



Capítulo 1

MECÂNICA DO SISTEMA SOLAR

A Astronomia divide-se basicamente em duas linhas de estudo acerca das características dos corpos celestes, que dependem da forma que se interpreta a luz proveniente desses astros. Em Astrofísica procuramos identificar o tipo de radiação e buscamos quantificá-la para caracterizar os objetos em função de suas condições físicas. Por outro lado, em Astrometria e Dinâmica Celeste procura-se conhecer a posição e o movimento dos objetos avaliando a direção de onde provém a radiação.

Nós dedicaremos esse capítulo ao estudo das leis que regem a mecânica do sistema solar, apresentando inicialmente a evolução dos conceitos a respeito da estrutura do nosso sistema planetário. Os tópicos abordados serão os seguintes:

- **ESTRUTURA DO SISTEMA SOLAR**
 - a. Sistema Geocêntrico
 - b. Sistema Geocêntrico com Epiciclos
 - c. Sistema Heliocêntrico
 - d. Configurações Planetárias
- **AS LEIS DE KEPLER**
 - Lei das elipses
 - Lei das áreas
 - Lei harmônica
- **AS LEIS DE NEWTON**
 - Leis de movimento
 - Lei da gravitação universal
 - 3ª lei de Kepler na formulação Newtoniana

Bibliografia

- *Astronomia & Astrofísica* - Apostila do Curso de Extensão Universitária do IAG/USP (1991, ed. W. Maciel) - Cap. 1 e 2 do Prof. R. Boczko.
- *Conceitos de Astronomia*, R. Boczko, Edgard Blucher (1984)
- *Introductory Astronomy & Astrophysics*, Zeilik & Smith (Cap. 01)
- *Astronomy: a beginner's guide to the Universe*, Chaisson & McMillan (Cap. 01)

MECÂNICA DO SISTEMA SOLAR

Alguns conceitos básicos da astronomia surgiram na antigüidade, a partir da simples observação das mudanças na posição dos corpos celestes. Ao olharmos para o céu, notamos que ele se apresenta na forma de um hemisfério, como se nos situássemos no centro da esfera correspondente. Esta é a chamada **visão egocêntrica** do céu, que em astronomia é conhecida como **Observação Topocêntrica**. Vamos descrever a seguir algumas definições estabelecidas por esse tipo de observação.

O intervalo de tempo conhecido como **Dia Claro** é estabelecido pelo **Movimento Diurno Aparente do Sol**, que *nasce* do lado chamado nascente ou **oriente**, *move-se* pela Abóbada Celeste e finalmente *se põe* do outro lado, chamado poente ou **ocidente**. O período chamado **Noite** é definido pelo **Movimento Noturno Aparente**, desde o instante em que o Sol *se põe* até que volte a *nascer* novamente. Verificados esses dois movimentos, convencionou-se chamar-se de **Movimento Diário Aparente** o movimento que os astros *parecem* realizar no céu no período de cerca de um dia.

Durante milênios, observações feitas noite após noite mostraram que a posição das estrelas parece não mudar, sendo então consideradas **fixas**, umas com relação às outras. Esta aparente imobilidade das estrelas fez com que elas fossem, para efeito de reconhecimento do céu, *associadas* em grupos puramente **subjetivos** chamados **Constelações**. Hoje em dia são catalogadas 88 constelações.

