

# Introdução a Dinâmica Estelar

Notas de Aula

Gastão Bierrenbach Lima Neto – IAG/USP



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Sistemas Astronômicos . . . . .	1
1.2	Escalas de Tempo e Livre Caminho Médio . . . . .	1
1.2.1	Tempo dinâmico . . . . .	1
1.2.2	Livre caminho médio . . . . .	2
1.2.3	Tempo de Relaxação . . . . .	3
1.3	Aproximação Contínua . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Sistemas em Equilíbrio</b>	<b>7</b>
2.1	Teorema do Virial . . . . .	7
2.1.1	Aplicação do teorema do virial . . . . .	8
2.2	Perfis de Luminosidade e Massa . . . . .	10
2.2.1	Galáxias elípticas . . . . .	11
2.2.2	Galáxias espirais . . . . .	12
2.3	Pares de Densidade–Potencial . . . . .	12
2.3.1	Massa pontual . . . . .	13
2.3.2	Esfera homogênea . . . . .	14
2.3.3	Pares de densidade–potencial de elípticas . . . . .	15
2.3.4	Estrutura vertical de um disco gravitacional . . . . .	16
2.4	Função de Distribuição . . . . .	18
2.4.1	Teorema e equação de Liouville . . . . .	18
2.4.2	Equação de Boltzmann–Vlasov . . . . .	20
2.4.3	Equação de Boltzmann em alguns sistemas de coordenadas . . . . .	21
2.5	Momentos da equação de Boltzmann . . . . .	22
2.5.1	Equações de Jeans em alguns sistemas de coordenadas . . . . .	24
2.5.2	Aplicação das equações de Jeans . . . . .	25
2.5.3	Teorema do virial tensorial . . . . .	28
2.6	Teorema de Jeans . . . . .	30
2.6.1	Integrais de movimento . . . . .	30
2.6.2	Teorema de Jeans . . . . .	32
2.7	Aplicação do Teorema de Jeans . . . . .	33

---

2.7.1	Sistemas esféricos . . . . .	33
2.7.2	Inversão da função de distribuição . . . . .	34
2.7.3	Modelos esféricos e isotrópicos . . . . .	35
2.8	Distribuição diferencial de massa . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Relaxação violenta</b> . . . . .	<b>41</b>
3.1	Introdução . . . . .	41
3.2	Ergodicidade e mistura no espaço de fase . . . . .	42
3.2.1	Função-H de Boltzmann . . . . .	44
3.2.2	Teorema da mistura . . . . .	45
3.2.3	Relaxação e mistura . . . . .	46
3.3	Catástrofe gravo-térmica . . . . .	48
3.3.1	Entropia máxima . . . . .	48
3.3.2	Instabilidade Gravo-térmica . . . . .	51

## 1.1 Sistemas Astronômicos

A dinâmica estelar é a parte da astrofísica que estuda a estrutura e a evolução de sistemas gravitacionais de muitos corpos, enquanto que a dinâmica planetária se interessa por sistemas de poucos corpos. Como diz o nome, na dinâmica estelar, as estrelas são um elemento sempre presente apesar de nem sempre serem o principal componente como, por exemplo, em aglomerados de galáxias, onde a principal componente do sistema dinâmico é a chamada *matéria escura*. Na tabela 1.1 damos os principais sistemas estudados pela dinâmica estelar. Nesta tabela, listamos as dimensões e massas típicas destes objetos assim como o tempo de cruzamento,  $t_{cr}$ , definido como aproximadamente o tempo necessário para uma partícula do sistema atravessá-lo.

Na maioria dos casos, as colisões são desprezíveis entre os componentes que constituem os sistemas de interesse para a dinâmica estelar. Por exemplo, uma galáxia típica tem um raio de  $\sim 10$  kpc enquanto o raio de uma estrela é da ordem de  $10^{-11}$  kpc.

Tabela 1.1: Resumo de sistemas dinâmicos astrofísicos relevantes à dinâmica estelar.  $t_{cr}$  é o tempo de cruzamento.

Objeto	Massa ( $M_{\odot}$ )	Dimensão (kpc)	$t_{cr}$ (anos)	Agentes dinâmicos
Aglomerado aberto	$10^1$	0,01	$10^5$	estrelas, Galáxia
Aglomerado globular	$10^{6-8}$	0,1	$10^{6-7}$	estrelas, Galáxia
Galáxias	$10^{9-12}$	1–10	$10^{8-9}$	estrelas, gás, matéria escura, outras galáxias
Grupo de galáxias	$10^{12-13}$	10–100	$10^{8-10}$	galáxias, gás, matéria escura
Aglomerado de galáxias	$10^{13-15}$	1000	$10^{9-10}$	galáxias, gás, matéria escura

## 1.2 Escalas de Tempo e Livre Caminho Médio

### 1.2.1 Tempo dinâmico

Para que possamos comparar a evolução temporal de sistemas dinâmicos distintos, é necessário utilizarmos uma *escala de tempo* comparável entre estes sistemas. Isto fica

claro se compararmos, por exemplo, as escalas de tempo envolvidas na evolução do sistema solar e da nossa galáxia: enquanto que os planetas levam, no máximo, algumas centenas de anos para orbitar o centro do sistema solar, as estrelas na nossa galáxia levam tipicamente<sup>1</sup> centenas de milhões de anos para darem uma volta em torno do centro galáctico.

A partir do exemplo dado acima, podemos definir uma escala de tempo comparável para estes dois sistemas a partir do período de translação típico. Descrever os fenômenos dinâmicos em termos da quantidade de vezes que um corpo efetuou uma rotação é mais razoável do que em anos ou segundos.

Assim, o que queremos é definir uma escala de tempo a partir de algum fenômeno que seja característico da evolução dinâmica em questão. Para corpos onde a rotação não seja importante (p.ex. galáxias elípticas, aglomerados globulares) podemos definir uma escala relacionada com o período que uma partícula do sistema leva, em média, para atravessá-lo. Chamamos este tempo característico do sistema de *tempo dinâmico*,  $t_d$ .

Para um objeto de raio  $R$  e onde as partículas têm uma velocidade típica  $v$ , o tempo dinâmico será:

$$t_d = R/v. \quad (1.1)$$

Definido desta forma, o tempo dinâmico também pode ser chamado de *tempo de cruzamento*.

Apesar da simplicidade desta expressão, sua aplicação não é trivial pois, em um caso concreto, como podemos definir  $R$  e  $v$ ? Para os sistemas que nos interessam, há várias maneiras de se definir um ‘raio’: o raio que contém uma certa fração da massa (ou luminosidade) total, o raio onde o razão de densidade no interior de  $r$  e central tem um certo valor, o raio onde a densidade superficial (brilho superficial) tem um certo valor, etc... Da mesma forma, podemos definir  $v$  de diversas maneiras.

Ocorre que, para diferentes sistemas, existem convenções diferentes para se definir o  $t_d$ :

- Galáxias elípticas e aglomerados globulares:  $R$  é o raio que contém metade da luminosidade total observada da galáxia, chamado de *raio efetivo*,  $R_{\text{eff}}$ . O valor de  $v$  é a velocidade média quadrática,  $\overline{v^2}$ ;
- Galáxias espirais:  $v$  é a velocidade máxima de rotação e  $R$  o raio onde a velocidade circular atinge o máximo;
- Aglomerados de galáxias:  $R$  é o *raio do virial* (que definiremos mais adiante) ou o raio onde a razão da densidade média do aglomerado dividido pela densidade crítica do Universo é 200 (o que será justificado mais adiante). A velocidade será a média quadrática,  $\overline{v^2}$ .

### 1.2.2 Livre caminho médio

Em um dado sistema estelar, o movimento das partículas são determinados somente pelas forças gravitacionais, com a condição de que não haja colisões. Em outras palavras,

---

<sup>1</sup>Muitas vezes utilizaremos a expressão ‘típico’ ou ‘característico’ para descrever uma certa quantidade.

podemos tratar a dinâmica de um sistema gravitacional como um simples problema de  $N$ -corpos se, pelo menos em primeira aproximação, as partículas forem puntiformes.

Podemos estimar o quão boa é esta aproximação puntiforme comparando o *livre caminho médio*,  $\lambda$ , com o raio do sistema,  $R$ , e o raio das partículas,  $R_p$ . O livre caminho médio para um sistema de partículas que se movem aleatoriamente é dado aproximadamente por:

$$\lambda \approx 1/(n\sigma), \quad (1.2)$$

onde  $n = N/V$  é a densidade numérica média e  $\sigma$  é a seção de choque de uma partícula. A seção de choque pode ser dada aproximadamente por  $\sigma = 4\pi R_p^2$ , isto é, a superfície de um círculo de raio  $R_p$ . Portanto, o livre caminho médio será dado por:

$$\lambda \approx \frac{R^3}{3NR_p^2}, \quad (1.3)$$

Na tabela 1.2 temos os valores típicos para diversos objetos astrofísicos.

Tabela 1.2: Livre caminho médio e relação com as dimensões do sistema e das partículas.

Objeto	N corpos	$R_p$	$\lambda/R_p$	$\lambda/R$
Aglomerados de galáxias	$10^3$	10 kpc	$10^4$	30
Aglomerados globulares	$10^5$	$3 \times 10^{-8}$ pc	$10^{20}$	$3 \times 10^{11}$
Região central de galáxias	$10^6$	$3 \times 10^{-8}$ pc	$10^{13}$	$10^6$

As razões  $\lambda/R_p$  e  $\lambda/R$  nos dá uma medida da quantidade de colisões durante a evolução do sistema. Quanto maior forem estas razões, menor o número de colisões que uma partícula sofre. Podemos ver que nos sistemas dinâmicos da Tabela 1.2, as colisões são, em geral, desprezíveis.

Isto não significa dizer que o efeito das colisões possam ser desprezados! No caso de aglomerados e grupos de galáxias as colisões podem ter consequências muito importantes para a dinâmica e morfologia do sistema.

Devemos notar que a fórmula 1.3 trata das partículas como se fossem esferas rígidas. Além disto não ser preciso (principalmente quando as ‘partículas’ são galáxias) ainda deveríamos levar em conta os efeitos gravitacionais de uma partícula sobre a outra. Intuitivamente podemos imaginar que o efeito da gravitação tenda a aumentar a seção de choque de uma partícula.

### 1.2.3 Tempo de Relaxação

Quando colocamos em contato dois corpos com temperaturas diferentes em contato, após um certo intervalo de tempo estes corpos terão a mesma temperatura. Em geral, para sistemas estáveis, se ocorre uma perturbação o sistema volta à situação de equilíbrio após um certo lapso de tempo. O tempo que um sistema leva para atingir um estado de equilíbrio é chamado *tempo de relaxação*.

Em um gás ordinário, por exemplo, a relaxação ocorre devido às colisões entre as partículas do gás: nestas colisões há troca de energia, a partícula mais energética perde energia e a menos energética ganha. Ao fim de muitas colisões o sistema tende a uma situação de equipartição de energia.

Para um sistema isolado, ligado gravitacionalmente, poderíamos definir o tempo de relaxação da mesma maneira, como o tempo necessário para que o sistema atinja o equilíbrio e haja uma equipartição de energia. Como veremos mais adiante, que rigorosamente falando, esta situação nunca ocorre em um sistema gravitacional real.

Contudo, mesmo sem atingir exatamente um estado de equilíbrio estacionário, os sistemas gravitacionais podem se aproximar deste estado. O tempo necessário para isto está ligado à variação das velocidades (ou energia) das partículas. Podemos definir o tempo de relaxação para sistemas gravitacionais como o tempo necessário para que a variação da velocidade de uma partícula seja da ordem de grandeza da própria velocidade desta.

### Relaxação à 2 corpos

Como vimos, as colisões entre estrelas em uma galáxia são muito raras contudo, quando uma estrela percorre a galáxia, ela se aproximará aleatoriamente de alguma outra estrela. Estes encontros provocarão uma aceleração na estrela que terá seu vetor velocidade alterado. Em geral, esta variação será pequena mas os efeitos de muitos destes encontros é cumulativo. Ao longo de um certo intervalo de tempo, o efeito cumulativo destes encontros entre duas estrelas tende a levar a uma equipartição de energia. Este processo é chamado *relaxação à dois corpos*.

Se a cada cruzamento de uma estrela pela galáxia sua velocidade se altera de  $\Delta v^2$ , o número de vezes que a estrela deve atravessar a galáxia para que  $\Delta v^2 \approx v^2$  será  $n_{\text{relax}} \approx v^2/\Delta v^2$  e o tempo de relaxação vai ser dado por:

$$t_{\text{relax}} = n_{\text{relax}} t_{\text{cr}}. \quad (1.4)$$

Para estimarmos a quantidade  $n_{\text{relax}}$ , vamos supor uma galáxia de raio  $R$  composta por  $N$  partículas de massa  $m$ . Durante o movimento através da galáxia, uma dada estrela vai interagir gravitacionalmente com as outras estrelas e ao passar próxima de uma outra estrela sua trajetória se modificará como na Figura 1.1.

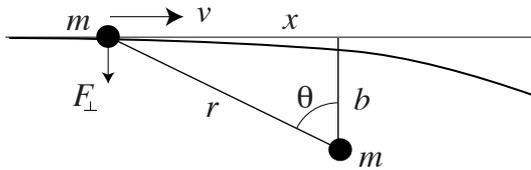


Figura 1.1: Geometria de um encontro de dois corpos.  $b$  é o parâmetro de impacto.

Quando houver um encontro deste tipo, a velocidade da estrela sofrerá uma variação  $\delta v_{\perp}$  devido à força  $F_{\perp}$ . Esta força é dada aproximadamente por:

$$F_{\perp} = \frac{G m^2}{b^2 + x^2} \cos \theta = \frac{G m^2 b}{(b^2 + x^2)^{3/2}} \simeq \frac{G m^2}{b^2} \left[ 1 + \left( \frac{vt}{b} \right)^2 \right]^{-3/2}, \quad (1.5)$$

onde  $x \approx vt$ . Como  $m \dot{v}_{\perp} = F_{\perp}$ , nós temos:

$$\dot{v}_{\perp} = \frac{G m}{b^2} \left[ 1 + \left( \frac{vt}{b} \right)^2 \right]^{-3/2} \Rightarrow |\delta v_{\perp}| = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G m}{b^2} \left[ 1 + \left( \frac{vt}{b} \right)^2 \right]^{-3/2} dt.$$

Fazendo a substituição de variáveis  $s = (vt)/b$  obtemos

$$|\delta v_{\perp}| = \frac{Gm}{bv} \int_{-\infty}^{\infty} (1+s^2)^{-3/2} ds = \frac{2Gm}{bv}. \quad (1.6)$$

Vemos que a variação da velocidade devido a um encontro é aproximadamente o produto da aceleração na região de encontro mais próxima ( $Gm/b^2$ ) e a duração do encontro ( $2b/v$ ). Notemos que a expressão (1.6) é válida para encontros onde o movimento da partícula se altera pouco,  $|\delta v_{\perp}| \ll v$ , isto é, o movimento é praticamente retilíneo e uniforme. Chamamos este limite de *aproximação impulsiva*.

A cada encontro a velocidade da partícula sofre uma alteração  $\delta v_{\perp}$ . Como os encontros são aleatórios, o valor médio será  $\overline{v_{\perp}} = 0$ , contudo o valor de  $v_{\perp}^2$  aumentará a cada encontro (como no caso do movimento browniano).

Ao atravessar a galáxia, uma estrela sofrerá  $\delta n$  colisões com parâmetro de impacto entre  $b$  e  $b + db$ , que pode ser estimado pelo produto da densidade superficial com a seção de choque correspondente ao parâmetro de impacto:

$$\delta n \simeq \frac{N}{\pi R^2} 2\pi b db = \frac{2N}{R^2} b db.$$

Assim, a variação quadrática da velocidade será:

$$\delta v_{\perp}^2 \simeq \delta v_{\perp}^2|_{\text{colisão}} \delta n = \left( \frac{2Gm}{bv} \right)^2 \frac{2N}{R^2} b db. \quad (1.7)$$

Para obtermos a variação total da velocidade,  $\Delta v_{\perp}^2$  após uma travessia completa da galáxia, devemos integrar a expressão (1.7). Contudo esta integral diverge tanto para  $b \rightarrow 0$  como para  $b \rightarrow \infty$ ; devemos, portanto limitar  $b$ . Para o valor máximo de  $b$ , podemos adotar o próprio raio característico da galáxia,  $b_{\text{max}} = R$ . Para o raio mínimo, tomamos o valor de  $b$  que corresponde a uma mudança de velocidade  $v_{\perp} \approx v$ , isto é,  $b_{\text{min}} = Gm/v^2$ , cf. Eq. (1.6). Portanto,

$$\Delta v_{\perp}^2 = \int_{b_{\text{min}}}^R \delta v_{\perp}^2 db = 8N \left( \frac{Gm}{Rv} \right)^2 \ln \Lambda, \quad (1.8)$$

onde  $\ln \Lambda \equiv \ln(R/b_{\text{min}})$ . Este logaritmo é chamado *logaritmo de Coulomb*, uma vez que este mesmo fator aparece em problemas de espalhamento em plasmas.

Mais adiante (seção 2.1, nós veremos que, para objetos em equilíbrio, vale a relação  $v^2 \approx GM/R$  onde, no caso presente,  $M = Nm$ ). Desta forma obtemos o resultado:

$$\frac{\Delta v_{\perp}^2}{v^2} = \frac{8 \ln \Lambda}{N}. \quad (1.9)$$

Como vimos, o número de vezes que a estrela deve cruzar a galáxia para que sua velocidade quadrática se altere significativamente,  $n_{\text{relax}}$  é dado por  $v^2/\Delta v_{\perp}^2$  e o tempo de relaxação é dado pela Eq. (1.4). Portanto,

$$t_{\text{relax}} = \frac{N}{8 \ln \Lambda} t_{\text{cr}}. \quad (1.10)$$

Utilizando novamente a relação  $v^2 \approx GM/R$ , temos  $\Lambda = R/b_{\text{min}} \approx Rv^2/(Gm) \approx N$ , ou seja,

$$t_{\text{relax}} = \frac{N}{8 \ln N} t_{\text{cr}}. \quad (1.11)$$

### 1.3 Aproximação Contínua

Os sistemas gravitacionais, galáxias, aglomerados, etc..., são obviamente discretos, compostos por  $N$  corpos distintos de massa não necessariamente iguais. O potencial total é a soma das contribuições individuais de cada partícula. A figura 1.2 ilustra esta situação para um sistema unidimensional de  $N$  corpos.

