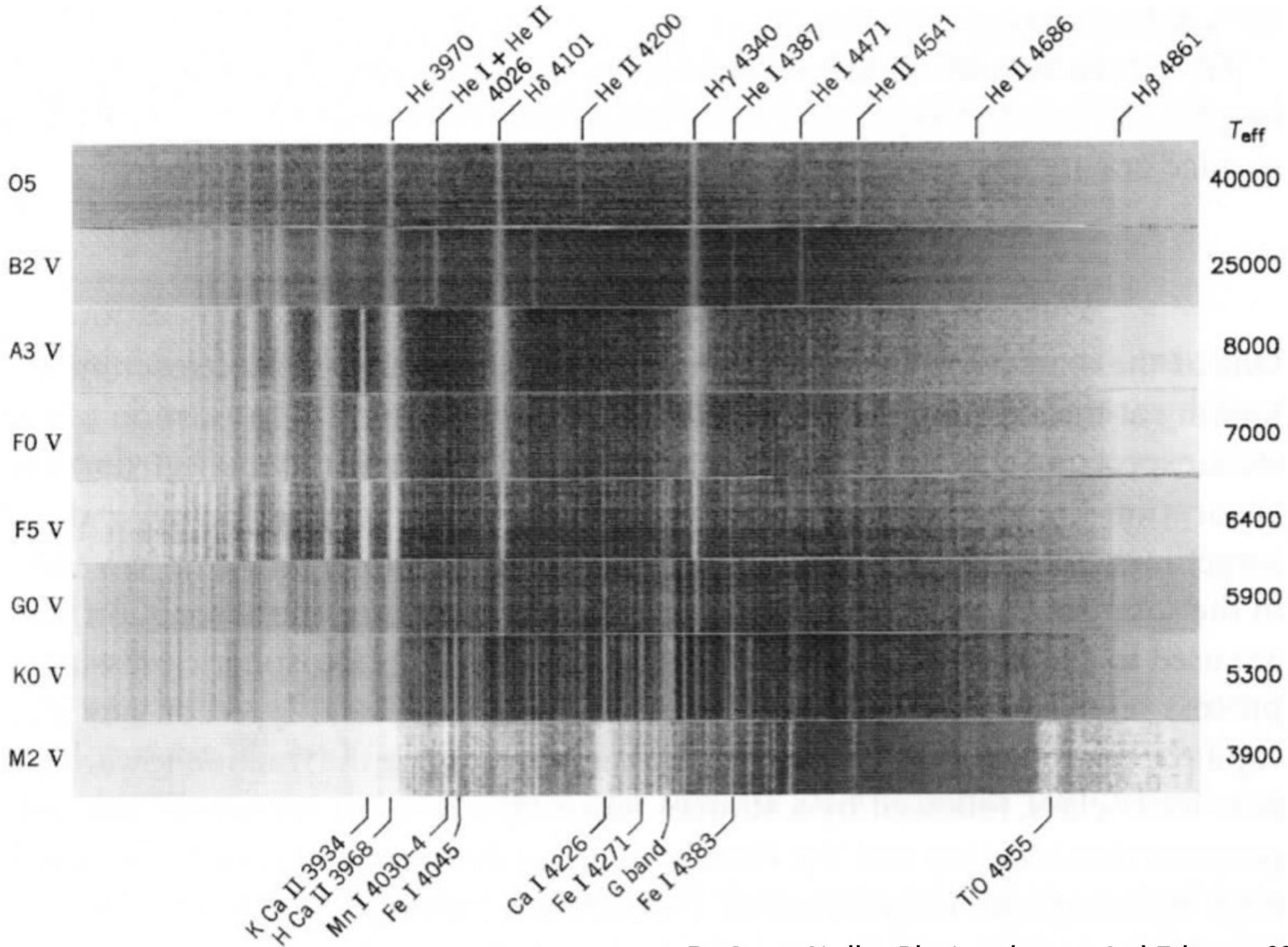