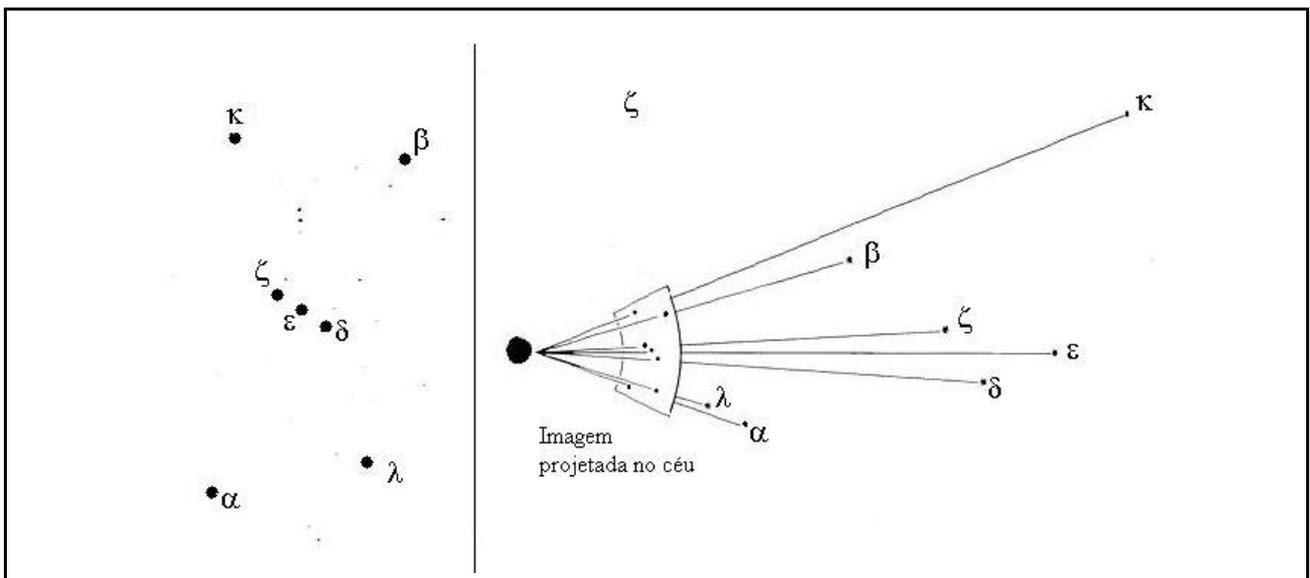
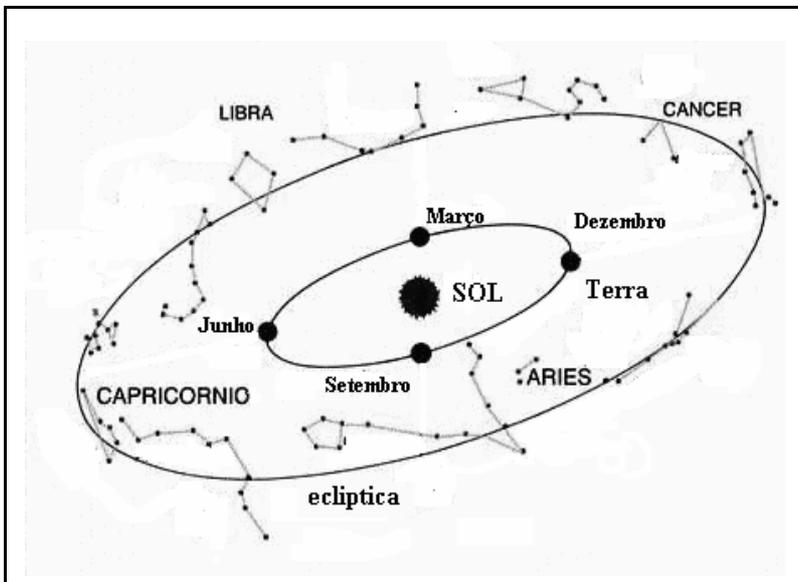


Figura 1. Representação esquemática da constelação de Orion e o efeito de projeção que faz com que a constelação tenha a aparência de um grupo de estrelas.

A principal diferença entre estrela e planeta é que na estrela ocorrem reações de fusão nuclear que geram energia e fazem com que ela brilhe, já o planeta apenas brilha por um efeito de reflexão da luz que ele recebe. Na antigüidade, a distinção entre planeta e estrela dependia do que se observava e logo descobriu-se uma importante diferença: *as estrelas parecem fixas nas constelações*, enquanto que os planetas (palavra de origem grega significando "errante") *se movem "entre" as estrelas fixas*. Foi assim que os antigos conseguiram reconhecer os 5 planetas visíveis a olho nu: **Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno**.

Para melhor entender os Modelos propostos antigamente, que buscavam descrever a estrutura do Sistema Solar, vamos abordar alguns dos conceitos estabelecidos com base nas observações do Sol, da Lua e dos Planetas, feitas a partir da Terra (observações geocêntricas): o movimento diurno se dá na direção oeste, com relação ao horizonte. Porém,



com relação às estrelas, o Sol tem um movimento aparente na direção leste, durante o período de um ano. Essa trajetória *aparente* do Sol (*entre as estrelas*) tem o nome de **Eclíptica**. As doze constelações por ela atravessadas formam o zodíaco. Os Planetas e a Lua assim como o Sol, movem-se com relação às estrelas no interior da faixa do Zodíaco.

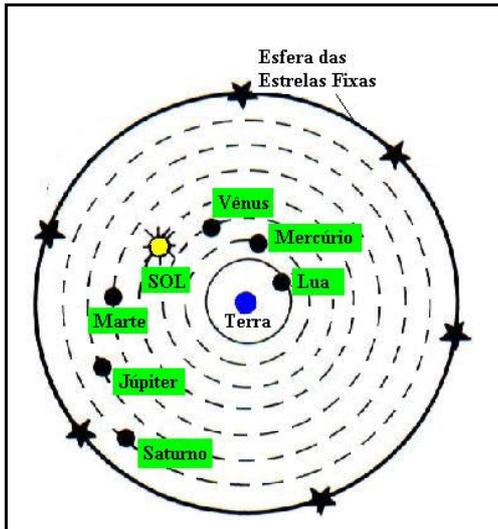
Figura 2. A eclíptica e o movimento anual aparente do Sol

ESTRUTURA DO SISTEMA SOLAR

Antes de se chegar a um melhor entendimento a respeito do sistema solar, muitos modelos foram propostos para explicar as observações que se realizavam e apresentar uma teoria que reproduzisse o movimento dos astros. Cada modelo propunha uma estrutura diferente para o sistema solar e veremos aqui apenas os que foram mais aceitos durante um certo tempo.

(a) Sistema Geocêntrico

O modelo que predominou por mais tempo foi o Sistema Geocêntrico, com a Terra ocupando o centro do Universo, e tudo o mais girando ao seu redor. Esse sistema foi idealizado a partir da observação do movimento diário dos astros, e foi usado até o século XVI. Admitindo-se que, quanto mais distante da Terra estivesse o astro, mais tempo levaria para dar uma volta em torno dela, estabeleceu-se a seguinte ordem de colocação: Terra, Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter e Saturno. As estrelas estariam englobando tudo.