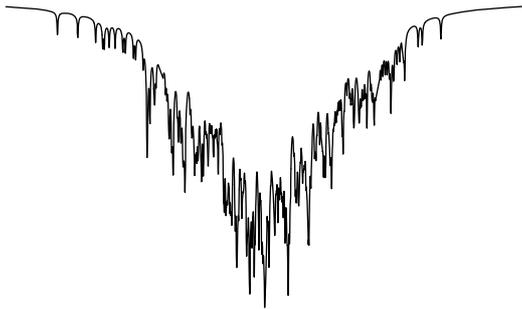


Figura 1.2: Potencial gerado pela soma do potencial individual de  $N$  partículas. Neste exemplo, a densidade de partículas aumenta em direção ao centro.

Vemos nesta figura que onde a concentração de partículas é maior, o potencial é mais profundo. A primeira vista, o potencial total de um sistema deste tipo parece ser muito irregular, dependendo da distribuição exata das partículas. Contudo, como vimos, as interações de dois corpos entre as estrelas têm um efeito muito reduzido na relaxação de sistemas estelares reais. Além disto, como o potencial gravitacional tem alcance infinito, uma dada estrela está a todo instante sob influência de todas as estrelas do sistema.

Em um caso extremo, onde a densidade numérica de estrelas é constante, o número de estrelas em conchas esféricas de espessura  $dr$  em torno de uma dada estrela é  $N = 4\pi r^2 dr$ . Como a força gravitacional de cada estrela na concha diminui como  $r^{-2}$ , isto faz com que qualquer concha atue com a mesma força total sobre a estrela central.

Isto significa que uma dada estrela reage principalmente ao potencial coletivo do sistema e não às estrelas mais próximas. Este fato nos permite uma importante simplificação: podemos aproximar o potencial do sistema por um potencial contínuo ao invés de discreto (Fig. 1.3).

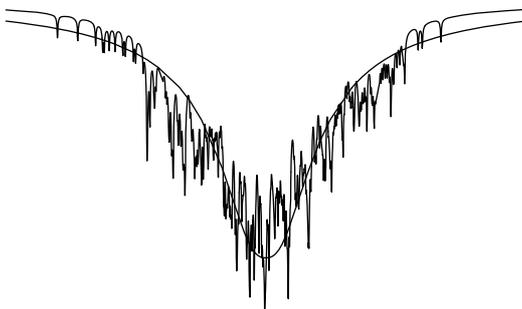


Figura 1.3: Aproximação contínua do potencial total do sistema da figura 1.2 (traço contínuo).

Esta *aproximação contínua* é válida para sistemas com número de partículas,  $N$ , suficientemente grande. No limite  $N \rightarrow \infty$  esta aproximação tende a ser exata. O  $N$  ‘suficientemente grande’ é tal que o  $t_{\text{relax}} \gg t_d$ , cf. Eq. (1.11).

Dito de outra forma, a aproximação contínua é válida para sistemas onde as colisões entre as partículas são desprezíveis durante sua existência, ou seja, trata-se de um *sistema sem colisões* (em inglês, *collisionless system*).

# Sistemas em Equilíbrio

## 2.1 Teorema do Virial

O chamado *Teorema do Virial* é um dos teoremas mais importantes e utilizados em astrofísica. Sua origem data da metade do século XIX, do estudo da teoria cinética de gases. Claussius, em 1870, define a grandeza

$$V_c = \frac{1}{2} \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i, \quad (2.1)$$

como sendo o *virial* do sistema de partículas de coordenadas  $r_i$ , massa  $m_i$ , e cada uma sujeita a uma força total  $F_i$ , isto é,  $F_i = \sum_{j \neq i} f_{ij}$ , onde  $f_{ij}$  é a força entre as partículas  $i$  e  $j$ .

A derivação clássica do teorema do virial pode ser feita da seguinte maneira. Consideremos um sistema de  $N$ -corpos de massa  $m_i$  e definimos

$$G_c = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i, \quad (2.2)$$

onde  $p_i$  é a quantidade de movimento da partícula  $i$ . A equação (2.2) pode ser reescrita como

$$G_c = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{dI}{dt}, \quad (2.3)$$

utilizando a relação  $(d\vec{r}/dt) \cdot \vec{r} = \frac{1}{2} d(\vec{r} \cdot \vec{r})/dt$ , e  $I = \sum_i m_i r_i^2$  é o momento de inércia do sistema. Derivando em relação ao tempo a Eq. (2.2) e utilizando a definição (2.1) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dG_c}{dt} &= \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{p}}_i \\ &= \sum_i m_i v_i^2 + \sum_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{p}}_i \\ &= 2T + 2V_c, \end{aligned} \quad (2.4)$$

lembrando que  $2V_c = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i$ .

Retornando ao virial de Claussius,  $V_c$ , supomos que as forças que agem sobre as partículas são deriváveis de um potencial (Hipótese I),

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{\nabla}_i \phi(r_{ij}). \quad (2.5)$$

e que o potencial é em lei de potência,  $\phi(r) \propto r^k$  (Hipótese II). Assim obtemos:

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{\nabla}_i c_{ij} r_{ij}^k = -k c_{ij} r_{ij}^{k-2} (\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad (2.6)$$

onde  $c_{ij}$  é a constante de proporcionalidade do potencial para as partículas  $i$  e  $j$ . Utilizando a definição do virial de Claussius, Eq. (2.1), obtemos:

$$\begin{aligned} 2V_c &= -k \sum_i \sum_{j>i} c_{ij} r_{ij}^{k-2} [(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{r}_i + (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_j] \\ &= -k \sum_i \sum_{j>i} c_{ij} r_{ij}^k \\ &= -k \sum_i \sum_{j>i} \phi(r_{ij}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde utilizamos  $\vec{F}_i = \sum_j \vec{f}_{ij}$  e  $\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i \sum_{j>i} \vec{f}_{ij} \cdot \vec{r}_i + \vec{f}_{ji} \cdot \vec{r}_j$ . Finalmente podemos escrever,

$$\frac{dG_c}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2T - kU, \quad (2.8)$$

onde  $T$  e  $U$  são as energias cinética e potencial totais do sistema. Para o caso específico do campo gravitacional,  $k = -1$  e obtemos a chamada *identidade de Lagrange*:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2T + U. \quad (2.9)$$

O teorema do virial é obtido tomando-se a média da Eq. (2.9) durante um intervalo de tempo  $t_o$ ,

$$\frac{1}{t_o} [G_c(t_o) - G_c(0)] = 2\bar{T} + \bar{U}; \quad \bar{x}(t_o) \equiv \frac{1}{t_o} \int_0^{t_o} x(t) dt. \quad (2.10)$$

Se a média for tomada por um intervalo de tempo suficientemente longo e se o sistema estiver próximo de um estado de *equilíbrio quase-estacionário*, obtemos o teorema do virial na sua forma usual:

$$2\bar{T} + \bar{U} = 0. \quad (2.11)$$

A equação acima traduz o fato de que, para um sistema em equilíbrio, o momento de inércia não se altera com o tempo e, portanto,  $d^2 I / dt^2 = 0$ .

Se, além disto o sistema for *ergódico* (voltaremos a falar disto mais adiante, na seção 3.2), podemos escrever simplesmente

$$2T + U = 0, \quad (2.12)$$

isto é, uma medida instantânea das energias cinética e potencial bastam para satisfazer o teorema do virial.

### 2.1.1 Aplicação do teorema do virial

#### Estimação da massa

Uma das aplicações do teorema do virial está na determinação da massa de um sistema gravitacional isolado. Para um sistema esférico podemos escrever o Teorema do virial, Eq. (2.12) como

$$2T + U = \frac{1}{M} \sum_i m_i v_i^2 - \frac{GM}{r_g} = 0, \quad (2.13)$$

onde tomamos as energias cinética e potencial por unidade de massa, o *raio gravitacional* é definido como  $r_g \equiv GM/|U|$  e  $M = \sum_i m_i$  é a massa total do sistema.

Posto desta forma, vemos que a energia cinética (por unidade de massa) total do sistema corresponde à média dos quadrados das velocidades das partículas,  $T/M = \overline{v^2}$ . Portanto, podemos escrever:

$$M = \frac{r_g \overline{v^2}}{G}. \quad (2.14)$$

Infelizmente, não podemos utilizar a equação (2.14) diretamente para determinarmos  $M$ : tanto  $r_g$  como  $\overline{v^2}$  não podem ser medidos observacionalmente. Contudo, podemos estimar estas grandezas a partir das observações.

Como veremos mais tarde, o raio gravitacional é aproximadamente proporcional ao raio que contém metade da luminosidade total do objeto, o chamado *raio efetivo*,  $R_{\text{eff}}$ . Pode-se mostrar que  $r_g \sim 3R_{\text{eff}}$ . Mais precisamente podemos escrever  $r_g \sim k_1 R_{\text{eff}}$ , onde  $k_1$  é determinado pela distribuição de massa do objeto (como veremos na seção 2.2).

Por outro lado, supondo que a distribuição de velocidades seja isotrópica, isto é, a direção do vetores velocidade é aleatória, então  $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$  e, portanto, a dispersão observada em uma dada direção será dada por  $3\overline{v_x^2} = \overline{v^2}$ . Na prática, não é  $\overline{v_x^2}$  que é medido, mas sim a dispersão de velocidades central,  $\sigma_0^2$ , onde  $\sigma$  é medido na direção da linha de visada. A relação entre  $\sigma_0^2$  e  $\overline{v^2}$  depende da geometria e da forma da distribuição das velocidades.

Podemos, finalmente, escrever a Eq. (2.14) em termos de grandezas observáveis:

$$M = k_{\text{geo}} \frac{R_{\text{eff}} \sigma_0^2}{G}, \quad (2.15)$$

onde a constante  $k_{\text{geo}}$  depende da geometria e da distribuição de velocidades.

### Tempo dinâmico

O *tempo dinâmico* de um sistema gravitacional é definido como  $t_d = R/v$  [cf. Eq. (1.1)]. Podemos reescrever esta definição utilizando o raio gravitacional e a velocidade média quadrática:

$$t_d = \frac{r_g}{v_{\text{rms}}}, \quad (2.16)$$

onde  $v_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\overline{v^2}}$  ('rms' significa *root mean square*). Pelo teorema do virial, temos  $2T + U = 0$  e, por definição, a energia total do sistema é a soma das energias cinética e potencial:  $E = T + U$ . Deduzimos imediatamente que, para um sistema em equilíbrio,  $T = -E$  e  $U = 2E$ . Podemos então escrever:

$$v_{\text{rms}} = \left(2 \frac{T}{M}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2} \frac{|E|}{M}\right)^{1/2}$$

$$r_g = \frac{G M^2}{|U|} = \frac{G M^2}{2|E|}$$

Substituindo este resultado na equação (2.16) obtemos

$$t_d = \frac{G M^{5/2}}{(2|E|)^{3/2}}. \quad (2.17)$$

## 2.2 Perfis de Luminosidade e Massa

Para podermos estudar a dinâmica de um sistema gravitacional astrofísico, é necessário antes de tudo conhecermos a distribuição de massa deste objeto. Contudo, esta grandeza não acessível diretamente pelas observações. O que pode ser observado é a distribuição projetada da luminosidade.

Se um objeto tem uma distribuição de massa dada por uma densidade  $\rho(r)$  – onde, por simplicidade, assumimos uma simetria esférica – podemos definir uma *densidade de luminosidade*,  $j(r)$ , como:

$$\rho(r) = \Upsilon(r)j(r), \quad (2.18)$$

onde  $\Upsilon(r)$  é a *razão massa-luminosidade*. A função  $\Upsilon(r)$  é dada em geral em unidades solares,  $M_{\odot}/L_{\odot}$ . A massa no interior do raio  $r$  é obtida simplesmente integrando a densidade:

$$M(r) = \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr. \quad (2.19)$$

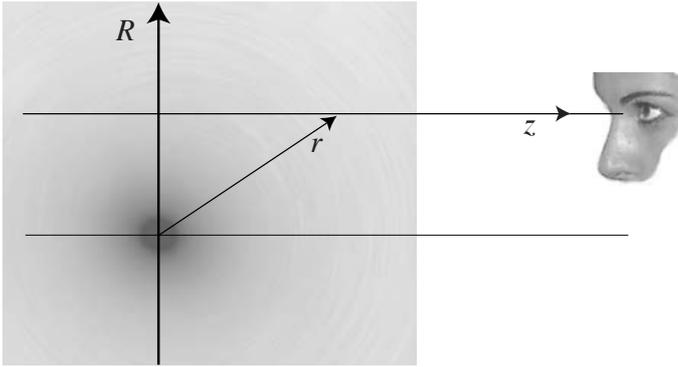


Figura 2.1: Geometria da projeção da densidade de luminosidade para uma distribuição esférica.

O *brilho superficial*,  $\Sigma(R)$ , observado<sup>1</sup> é a projeção da densidade de luminosidade, como mostra a figura 2.1, e é dado por:

$$\Sigma(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} j(r) dz. \quad (2.20)$$

Como  $z^2 = r^2 - R^2$ , podemos reescrever a equação acima como:

$$\Sigma(R) = 2 \int_R^{\infty} j(r) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}} = 2 \int_R^{\infty} \frac{\rho(r)}{\Upsilon(r)} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}. \quad (2.21)$$

A equação acima é uma integral de Abel e podemos invertê-la, e assim, obtermos a densidade  $\rho(r)$  a partir do brilho superficial:

$$\frac{\rho(r)}{\Upsilon(r)} = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{d\Sigma(R)}{dR} \frac{dR}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (2.22)$$

<sup>1</sup>Para as coordenadas em três dimensões utilizamos  $r$ , enquanto que para as coordenadas em duas dimensões (projetadas) utilizamos  $R$

### 2.2.1 Galáxias elípticas

Um dos aspectos mais importantes e remarcáveis é a regularidade na distribuição de luz nas galáxias elípticas. Em 1948, G. de Vaucouleurs propôs uma fórmula empírica para descrever o perfil de luminosidade das galáxias elípticas que até hoje é amplamente utilizado. A lei de de Vaucouleurs pode ser escrita como:

$$\ln(\Sigma(R)/\Sigma_{\text{eff}}) = 7.66925[1 - (R/R_{\text{eff}})^{1/4}], \quad (2.23)$$

onde  $R_{\text{eff}}$  é o raio efetivo, isto é, o raio no interior do qual é emitida metade da luminosidade total e  $\Sigma_{\text{eff}}$  é o brilho de superfície em  $R_{\text{eff}}$ . O raio efetivo é definido a partir da luminosidade total extrapolada à  $R \rightarrow \infty$ . A luminosidade no interior de um raio  $R$  é calculada como:

$$L(R) \equiv 2\pi \int_0^R \Sigma(R)R dR = \frac{8\pi}{7.66925^8} \Sigma_{\text{eff}} R_{\text{eff}}^2 \gamma[8, 7.66925(\frac{R}{R_{\text{eff}}})^{1/4}], \quad (2.24)$$

onde  $\gamma(a, x)$  é a função gama incompleta.

Já no fim dos anos 80, foi notado que havia um desvio sistemático do perfil observado em relação ao perfil de de Vaucouleurs. Vários autores mostraram que uma generalização da lei de de Vaucouleurs seria mais apropriada. Esta generalização já havia sido proposta em 1968 por Sérsic, mas foi apenas a partir do meio dos anos 90 que ela começou a ser frequentemente utilizada. A generalização é feita com a introdução de um parâmetro de forma:

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \exp(-(R/a)^\nu). \quad (2.25)$$

Outros perfis de brilho foram introduzidos ao longo do tempo. Um perfil bastante utilizado é o chamado perfil de Hubble modificado (o perfil de Hubble foi introduzido originalmente em 1936):

$$\Sigma(R) = \Sigma_0/[1 + (R/r_c)^2], \quad (2.26)$$

onde  $r_c$  é uma escala característica (raio de “core”). Para  $R < r_c$ , este perfil é aproximadamente constante e para  $R > r_c$  o brilho superficial cai como  $R^{-2}$ . Este perfil pode ainda ser generalizado com a introdução de um parâmetro de forma:

$$\Sigma(R) = \Sigma_0/[1 + (R/r_c)^2]^\delta; \delta \geq 1. \quad (2.27)$$

Neste caso, o comportamento assintótico do perfil para  $R > r_c$  é  $\Sigma(R) \propto R^{-2\delta}$ .

A luminosidade no interior do raio  $R$  é dada por:

$$L(R) = \Sigma_0 r_c^2 \pi \begin{cases} \ln(1 + [R/r_c]^2) & ; \delta = 1 \\ \frac{(1 + [R/r_c]^2)^{1-\delta} - 1}{(1-\delta)} & ; \delta > 1 \end{cases} \quad (2.28)$$

Para  $\delta = 1$ , este modelo tem uma luminosidade total que diverge logaritmicamente com o raio, enquanto que, para  $\delta > 1$  a luminosidade total é:

$$L_{\text{tot}} = \frac{\Sigma_0 r_c^2 \pi}{\delta - 1}. \quad (2.29)$$

Uma das maiores vantagens deste modelo é o fato de podermos deprojetá-lo e obtermos a densidade em três dimensões. Utilizando a equação (2.22) obtemos:

$$\frac{\rho(r)}{\Upsilon(r)} = \frac{\Sigma_0 \delta \Gamma(\delta + 1/2)}{r_c \sqrt{\pi} \Gamma(1 + \delta)} \frac{1}{(1 + [r/r_c]^2)^{1/2+\delta}}. \quad (2.30)$$

O expoente  $1/2 + \delta$  na expressão (2.30) é escrita em geral como  $3\beta/2$  e este perfil é chamado *modelo- $\beta$* . Podemos ainda integrar a Eq. (2.30) e obtermos a massa no interior do raio  $r$ :

$$M(r) = 4\sqrt{\pi} \frac{\Sigma_0}{3r_c} \frac{\delta \Gamma(\delta + 1/2)}{\Gamma(1 + \delta)} r^3 {}_2F_1 \left( \frac{3}{2}, \delta + \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, - \left[ \frac{r}{r_c} \right]^2 \right), \quad (2.31)$$

onde  ${}_2F_1$  é a *função hipergeométrica*<sup>2</sup>. Para certos valores de  $\delta$ , a massa dada por (2.31) é analítica. Para  $\delta = 1$ , o que corresponde ao perfil de Hubble modificado, Eq. (2.26), temos:

$$M(r) = 2\pi r_c^2 \Sigma_0 \left( \operatorname{arcsenh}(r/r_c) - \frac{r}{\sqrt{r^2 + r_c^2}} \right); \quad (\delta = 1). \quad (2.32)$$

Isto significa que para  $\delta = 1$ , a massa diverge logaritmicamente, ou seja, a massa total é infinita. Apenas para  $\delta > 1$  (o que equivale a  $\beta > 1$ ) a massa é finita.