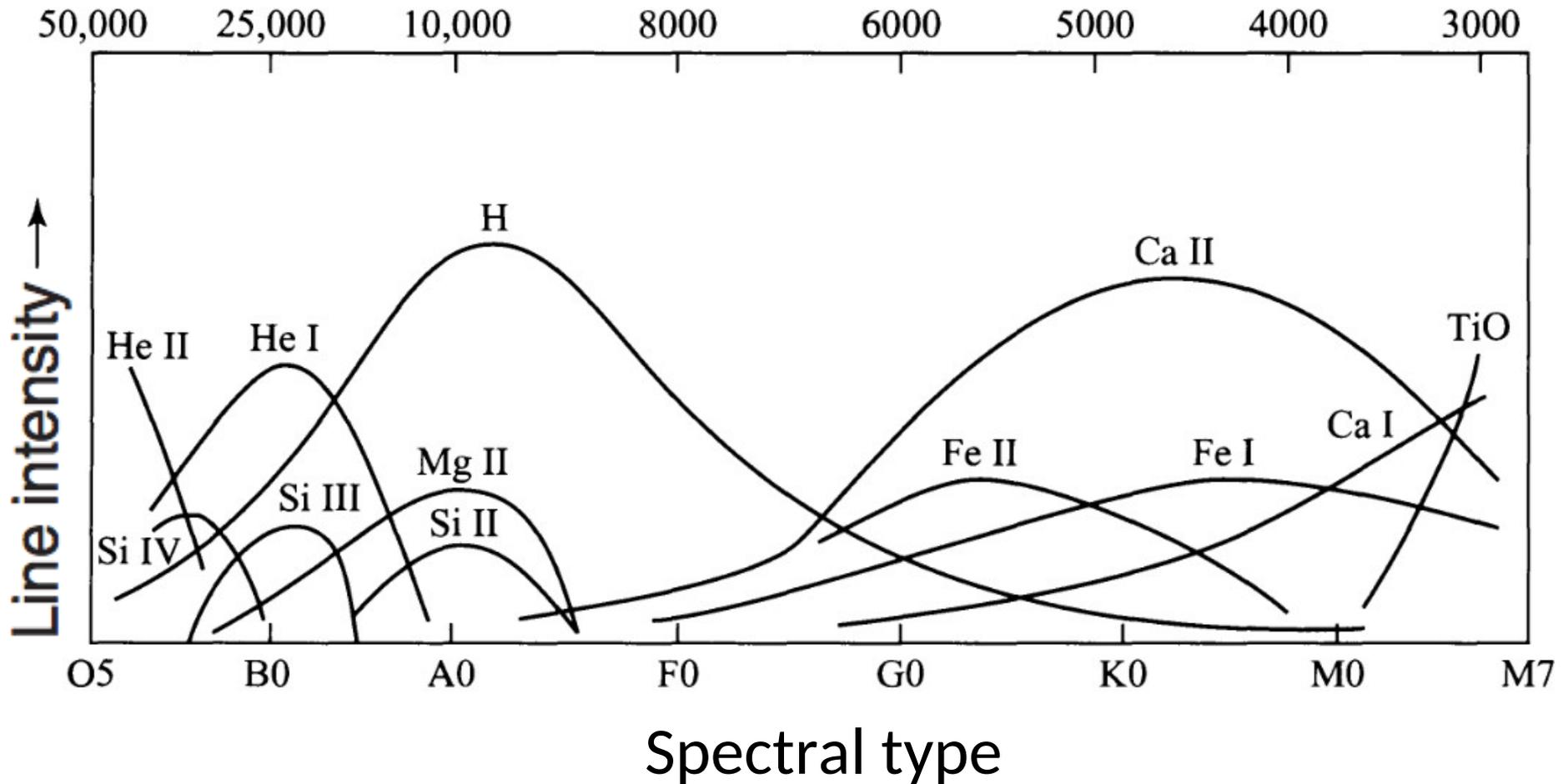