Apesar de razoável, esse modelo apresentava alguns inconvenientes: na época acreditava-se que o céu era *um local perfeito*, e portanto os astros deveriam realizar *movimentos perfeitos*. No entanto, entre as estrelas fixas, as quais realmente realizavam movimentos bastante uniformes, encontravam-se 7 astros que *fugiam* completamente dessa regra: eram os chamados **Astros Errantes** (planetas). Neste caso, o Sol e a Lua também eram chamados de planetas.

Figura 3. Sistema Geocêntrico proposto por Ptolomeu no séc. II d. C.

Os movimentos dos planetas se mostravam complicados, mas todos com a mesma característica de estarem sempre próximos à eclíptica. Mercúrio e Vênus (também denominados planetas inferiores) se caracterizam por oscilarem em torno do Sol, como se este definisse uma posição média. A máxima distância angular entre o Sol e o planeta, é aproximadamente de 41° para Vênus e 25° para Mercúrio. Por esta razão estes planetas são visíveis somente pouco antes do amanhecer, ou instantes após o pôr do Sol.

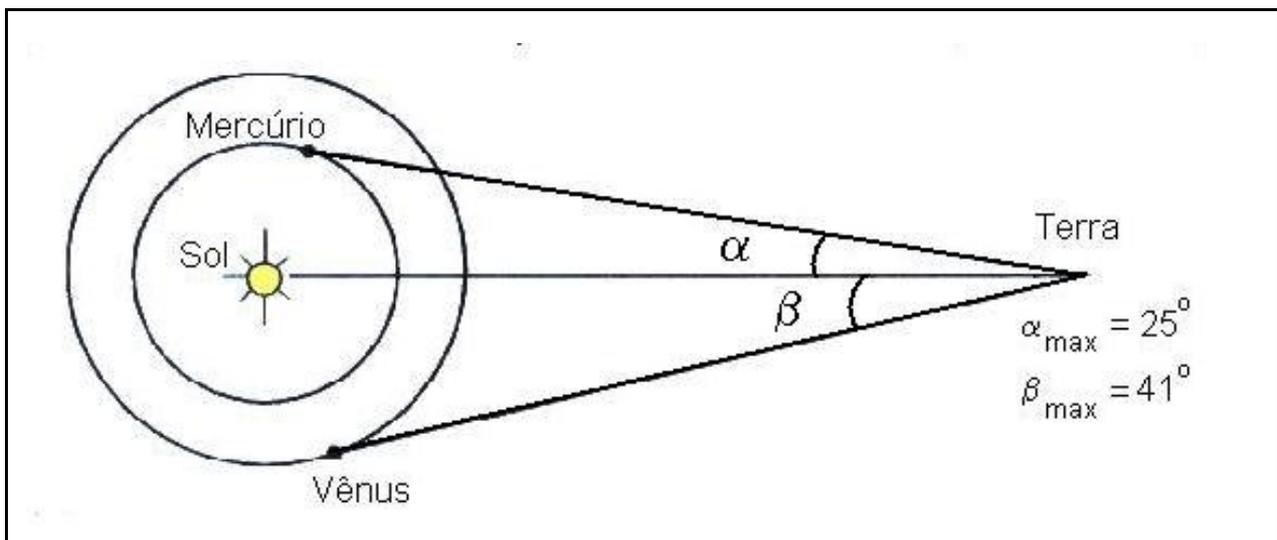


Figura 4. Máximas distâncias angulares entre o Sol e os planetas Mercúrio e Vênus, observadas da Terra.

O movimento dos planetas inferiores, assim como o do Sol e da Lua, é de oeste para leste em relação às estrelas fixas. Esse sentido é dito **direto**. Os demais planetas (também denominados superiores) se distinguem por apresentarem eventualmente ao longo de sua trajetória um deslocamento de leste para oeste (**retrógrado**), descrevendo um laço e depois retornando ao sentido normal. Cada planeta tem um período próprio de movimento retrógrado. Marte, por exemplo, descreve um laço a cada 780 dias; Júpiter a cada 399 dias.

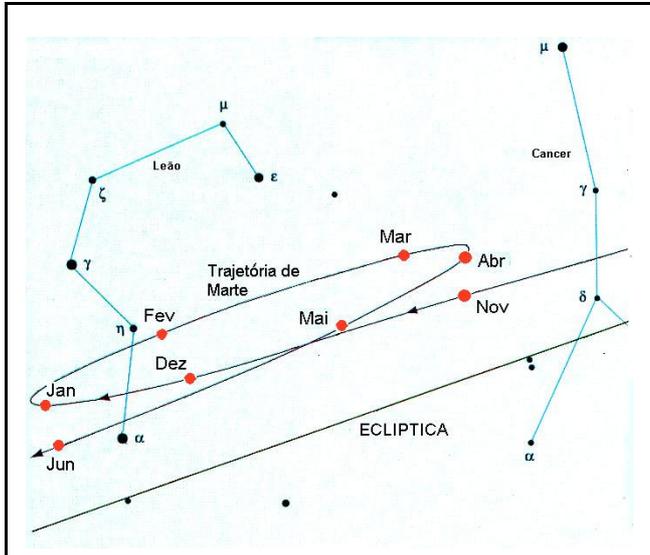


Figura 5. Representação do movimento do planeta Marte com relação às constelações, formando laços (movimento retrógrado).