### 2.2.2 Galáxias espirais

A descrição da distribuição de massa (ou luminosidade) das galáxias espirais é mais difícil do que no caso das elípticas. As galáxias espirais são compostas de pelo menos duas componentes distintas: o bojo central e o disco.

Em 1970, o estudo de um conjunto de 36 galáxias feito por Freeman mostrou que o perfil radial de brilho do disco das galáxias espirais segue uma lei exponencial:

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \exp[-(R/R_d)]. \quad (2.33)$$

Este perfil ajusta-se bem à maioria das galáxias mas existem inúmeras dificuldades. Em primeiro lugar, os braços espirais alteram este perfil e é tanto mais importante a medida que observamos as galáxias de tipo tardio (espirais *late-type*). As barras observadas em quase metade das galáxias espirais também alteram este perfil.

Se quisermos deprojetar o perfil (2.33) para obtermos a estrutura em três dimensões do disco, não podemos aplicar a fórmula de Abel, Eq. (2.22) pois a simetria do disco é obviamente não esférica. Contudo esta informação pode ser obtida observacionalmente ao observarmos galáxias espirais vistas de perfil. Assim, observamos que a estrutura vertical dos discos também tem um perfil aproximadamente exponencial,  $\Sigma(z) \propto \exp[-(z/R_h)]$ . Veremos mais adiante que esta estrutura vertical corresponde a um disco gravitacional de estrelas em equilíbrio.

Já o bojo das espirais é descrito da mesma forma que as galáxias elípticas, seja pela lei de de Vaucouleurs (ou mais geralmente o perfil de Sérsic) ou um modelo- $\beta$ .

## 2.3 Pares de Densidade–Potencial

Quando conhecemos a densidade de um sistema podemos obter o *potencial gravitacional* resolvendo a *equação de Poisson*:

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r}). \quad (2.34)$$

---

<sup>2</sup> ${}_2F_1(a, b, c; z) = (\Gamma(c)/[\Gamma(b)\Gamma(c-b)]) \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt$

Na ausência de matéria,  $\rho = 0$  e a equação de Poisson se reduz à *equação de Laplace*:

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 0. \quad (2.35)$$

A força sobre uma partícula teste<sup>3</sup> será dada pelo gradiente do potencial:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla \phi(\vec{r}). \quad (2.36)$$

Também é interessante definirmos a *velocidade circular*,  $v_c$ , que corresponde ao potencial  $\phi$ :

$$v_c^2 = r \frac{d\phi(r)}{dr} = r |\vec{F}|. \quad (2.37)$$

Esta velocidade corresponde a uma órbita exatamente circular de uma partícula teste sujeita ao potencial  $\phi$  (supondo simetria axial).

Na grande maioria dos casos de interesse (e práticos), vamos considerar sistemas com simetria axial (discos) ou simetria esférica. Nestes casos, é conveniente utilizarmos a equação de Poisson em coordenadas cilíndricas e esféricas polares, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) &= 4\pi G \rho(r); && \text{esférica} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \phi(R, z)}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \phi(R, z)}{\partial z^2} &= 4\pi G \rho(R, z); && \text{cilíndrica} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Para sistemas esféricos, integrando a equação de Poisson uma vez obtemos ainda a relação:

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2}. \quad (2.39)$$

Chamamos de par de *densidade–potencial* a densidade e o potencial que simultaneamente obedecem a equação de Poisson. A princípio, quaisquer funções  $\phi$  e  $\rho$  que satisfazem a equação de Poisson poderiam ser um par densidade–potencial. Contudo, nós só nos interessaremos por funções que sejam fisicamente aceitáveis; por exemplo, a densidade deve ser sempre maior ou igual a zero.

Antes de vermos alguns pares de densidade–potencial úteis para dinâmica estelar, vamos recapitular alguns resultados básicos e ver alguns perfis que foram descobertos, entre outras coisas, motivados pela facilidade em se resolver a equação de Poisson.

### 2.3.1 Massa pontual

Neste caso temos uma massa  $M$  de dimensão nula na origem. O potencial e a velocidade circular correspondentes são:

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r} \quad ; \quad v_c(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (2.40)$$

Quando um sistema tem uma velocidade circular proporcional a  $1/\sqrt{r}$  dizemos *velocidade kepleriana*, pois é o caso do sistema solar. Isto ocorre porque a massa do Sol sendo muito superior à soma das massas dos planetas, podemos aproximar os planetas o partículas testes circulando uma massa pontual.

---

<sup>3</sup>Partícula teste denota um corpo de massa unitária que interage apenas com o potencial global do sistema

### 2.3.2 Esfera homogênea

Consideremos uma esfera de raio  $r_a$  e densidade homogênea  $\rho$ . A massa no interior do raio  $r$  ( $r \leq a$ ) é simplesmente:

$$M(r) = \frac{4\pi}{3}\rho r^3. \quad (2.41)$$

O potencial desta esfera é:

$$\phi(r) = -2\pi G\rho \begin{cases} a^2 - \frac{r^2}{3}, & r < a \\ \frac{2a^3}{3r}, & r > a. \end{cases} \quad (2.42)$$

Uma propriedade interessante da esfera homogênea vem do seguinte fato. Suponha que uma partícula teste seja solta de um raio  $r$ ; a equação de movimento desta partícula será:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{4\pi G\rho}{3}r. \quad (2.43)$$

Esta é a equação de um *oscilador harmônico simples* de período  $T$  igual a:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}. \quad (2.44)$$

Como o período não depende do raio em que soltamos a partícula teste, independentemente do raio  $r$  em que a soltamos, a partícula atingirá  $r = 0$  no intervalo de tempo  $T/4$ . Como  $T$  é o mesmo para todas as partículas, concluímos que se soltarmos um esfera homogênea livre de pressão, esta colapsará, isto é, todas as partículas atingirão  $r = 0$  simultaneamente. O *tempo de queda livre* ou *tempo de colapso*,  $t_{\text{col}}$ , de uma esfera homogênea não é  $T/4$  pois a medida que a esfera se contrai a densidade aumenta.

Podemos calcular o tempo de colapso de uma esfera homogênea inicialmente com densidade  $\rho = 3M/(4\pi r^3)$  retomando a Eq. (2.43). Agora esta mesma equação pode ser interpretada como o movimento radial de cascas esféricas caindo sob ação da gravidade. Podemos multiplicar a Eq. (2.43) por  $2(dr/dt)$  e obtemos:

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} = -2\frac{GM(r)}{r^2}\frac{dr}{dt}, \quad (2.45)$$

mas temos as identidades:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{dr}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}. \quad (2.46)$$

Portanto, substituindo as identidades acima na equação de movimento (2.45) obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2GM\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{dr}\right), \quad (2.47)$$

que pode ser integrada em  $t$  trivialmente resultando em:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{r} = E, \quad (2.48)$$

onde  $E$  é a constante de integração e pode ser interpretada como a energia por unidade de massa total de uma partícula (ou mesmo uma casca esférica) em queda. A equação (2.48) expressa simplesmente a conservação de energia durante o movimento em questão. A constante  $E$  é dada pelas condições iniciais:

$$E = \frac{1}{2}v_{t_o}^2 - \frac{GM}{r_{t_o}} \quad (2.49)$$

onde  $v_{t_o}$  e  $r_{t_o}$  são as velocidade e raio iniciais. Como supomos que inicialmente as partículas da esfera não tenha m movimento,  $v_{t_o} = 0$ . A energia por unidade de massa é então  $E = -GM/r_{t_o}$ . Integrando a equação (2.48) entre  $r = r_{t_o}$  e  $r = 0$  obtemos o tempo que leva para a esfera colapsar:

$$t_{\text{col}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3\pi}{2G\rho}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{T}{4}, \quad (2.50)$$

onde  $T/4$  é o tempo que uma partícula levaria para chegar a  $r = 0$  se a densidade permanecesse constante.

É interessante compararmos esta escala de tempo,  $t_{\text{col}}$ , com o *tempo dinâmico*,  $t_{\text{din}}$ . Substituindo  $M$  e  $E$  da expressão (2.17 e lembrando que naquele caso  $E$  não é dado por unidade de massa) obtemos:

$$t_{\text{din}} = \sqrt{\frac{3}{32\pi G\rho}} = t_{\text{col}}. \quad (2.51)$$

### 2.3.3 Pares de densidade–potencial de elípticas

Em 1916, J.H. Jeans estudava a dinâmica interna de aglomerados globulares e “nebulosas” esféricas (galáxias elípticas E0) e concluiu que o potencial gravitacional destes objetos poderiam ser escritos como uma série:

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r} \left[ 1 - \frac{c_1}{r} - \frac{c_2}{r^2} - \frac{c_3}{r^3} - \dots \right], \quad (2.52)$$

onde  $c_1, c_2, \dots$  são constantes positivas. Se o sistema for esfericamente simétrico, a densidade correspondente a este potencial pode ser facilmente calculado como:

$$\rho(r) = \frac{M}{4\pi r^4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i(i+1)c_i}{r^{i-1}}. \quad (2.53)$$

Assim, Jeans conclui que a distribuição de massa deveria ter um perfil assintótico para  $r \rightarrow \infty$  proporcional à  $r^{-4}$ .

Os perfis em  $r^{-4}$  voltaram a ser utilizados com a introdução do perfil de Jaffe (1983), de Hernquist (1990) e de Dehnen (1993). Estes três perfis fazem parte, na realidade, de uma mesma família dada por:

$$\rho(r) = \frac{(3-i)}{4\pi} \frac{M r_c}{r^i (r+r_c)^{4-i}}; \quad 0 \leq i < 3, \quad (2.54)$$

onde  $i = 2$  corresponde ao modelo de Jaffe,  $i = 1$  ao modelo de Hernquist e  $i = 0$  ao modelo de Dehnen. Aqui,  $M$  denota a massa total do sistema e a massa no interior do raio  $r$  é dada por:

$$M(r) = M \left( \frac{r}{r + r_c} \right)^{3-i}. \quad (2.55)$$

Note que a massa converge para  $0 \leq i < 3$ . Para  $i = 2$  o raio  $r_c$  também é o raio que contém a metade da massa (chamado em inglês *half-mass radius*), que não deve ser confundido com o raio efetivo (metade da luminosidade total projetada). O potencial é obtido pela equação de Poisson:

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r_c} \begin{cases} \frac{1}{2-i} \left( 1 - \left( \frac{r}{r+r_c} \right)^{2-i} \right) & , i < 2 \\ \ln \left( \frac{r+r_c}{r} \right) & , i = 2. \end{cases} \quad (2.56)$$

O interesse desta família de modelos não está apenas nas propriedades analíticas, mas também ao fato de sua projeção em duas dimensões ajustarem-se bem ao perfil das galáxias elípticas e bojos de espirais.

### 2.3.4 Estrutura vertical de um disco gravitacional

Por simplicidade vamos considerar um disco axissimétrico infinito de estrelas com densidade  $\rho(R, z)$ . Na direção  $z$  (altura do disco) as estrelas tem uma dispersão de velocidades  $\sigma_z$  e, conseqüentemente, existe uma pressão na direção  $z$  dada por  $P(R, z) = \rho(R, z)\sigma_z^2$ . Supomos que o disco esteja em *equilíbrio hidrostático*, obedecendo a equação:

$$\vec{\nabla} P(R, z) = -\rho(R, z)\vec{\nabla}_z \phi(R, z) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_z^2}{\rho(R, z)} \frac{\partial \rho(R, z)}{\partial z} = -\frac{\partial \phi(R, z)}{\partial z}, \quad (2.57)$$

onde fizemos a hipótese de que  $\sigma_z^2$  não depende de  $z$ . Derivando mais uma vez a equação acima em relação a  $z$  obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\sigma_z^2}{\rho(R, z)} \frac{\partial \rho(R, z)}{\partial z} \right) = -\frac{\partial^2 \phi(R, z)}{\partial z^2} = 4\pi G \rho(R, z), \quad (2.58)$$

onde utilizamos a equação de Poisson em coordenadas cilíndricas. Esta equação se integra facilmente e sua solução é:

$$\rho(z) = \rho_0 \operatorname{sech}^2(z/R_H). \quad (2.59)$$

onde o fator de escala  $R_H$  é a ‘espessura’ ou ‘altura’ do disco e  $\rho_0$  é a densidade em  $z = 0$ , isto é,  $\rho(R, 0)$ . O fator de escala do disco é dado por:

$$R_H^2 = \frac{\sigma_z^2}{2\pi G \rho_0} \quad \Rightarrow \quad R_H = \frac{\sigma_z}{2\pi G \mu_R}, \quad (2.60)$$

onde  $\mu(R)$  representa a *densidade superficial* do disco,  $\mu(R) \approx R_H \rho(R, 0)$ .

Para  $z > R_H$ , a secante hiperbólica na fórmula (2.59) se comporta aproximadamente como uma exponencial,  $\operatorname{sech}^2(x) \approx \exp(-2x)$  para  $x \gg 1$ .

Observacionalmente, constata-se que a altura característica do disco,  $R_H$ , é praticamente independente de  $R$  tanto nas espirais como nas lenticulares. Como  $R_H$  depende diretamente da densidade superficial que diminui exponencialmente em direção à borda da galáxia, isto implica de a dispersão de velocidades  $\sigma_z$  diminui com o raio  $R$  da mesma maneira.

### Modelo de Kuzmin

Para descrever o potencial axissimétrico de um disco, Kuzmin propôs em 1956 o seguinte modelo (também conhecido como disco de Toomre):

$$\phi(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + |z|)^2}}. \quad (2.61)$$

Curiosamente, se calcularmos o laplaciano desta função obteremos  $\nabla^2\phi(R, z) = 0$  ! O problema é que o potencial (2.61) não corresponde a uma distribuição de densidade em três dimensões mas em duas. Em outras palavras, o potencial de Kuzmin corresponde a um disco infinitamente fino.

Para calcular a densidade superficial,  $\mu(R)$ , que corresponde a este potencial podemos utilizar o *teorema de Gauss*<sup>4</sup>:

$$4\pi G \int_S \mu(R) 2\pi R dR = 2 \int_S \vec{\nabla}_z \phi(R, z) 2\pi R dR, \quad (2.62)$$

onde a superfície  $S$  está ilustrada na Fig. 2.2 e a massa  $M$  é dada por  $M(R) = \int_0^R \mu(R) 2\pi R dR$ . O fator 2 vem da integral em  $S$  ser do lado positivo e negativo de  $z$ .

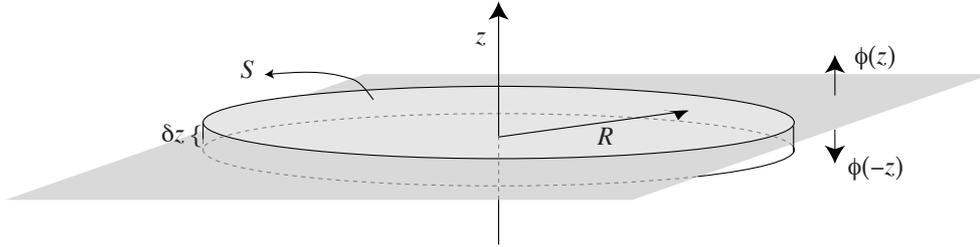


Figura 2.2: Geometria para aplicação do teorema de Gauss para o potencial (2.61). Fazendo  $\delta z \rightarrow 0$  e integrando sobre a superfície  $S$  dos dois lados do plano ( $\pm z$ ) obtemos a densidade superficial.

Tomando o limite  $z \rightarrow 0$  no gradiente de  $\phi$ , obtemos:

$$2\pi G \int_0^R \mu(R) R dR = \int_0^R \left( \frac{\partial \phi(R, z)}{\partial z} \right)_{z \rightarrow 0} R dR = \int_0^R \frac{GMa}{(R^2 + a^2)^{3/2}} R dR, \quad (2.63)$$

o que implica:

$$\mu(R) = \frac{Ma}{2\pi(R^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (2.64)$$

A fórmula acima descreve a densidade superficial do chamado disco de Kuzmin. Notemos que este disco não tem um comportamento assintótico exponencial, mas em lei de potência,  $\mu(R \rightarrow \infty) \propto R^{-3}$ .

<sup>4</sup>O teorema de Gauss diz que a integral da componente normal do gradiente do potencial,  $\vec{\nabla}\phi$ , em uma superfície fechada é igual a massa contida nesta superfície vezes  $4\pi G$ .

### Modelo de Miyamoto e Nagai

O disco infinitesimal de Kuzmin pode ser generalizado para uma distribuição tridimensional da massa. Isto foi feito por Miyamoto e Nagai em 1975, que reescreveram o potencial (2.61) da seguinte maneira:

$$\phi(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{b^2 + z^2})^2}}. \quad (2.65)$$

Calculando o laplaciano do potencial acima obtemos, após muita álgebra,

$$\rho(R, z) = \frac{M b^2}{4\pi} \frac{aR^2 + [a + 3\sqrt{b^2 + z^2}][a + \sqrt{b^2 + z^2}]^2}{[R^2 + (a + \sqrt{b^2 + z^2})^2]^{5/2} (b^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2.66)$$

Neste par densidade–potencial, a razão  $b/a$  nos dá o quanto a distribuição é achatada. No limite  $a \rightarrow 0$  o modelo torna-se esférico.