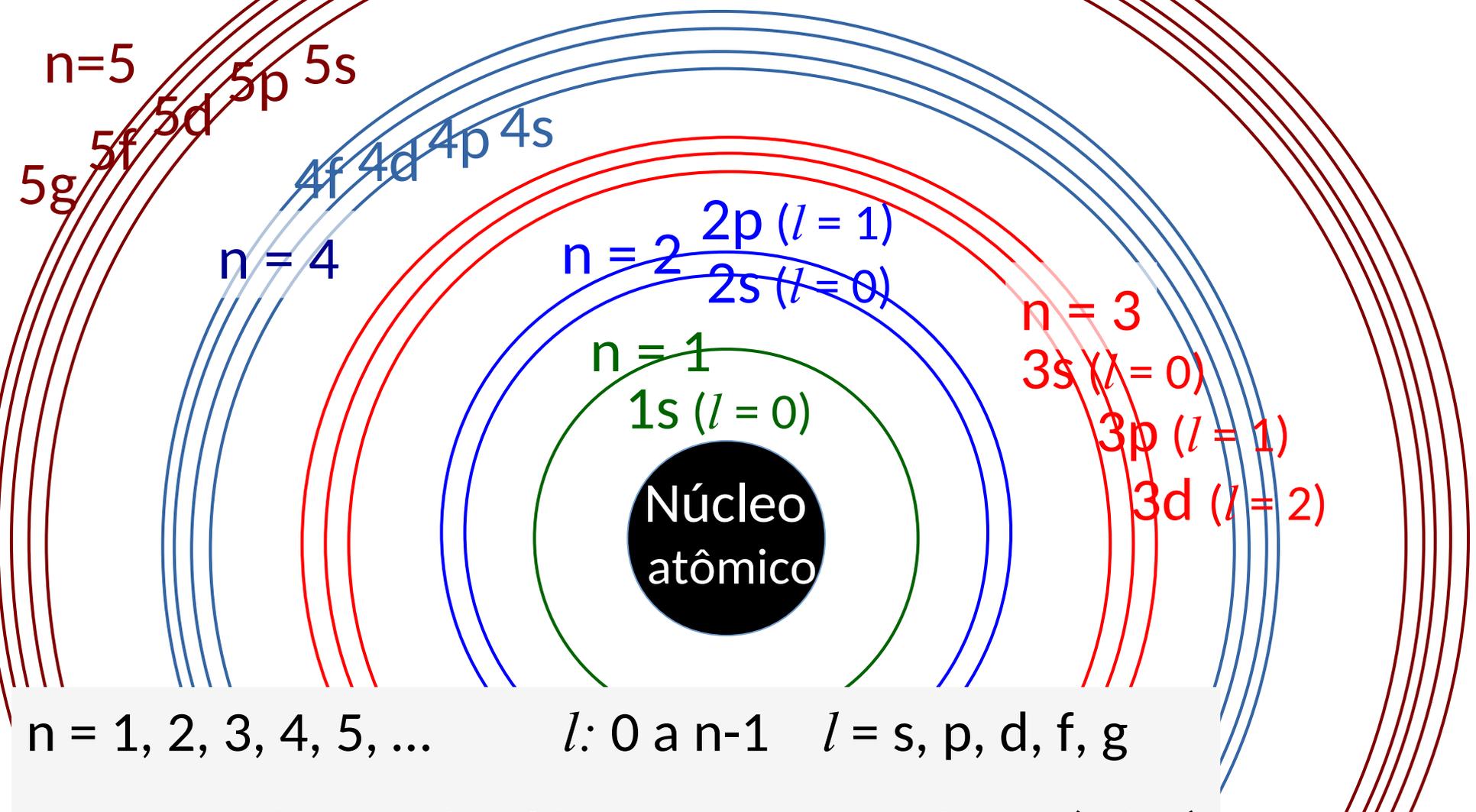
Figure 1.8 Theoretical monochromatic flux emerging from an A type star with $T_{\text{eff}} = 8000 \text{ K}$. The first four Balmer absorption lines, as well as the Balmer jump, are identified in this figure. Thousands of other absorption atomic lines can also be seen. This theoretical flux was obtained with the Phoenix stellar atmosphere code (Hauschildt, P.H., Allard, F. and Baron, E., *The Astrophysical Journal*, 512, 377 (1999)) while using the elemental abundances found in the Sun. The flux at the surface of a blackbody with $T = 8000 \text{ K}$ (dotted curve) is also shown.