O **movimento retrógrado** (de leste para oeste) apresentado pelos planetas superiores ocorre quando estão próximos do fenômeno conhecido como oposição. Como sua velocidade é menor que a da Terra, o movimento angular aparente visto daqui torna-se negativo. O planeta descreve um pequeno laço entre as estrelas, porque sua órbita e a da Terra não são exatamente coplanares. Esse efeito somente foi explicado mais tarde, quando **Copérnico** afirmou corretamente que a velocidade dos planetas *diminui com a distância* ao Sol.

Como o sistema geocêntrico não explicava os movimentos dos planetas com relação às estrelas fixas, no século IV a.C. **Heráclides** propôs um sistema misto. A Terra estaria no centro do Universo, mas Mercúrio e Vênus, que nunca eram vistos muito distantes do Sol, girariam em torno deste.

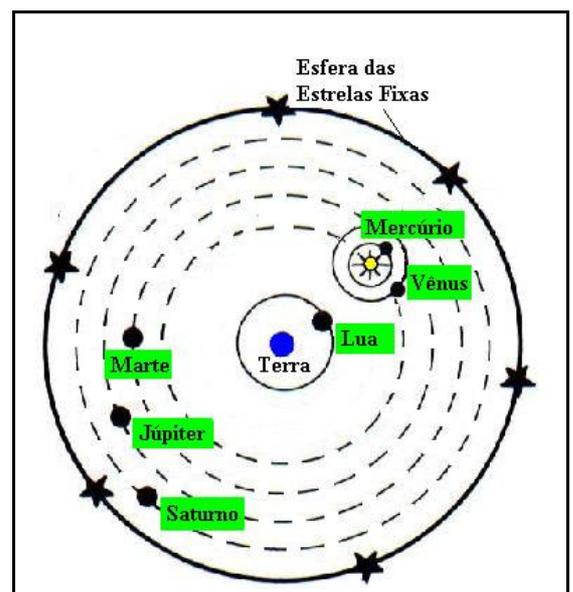


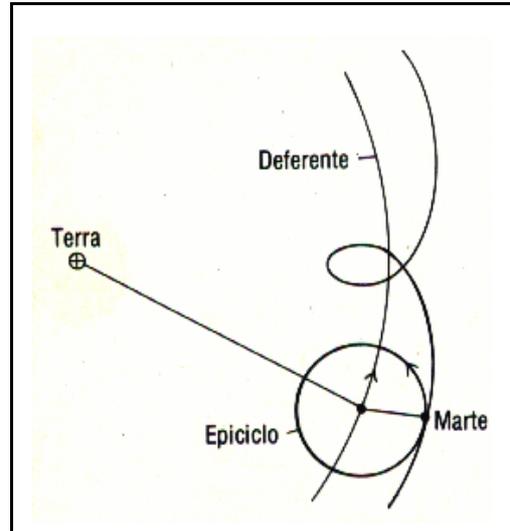
Figura 6. Sistema Geocêntrico proposto por Heráclides

(Fig. 2.2 - Boczko, 1991)

(b) Sistema Geocêntrico com Epiciclos

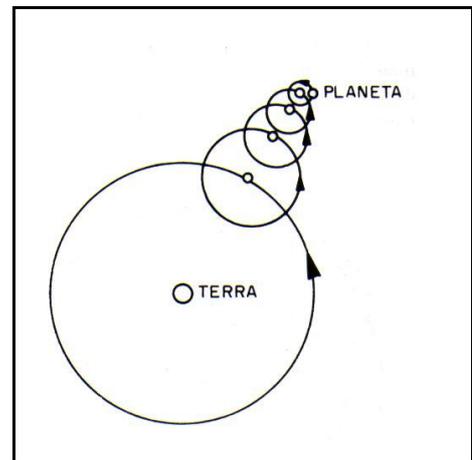
À medida que os métodos e os instrumentos de observação astronômica ficavam mais refinados, as posições observadas se diferenciavam cada vez mais das posições previstas pelos modelos adotados.

Para amenizar o problema, adotou-se um modelo geocêntrico que inclui epiciclos, aperfeiçoado por Ptolomeu no século II d.C. *O planeta giraria em torno de um ponto abstrato que por sua vez giraria em torno da Terra.* A órbita do ponto abstrato chamava-se **deferente** e a órbita do planeta em torno do ponto abstrato era o **epiciclo**.



A melhoria das teorias e das observações exigiu que o primeiro epiciclo passasse a ser um segundo deferente, ao qual se ligava um segundo epiciclo. E assim sucessivamente.