## 2.4 Função de Distribuição

Qualquer sistema dinâmico pode ser completamente descrito por uma função que dê a densidade, em função ou não do tempo, no *espaço de fase*. Esta densidade pode ser definida de dois modos distintos, segundo Boltzmann ou Gibbs.

Vamos supor um sistema composto por  $N$  partículas, cada uma com posição  $\vec{r}$  e velocidade  $\vec{v}$ . Boltzmann considera o espaço de fase com  $2s$  dimensões, onde  $s$  é a dimensão dos vetores  $\vec{r}$  ou  $\vec{v}$ , 3 no caso do espaço a que estamos habituado, 2 no caso de uma superfície, etc; este espaço é chamado *espaço- $\mu$* . Neste caso, definimos uma *densidade do espaço de fase* ou *função de distribuição* como  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  que representa no número de estrelas (ou a massa) no volume  $d^3r d^3v$  centrado em  $(\vec{r}, \vec{v})$  no instante  $t$ .

Já Gibbs, para o mesmo sistema de partículas citado acima, considera um espaço com  $2sN$  dimensões. A configuração total do sistema corresponde a um ponto neste espaço, chamado *espaço- $\Gamma$* . Gibbs considera um *ensemble* (conjunto) de sistemas que preenchem o espaço- $\Gamma$ . Assim a função de distribuição no espaço de fase de Gibbs é a densidade do ensemble.

Nos exemplos acima definimos  $f$  em termos do número de partículas, mas podemos fazê-lo também em termos da massa. De qualquer forma, a função de distribuição deve ser sempre maior ou igual a zero,  $f \geq 0$ .

### 2.4.1 Teorema e equação de Liouville

No espaço- $\Gamma$ , um ponto representa o estado completo de um sistema de  $N$  partículas em algum instante  $t_0$ . A evolução deste sistema ao longo do tempo será uma linha (uma curva) neste espaço de  $6N$  dimensões a partir do ponto em  $t_0$ . Vamos considerar um sistema dinâmico em um ensemble de Gibbs no espaço- $\Gamma$ : a qualquer momento, a probabilidade de se encontrar este sistema no ensemble dentro de um volume infinitesimal de  $6N$  dimensões será dada pela função de distribuição:

$$f^{(N)}(\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(N)}, \vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(N)}, t) d^3r^{(1)}, \dots, d^3v^{(N)}, \quad (2.67)$$

e a condição de normalização nos impõe:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(N)}(\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(N)}, \vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(N)}, t) d^3r^{(1)}, \dots, d^3v^{(N)} = 1, \quad (2.68)$$

isto é, a probabilidade de se encontrar um dado sistema em todo o espaço é, obviamente, 1. A função  $f^{(N)}$  é conhecida como função de distribuição de  $N$ -partículas. Utilizamos agora  $f^{(N)}$  para calcular a probabilidade de encontrar-mos um sistema de coordenadas  $(\vec{r}_0^{(1)}, \dots, \vec{r}_0^{(N)}, \vec{v}_0^{(1)}, \dots, \vec{v}_0^{(N)})$  no instante  $t_0$  em um pequeno volume  $S_0$  do espaço- $\Gamma$ . Esta probabilidade,  $P(t_0)$  será:

$$P(t_0) = \int_{S_0} f_0^{(N)}(\vec{r}_0^{(1)}, \dots, \vec{r}_0^{(N)}, \vec{v}_0^{(1)}, \dots, \vec{v}_0^{(N)}, t) d^3r_0^{(1)}, \dots, d^3v_0^{(N)}, \quad (2.69)$$

onde a integral é efetuada em todo o volume  $S_0$ . Após um certo intervalo de tempo, no instante  $t$ , as coordenadas do sistema serão  $(\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(N)})$ , devido a evolução dinâmica do sistema. A função de distribuição será, agora,  $f^{(N)}(\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(N)})$  e o volume  $S_0$  se tornará  $S_t$ . A probabilidade, então, de se encontrar o sistema no volume  $S_t$  é dada por:

$$P(t) = \int_{S_t} f^{(N)}(\vec{r}^{(1)}, \dots, \vec{r}^{(N)}, \vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(N)}, t) d^3r^{(1)}, \dots, d^3v^{(N)}. \quad (2.70)$$

A evolução dinâmica de um sistema é contínua (pelo menos na mecânica clássica), ou seja, o sistema não pode saltar repentinamente (com uma descontinuidade) para um novo estado. Assim, a probabilidade que o sistema esteja na região transformada é a mesma que a probabilidade de estar na região original, isto é,

$$P(t) = P(t_0) = \text{constante}. \quad (2.71)$$

Podemos abordar este problema por outro ângulo. Como a evolução de um sistema dinâmico é contínua, os pontos do ensemble escoam pelo espaço- $\Gamma$  sem descontinuidades e, portanto, a função  $f^{(N)}$  deve satisfazer uma *equação de continuidade*, semelhante a um fluido normal. Esta equação de continuidade se escreve:

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_i^N \left\{ \frac{\partial}{\partial r_i} \left( f^{(N)} \frac{dr_i}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial v_i} \left( f^{(N)} \frac{dv_i}{dt} \right) \right\} = 0. \quad (2.72)$$

Mas,  $dr_i/dt = v_i$  e  $\partial v_i/\partial r_i = 0$ , pois trata-se de variáveis independentes. Além disto, para forças conservativas (o que é o caso em sistemas estelares),  $dv_i/dt = -\partial\phi_i/\partial r_i$ . Podemos então simplificar a equação de continuidade (2.72) em:

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_i^N \left\{ v_i \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial r_i} - \frac{\partial\phi_i}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial v_i} \right\} = 0. \quad (2.73)$$

A equação acima nos diz que a derivada total de  $f^{(N)}$  se anula no espaço- $\Gamma$ , em outras palavras o 'fluido' de partículas neste espaço é incompressível; a densidade de pontos no espaço- $\Gamma$ , dado por  $f^{(N)}$  próximo a um ponto qualquer, e seguindo sua evolução dinâmica, é constante. Esta afirmação é conhecida como *teorema de Liouville* e a fórmula 2.73 é a *equação de Liouville*.

### 2.4.2 Equação de Boltzmann–Vlasov

Vamos supor agora um sistema dinâmico de  $N$  partículas no espaço- $\mu$  de 6 dimensões. Ao contrário do espaço- $\Gamma$ , cada partícula representa um ponto neste espaço. Em qualquer momento  $t$  o estado do sistema é descrito pela função de distribuição  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ . Novamente, se conhecemos as posições e velocidades,  $\vec{r}_i(t_0)$  e  $\vec{v}_i(t_0)$  no instante  $t_0$ , podemos, a princípio, determinar as posições e velocidades em qualquer instante  $t$  através das equações de movimento das partículas.

Se considerarmos o fluxo de partículas no espaço- $\mu$ , teremos as coordenadas  $(\vec{r}, \vec{v})$  e a velocidade do fluxo,  $(\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{v}}) = (\vec{v}, -\vec{\nabla}\phi)$ , onde assumimos que as forças que regem os movimentos das partículas (o fluxo no espaço- $\mu$ ) seja dada pelo gradiente de um potencial. Esta afirmação é importante pois implica que estamos supondo que o sistema é não-colisional (suposição que não fazemos no espaço- $\Gamma$ ).

Da mesma forma que o fluxo no espaço- $\Gamma$ , o fluxo aqui também é contínuo, graças à continuidade das equações de movimento. Assim, a função de distribuição  $f$  também deve obedecer a uma equação de continuidade que pode ser escrita como:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (f\vec{v}) + \vec{\nabla}_v \cdot (f\dot{\vec{v}}) = 0, \quad (2.74)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i^3 \frac{\partial f v_i}{\partial x_i} - \sum_i^3 \frac{\partial f \vec{\nabla} \phi}{\partial v_i} = 0, \quad (2.75)$$

onde  $x_i$  e  $v_i$  são as componentes dos vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$ , respectivamente e a soma se faz nas três componentes das coordenadas.

Utilizando a identidade vetorial  $\nabla \cdot (f\vec{w}) = f\nabla \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \nabla f$  e lembrando que  $r$  e  $v$  são variáveis independentes, obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f + \dot{\vec{v}} \cdot \vec{\nabla}_v f = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f - \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla}_v f = 0, \quad (2.76)$$

ou ainda

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i^3 \left( v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} \right) = 0. \quad (2.77)$$

Tanto na forma (2.76) como (2.77), estas fórmulas são conhecidas como *equação de Boltzmann não-colisional* ou *equação de Vlasov*. A equação de Boltzmann não-colisional é, na verdade, um caso especial da equação de Liouville. Para um sistema não colisional, o fluido no espaço- $\mu$  (ou simplesmente *espaço de fase*) é incompressível.

O efeito de colisões (quando, por exemplo a relaxação de dois corpos é importante) pode ser interpretado como um termo adicional à equação de Boltzmann; ao invés de termos  $df/dt = 0$ , teríamos no caso colisional algo do tipo  $df/dt = F_{\text{colisão}}$ .

Também podemos expressar a equação de Boltzmann utilizando a formulação Hamiltoniana. Vamos considerar a função de distribuição  $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$  que depende das coordenadas conjugadas  $q_i$  e  $p_i$  que, por sua vez, satisfazem as equações canônicas de movimento:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (2.78)$$

onde  $H(q_i, p_i)$  é a Hamiltoniana do sistema. Para partículas de massa  $m$  que se movem livremente,  $H = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)/2m$ ; em um campo gravitacional, a Hamiltoniana

da partícula conta com mais um termo (a energia potencial) que depende apenas das coordenadas  $q_i$ . Podemos então reescrever a equação (2.77) como:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_i^3 \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) \equiv \{H, f\}, \quad (2.79)$$

onde o último termo a direita são os *colchetes de Poisson*.

### 2.4.3 Equação de Boltzmann em alguns sistemas de coordenadas

Em geral, é mais conveniente expressarmos a equação de Boltzmann em sistemas de coordenadas mais apropriados à simetria do problema que queremos estudar. A mudança de coordenadas se faz aplicando-se a regra da cadeia às derivadas parciais da equação (2.77).

Contudo, se notarmos que a equação de Boltzmann é simplesmente

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad (2.80)$$

isto é, a derivada total é nula e portanto  $f$  é constante ao longo das trajetórias no espaço de fase, vemos que esta equação deve ser válida para qualquer sistema de coordenadas. Em outras palavras, podemos simplesmente trocar as coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  por, por exemplo,  $(R, \theta, z)$  das coordenadas cilíndricas. Assim, continuando com o exemplo das coordenadas cilíndricas, temos:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{R} \frac{\partial f}{\partial R} + \dot{\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \dot{z} \frac{\partial f}{\partial z} + \dot{v}_R \frac{\partial f}{\partial v_R} + \dot{v}_\varphi \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} + \dot{v}_z \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0. \quad (2.81)$$

Feito isto, notamos ainda que  $\dot{R} = v_R$ ,  $\dot{\varphi} = v_\varphi/R$  e  $\dot{z} = v_z$ . Além disto, podemos utilizar as equações de movimento em coordenadas esféricas:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla\phi(R, \varphi, z) = \frac{\partial\phi}{\partial R}\hat{e}_R + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{e}_z, \quad (2.82)$$

onde o vetor velocidade é  $\vec{v} = \dot{R}\hat{e}_R + R\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \dot{z}\hat{e}_z$ , e sua derivada é:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2)\hat{e}_R + (2\dot{R}\dot{\varphi} + R\ddot{\varphi})\hat{e}_\varphi + \ddot{z}\hat{e}_z. \quad (2.83)$$

Obtemos, então, as seguintes relações:

$$\dot{v}_R = -\frac{\partial\phi}{\partial R} \frac{v_\varphi^2}{R}; \quad \dot{v}_\varphi = -\frac{1}{R} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} - \frac{v_R v_\varphi}{R}; \quad \dot{v}_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad (2.84)$$

que nos permitem simplificar a equação de Boltzmann e, finalmente, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial t} + v_R \frac{\partial f}{\partial R} + \frac{v_\varphi}{R} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \\ & \left( \frac{v_\varphi^2}{R} - \frac{\partial\phi}{\partial R} \right) \frac{\partial f}{\partial v_R} - \frac{1}{R} \left( v_R v_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} - \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0 \end{aligned} \quad (2.85)$$

O mesmo procedimento pode ser aplicado em coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$  resultando na seguinte forma para a equação de Boltzmann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \left( \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} - \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} + \\ \frac{1}{r} \left( \frac{v_\varphi^2}{\tan \theta} - v_r v_\theta - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\theta} - \frac{1}{r} \left[ v_\varphi \left( v_r + \frac{v_\theta}{\tan \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right] \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (2.86)$$

É claro, estas equações podem ainda serem simplificadas no caso de sistemas estacionários (i.e.  $\partial f / \partial t = 0$ ) ou com alguma simetria; no caso da simetria esférica, as derivadas em relação a  $\theta$  e  $\varphi$  se anulam.

## 2.5 Momentos da equação de Boltzmann

Como vimos, podemos definir a função de distribuição  $f$  como o número de partículas ou massa no volume  $d^3r d^3v$  do espaço de fase. Assim, a densidade espacial pode ser imediatamente obtida por:

$$\rho(\vec{r}) = \int_v f(\vec{r}, \vec{v}) d^3r d^3v, \quad (2.87)$$

onde a integral deve ser feita sobre todas as velocidades. Colocando a Eq. (2.87) na equação de Poisson,

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \int_v f(\vec{r}, \vec{v}) d^3r d^3v, \quad (2.88)$$

obtemos uma equação que descreve a dinâmica do sistema. Esta equação, junto com a equação de Boltzmann, descreve completamente a evolução do sistema auto-gravitacional.

Na prática, contudo, este problema é muito complexo; uma solução mais simples – e consequentemente menos completa – é obtida através dos *momentos da equação de Boltzmann*.<sup>5</sup>

O momento de ordem zero da equação de Boltzmann é calculado integrando a Eq. (2.77) sobre todas as velocidades:

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3v + \sum_i^3 \left( \int v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3v - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \int \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3v \right) = 0, \quad (2.89)$$

lembrando que  $\partial \phi / \partial x_i$  é independente da velocidade. Como o intervalo de velocidades não depende do tempo, podemos tirar a derivada parcial do primeiro termo fora da integral:

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} \int f d^3v = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (2.90)$$

onde utilizamos a Eq. (2.87). Podemos fazer a mesma coisa com o segundo termo da Eq. (2.89), pois  $v$  e  $r$  são independentes:

$$\int v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3v = \frac{\partial}{\partial x_i} \int v_i f d^3v = \frac{\partial(\rho \bar{v}_i)}{\partial x_i}, \quad (2.91)$$

<sup>5</sup>Dada uma função de distribuição  $g$ , os momentos de ordem  $j$  se calculam como  $\bar{x}^j = \int x^j g dx / \int g dx$ , onde a integração se faz sobre todo o domínio da função  $g$ .

onde  $\bar{v}_i$  é o valor médio da componente  $v_i$  da velocidade. Para o último termo, podemos aplicar o teorema do divergente:

$$\int \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3v = \int f d^2S, \quad (2.92)$$

onde  $S$  é a superfície no espaço de velocidades que engloba toda a função  $f$ . Em outras palavras, para  $S$  cada vez maior isto corresponde à velocidades cada vez maiores. Fisicamente o número de partículas com velocidades cada vez maiores deve diminuir e no limite  $S \rightarrow \infty$  a função de distribuição deve se anular. Portanto,  $\int f d^2S = 0$  e o terceiro termo de (2.89) se anula.

Obtemos finalmente, a equação de momento zero:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i^3 \frac{\partial(\rho \bar{v}_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.93)$$

Esta é a equação de continuidade da massa (ou das partículas) do sistema.

Genericamente, podemos obter os momentos de ordem superior multiplicando a equação de Boltzmann (2.77) por  $v_1^l v_2^m v_3^n$ , onde  $l, m$  e  $n$  são inteiros e os índices representam as componentes das velocidades; a ordem do momento será o produto  $ijk$ . Se  $l = 1$  e  $m = n = 0$ , obteremos o momento de primeira ordem:

$$\int v_j \frac{\partial f}{\partial t} d^3v + \sum_i^3 \left( \int v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3v - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3v \right) = 0. \quad (2.94)$$

Integrando por partes o último termo de (2.94) e utilizamos o fato de  $f \rightarrow 0$  quando  $v \rightarrow \infty$ , obtemos:

$$\int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3v = \lim_{|v| \rightarrow \infty} v_j f - \int \frac{\partial v_j}{\partial v_i} f d^3v = - \int \delta_{ij} f d^3v = -\delta_{ij} \rho, \quad (2.95)$$

onde  $\delta_{ij}$  é a função delta,  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ ,  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$ . O primeiro termo de (2.94) resulta em:

$$\int v_j \frac{\partial f}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} \int v_j f d^3v = \frac{\partial(\rho \bar{v}_j)}{\partial t}, \quad (2.96)$$

e o segundo termo nos dá:

$$\int v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3v = \frac{\partial(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i}. \quad (2.97)$$

Combinando as equações (2.95), (2.96) e (2.97) obtemos três equações, uma para cada  $j$ :

$$\frac{\partial(\rho \bar{v}_j)}{\partial t} + \sum_i^3 \left( \frac{\partial(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right) + \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = 0. \quad (2.98)$$

Podemos ainda reescrever a Eq. (2.98) utilizando a equação de continuidade, Eq. (2.93), multiplicada por  $\bar{v}_j$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \bar{v}_j)}{\partial t} + \sum_i^3 \left( \frac{\partial(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right) + \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_j} &= \bar{v}_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{v}_j \sum_i^3 \frac{\partial(\rho \bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0 \\ \Rightarrow \rho \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \sum_i^3 \left( \frac{\partial(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} - \bar{v}_j \frac{\partial(\rho \bar{v}_i)}{\partial x_i} \right) &= -\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Introduzimos agora o *tensor dispersão de velocidade*,  $\sigma_{ij}$ , definido como:

$$\sigma_{ij}^2 \equiv \overline{v_i v_j} - \overline{v_i} \overline{v_j}. \quad (2.100)$$

Podemos ver que as componentes da diagonal principal deste tensor,  $\sigma_{ii}$ , são as dispersões de velocidade associadas a cada uma das coordenadas do sistema (no caso cartesiano, são as dispersões nas direções paralelas a cada eixo). Também notamos que este tensor é simétrico. Utilizando o tensor dispersão de velocidades na Eq. (2.99), obtemos finalmente:

$$\rho \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial t} + \sum_i^3 \left( \rho \overline{v_i} \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial (\rho \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} \right) = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_j}. \quad (2.101)$$

As equações dos momentos da equação de Boltzmann foram deduzidas e utilizadas em astrofísica pela primeira vez por Jeans entre 1915 e 1922 e, por isto, são chamadas *equações de Jeans*.