Intensidade das linhas vs. T_{eff}

Temperature [K]





$n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ $l: 0 \text{ a } n-1$ $l = s, p, d, f, g$

Máximo número de elétrons por camada $l: 2(2l+1)$

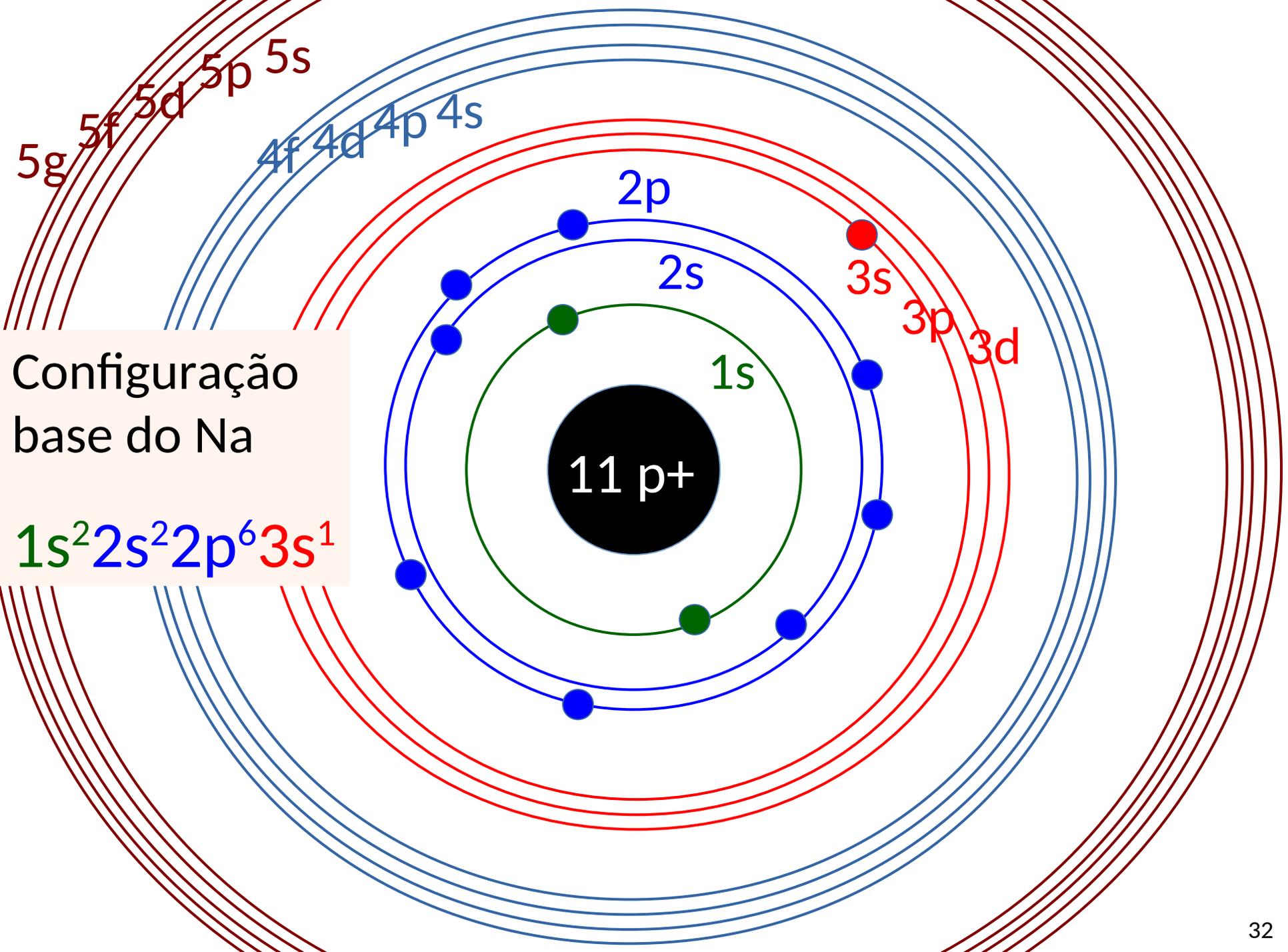
$n = 1, l = 0$ (s)