Figura 7. Sistema geocêntrico com epiciclos (Fig. 2.3, Boczko 1991)



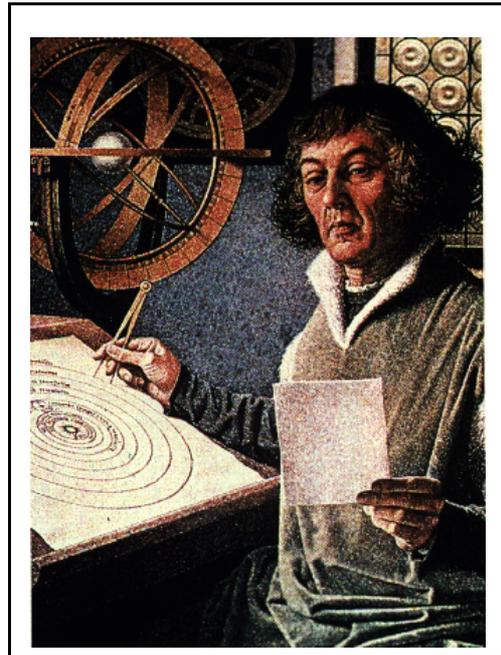
Apesar de reproduzir com boa precisão as posições observadas, o método tinha a desvantagem de ser bastante complexo para a época. À medida que se conseguiam novas observações, mais e mais discrepâncias iam sendo constatadas na teoria de Ptolomeu. A tentativa de explicar as numerosas discrepâncias através de outro modelo, que não fosse o geocêntrico, sempre esbarrou em conflitos com a Igreja. Assim, a cada irregularidade observada, acrescentava-se artificialmente mais e mais epiciclos, deferentes, etc.

(c) Sistema Heliocêntrico

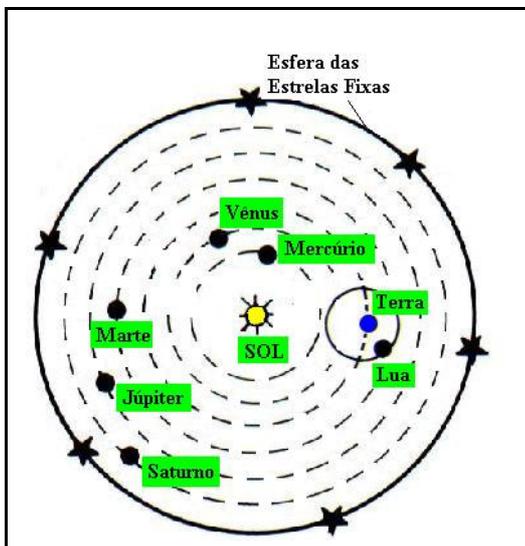
No século XVI, o polonês Nicolau Copérnico procurou uma maneira de simplificar essa representação, e propôs o sistema heliocêntrico, isto é, o Sol passaria a ocupar a posição de centro do Universo, e a Terra seria apenas mais um dos planetas que giravam em torno do Sol. Essa idéia não era absolutamente original, considerando que já havia sido apresentada

anteriormente por Aristarco e por Nicolau de Cusa. Mesmo no antigo Egito, por volta do século XIV a.C., Amenófis IV propôs o Sol no centro do Universo, mas nesse caso o motivo parece ter sido unicamente religioso, sem nenhum fundamento científico. Copérnico teria sido o primeiro a dar uma forma científica ao sistema heliocêntrico.

Com o Sistema Heliocêntrico, o movimento aparentemente desorganizado dos planetas pode ser explicado como sendo resultado de uma simples soma vetorial de velocidades. Também nesse sistema, *o movimento dos planetas era suposto circular e uniforme*, como convinha (conforme os dogmas da época) a qualquer movimento perfeito.



A ordem dos planetas em torno do Sol foi estabelecida da mesma forma como no caso geocêntrico: quanto maior o período da órbita, mais distante o planeta deveria estar do Sol.



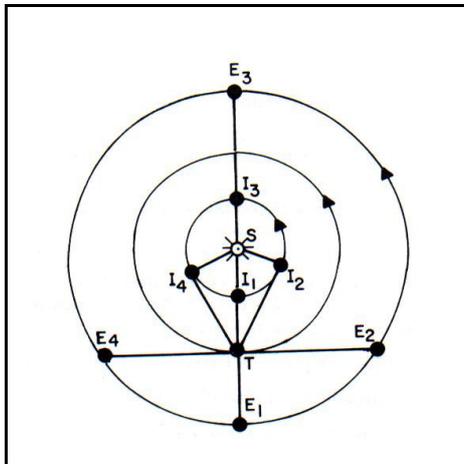
A primeira prova irrefutável de que a Terra não era o centro de todos os movimentos celestes veio com **Galileu Galilei** no início do século XVII, quando ele apontou uma luneta ao planeta Júpiter e pode perceber que 4 astros (mais tarde chamados de satélites galileanos de Júpiter) descreviam com certeza, órbitas em torno de Júpiter e não da Terra. Dessa forma, o sistema geocêntrico perdeu sua credibilidade.

Figura 8. Sistema Heliocêntrico, proposto por Copérnico, cujo retrato aparece ilustrado acima (J.L. Huens, National Geo. Soc.).

(d) Configurações Planetárias

Algumas situações *especiais* chamadas configurações planetárias foram definidas em função do alinhamento entre Sol, Terra e Planeta. Define-se **elongação** como sendo o ângulo visto a partir da Terra entre as direções do centro do Sol e de um planeta. Elongação de 0° é chamada **conjunção**; 180° é **oposição**; e 90° é **quadratura**, quando a Terra está no vértice de um ângulo reto. Com base nas configurações planetárias e em observações pode-se determinar a distância dos planetas até o Sol.

As várias configurações planetárias dependem das diferentes combinações entre a posição do Planeta (P) com relação à Terra (T) e ao Sol (S), de acordo com a Figura 9:



Planetas interiores (Mercúrio e Vênus)

- Conjunção Inferior:

Planeta entre a Terra e o Sol (I_1)

- Conjunção Superior:

Sol entre a Terra e o Planeta (I_3), sendo que nos casos de **máxima elongação** ocidental (I_2) e oriental (I_4) não ocorre alinhamento.