A equação do primeiro momento da equação de Boltzmann, Eq. (2.101) descreve o equilíbrio hidrodinâmico do sistema. O termo que envolve  $\rho \sigma_{ij}^2$ , chamado tensor de tensão (*stress tensor*) representa a pressão. Esta é uma pressão dinâmica, isto é, ela não ocorre devido à colisões entre as partículas. Além disto, ao contrário de um gás ‘normal’, onde a pressão é isotrópica, o tensor de tensão poder ter componentes na diagonal principal diferentes, ou seja, o sistema pode ter uma anisotropia na dispersão de velocidades.

Para um sistema em equilíbrio estacionário, onde não há movimento sistemático, a Eq. (2.101) se reduz a:

$$\sum_i^3 \frac{\partial \rho \sigma_{ij}^2}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_j}, \quad (2.102)$$

análoga à equação de equilíbrio hidrostático habitual,  $\nabla P = -\rho \nabla \phi$ .

Devemos observar que as equações dos momentos da equação de Boltzmann não são fechadas, isto é, há mais incógnitas do que equações. Isto ocorre mesmo indo para ordens superiores dos momentos, a cada ordem surgem mais incógnitas do que equações: as equações de Jeans (2.101) são apenas 3 com as variáveis  $\rho$ ,  $\phi$ ,  $\overline{v_j}$  e  $\sigma_{ij}$ . Portanto, para resolvermos estas equações é necessário fazer hipóteses sobre o comportamento do sistema e impor vínculos às equações.

### 2.5.1 Equações de Jeans em alguns sistemas de coordenadas

Como para a equação de Boltzmann, podemos deduzir as equações de Jeans para sistemas de coordenadas mais apropriados à simetria dos sistemas que queremos estudar.

A equação de continuidade em coordenadas cilíndricas pode ser deduzida integrando a equação (2.85) em todo o espaço de velocidades. Por simplicidade, vamos considerar os sistemas com simetria axial, de modo que as derivadas em relação a  $\varphi$  se anulam, o que resulta em:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial R \rho \overline{v_R}}{\partial R} + \frac{\partial \rho \overline{v_z}}{\partial z} = 0. \quad (2.103)$$

As equações do primeiro momento da equação de Boltzmann são obtidas multiplicando a Eq. (2.85) por  $v_R$ ,  $v_\varphi$  ou  $v_z$  e integrando cada uma das equações sobre todas as

velocidades. Obtemos assim as três equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\overline{v_R})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\overline{v_R^2})}{\partial R} + \frac{\partial(\rho\overline{v_R v_z})}{\partial z} + \rho \left( \frac{\overline{v_R^2} - \overline{v_\varphi^2}}{R} + \frac{\partial\phi}{\partial R} \right) &= 0; \\ \frac{\partial(\rho\overline{v_\varphi})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\overline{v_R v_\varphi})}{\partial R} + \frac{\partial(\rho\overline{v_\varphi v_z})}{\partial z} + \frac{2\rho}{R}\overline{v_\varphi v_R} &= 0; \\ \frac{\partial(\rho\overline{v_z})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\overline{v_R v_z})}{\partial R} + \frac{\partial(\rho\overline{v_z^2})}{\partial z} + \rho \frac{\overline{v_R v_z}}{R} + \rho \frac{\partial\phi}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Para as coordenadas esféricas, podemos proceder da mesma forma e integramos a equação (2.86) sobre todas as velocidades. Obtemos assim:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\overline{v_r})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\rho\overline{v_\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho\overline{v_\varphi})}{\partial\varphi} + \frac{2\rho}{r}\overline{v_r} + \frac{\rho}{r\tan\theta}\overline{v_\theta} = 0. \quad (2.105)$$

Por simplicidade, vamos supor agora um sistema com simetria esférica – as derivadas em relação a  $\theta$  e  $\varphi$  são nulas. Além disto, vamos considerar um sistema estacionário; isto implica que a derivada em relação ao tempo é nula e não movimento sistemático em nenhuma direção ( $\overline{v_r} = \overline{v_\theta} = \overline{v_\varphi} = 0$ ) Neste caso, apenas uma das equações do primeiro momento da equação de Boltzmann é não trivial e ela é obtida multiplicando a Eq. (2.86) por  $v_r$  e integrando em todo o espaço de velocidades:

$$\frac{d(\rho\overline{v_r^2})}{dr} + \frac{\rho}{r} (2\overline{v_r^2} - \overline{v_\theta^2} - \overline{v_\varphi^2}) + \rho \frac{d\phi}{dr} = 0. \quad (2.106)$$

## 2.5.2 Aplicação das equações de Jeans

### Dispersão de velocidades radial e na linha de visada

Antes de aplicarmos as equações de Jeans, convém abordarmos o seguinte problema: nas equações dos momentos, as grandezas envolvidas são relacionadas à distribuição tridimensional das velocidades, enquanto que nós só podemos observar uma componente do vetor velocidade, aquela na *linha de visada* (exceto no caso dos objetos próximos, onde podemos obter através da observação direta as três componentes da velocidade).

Da mesma forma que o brilho superficial é obtido a partir da projeção em duas dimensões da densidade de luminosidade, também podemos obter a dispersão de velocidades na linha de visada,  $\sigma_p^2$ , pela projeção da dispersão radial de velocidades,  $\sigma_r^2$ .

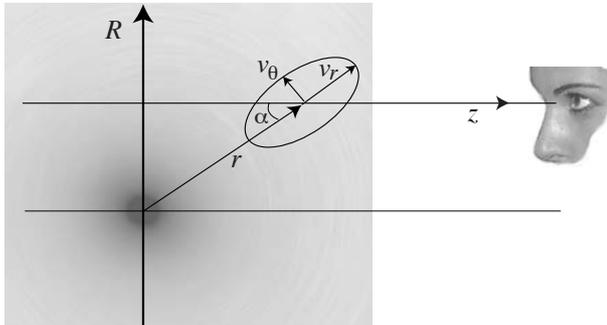


Figura 2.3: Geometria da projeção da dispersão de velocidades para uma distribuição esférica.

Na figura 2.3, vemos que a geometria envolvida na projeção da dispersão de velocidades é semelhante à projeção da densidade de luminosidade para uma distribuição

esférica. De fato, se distribuição de velocidades é isotrópica, obtemos:

$$\Sigma(R)\sigma_p^2(R) = 2 \int_R^\infty \frac{\rho(r)}{\Upsilon(r)} \frac{\sigma_r^2 r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}. \quad (2.107)$$

Esta também é uma equação integral do tipo de Abel e, portanto, pode ser invertida resultando em:

$$\frac{\rho(r)}{\Upsilon(r)} \sigma_r^2(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{d[\Sigma(R)\sigma_p^2(R)]}{R} \frac{dR}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (2.108)$$

Em um caso mais geral, a distribuição de velocidades não é necessariamente isotrópica. Supondo que as dispersões de velocidades nas componentes angulares sejam iguais, isto é,  $\sigma_\theta^2 = \sigma_\varphi^2$ , podemos então definir um *parâmetro de anisotropia*, da seguinte forma:

$$\beta = 1 - \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_r^2}. \quad (2.109)$$

Este parâmetro  $\beta$  mede o quanto as órbitas das partículas são mais ou menos radiais ou circulares. Pela geometria descrita na Fig. 2.107, quando a dispersão de velocidades não é isotrópica temos:

$$\Sigma(R)\sigma_p^2 = 2 \int_R^\infty \frac{\rho(r)}{\Upsilon(r)} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}} \overline{(v_r \cos \alpha - v_\theta \sin \alpha)^2}. \quad (2.110)$$

A equação acima pode ser simplificada da seguinte forma:

$$\overline{(v_r \cos \alpha - v_\theta \sin \alpha)^2} = \overline{v_r^2} \cos^2 \alpha + \overline{v_\theta^2} \sin^2 \alpha, \quad (2.111)$$

pois  $\overline{v_r v_\theta} = 0$ . Não havendo movimento sistemático, a velocidade média quadrática é igual à dispersão e, utilizando a definição de  $\beta$  obtemos:

$$\Sigma(R)\sigma_p^2 = 2 \int_R^\infty \left(1 - \beta(r) \frac{R^2}{r^2}\right) \frac{\rho(r)}{\Upsilon(r)} \frac{\sigma_r^2 r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}. \quad (2.112)$$

### Distribuição de massa de um sistema esférico

Podemos aproximar uma galáxia elíptica, um aglomerado globular ou o halo de uma galáxia espiral como um sistema esférico em equilíbrio estacionário. Como não deve haver nenhum movimento sistemático, temos  $\sigma_j^2 = \overline{v_j^2}$ , onde  $j = r, \theta$  ou  $\varphi$ . Com as hipótese acima, podemos reescrever a equação de Jeans (2.106) como:

$$\frac{1}{\rho(r)} \frac{d[\rho(r)\sigma_r^2(r)]}{dr} + 2\beta(r) \frac{\sigma_r^2(r)}{r} = -\frac{d\phi(r)}{dr}, \quad (2.113)$$

onde colocamos explicitamente a dependência em  $r$  de todas as funções. Lembrando que para um sistema esférico  $d\phi/dr = GM(r)/r^2$ , obtemos:

$$M(r) = -\frac{r \sigma_r^2}{G} \left( \frac{d \ln \rho}{d \ln r} + \frac{d \ln \sigma_r^2}{d \ln r} + 2\beta \right). \quad (2.114)$$

É interessante lembrar que a equação de Boltzmann não colisional e seus momentos são válidas em qualquer potencial gravitacional, isto é, não é necessário que todo o

potencial gravitacional (dado por  $GM(r)/r$ ) seja gerado pelo perfil de densidade  $\rho(r)$ . A equação (2.114) pode ser utilizada, por exemplo, onde  $\rho$  é obtido a partir do brilho superficial de uma galáxia e  $\sigma_r^2$  é estimado a partir da dispersão de velocidades na linha de visada. Obtemos então a massa total, que gera o potencial gravitacional, podendo ser composta pelas estrelas (obviamente) e qualquer outro componente invisível (a chamada *matéria escura*).

No entanto, para se utilizar a Eq. (2.114) na prática, é necessário de alguma forma fixarmos o parâmetro de anisotropia. Infelizmente, este parâmetro não é acessível diretamente pela observação, a não ser na vizinhança solar (onde podemos medir o movimento próprio das estrelas mais próximas). Em geral, supomos que o parâmetro de anisotropia (1) não varie com a distância radial e (2) utilizamos os casos limites  $\beta = 0$  para sistemas isotrópicos ou  $\beta = 1$  para sistemas com apenas velocidades radiais.

Por outro lado, se conhecemos a razão massa–luminosidade e, assim, podendo deduzir  $\rho(r)$  e  $M(r)$  a partir das observações, nós obtemos através de (2.114) uma relação entre a dispersão de velocidades radial e  $\beta(r)$  (que pode variar em função do raio).

### Achatamento de galáxias elípticas

Historicamente, a interpretação dada para a elipticidade observada das galáxias elípticas era de que estes objetos eram achatados devido à rotação ao longo do eixo menor. Uma tal galáxia teria um tensor de dispersão de velocidades isotrópico e o achatamento seria o estado de equilíbrio que resulta da rotação. No caso contrário, o achatamento de uma elíptica não é devido à rotação mas sim a uma anisotropia no tensor de dispersão de velocidades.

Assim, podemos dizer que, se a galáxia tem uma velocidade de rotação  $\overline{v_\varphi}(R, z)$  da ordem de grandeza da dispersão de velocidades, esta galáxia deve ter um achatamento devido à rotação. Se uma galáxia achatada tem uma velocidade de rotação muito inferior à dispersão, então o achatamento será devido à anisotropia.

Podemos analisar esta situação com a ajuda das equações de Jeans em coordenadas cilíndricas. Para um sistema em equilíbrio estacionário onde o único movimento sistemático é azimutal e o tensor de dispersão de velocidades é isotrópico,  $\sigma_{ij}^2 = \delta_{ij} \sigma^2$ , as equações (2.104) se simplificam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \sigma^2}{\partial R} - \rho \left( \frac{\overline{v_\varphi^2}}{R} - \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) &= 0; \\ \frac{\partial \rho \sigma^2}{\partial z} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.115)$$

onde utilizamos  $\overline{v_\varphi^2} = \overline{v_\varphi^2}$ .

Dado um par densidade–potencial, a dispersão de velocidades,  $\sigma$ , pode ser obtida integrando-se a segunda equação em (2.115):

$$\sigma^2(R, z) = \frac{1}{\rho} \int_z^\infty \rho \frac{\partial \phi}{\partial z} dz. \quad (2.116)$$

Utilizando esta equação acima na primeira equação de (2.115), obtemos uma expressão que relaciona a velocidade de rotação com o par densidade–potencial:

$$\overline{v_\varphi^2}(R, z) = R \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{R}{\rho} \frac{\partial}{\partial R} \int_z^\infty \rho \frac{\partial \phi}{\partial z} dz. \quad (2.117)$$

Como exemplo podemos utilizar um par densidade–potencial baseado no modelo Hernquist, dado pela Eq. (2.56) quando  $i = 1$ . Para levarmos em conta o achatamento, fazemos a seguinte mudança de variáveis:  $r^2 \rightarrow R^2 + (z/q_z)^2$ , onde  $q_z$  é a razão entre os semi-eixos menor e maior ( $q_z = 1 \Rightarrow$  esfera,  $q_z = 0 \Rightarrow$  disco). Isto resulta no potencial:

$$\phi(R, z) = -\frac{GM}{r_c} \left( 1 - \frac{r}{r_c + r} \right); \quad r = \sqrt{R^2 + \left( \frac{z}{q_z} \right)^2}, \quad (2.118)$$

e densidade:

$$\rho(R, z) = \frac{M}{4\pi q_z^2} \frac{1}{(r + r_c)^3} \left( [1 + q_z^2] \frac{r_c}{r} + \frac{[1 - q_z^2][q_z^2 r^3 - \{3r + r_c\}z^2]}{q_z^2 r^3} \right); \quad r = \sqrt{R^2 + \left( \frac{z}{q_z} \right)^2}. \quad (2.119)$$

Notemos que o achatamento na densidade é diferente do achatamento do potencial; em geral o achatamento do potencial é menor do que o da densidade que o gera. Uma análise cuidadosa desta densidade revelará que ela não corresponde à densidade das galáxias elípticas. Contudo ela será utilizada como uma aproximação grosseira.

Tendo um par densidade–potencial, podemos resolver a equação (2.117) e obtemos  $\overline{v_\varphi}$  e a equação (2.116) para obtermos a dispersão de velocidades,  $\sigma$ .

Com muita álgebra podemos chegar uma relação entre a razão da velocidade de rotação e da dispersão de velocidades com o achatamento do sistema. No plano de simetria do sistema, isto é,  $z = 0$  obtemos:

$$\frac{\overline{v_\varphi}^2}{\sigma^2} = \frac{1 - q_z^2}{q_z^2} \frac{6}{12(1+x)^4 \ln(1 + \frac{1}{x}) - 25 - 2x(26 + 3x(7 + 2x))}; \quad x = \frac{R}{r_c}. \quad (2.120)$$

Também podemos comparar  $\overline{v_\varphi}$  com a velocidade circular,  $v_c = R\partial\phi(R, z)/\partial R$ ; em  $z = 0$  temos:

$$\frac{\overline{v_\varphi}^2}{v_c^2} = \frac{(1 - q_z^2)(1 + x)}{(1 - q_z^2)x + 1 + q_z^2}; \quad x = \frac{R}{r_c}. \quad (2.121)$$

A elipticidade é definida como  $\epsilon_z = 1 - q_z$  e, para  $\epsilon_z$  próximo de zero, a razão  $\overline{v_\varphi}^2/v_c^2$  aumenta aproximadamente linearmente com a elipticidade. Em outras palavras, é necessário de uma rotação consequente para que o sistema se achate. Por exemplo, para um achatamento com  $\epsilon_z = 0,1$  como em uma elíptica E1,  $\overline{v_\varphi}/v_c \approx 0,25$  ou  $\overline{v_\varphi}/v_\sigma \approx 0,35$  para que este achatamento seja devido à rotação em  $R = r_c$ .

As observações de galáxias elípticas normais e gigantes apontam para valores de  $\overline{v_\varphi}/v_c$  e  $\overline{v_\varphi}/v_\sigma$  menores do que estes, indicando que o achatamento não pode ser explicado por rotação mas sim por uma anisotropia da dispersão de velocidades.