$n = 2, l = 0$ (s), 1 (p)

Orbital	Equação	Orbital	Equação	Orbital	Equação	Orbital	Equação	Orbital	Equação
1s	$1=1+0$	2p	$3=2+1$	3d	$5=3+2$	4f	$7=4+3$	5g	$9=5+4$
2s	$2=2+0$	3p	$4=3+1$	4d	$6=4+2$	5f	$8=5+3$	6g	$10=6+4$
3s	$3=3+0$	4p	$5=4+1$	5d	$7=5+2$	6f	$9=6+3$	7g	$11=7+4$
4s	$4=4+0$	5p	$6=5+1$	6d	$8=6+2$	7f	$10=7+3$	8g	$12=8+4$
5s	$5=5+0$	6p	$7=6+1$	7d	$9=7+2$	8f	$11=8+3$	9g	$13=9+4$
6s	$6=6+0$	7p	$8=7+1$	8d	$10=8+2$	9f	$12=9+3$	10g	$14=10+4$
7s	$7=7+0$	8p	$9=8+1$	9d	$11=9+2$	10f	$13=10+3$	11g	$15=11+4$
8s	$8=8+0$	9p	$10=9+1$	10d	$12=10+2$	11f	$14=11+3$	12g	$16=12+4$
9s	$9=9+0$	10p	$11=10+1$	11d	$13=11+2$	12f	$15=12+3$	13g	$17=13+4$