Figura 9. Configurações planetárias (Fig. 2.4, Boczeko 1991).

Planetas exteriores

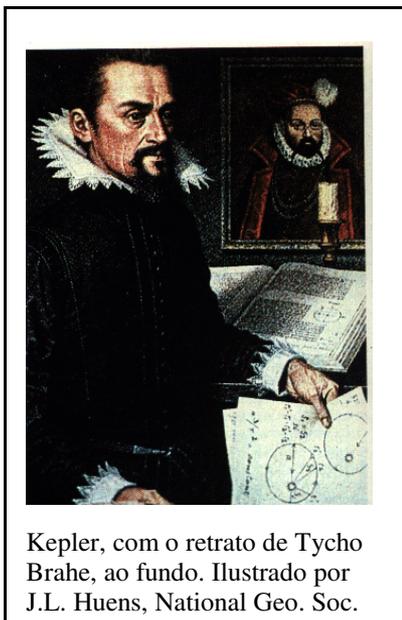
- Oposição: Terra entre Sol e Planeta (E_1)
- Conjunção: quando o ângulo entre Sol e planeta, observado da Terra, é zero (E_3), sendo que nos casos de **quadratura** ocidental (E_2) e oriental (E_4) não ocorre alinhamento.

AS LEIS DE KEPLER

Em 1687 Isaac Newton formulou *as leis de movimento e a lei da gravitação universal* e

deduziu algumas das mais significativas propriedades do movimento planetário e dos satélites. Porém, antes de se estabelecerem os princípios da mecânica, que permitiriam o estudo dinâmico dos movimentos dos corpos celestes, os estudos cinemáticos eram feitos com base nas observações. A dedução das três Leis de **Kepler** precedeu o trabalho de Newton em vários anos. A Mecânica Celeste foi introduzida por Newton, investigando que tipo de informação a respeito da força que atua sobre um planeta pode ser deduzida das Leis de Kepler.

Desde a época de Aristóteles, pensava-se que o único movimento natural e perfeito era o movimento circular e que os corpos pesados moviam-se necessariamente em círculos. Os planetas então girariam em trajetórias circulares ou em combinações de círculos maiores.



Kepler, com o retrato de Tycho Brahe, ao fundo. Ilustrado por J.L. Huens, National Geo. Soc.

Entretanto, Kepler, usando os dados observacionais de Tycho Brahe, começou a encontrar dificuldades em conciliar uma tal teoria com os fatos observados. De 1601 até 1606, tentou ajustar várias curvas geométricas aos dados de Tycho sobre as posições de Marte. Finalmente, encontrou uma solução: a **elipse**. A órbita foi determinada, e Kepler publicou em 1609 suas duas primeiras leis do movimento planetário. A terceira foi publicada em 1619.

Sabemos que na elipse, a soma das distâncias até os focos é constante: $r + r' = 2a$, onde a é o semi-eixo maior.

No caso de uma órbita planetária, o semi-eixo maior da elipse é a distância média do Sol até o planeta.

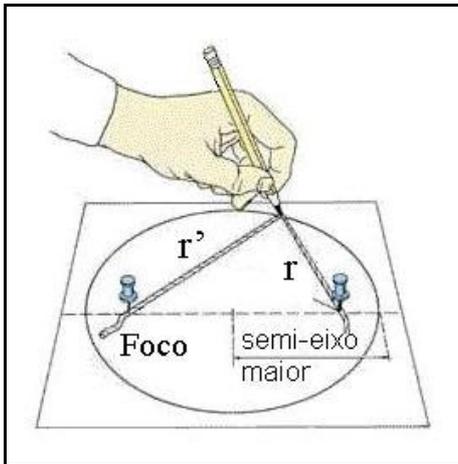


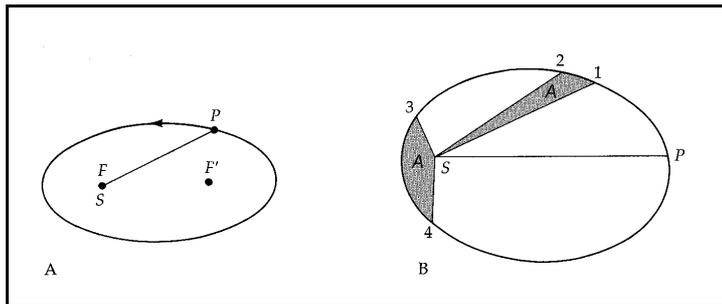
Figura 10. Numa elipse, a soma das distâncias de um determinado ponto da órbita até os focos é igual ao eixo maior.

Lei das Elipses

Kepler conseguiu demonstrar que as órbitas estão em planos que contêm o Sol e descobriu que se tratavam de elipses, definindo a **1ª Lei**: *A órbita de cada planeta é uma elipse, com o Sol situado em um dos focos* (veja Fig. 11A.).

Lei da Áreas

Kepler também investigou as velocidades dos planetas e encontrou que o movimento é mais rápido nos pontos da órbita que são mais próximos do Sol. Ele conseguiu expressar analiticamente este fato, considerando o segmento de reta que une o planeta ao Sol. Assim, foi definida a **2ª Lei**: *A reta que liga o planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais* (veja Fig. 11B.).