### 2.5.3 Teorema do virial tensorial

As equações de Jeans são obtidas multiplicando a equação de Boltzmann por  $v_j$  e integrando em todas as velocidades. Obtemos assim três equações diferenciais para cada coordenada relacionando a densidade o gradiente do potencial gravitacional e os primeiros momentos das velocidades. Podemos agora multiplicar estas equações pela coordenada  $x_k$  e integrar em todo o espaço (de coordenadas espaciais). Obteremos desta forma

uma única equação tensorial que relaciona as propriedades globais do sistema. Tomamos então a Eq. (2.98) e, fazendo como descrito obtemos:

$$\int x_k \frac{\partial(\rho \bar{v}_j)}{\partial t} d^3x + \sum_i^3 \int x_k \left( \frac{\partial(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right) d^3x + \int x_k \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d^3x = 0. \quad (2.122)$$

O último termo da Eq. (2.122) é o tensor energia potencial,  $\mathcal{U}_{jk}$ . Substituindo o potencial,

$$\phi(\vec{x}) = -G \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3x', \quad (2.123)$$

no tensor energia potencial, podemos reescrevê-lo como:

$$\mathcal{U}_{jk} = G \int \rho(\vec{x}) x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3x' d^3x. \quad (2.124)$$

A derivada pode ser levada para o interior da integral, pois a variável de integração é  $x'$  e a derivada é em  $x$ :

$$\mathcal{U}_{jk} = G \int \int \rho(\vec{x}) \rho(\vec{x}') \frac{x_j (x'_k - x_k)}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} d^3x' d^3x. \quad (2.125)$$

As variáveis de integração  $x'$  e  $x$  são mudas e, portanto, podemos trocá-las,  $x' \leftrightarrow x$  sem alterar o resultado:

$$\mathcal{U}_{jk} = G \int \int \rho(\vec{x}') \rho(\vec{x}) \frac{x'_j (x_k - x'_k)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x d^3x'. \quad (2.126)$$

Finalmente, somando as equações (2.125) e (2.126) obtemos:

$$\mathcal{U}_{jk} = -\frac{G}{2} \int \int \rho(\vec{x}) \rho(\vec{x}') \frac{(x'_j - x_j)(x'_k - x_k)}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} d^3x' d^3x. \quad (2.127)$$

Este tensor potencial é simétrico, e o seu traço,  $\text{traço}(\mathcal{U}) \equiv \sum_{j=1}^3 \mathcal{U}_{jj}$  resulta em:

$$\text{traço}(\mathcal{U}) = -\frac{G}{2} \int \rho(\vec{x}) \int \rho(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x d^3x' = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) d^3x, \quad (2.128)$$

que é a energia potencial total do sistema.

O segundo termo de (2.122) pode ser integrado por partes e assumindo que para densidades fisicamente aceitáveis  $\rho \rightarrow 0$  para  $|x_k| \rightarrow \infty$ , obtemos:

$$\sum_i^3 \int x_k \left( \frac{\partial(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right) d^3x = - \int \delta_{ki} \rho \bar{v}_i \bar{v}_j d^3x = -2\mathcal{T}_{kj}, \quad (2.129)$$

onde  $\mathcal{T}_{kj}$  é o tensor de energia cinética. Este tensor pode ser dividido em duas partes, uma referente ao movimento aleatório das partículas e outra ao movimento ordenado (rotação, expansão, etc...). Isto é feito da seguinte forma:

$$\mathcal{K}_{jk} \equiv \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d^3x \quad ; \quad \Pi_{jk} \equiv \int \rho \sigma_{jk}^2 d^3x \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}_{kj} = \mathcal{K}_{jk} + \frac{1}{2} \Pi_{jk}, \quad (2.130)$$

onde utilizamos a definição do tensor de dispersão de velocidades, Eq. (2.100).

Como a derivada em relação ao tempo pode ser retirada do primeiro termo da equação (2.122), pois  $x_k$  não depende do tempo, obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \rho(x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) d^3x = 2\mathcal{T}_{jk} + \Pi_{jk} + \mathcal{U}_{jk}, \quad (2.131)$$

lembrando que os tensores são simétricos, isto é, podemos trocar os índices.

Definimos agora o tensor de momento de inércia:

$$\mathcal{I}_{jk} \equiv \int \rho x_j x_k d^3x. \quad (2.132)$$

Derivando este tensor em relação ao tempo, resulta em:

$$\frac{d\mathcal{I}_{jk}}{dt} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} x_j x_k d^3x. \quad (2.133)$$

Utilizando a equação de continuidade, Eq. (2.93),  $\partial \rho / \partial t + \sum_i^3 \partial(\rho \bar{v}_i) / \partial x_i = 0$ , e integrando a fórmula acima por partes obtemos:

$$\int \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial x_i} x_j x_k d^3x = - \int \rho \bar{v}_i (x_k \delta_{ji} + x_j \delta_{ki}) d^3x, \quad (2.134)$$

e, finalmente, obtemos o resultado:

$$\frac{1}{2} \frac{d\mathcal{I}_{jk}}{dt} = \frac{1}{2} \int \rho (x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) d^3x. \quad (2.135)$$

Combinado os resultados e definições acima, resulta no *teorema do virial tensorial*, demonstrado por Chandrasekhar em 1964:

$$\frac{1}{2} \frac{d\mathcal{I}_{jk}}{dt} = 2\mathcal{K}_{jk} + \Pi_{jk} + \mathcal{U}_{jk}. \quad (2.136)$$

O teorema do virial tensorial faz a ligação entre as propriedades cinemáticas (movimentos aleatórios e ordenados) com a morfologia (energia potencial) do sistema.

## 2.6 Teorema de Jeans

### 2.6.1 Integrais de movimento

Uma *constante de movimento* em um campo potencial é uma função que não varia ao longo da trajetória de uma partícula. Esta função, que pode depender das coordenadas no espaço de fase e do tempo pode ser definida da seguinte maneira:

$$C(\vec{x}_0, \vec{v}_0, t_0) = C(\vec{x}, \vec{v}, t), \forall t. \quad (2.137)$$

Por outro lado, uma *integral de movimento* ou *invariante integral* é uma função que depende apenas das coordenadas do espaço de fase e é constante ao longo da trajetória de uma partícula. Podemos defini-la como:

$$I(\vec{x}_0, \vec{v}_0) = I(\vec{x}, \vec{v}). \quad (2.138)$$

É claro, toda integral de movimento é uma constante de movimento mas a recíproca nem sempre é verdade. Considere, por exemplo, uma partícula em órbita circular em um potencial axissimétrico. O ângulo azimutal é dado por  $\varphi = \varphi_0 + v_\varphi t$ , onde  $\varphi_0$  é o ângulo quando  $t = 0$  e  $v_\varphi$  é a velocidade angular. A quantidade  $C \equiv \varphi_0/v_\varphi = \varphi/v_\varphi - t$  é uma constante de movimento. Contudo,  $C$  não é uma integral de movimento pois depende do tempo além das coordenadas no espaço de fase ( $v_\varphi$  e  $\varphi$ ).

Pelo exemplo dado acima, podemos ver que qualquer órbita em qualquer potencial tem sempre seis constantes de movimentos dadas pelas condições iniciais no espaço de fase,  $(x_0, y_0, z_0)$  e  $(v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$ , uma vez que estas constantes são funções das equações de movimento que, por sua vez, dependem das coordenadas no espaço de fase e do tempo.

Somente em alguns casos particulares, as integrais de movimento podem ser encontradas facilmente. Em um potencial estático, onde os encontros são desprezíveis, a energia de uma partícula se conserva durante sua trajetória. Assim, em um potencial estático, a grandeza  $E(\vec{x}, \vec{v}) = |\vec{v}|^2/2 + \phi(\vec{x})$  se conserva e, como não depende do tempo, apenas das coordenadas, é uma integral de movimento. Em um potencial estático e com simetria axial ao longo da coordenada  $z$ , a componente do momento angular nesta direção,  $L_z$ , se conserva e é, portanto, uma integral de movimento. Em um potencial esférico, as três componentes do momento angular,  $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{v}$ , se conservam durante a trajetória e, portanto, são integrais de movimento.

Algumas integrais de movimento têm uma interpretação geométrica no espaço de fase e na própria trajetória da partícula. Para ver isto, vamos considerar uma partícula que se move em um potencial esférico e estático. Vamos supor que este potencial é da forma:

$$\phi(r) = -GM \left( 1/r + 1/r^2 \right) \quad (2.139)$$

Uma trajetória típica é mostrada na figura 2.4.

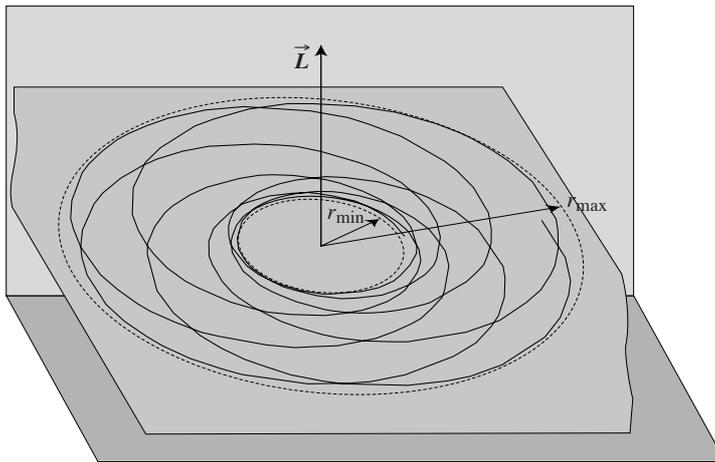


Figura 2.4: Órbita típica de uma partícula em um potencial esférico. Note que a trajetória da partícula está confinada em um anel, entre um raio mínimo e máximo, em um plano no espaço.

Observando esta figura, podemos notar que a órbita da partícula está confinada entre um raio superior e um raio inferior. O raio externo é uma consequência direta da energia da partícula, quando ela atinge este ponto sua velocidade é nula e toda a energia está sob forma de energia potencial. O raio interno depende do momento angular perpendicular à trajetória da partícula, ela não pode se aproximar indefinidamente do centro devido à chamada barreira centrífuga. Estes raios, inferior e superior são soluções da equação:

$2[E - \phi(r)] - L^2/r^2 = 0$ , onde  $L$  é o módulo do momento angular e  $E$  é a energia (negativa) da partícula).

Como a partícula está sujeita a um campo central, sua trajetória está contida em um plano no espaço usual. A orientação deste plano é dada pelas duas componentes do vetor momento angular, definindo assim o plano orbital.

A interpretação destas integrais de movimento é clara: cada uma delas restringe o espaço (de fase) acessível à partícula. Integrais de movimento que confinam a órbita de uma partícula são chamadas *integrais isolantes*.

No exemplo acima, nós determinamos quatro integrais de movimento, a energia e as três componentes do momento angular. A trajetória de um corpo no potencial (2.139) pode ser determinado analiticamente resolvendo-se a equação de movimento. A solução geral é dada por:

$$\frac{1}{r} = C \cos\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{K}\right) + D, \quad (2.140)$$

onde  $C$ ,  $D$  e  $K$  são constantes. Estas constantes dependem da energia, modulo do momento angular e da massa  $M$  que aparece em (2.139). Observando a solução (2.140), vemos que a constante  $\varphi_0$  pode também ser expressa em termos de  $E$ ,  $|\vec{L}|$  e  $M$  além das coordenadas  $r$  e  $\varphi$ . Portanto, concluímos que  $\varphi_0$  também é uma integral de movimento.

Contudo, exceto em casos muito particulares,  $\varphi_0$  não restringe a órbita da partícula e, portanto, não é uma integral isolante. Na realidade, sempre que tivermos uma órbita que é função das condições iniciais (e do tempo) dada pelas seguintes equações:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(\vec{x}_0, \vec{v}_0, t) \quad ; \quad \vec{v}(t) = \vec{v}(\vec{x}_0, \vec{v}_0, t), \quad (2.141)$$

podemos eliminar a variável  $t$  e resolver as equações (2.141) e obter cinco funções independentes do tempo que são, obviamente, constantes ao longo da trajetória (logo, são integrais de movimento).

Somente serão integrais isolantes, as integrais de movimento que reduzem a dimensão do espaço de fase acessível à partícula. As integrais não isolantes, é claro, não têm este efeito de redução.

### 2.6.2 Teorema de Jeans

Podemos expressar uma integral de movimento,  $I(\vec{x}, \vec{v})$  da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} I[\vec{x}(t), \vec{v}(t)] = 0, \quad (2.142)$$

onde a igualdade acima deve ser válida ao longo da órbita de qualquer partícula. Mas a condição acima é a mesma que a condição para que  $f$  seja uma solução da equação de Boltzmann não colisional, Eq. (2.80), para um sistema estacionário (esta última condição é fundamental, pois somente assim  $\partial f / \partial t = 0$ ).

Vamos supor agora que a função de distribuição  $f$  seja alguma função de  $n$  das integrais de movimento do sistema,  $f = f[I_1(\vec{x}, \vec{v}), \dots, I_n(\vec{x}, \vec{v})]$ . Então temos:

$$\frac{d}{dt} f[I_1(\vec{x}, \vec{v}), \dots, I_n(\vec{x}, \vec{v})] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial I_j} \frac{dI_j}{dt} = 0, \quad (2.143)$$

onde derivamos por partes e a última igualdade vem da Eq. (2.142). Podemos então enunciar o Teorema de Jeans:

Qualquer solução da equação de Boltzmann não colisional e estacionária depende apenas das integrais de movimento do sistema e qualquer função das integrais de movimento é solução estacionária da equação de Boltzmann não colisional.

A segunda asserção do Teorema de Jeans é a mais interessante para nós, pois nos garante que qualquer função das integrais de movimento (como energia e momento angular, por exemplo) é uma solução válida da equação de Boltzmann não colisional para um sistema em equilíbrio estacionário. Podemos, então, construir facilmente diversas funções de distribuição para estudar algum sistema gravitacional em equilíbrio.

Como vimos, um sistema gravitacional tem até cinco integrais de movimento independentes [veja Eq. (2.141)]. Contudo existe uma versão mais restritiva do Teorema de Jeans que diz o seguinte:

Apenas integrais isolantes devem ser utilizadas para se construir uma solução da equação de Boltzmann não colisional e estacionária. Para um sistema onde a maioria das órbitas sejam regulares (e não caóticas), com frequências incommensuráveis, a função de distribuição de um sistema estacionário dependerá apenas de três integrais isolantes.

(para uma discussão mais aprofundada, veja D. Lynden-Bell, 1962, MNRAS 124, 1).

Em outras palavras, as soluções da equação de Boltzmann não colisional serão dadas por  $f(I_1)$ ,  $f(I_1, I_2)$  ou  $f(I_1, I_2, I_3)$ , onde  $I_1, I_2$  e  $I_3$  são integrais isolantes do sistema.

## 2.7 Aplicação do Teorema de Jeans

### 2.7.1 Sistemas esféricos

Como já vimos, um sistema esférico tem quatro integrais isolantes. Contudo, duas delas (dois dos componentes do momento angular) servem apenas para definir o plano orbital da trajetória no espaço. Se, além disto, o sistema for isotrópico em suas propriedades, então não deve haver uma direção privilegiada. Isto significa que as funções de distribuição que descrevem tais sistemas podem ser expressas como  $f(E, |\vec{L}|)$ .

Por simplicidade, vamos definir uma energia e um potencial relativos da seguinte forma:

$$\psi \equiv -\phi + \phi_0 \quad ; \quad \varepsilon \equiv -E + \phi_0 = \psi - \frac{1}{2}v^2, \quad (2.144)$$

Onde  $\phi_0$  é uma constante arbitrária e, em geral, escolhida de forma a que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi = 0$ . Para a maioria (mas não todos) dos sistemas de interesse astrofísico, isto implica em  $\phi_0 = 0$ . Para os casos em que a massa do sistema diverge, pode ser mais conveniente utilizarmos a normalização de forma a obtermos  $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi = -\infty$ . Notemos ainda que o potencial  $\psi$  e a energia  $\varepsilon$  são definidas por unidade de massa. Utilizando  $\psi$  e  $\varepsilon$  evitamos a utilização de números negativos. Com estas novas variáveis, a equação de Poisson se torna:

$$\nabla^2 \psi(\vec{x}) = -4\pi G \rho(\vec{x}). \quad (2.145)$$

Os modelos mais simples que podemos criar são aqueles em que a função de distribuição depende apenas da energia,  $f = f(\varepsilon) = f(\psi - v^2/2)$ . Em tais sistemas, a

velocidade radial quadrática média,  $\overline{v_r^2}$  é dada por:

$$\overline{v_r^2} = \frac{1}{\rho} \int f v_r^2 d^3v = \frac{1}{\rho(r)} \int f[\psi - (v_r^2 + v_\varphi^2 + v_\theta^2)/2] v_r^2 dv_r dv_\varphi dv_\theta, \quad (2.146)$$

integrando sobre todas as velocidades. Podemos, da mesma forma, calcular  $\overline{v_\theta^2}$ , obtendo:

$$\overline{v_\theta^2} = \frac{1}{\rho} \int f v_\theta^2 d^3v = \frac{1}{\rho(r)} \int f[\psi - (v_r^2 + v_\varphi^2 + v_\theta^2)/2] v_\theta^2 dv_r dv_\varphi dv_\theta. \quad (2.147)$$

Comparando as equações (2.146) e (2.147), vemos que elas são praticamente idênticas, apenas o índice que indica a componente da velocidade se altera. Isto significa que  $\overline{v_r^2} = \overline{v_\theta^2}$  e, pela mesma lógica,  $\overline{v_\theta^2} = \overline{v_\varphi^2}$ .

Em outras palavras as dispersões de velocidades são idênticas e, portanto, para funções de distribuição que dependem apenas da energia, o tensor dispersão de velocidades é isotrópico.

Os casos mais interessantes correspondem aos sistemas auto-gravitantes, onde a densidade  $\rho(r) = \int f(\varepsilon) d^3v$  gera o potencial, isto é,  $\nabla^2\psi(r) = -4\pi G \int f(\varepsilon) d^3v$ .