orbital
 $E=n+l$

...31

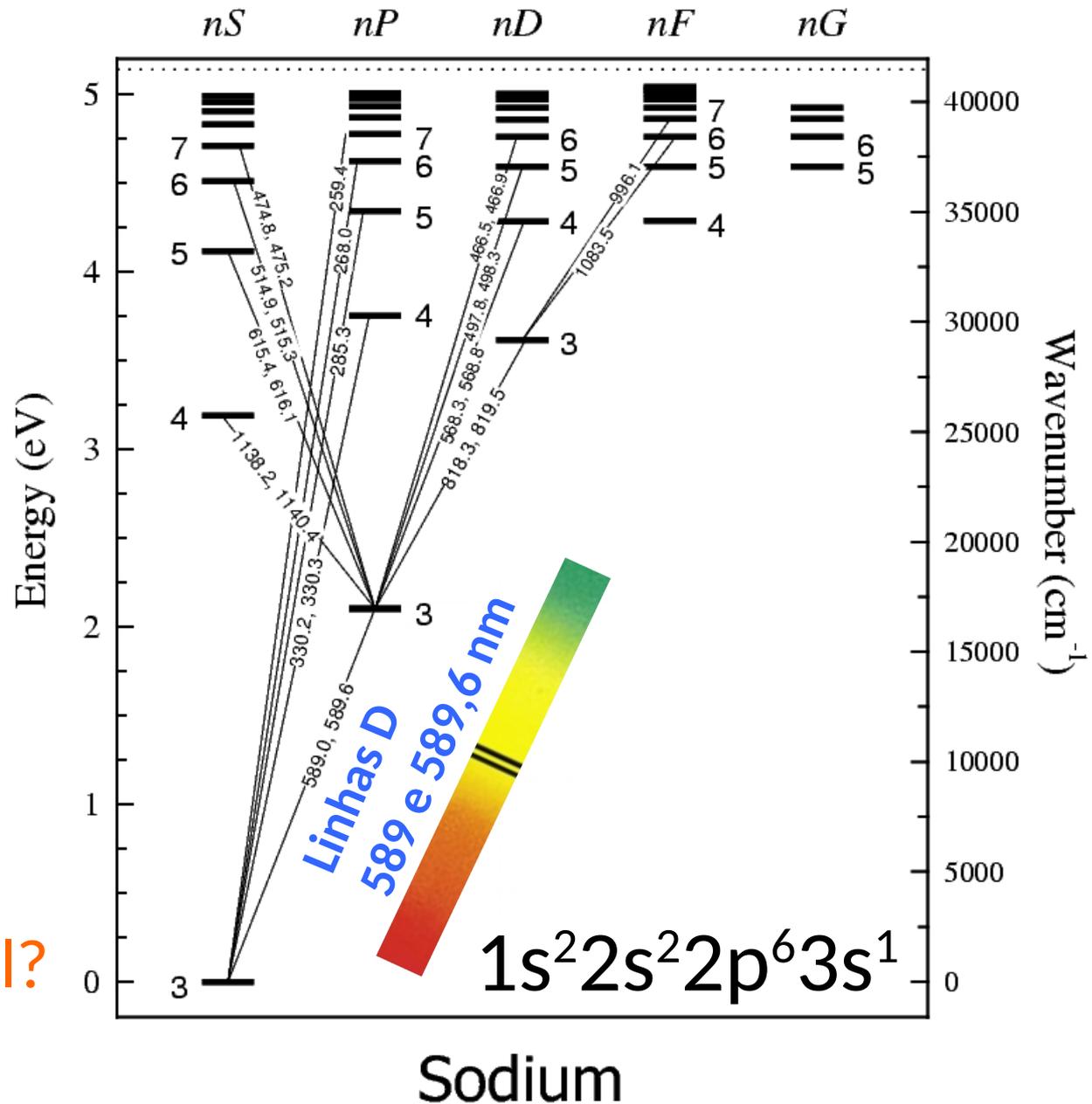


Configuração base do Na

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$

Diagrama de níveis de energia do Na I (também conhecido como 'term diagram' ou 'Grotrian diagram')

Qual a chance de popular determinado nível?



http://128.104.164.100/data/e_sodium.gif

Z : 11

Ioniz. Pot. : 5.138 eV

ground state : $1s^2 2s^2 2p^6 3s$

População entre dois níveis de energia a e b
(Equação de Boltzmann):

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b e^{-E_b/kT}}{g_a e^{-E_a/kT}} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b - E_a)/kT}$$

- N_a, N_b : número de átomos com energia E_a e E_b
- g_a : peso estatístico: número total de possíveis estados quânticos com energia E_a
- Para hidrogênio, $g = 2n^2$

$$k = 8.6173423 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$$

Exemplo 8.1.2. Peso estatístico e números quânticos para o hidrogênio

Peso estatístico g_a :
 número total de
 possíveis estados
 quânticos com
 energia E_a

Hidrogênio:

$$g = 2n^2$$

$$l = 0, \dots, n-1$$

$$m_l = -l, \dots, 0, \dots, +l$$

$$m_s = -1/2, +1/2$$

Ground States s_1				Energy E_1
n	ℓ	m_ℓ	m_s	(eV)
1	0	0	+1/2	-13.6
1	0	0	-1/2	-13.6
First Excited States s_2				Energy E_2
n	ℓ	m_ℓ	m_s	(eV)
2	0	0	+1/2	-3.40
2	0	0	-1/2	-3.40
2	1	1	+1/2	-3.40
2	1	1	-1/2	-3.40
2	1	0	+1/2	-3.40
2	1	0	-1/2	-3.40
2	1	-1	+1/2	-3.40
2	1	-1	-1/2	-3.40

Exemplo 8.1.2. Peso estatístico e números quânticos para o hidrogênio

Peso estatístico g_a :
 número total de
 possíveis estados
 quânticos com
 energia E_a

Hidrogênio:

$$g = 2n^2$$

$$l = 0, \dots, n-1$$

$$m_l = -l, \dots, 0, \dots, +l$$

$$m_s = -1/2, +1/2$$

Ground States s_1				Energy E_1 (eV)
n	ℓ	m_ℓ	m_s	
1	0	0	+1/2	-13.6
1	0	0	-1/2	-13.6