Considere dois intervalos de tempo iguais, de 1 a 2 e de 3 a 4. A reta SP, que liga o Sol ao planeta, varre a mesma área A em ambos os intervalos.

Figura 11. (A) Primeira lei de Kepler. (B) Segunda lei de Kepler.

Lei Harmônica

Sempre guiado pela busca de harmonia, Kepler trabalhou durante 10 anos até apresentar a **3ª Lei**: *O quadrado do período de um planeta é proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol*. Essa lei pode ser algebricamente expressa por $P^2/a^3 = k$, onde **P** é o período sideral¹ do planeta e **a** o semi-eixo de sua órbita. A constante **k** tem o mesmo valor para todos os corpos orbitando em torno do Sol.

A LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL DE NEWTON

Antes de Newton, Kepler já havia suspeitado que alguma força atuava para manter os planetas em órbita ao redor do Sol, atribuindo as órbitas elípticas a uma força de atração magnética.

Seguindo uma linha de raciocínio semelhante, Newton descobriu sua lei da gravitação universal, comprovou-a por meio do movimento da Lua e explicou o movimento dos planetas.

Para simplificar, vamos supor que o corpo possui órbita circular, de raio **r**:

- força centrípeta: $F_{cem} = \frac{mv^2}{r}$

Se **P** é o período orbital do corpo: $v = 2\pi/P$; mas, pela terceira lei de Kepler, $P^2 = kr^3$.

Então
$$F = m \frac{4\pi^2 r^2}{P^2 r} = m \frac{4\pi^2 r^2}{kr^3 r} = \frac{4\pi^2 m}{kr^2}$$

Assim, a força que mantém a órbita é inversamente proporcional ao quadrado do raio.

Leis de movimento de Newton

No contexto Newtoniano supõe-se: espaço-tempo absoluto, partícula material de massa **m** descrevendo uma trajetória $x(t)$ com velocidade $v(t)$, com quantidade de movimento $p(t) = mv$ e aceleração $a(t)$.

1ª: Lei da inércia

Qualquer corpo permanece em seu estado de repouso, ou de movimento retilíneo e uniforme, a menos que seja compelido a mudar de estado por uma força externa.

¹ Período Sideral é o intervalo de tempo necessário para que o planeta percorra 360° em torno do Sol

2ª: Lei da força

A taxa de variação da quantidade de movimento de um corpo é igual à força que atua sobre o corpo.

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} = ma$$

3ª: Lei da ação e reação

A cada ação existe sempre uma reação igual e de sentido contrário.

Lei da gravitação Universal

- *Matéria atrai matéria na razão direta das massas e inversa do quadrado da distância*

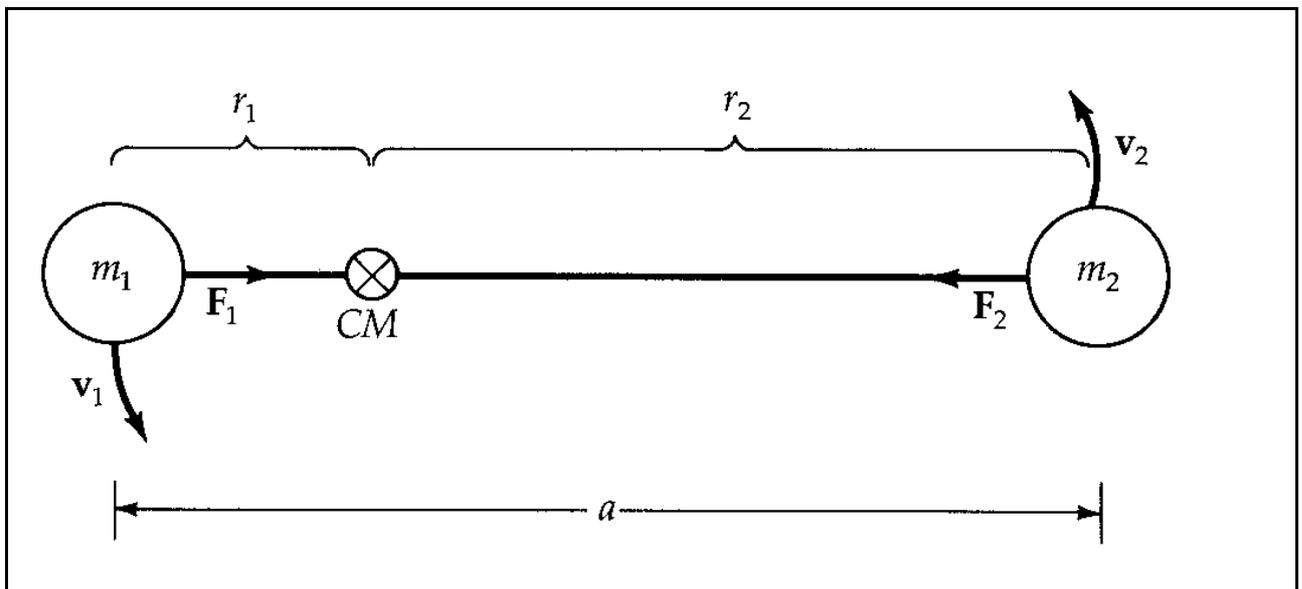
Ou seja, a força com que dois corpos de massas m_1 e m_2 se atraem mutuamente é dada

por:
$$|\vec{f}| = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$$

Onde r é a distância que separa os dois corpos e G a constante universal de gravitação $G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Newton combinou suas três leis de movimento e a lei da gravitação para deduzir as leis empíricas de Kepler.