### 2.7.2 Inversão da função de distribuição

Como já vimos, a densidade  $\rho$  é obtida pela integral sobre todas as velocidades da função de distribuição (ou densidade no espaço de fase). Para o caso de simetria esférica e isotropia do tensor de dispersão de velocidades isto significa:

$$\rho(r) = \int f(\varepsilon) d^3v = 4\pi \int_0^{\sqrt{2\psi}} f(\varepsilon) v^2 dv, \quad (2.148)$$

onde o limite superior de integração vem do fato que uma partícula não pode ter energia cinética maior do que sua energia total e que a partícula só está ligada gravitacionalmente ao sistema se  $\varepsilon \geq 0$ . Mas, por definição,  $v^2 = 2(\psi - \varepsilon)$ . Fazendo uma mudança de variáveis em (2.148),  $v \rightarrow \varepsilon$ , obtemos:

$$\rho(r) = 4\pi \int_0^\psi f(\varepsilon) \sqrt{2(\psi - \varepsilon)} d\varepsilon. \quad (2.149)$$

Para sistemas fisicamente aceitáveis,  $\psi(r)$  é uma função monotônica,  $d\psi(r)/dr \geq 0$ . Portanto podemos sem ambiguidades escrever formalmente  $\rho(r) = \rho(\psi)$  e reescrever a equação (2.149) como:

$$\rho(\psi) = 4\pi\sqrt{2} \int_0^\psi f(\varepsilon) \sqrt{\psi - \varepsilon} d\varepsilon. \quad (2.150)$$

Derivando a equação acima em relação a  $\psi$  vem:

$$\frac{1}{\sqrt{8}\pi} \frac{d\rho(\psi)}{d\psi} = \int_0^\psi \frac{f(\varepsilon)}{\sqrt{\psi - \varepsilon}} d\varepsilon. \quad (2.151)$$

A equação (2.151) é uma integral de Abel pode ser invertida, como já fizemos com a densidade de luminosidade e o brilho superficial na deprojeção deste. A solução da inversão de Abel é:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{8}\pi^2} \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^\varepsilon \frac{d\rho(\psi)}{d\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\varepsilon - \psi}}, \quad (2.152)$$

ou, calculando a derivada em relação a  $\varepsilon$ :

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{8}\pi^2} \left[ \int_0^\varepsilon \frac{d^2\rho(\psi)}{d\psi^2} \frac{d\psi}{\sqrt{\varepsilon-\psi}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \frac{d\rho(\psi)}{d\psi} \right)_{\psi=0} \right]. \quad (2.153)$$

As duas fórmulas acima nos permitem obter a função de distribuição de um sistema esférico e isotrópico cuja densidade é conhecida. Estas equações foram obtidas e aplicadas em astrofísica pela primeira vez por Eddington em 1916 e, por isto, são chamadas *fórmulas de Eddington*.

Devemos notar que, na fórmula de Eddington, nada nos garante que  $f \geq 0$  para um par densidade–potencial dado. Após determinarmos  $f$  desta maneira é necessário certificar-mos que a função de distribuição é realmente sempre positiva.

### 2.7.3 Modelos esféricos e isotrópicos

Discutiremos agora alguns modelos esféricos e isotrópicos aplicados a sistemas auto-gravitantes.

#### Politropos

Os *politropos* foram introduzidos por Emden, no final do século XIX, originalmente para descrever a estrutura radial das estrelas. Este modelo é baseado em uma forma da equação de estado que depende da densidade e da pressão:

$$P(r) = K \rho(r)^{1+1/n} \quad (2.154)$$

onde  $K$  e  $n$  são constantes e esta última é chamada *índice de politropo*.

Para compreender a necessidade de uma equação de estado, tomamos como ponto de partida a equação de equilíbrio hidrostático,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = \frac{d\psi}{dr}. \quad (2.155)$$

Substituímos agora a equação de equilíbrio hidrostático na equação de Poisson, eliminando o potencial  $\psi$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = 4\pi G\rho. \quad (2.156)$$

Finalmente, basta substituir a pressão na equação acima pela equação de estado do politropo para obtermos uma equação diferencial de segundo grau para  $\rho$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{d[K \rho(r)^{1+1/n}]}{dr} \right) = 4\pi G\rho. \quad (2.157)$$

Esta equação se simplifica com a seguinte mudança de variáveis:

$$\rho = \lambda \vartheta^n, \quad (2.158)$$

onde o significado da constante  $\lambda$  e da variável  $\vartheta$  serão identificados logo abaixo. Assim, obtemos:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\vartheta}{dr} \right) = 4\pi G \frac{\lambda^{1-1/n}}{(n+1)K} \vartheta^n. \quad (2.159)$$

A equação diferencial acima é chamada *equação de Lane–Emden*.

Voltando às equações de estado (2.154) e de equilíbrio hidrostático (2.155), temos:

$$\frac{K}{\rho} \frac{d\rho^{1+1/n}}{dr} = \frac{d\psi}{dr} \Rightarrow \rho^{1/n-1} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{n}{(1+n)K}, \quad (2.160)$$

que pode ser resolvida imediatamente resultando em:

$$\rho(\psi) = \frac{1}{[(n+1)K]^n} \psi^n. \quad (2.161)$$

Comparando as equações (2.158) e (2.161) podemos identificar  $\lambda \equiv [(n+1)K]^{-n}$  e  $\vartheta \equiv \psi$ . Podemos dizer então que um politropo obedece a relação  $\rho \propto \psi^n$ .

Uma vez que temos  $\rho$  em função do potencial, podemos utilizar a fórmula de Edington, Eq. (2.153), para obtermos a função de distribuição, resultando em:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\Gamma(n+1)}{[(n+1)K]^n \Gamma(n-\frac{1}{2})} \varepsilon^{n-3/2}. \quad (2.162)$$

Para que esta função de distribuição seja aceitável fisicamente,  $n > 1/2$ .

Resta-nos agora resolver a equação de Emden (2.159) para obtermos o potencial e a densidade em função do raio. Para  $n > 3$  os politropos têm uma solução singular (isto é, que divergem na origem) da forma:

$$\rho(r) = \kappa r^\varpi \quad ; \quad (n > 3) \quad (2.163)$$

onde as constantes  $\kappa$  e  $\varpi$  são obtidas substituindo (2.163) em (2.161) e, em seguida, substituindo o potencial na equação de Emden. Obtemos assim:

$$\kappa = \left( \frac{K}{2\pi G} \frac{(n+1)(3-n)}{1-n} \right)^{\frac{n}{n-1}} \quad ; \quad \varpi = \frac{2n}{1-n}. \quad (2.164)$$

As soluções não singulares analíticas só existem para três casos particulares:  $n = 1$ ,  $n = 5$  e  $n \rightarrow \infty$ . O primeiro caso não é de grande interesse para descrever sistemas estelares gravitacionais; o caso  $n = 5$  é mais interessante pois descreve aproximadamente o perfil de densidade de aglomerados globulares. Neste caso a solução é dada por:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left[ 1 + \left( \frac{r}{r_c} \right)^2 \right]^{5/2}}. \quad (2.165)$$

Este perfil de densidade recebe o nome de *modelo de Plummer* (quem primeiro aplicou-o para problemas astrofísicos) ou *modelo de Schuster* (quem primeiro deduziu esta solução).

O potencial gerado pelo modelo de Plummer é da forma:

$$\psi(r) = \frac{\psi_0}{\sqrt{1 + \left( \frac{r}{r_c} \right)^2}}. \quad (2.166)$$

### Esfera isotérmica

Quando tomamos o limite  $n \rightarrow \infty$ , a equação de estado do politropo se torna:

$$P(r) = K \rho(r). \quad (2.167)$$

Esta é conhecida como a equação de estado de um gás isotérmico, onde podemos identificar  $K = kT/m$  ( $k$  é a constante de Boltzmann e  $m$  a massa de uma partícula). A equação de equilíbrio hidrostático para tal gás é dada por:

$$\frac{dP(r)}{dr} = \frac{kT}{m} \frac{d\rho(r)}{dr} = -\rho(r) \frac{GM(r)}{r^2}. \quad (2.168)$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por  $r^2 m / (\rho kT)$  e derivando em relação a  $r$ , obtemos uma equação diferencial de segundo grau:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d \ln \rho(r)}{dr} \right) = -\frac{Gm}{kT} 4\pi r^2 \rho(r). \quad (2.169)$$

Vamos supor agora um sistema descrito pela seguinte função de distribuição:

$$f(\varepsilon) = \frac{\rho_*}{(2\pi\sigma_*^2)^{3/2}} e^{\varepsilon/\sigma_*^2}, \quad (2.170)$$

onde  $\sigma_*$  e  $\rho_*$  são constantes arbitrárias. A densidade que corresponde a esta função de distribuição é órbita integrando-a sobre todas as velocidades. Utilizando a simetria esférica, temos:

$$\rho = \frac{4\pi\rho_*}{(2\pi\sigma_*^2)^{3/2}} \int_0^{v_{\max}} \exp(\varepsilon/\sigma_*^2) v^2 dv \quad (2.171)$$

Realizando uma mudança de variáveis,  $\psi = \varepsilon + v^2/2$ , podemos integrar a expressão acima, obtendo a densidade em função do potencial:

$$\rho(\psi) = \frac{2\rho_*}{\sqrt{\pi}} e^{\psi/\sigma_*^2} \gamma \left( \frac{3}{2}, \frac{v_{\max}^2}{2\sigma_*^2} \right). \quad (2.172)$$

Voltando à função de distribuição, notamos que ela é válida para qualquer energia  $e$ , portanto, não há limite para o espaço de velocidades. Em outras palavras, devemos tomar o limite  $v \rightarrow \infty$  para obtermos a densidade. Pelas propriedades da função gama temos:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \gamma \left( \frac{3}{2}, \frac{v_{\max}^2}{2\sigma_*^2} \right) = \Gamma \left( \frac{3}{2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (2.173)$$

Portanto a densidade em função do potencial se resume a:

$$\rho(\psi) = \rho_* e^{\psi/\sigma_*^2}. \quad (2.174)$$

A equação de Poisson para este perfil de densidade é:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = -4\pi G \rho \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -\frac{4\pi G}{\sigma_*^2} r^2 \rho. \quad (2.175)$$

Comparando a Eq. (2.169) com a Eq. (2.175) vemos que elas são formalmente idênticas se  $\sigma_*^2 = kT/m$ . Concluímos que a estrutura de uma esfera isotérmica é idêntica

a um sistema gravitacional não colisional isotrópico (onde a função de distribuição depende apenas da energia).

Uma solução possível da equação (2.175) é dada por:

$$\rho(r) = \frac{\sigma_*^2}{2\pi G} \frac{1}{r^2} \quad (2.176)$$

Este perfil é conhecido como *esfera isotérmica singular*. Soluções não singulares, onde a densidade central é finita, existem mas não são analíticas e devem ser calculadas numericamente. O comportamento assintótico da esfera isotérmica (singular ou não) para  $r \rightarrow \infty$  é sempre  $\rho(r) \propto r^{-2}$ ; isto significa que a massa total deste modelo é infinita.

A velocidade média quadrática (igual à dispersão de velocidades) é calculada por:

$$\overline{v^2} = \frac{1}{\rho} \int_0^\infty f(\vec{r}, \vec{v}) v^2 d^3v = 3\sigma_*^2, \quad (2.177)$$

isto é, a dispersão de velocidades é constante (logo, isotérmica).

### Modelo de Michie–King

Já no começo dos anos 60 foi notado que a função de distribuição da esfera isotérmica poderia ser truncada em energia, de modo a ter um comportamento similar à esfera isotérmica na região de energias elevadas (isto é, no centro) e, ao mesmo tempo, ter uma massa finita. Michie em 1963 e King em 1966 propuseram a seguinte alteração à função de distribuição dada pela equação (2.170):

$$f(\varepsilon) = \frac{\rho_*}{(2\pi\sigma_*^2)^{3/2}} \left( e^{\varepsilon/\sigma_*^2} - 1 \right); \quad (\varepsilon \geq 0). \quad (2.178)$$

Integrando a função de distribuição sobre todo o espaço de velocidades, obtemos a densidade em função do potencial:

$$\rho(\psi) = \rho_* \left[ e^w \operatorname{erf}(\sqrt{w}) - \sqrt{\frac{4w}{\pi}} \left( 1 + \frac{2w}{3} \right) \right]; \quad w \equiv \frac{\psi}{\sigma_*^2}, \quad (2.179)$$

onde  $\operatorname{erf}(x)$  é a função erro.<sup>6</sup> Para obtermos o potencial ou a densidade em função do raio, é necessário integrarmos numericamente a equação de Poisson.

Devido à truncatura da função de distribuição, existe um raio  $r_t$  em que a densidade é nula e, a partir deste ponto, se torna negativa. Em outras palavras, este modelo só é válido para  $r \leq r_t$ . Este raio  $r_t$  é chamado raio de maré – apesar deste modelo não ter nada a ver com forças de maré, esta função de distribuição era (e ainda é) utilizada para descrever aglomerados globulares, que possuem um raio a partir do qual a densidade cai abruptamente (chamado também raio de maré devido às forças de maré exercidas pela galáxia sobre o aglomerado).

A densidade de um modelo de Michie–King pode ser ajustada (dependendo dos parâmetros  $\rho_*$  e  $\sigma_*^2$ ) pelo perfil de Hubble, Eq. (2.26).

---

<sup>6</sup> $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \gamma(\frac{1}{2}, x^2)/\sqrt{\pi}$ .

## 2.8 Distribuição diferencial de massa

Em 1982, Binney introduziu o conceito de *distribuição diferencial de massa*, – a quantidade de massa no intervalo de energia  $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$  – no estudo da estrutura de galáxias elípticas.

Para um sistema descrito por uma função de distribuição  $f(\varepsilon)$ , a distribuição diferencial de massa,  $N(\varepsilon)$ , é definida como:

$$N(\varepsilon) \equiv \frac{dM}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \int f(\varepsilon) d^3v d^3x. \quad (2.180)$$

Mas como a função de distribuição depende apenas da energia, este sistema é isotrópico e esférico. Portanto, a massa no interior do raio  $r$  é dada por:

$$M(r) = (4\pi)^2 \int_0^r \int_0^{v_{\max}} f(\varepsilon) v^2 dv r^2 dr. \quad (2.181)$$

Podemos fazer uma mudança de variáveis em (2.181) utilizando a relação  $\varepsilon = \psi - v^2/2$ . Obtemos assim:

$$M(r) = (4\pi)^2 \int_0^\psi \int_0^r f(\varepsilon) \sqrt{2(\psi - \varepsilon)} r^2 dr d\varepsilon. \quad (2.182)$$

Derivando a expressão acima em relação a  $\varepsilon$ , resulta em

$$N(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} (4\pi)^2 \int_0^\psi \int_0^r f(\varepsilon) \sqrt{2(\psi - \varepsilon)} r^2 dr d\varepsilon = (4\pi)^2 f(\varepsilon) \int_0^r \sqrt{2(\psi - \varepsilon)} r^2 dr, \quad (2.183)$$

onde o limite superior de integração é função da energia pois  $r$  corresponde à distância radial máxima que uma partícula de energia  $\varepsilon$  pode atingir. Ou seja,  $r$  é solução da equação  $\psi(r) = \varepsilon$ .

Podemos escrever  $N(\varepsilon)$  de forma mais compacta da seguinte maneira:

$$N(\varepsilon) = f(\varepsilon) g(\varepsilon), \quad (2.184)$$

onde definimos uma função densidade de estados (seguindo a nomenclatura de Binney e Tremaine):

$$g(\varepsilon) \equiv (4\pi)^2 \int_0^{r(\varepsilon)} \sqrt{2(\psi - \varepsilon)} r^2 dr, \quad (2.185)$$

e explicitamos a dependência de  $r$  na energia.

Vamos supor agora que a função de distribuição que descreve o sistema dependa de duas integrais isolantes, a energia e o módulo do momento angular. Isto corresponde a um modelo esférico mas com tensor de dispersão de velocidades anisotrópico. Neste caso, é conveniente escrevermos cada componente da velocidade em coordenadas esféricas:

$$v_r = v \cos \eta \quad ; \quad v_\theta = v \sin \eta \cos \omega \quad ; \quad v_\varphi = v \sin \eta \sin \omega, \quad (2.186)$$

onde as coordenadas no espaço de velocidades  $(v, \eta, \omega)$  são equivalentes às coordenadas polares usuais  $(r, \theta, \varphi)$ .

Neste sistema de coordenadas, o módulo do momento angular é dado por  $L = |\vec{r} \times \vec{v}| = |r v \sin \eta|$ . Portanto, a massa é dada por:

$$M = 4\pi \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_0^{v_{\max}} \int_0^\pi f(\varepsilon, L) 2\pi \sin \eta d\eta v^2 dv r^2 dr, \quad (2.187)$$

o fator  $2\pi$  vem da integral sobre  $\omega$ , uma vez que nem  $\varepsilon$  nem  $L$  dependem desta variável. Notamos também que a integral em  $r$  se faz entre  $r_{\min}$  e  $r_{\max}$ ; a distância mínima que a partícula pode atingir é decorrência do momento angular não nulo (a chamada barreira centrífuga).

Podemos fazer uma mudança de variáveis,  $\eta \rightarrow J$  utilizando a relação  $\text{sen } \eta \, d\eta = L \, dL / (r^2 v \, v_r)$ . A equação (2.187) se torna:

$$M = 8\pi^2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_0^{v_{\max}} \int_0^L f(\varepsilon, L) 2L \, dL \frac{v}{v_r} \, dv \, dr, \quad (2.188)$$

onde o fator '2' no integrando vem da igualdade  $\int_0^\pi |\text{sen } \eta| \, d\eta = 2 \int_0^{\pi/2} \text{sen } \eta \, d\eta$ . Novamente, podemos utilizar a definição da energia de ligação para fazermos a mudança de variáveis  $r \rightarrow \varepsilon$ . Mudando a ordem de integração, obtemos desta forma:

$$M = 16\pi^2 \int_0^L \int_0^\psi \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f(\varepsilon, L) \frac{1}{v_r} \, dr \, d\varepsilon \, L \, dL. \quad (2.189)$$

Quando a função de distribuição depende da energia e do módulo do momento angular, a distribuição diferencial de massa pode ser definida como:

$$N(\varepsilon, L) \equiv \frac{d^2 M}{d\varepsilon \, dL}. \quad (2.190)$$

Assim, derivando a equação (2.189) obtemos:

$$N(\varepsilon, L) = 16\pi^2 f(\varepsilon, L) L \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{v_r}. \quad (2.191)$$

Mas a componente radial da velocidade é, por definição,  $v_r = dr/dt$ . Isto pode ser escrito da seguinte forma:

$$\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{v_r} = \int_0^{t_*} dt = t_*. \quad (2.192)$$

Como  $r_{\min}$  e  $r_{\max}$  correspondem respectivamente ao pericentro e apocentro da trajetória de uma partícula de energia  $\varepsilon$  e momento angular  $L$ , então  $t_*$  é a metade do período radial desta partícula ( $t_*$  é o tempo necessário para a partícula ir de  $r_{\min}$  a  $r_{\max}$ ).