} 2

First Excited States s_2				Energy E_2 (eV)
n	ℓ	m_ℓ	m_s	
2	0	0	+1/2	-3.40
2	0	0	-1/2	-3.40
2	1	1	+1/2	-3.40
2	1	1	-1/2	-3.40
2	1	0	+1/2	-3.40
2	1	0	-1/2	-3.40
2	1	-1	+1/2	-3.40
2	1	-1	-1/2	-3.40

Exemplo 8.1.2. Peso estatístico e números quânticos para o hidrogênio

Peso estatístico g_a :
 número total de
 possíveis estados
 quânticos com
 energia E_a

Hidrogênio:

$$g = 2n^2$$

$$l = 0, \dots, n-1$$

$$m_l = -l, \dots, 0, \dots, +l$$

$$m_s = -1/2, +1/2$$

Ground States s_1				Energy E_1
n	ℓ	m_ℓ	m_s	(eV)
1	0	0	+1/2	-13.6
1	0	0	-1/2	-13.6

} 2

First Excited States s_2				Energy E_2
n	ℓ	m_ℓ	m_s	(eV)
2	0	0	+1/2	-3.40
2	0	0	-1/2	-3.40
2	1	1	+1/2	-3.40
2	1	1	-1/2	-3.40
2	1	0	+1/2	-3.40
2	1	0	-1/2	-3.40
2	1	-1	+1/2	-3.40
2	1	-1	-1/2	-3.40

} 8

Exemplo 8.1.3. Para um gás neutro de átomos de hidrogênio, qual seria a temperatura necessária para termos o mesmo número de elétrons no estado base ($n = 1$) e no primeiro estado excitado ($n = 2$) ?

Exemplo 8.1.3. Para um gás neutro de átomos de hidrogênio, qual seria a temperatura necessária para termos o mesmo número de elétrons no estado base ($n = 1$) e no primeiro estado excitado ($n = 2$) ?

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b - E_a)/kT}$$

Condição do problema: $N_b = N_a$

$$1 = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b - E_a)/kT}$$

Exemplo 8.1.3. Para um gás neutro de átomos de hidrogênio, qual seria a temperatura necessária para termos o mesmo número de elétrons no estado base ($n = 1$) e no primeiro estado excitado ($n = 2$) ?

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b - E_a)/kT}$$

Condição do problema: $N_b = N_a$

Para hidrogênio, $g = 2n^2$

$$E_n = -13,6 \frac{1}{n^2} \text{ eV}$$

$$1 = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b - E_a)/kT}$$

Exemplo 8.1.3. Para um gás neutro de átomos de hidrogênio, qual seria a temperatura necessária para termos o mesmo número de elétrons no estado base ($n = 1$) e no primeiro estado excitado ($n = 2$) ?

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b - E_a)/kT}$$

Condição do problema: $N_b = N_a$

Para hidrogênio, $g = 2n^2$

$$E_n = -13,6 \frac{1}{n^2} \text{ eV}$$

$$1 = \frac{g_b}{g_a} e^{-(E_b - E_a)/kT}$$

$$1 = \frac{2(2)^2}{2(1)^2} e^{-[(-13.6 \text{ eV}/2^2) - (-13.6 \text{ eV}/1^2)]/kT}$$

Exemplo 8.1.3. Para um gás neutro de átomos de hidrogênio, qual seria a temperatura necessária para termos o mesmo número de elétrons no estado base ($n = 1$) e no primeiro estado excitado ($n = 2$) ?

$$1 = \frac{2(2)^2}{2(1)^2} e^{-[(-13.6 \text{ eV}/2^2) - (-13.6 \text{ eV}/1^2)]/kT}$$