3ª Lei de Kepler na formulação Newtoniana

Vamos supor um sistema isolado com apenas dois corpos em órbita circular, sob ação de sua força gravitacional mútua. O resultado a que se chega é igualmente aplicável a órbitas elípticas. Consideremos dois corpos de massas m_1 e m_2 , que orbitam em torno de um centro de massa suposto estacionário, do qual distam de r_1 e r_2 .



Uma vez que a força gravitacional atua ao longo da linha imaginária que os une, ambos os corpos devem completar uma órbita no mesmo período P (embora movam-se com velocidades diferentes). Para uma órbita circular: $P = 2\pi r/v \Rightarrow v = 2\pi r/P$.

A força centrípeta necessária para manter as órbitas é: $F_{cent} = \frac{mv^2}{r}$

Lembrando a lei da gravitação universal:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1)$$

podemos escrever:

$$F_1 = m_1 \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2 r_1^2}{P^2} \frac{m_1}{r_1} = \frac{4\pi^2 r_1 m_1}{P^2} \quad ; \quad F_2 = m_2 \frac{v_2^2}{r_2} = \frac{4\pi^2 r_2^2}{P^2} \frac{m_2}{r_2} = \frac{4\pi^2 r_2 m_2}{P^2} \quad ,$$

mas $F_1 = F_2 \Rightarrow r_1 m_1 = r_2 m_2 \Rightarrow \boxed{\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}}$

O corpo de massa maior permanece mais próximo do centro de massa.

Como $a = r_1 + r_2$, então $r_1 = (a - r_2) \frac{m_2}{m_1} = a \frac{m_2}{m_1} - r_2 \frac{m_2}{m_1}$

$$r_1 \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) = a \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \boxed{r_1 = a \frac{m_2}{m_1 + m_2}} \quad (2)$$

lembrando que $F_{grav} = F_1 = F_2 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow \boxed{F_{grav} = G \frac{m_1 m_2}{a^2}}$ (3)

Podemos reformular a 3ª lei de Kepler $P^2 \propto r^3$, combinando (1), (2), e (3):

$$F_1 = \frac{4\pi^2 r_1 m_1}{P^2} \Rightarrow P^2 = \frac{4\pi^2 r_1 m_1}{F_1} = \frac{4\pi^2 a m_2 m_1 a^2}{(m_1 + m_2) G m_1 m_2}$$

$$\boxed{P^2 = \left[\frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \right] a^3}$$

Aplicação ao Sistema Solar

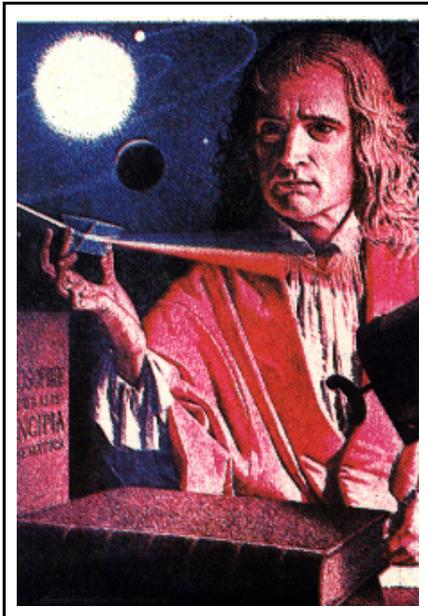
Entre as várias aplicações, podemos calcular, por exemplo, a massa do Sol (M_{\odot}):

- Se um dos corpos tem massa muito maior que a do outro ($M_{\odot} \gg m_P$), então

$$P^2 = \left[\frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \right] a^3 = \frac{4\pi^2}{GM_e} a^3.$$

Para o sistema Terra-Sol a distância é de 1 U.A. e o período é de 1 ano.

$$M_{\odot} = \frac{4\pi^2 (1,5 \cdot 10^{13})^3}{(6,67 \cdot 10^{-8})(3,16 \cdot 10^7)^2} \frac{cm^3}{(cm^3 g^{-1} s^{-2})(s^2)}, \text{ então } M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{33} g$$



Isaac Newton. Ilustrado por J.L. Huens, National Geographic Society.

EXERCÍCIOS

1. Qual foi a contribuição de Galileu na confirmação da teoria de Copérnico?
2. Qual foi a contribuição de Tycho Brahe na dedução das leis de Kepler?
3. O movimento do Sol, dos planetas e da Lua, com relação às estrelas fixas é de oeste para leste. No entanto, alguns planetas podem apresentar-se em movimento retrógrado. **(a)** Para quais deles esse fenômeno ocorre? **(b)** O que causa esse movimento?
4. Considere o planeta *Endor* e seu satélite natural *Forest Moon*, cuja órbita tem 940 mil quilômetros em seu semi-eixo maior e um período de 8 dias. Calcule a massa de *Endor*, supondo que a massa de *Forest Moon* é desprezível, quando comparada à massa do planeta.