Fazendo as contas: $\frac{10.2 \text{ eV}}{kT} = \ln(4)$

$$T = \frac{10.2 \text{ eV}}{k \ln(4)} = 8.54 \times 10^4 \text{ K}$$

$$k = 8.6173423 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$$

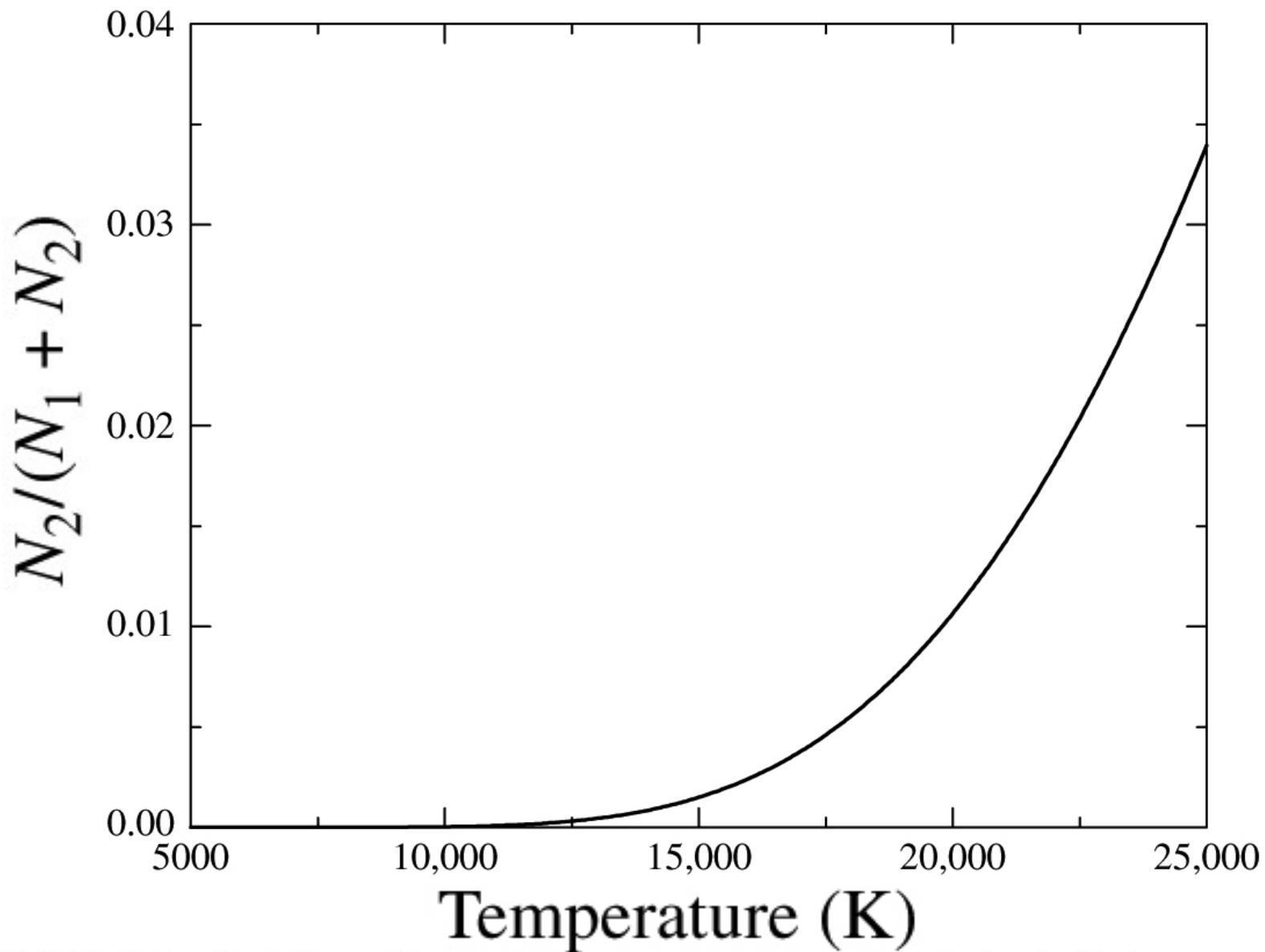


FIGURE 8.7 $N_2/(N_1 + N_2)$ for the hydrogen atom obtained via the Boltzmann equation

Por que as linhas da série de Balmer ($n = 2$) são mais intensas em estrelas de tipo A0 ($T_e \sim 10\,000\text{ K}$)?