Assim, podemos escrever a distribuição diferencial de massa na forma:

$$N(\varepsilon, L) = 8\pi^2 f(\varepsilon, L) L T_{\text{rad}}(\varepsilon, L), \quad (2.193)$$

onde  $T_{\text{rad}}$  é o período de oscilação radial da partícula.

## 3.1 Introdução

Os objetos astrofísicos como aglomerados globulares, galáxias elípticas e espirais e mesmo as regiões centrais de aglomerados de galáxias aparentam estarem em equilíbrio. Contudo, como vimos, o processo de relaxação de dois corpos (análogo ao processo de relaxação por colisão de um gás ordinário) deve ser descartado pois sua escala de tempo é superior à idade do Universo – no caso das galáxias elípticas, o tempo de relaxação à dois corpos é cerca de  $10^6$  vezes superior ao tempo de Hubble.

Para compreendermos porquê as galáxias e aglomerados globulares são objetos tão regulares (não consideramos aqui objetos em interação) apesar de terem origens a princípio arbitrárias, é necessário respondermos a três questões:

1. o que garante a existência de um estado de equilíbrio acessível (no sentido termodinâmico) a um sistema?
2. Este estado é único?
3. Quais são as propriedades dinâmicas necessárias para que um sistema qualquer possa evoluir de um estado inicial arbitrário a um estado de equilíbrio estacionário?

A primeira questão pode ser em parte esclarecida por um dos postulados da termodinâmica, o *princípio do máximo de entropia*: “Existe uma correspondência unívoca entre os estados termodinâmicos em equilíbrio e os estados de entropia máxima”. Com este postulado, a questão agora é saber como e quais sistemas podem atingir um estado de entropia máxima.

Um sistema dinâmico (gravitacional ou não) pode ser representado por uma função de distribuição (ou densidade),  $f$ , no espaço de fase. No caso não colisional, podemos utilizar o espaço- $\mu$  de Boltzmann de  $2s$  dimensões (onde  $s$  é o número de coordenadas no espaço ordinário). A função  $f$  evolui no tempo segundo uma transformação dado por um operador  $\mathcal{Q}$ , tal que  $\mathcal{Q}(x_t, v_t) = (x_{t+\delta t}, v_{t+\delta t})$ , isto é, o operador  $\mathcal{Q}$  é uma função das coordenadas no espaço de fase e aplicados às coordenadas no instante  $t$  resulta nas coordenadas no instante  $t + \delta t$ .

Um exemplo de uma transformação deste tipo são as *equações de Hamilton*:

$$\mathcal{Q}(q_t, p_t) = \begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}, \quad (3.1)$$

cf. eq. (2.78) na seção 2.4.2. Aqui,  $q_i$  e  $p_i$  são as coordenadas e momentos conjugados da partícula  $i$  que compõem o sistema de hamiltoniana  $H$ .

A evolução de um sistema descrito pela função  $f$  também pode ser representado por um operador linear que atua sobre  $f$  (e não sobre as coordenadas). Se a evolução do sistema é determinada por leis determinísticas (ao contrário de leis estocásticas), então a evolução de  $f$  é descrita por um *operador de Frobenius-Perron*<sup>1</sup>,  $f_t = \mathcal{P}^t f_{t_0}$ . Quando  $f_t = f_{t_0} = f_*$ , não há mais evolução e dizemos que  $f_*$  é uma densidade estacionária. Obviamente,  $f_* = \mathcal{P}^t f_*$ .

### 3.2 Ergodicidade e mistura no espaço de fase

Dizemos que um sistema é ergódico quando as partículas de um sistema percorrem todo o espaço de fase após um intervalo de tempo suficientemente longo. A ergodicidade de um sistema é condição necessária e suficiente para garantir a existência de um estado de equilíbrio único, caracterizado por uma *entropia* máxima.

Uma transformação  $\mathcal{Q}$  é ergódica se e somente se o operador de Frobenius-Perron  $\mathcal{P}^t$  associado a esta transformação obedece o limite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle \mathcal{P}^t f \rangle dt = \langle f_* \rangle, \quad (3.2)$$

onde  $\langle w \rangle$  representa o valor médio de  $w$ .

Como exemplo, vamos supor um sistema dinâmico que evolui segundo a seguinte transformação:

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} q(t + \delta t) &= q(t) + \alpha \delta t \\ p(t + \delta t) &= p(t) + \beta \delta t \end{cases} \quad (\alpha \neq \beta), \quad (3.3)$$

onde o espaço de fase tem apenas duas dimensões e está limitado entre  $(0, 1)$ , isto é, com condições de contorno periódicas (uma partícula cuja coordenada ou momento ultrapassa 1 volta a zero). Se  $\alpha$  ou  $\beta$  ou ambos forem números irracionais e  $\alpha \neq \beta$ , então a transformação (3.3) é ergódica. Por outro lado, se  $\alpha$  e  $\beta$  são números racionais, esta transformação não é ergódica: o espaço de fase não será inteiramente percorrido.

Ainda que a ergodicidade seja necessária e suficiente para garantir a existência de um estado único de equilíbrio, isto não garante a evolução de forma a que o sistema atinja este estado de equilíbrio.

Existe uma outra classe de transformações que operam nos sistemas dinâmicos que “misturam” os pontos no espaço de fase. O operador de Frobenius-Perron associado a uma transformação de *mistura no espaço de fase* obedece ao seguinte limite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \mathcal{P}^t f \rangle = \langle f_* \rangle, \quad (3.4)$$

onde  $f_*$  é a distribuição estacionária no espaço de fase. Um exemplo deste tipo de transformação de mistura no espaço de fase é dado por:

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} q(t + \delta t) &= q(t) + p(t) \\ p(t + \delta t) &= q(t) + \beta p(t) \end{cases} \quad (\beta > 1). \quad (3.5)$$

A figura 3.2 mostra um exemplo de uma transformação de mistura. Além dos pontos percorrerem todo o espaço de fase, uma estrutura filamentar se forma.

<sup>1</sup>Para uma descrição mais detalhada, veja M.C. Mackey (1992), ‘Time’s arrow: The origins of thermodynamic behavior’. Os exemplos citados nesta seção são baseados neste livro.

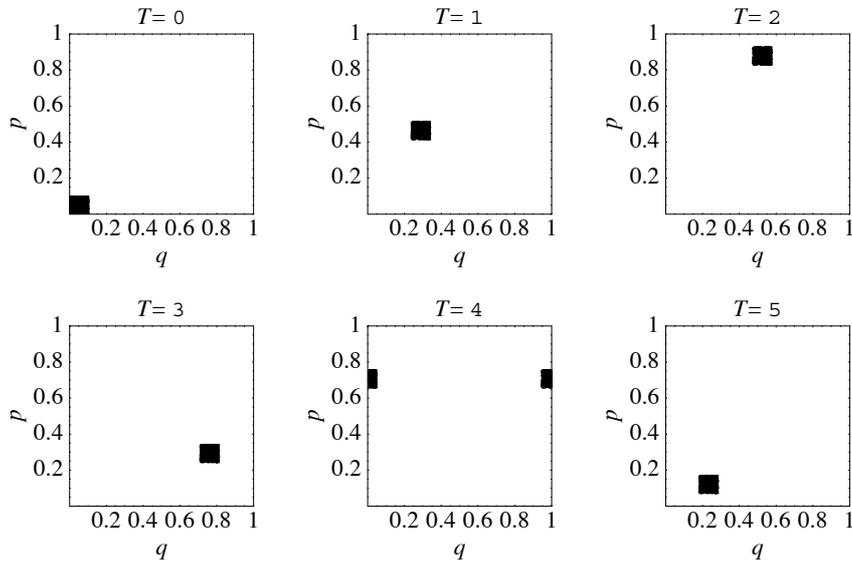


Figura 3.1: Evolução no espaço de fase  $(q, p)$  de um conjunto de 1000 pontos inicialmente distribuídos aleatoriamente em uma pequena região do espaço de fase. A evolução é dada pela transformação ergódica (3.3). Neste exemplo,  $\alpha = \sqrt{5}$  e  $\beta = \sqrt{2}$ . Os pontos percorrem todo o espaço de fase, mas permanecem sempre agrupados.

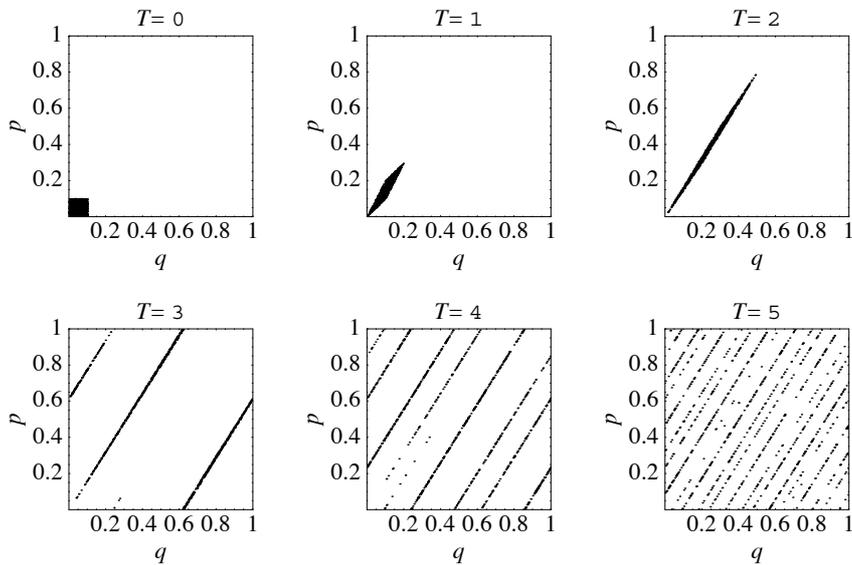


Figura 3.2: Evolução no espaço de fase  $(q, p)$  de um conjunto de 1000 pontos inicialmente distribuídos aleatoriamente em uma pequena região do espaço de fase. A evolução é dada pela transformação de mistura no espaço de fase (3.5). Neste exemplo,  $\beta = 2$ . Note a estrutura filamentar que aparece a medida que os pontos percorrem todo o espaço de fase.

Um outro exemplo de sistema dinâmico simples, que obedece a uma transformação de mistura no espaço de fase, é dado por um gás onde não há interação mútua entre as partículas. Neste caso, a transformação é dada por:

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} q(t + \delta t) &= q(t) + (p(t)/m) t \\ p(t + \delta t) &= p(t) \end{cases} \quad (\beta > 1). \quad (3.6)$$

Ainda que a mistura no espaço de fase seja mais poderosa que a ergodicidade, a mistura não assegura a convergência a um estado de entropia máxima. Na realidade, apenas as *transformações irreversíveis* garantem que um sistema atinja um estado de entropia máxima. Tanto as transformações ergódicas e de mistura são reversíveis.

Concluimos desta forma que somente as transformações irreversíveis levam um sistema qualquer a uma situação de equilíbrio estacionário associado à máxima entropia, independentemente das condições iniciais. Contudo, os sistemas físicos evoluem segundo leis dinâmicas que são reversíveis como, por exemplo, as equações de Hamilton [eq. (2.78)]. Estas premissas nos conduzem a uma contradição: nenhum sistema dinâmico regido por uma dinâmica reversível pode ter sua entropia alterada entretanto, observamos exatamente este tipo de evolução.

Uma solução a este dilema está ligada ao fato de que ignoramos ou melhor somos incapazes de descrever com uma precisão infinita a função de distribuição  $f$  de um sistema dinâmico dado. Por exemplo, em um gás ordinário, as colisões entre as moléculas são imprevisíveis e, conseqüentemente, é impossível obtermos exatamente a função de distribuição.

### 3.2.1 Função-H de Boltzmann

Motivados pela discussão anterior, vamos definir o conceito de *função de distribuição de grão fino* (*fine-grained*),  $f$ ; esta função é relativa a uma descrição microscópica e exata do sistema. Definimos também a *função de distribuição de grão grosso* (*coarse-grained*),  $F$ , relativa a uma descrição macroscópica, onde o conhecimento do sistema é incompleto. Se  $f$  é uma função contínua, definimos  $F$  como:

$$F(\vec{x}, \vec{v}) = \frac{1}{\delta\mu} \int_{\delta\mu} f(\vec{x}', \vec{v}') d^3x' d^3v', \quad (3.7)$$

onde  $\delta\mu$  é uma região (ou macro-célula) do espaço de fase centrado no ponto  $(\vec{x}, \vec{v})$ . Para o caso discreto, um sistema constituído por partículas como uma galáxia,  $F$  é definido como:

$$F(\vec{x}, \vec{v}) = \frac{1}{\delta\mu} m_a n_a, \quad (3.8)$$

onde  $m_a$  é a massa média das partículas na macro-célula de volume  $\delta\mu$  e  $n_a$  é o número de partículas nesta macro-célula.

Existe uma propriedade importante da função de distribuição de grão grosso demonstrada originalmente por Tolman em 1938. Tomemos a *função-H* de Boltzmann definida como:

$$\mathcal{H}(f) = - \int \mathcal{C}(f) d^3x d^3v \quad (3.9)$$

onde  $\mathcal{C}(f)$  é uma função convexa qualquer de  $f$ . Se, por exemplo,  $\mathcal{C}(f) = f \ln f$ , então  $\mathcal{H} = S$ , a entropia de Boltzmann-Gibbs. Supomos agora que em um instante  $t_i$  as funções

de distribuição de grão grosso e grão fino são iguais, isto é,  $f_{t_i} = F_{t_i}$ . Logo, temos a igualdade:

$$\mathcal{H}(f_{t_i}) \equiv \left[ - \int \mathcal{C}(f) d^3x d^3v \right]_{t_i} = \left[ - \int \mathcal{C}(F) d^3x d^3v \right]_{t_i} \equiv \mathcal{H}(F_{t_i}). \quad (3.10)$$

Como vimos, a entropia de Boltzmann-Gibbs não se altera em um sistema regido por leis dinâmicas reversíveis quando utilizamos a descrição microscópica. Isto pode ser generalizado para qualquer função-H de Boltzmann. Assim, temos a igualdade:

$$\mathcal{H}(f_{t_i}) \equiv \left[ - \int \mathcal{C}(f) d^3x d^3v \right]_{t_i} = \left[ - \int \mathcal{C}(f) d^3x d^3v \right]_{t_f} \equiv \mathcal{H}(f_{t_f}), \quad (3.11)$$

onde  $t_f > t_i$ . Por definição,  $F$  é o valor médio de  $f$  em uma região  $\delta\mu$  do espaço de fase. Mas, para qualquer função convexa, vale a desigualdade  $\overline{\mathcal{C}(f)} \geq \mathcal{C}(\overline{f})$ . Portanto, temos a desigualdade:

$$\mathcal{H}(F_{t_f}) \equiv \left[ - \int \mathcal{C}(F) d^3x d^3v \right]_{t_f} \geq \left[ - \int \mathcal{C}(f) d^3x d^3v \right]_{t_f} \equiv \mathcal{H}(f_{t_f}). \quad (3.12)$$

Portanto, comparando as eqs. (3.10), (3.11) e (3.12), concluímos que:

$$\mathcal{H}(F_{t_f}) \geq \mathcal{H}(F_{t_i}), \quad (3.13)$$

isto é, a função-H de Boltzmann medida com a função de distribuição de grão grosso aumenta com o tempo. Se  $\mathcal{C}(F) = F \ln F$  então podemos afirmar que a entropia medida com a função de distribuição de grão grosso aumenta com o tempo.

A condição necessária para esta demonstração é que  $F = f$  em algum momento. Notemos que se determinamos a função-H em três instantes distintos,  $\mathcal{H}(F_1)$ ,  $\mathcal{H}(F_2)$  e  $\mathcal{H}(F_3)$  onde  $t_1 < t_2 < t_3$ , não podemos provar que  $\mathcal{H}(F_2)$  seja maior ou menor que  $\mathcal{H}(F_3)$ , mesmo se soubermos que  $\mathcal{H}(F_2)$  e  $\mathcal{H}(F_3)$  são superiores a  $\mathcal{H}(F_1)$ .

O fato da função-H (ou entropia) medida pela função de distribuição de grão grosso aumentar com o tempo, pode ser interpretado pela perda de informação que ocorre quando passamos de  $f$  para  $F$ .

### 3.2.2 Teorema da mistura

Dizemos que uma função de distribuição  $F$  é mais misturada que uma função  $F'$  si  $\mathcal{H}(F) > \mathcal{H}(F')$ , onde  $\mathcal{H}$  é uma função-H de Boltzmann. Se a função-H for a entropia, então podemos dizer que quanto mais misturada for a função de distribuição maior será sua entropia.

Existe um critério que permite comparar funções de distribuição e determinar qual delas é mais misturada sem o esforço de calcular as respectivas funções-H. Para isto, introduzimos a função  $M(V)$ , a massa do sistema no interior do volume  $V$  do espaço de fase (espaço- $\mu$  de 6 dimensões):

$$M(V) = \int_V F(V') dV'. \quad (3.14)$$

A função  $M(V)$  também pode ser escrita em forma paramétrica:

$$\begin{cases} M(\zeta) &= \int F(\vec{x}, \vec{v}) \Theta[F(\vec{x}, \vec{v}) - \zeta] d^3x d^3v \\ V(\zeta) &= \int \Theta[F(\vec{x}, \vec{v}) - \zeta] d^3x d^3v \end{cases} \quad \text{onde} \quad \Theta(x) = \begin{cases} 1; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases} . \quad (3.15)$$

Vamos definir uma função convexa da seguinte forma:

$$\mathcal{C}(F) = \begin{cases} 0; & F \leq \xi, \\ F - \xi; & F > \xi, \end{cases} \quad (3.16)$$

onde  $\xi = F(V_0)$  é o valor da função de distribuição para o valor  $V_0$  do volume do espaço de fase. Neste caso, a função-H é dada por:

$$\mathcal{H}(F) = - \int_0^{V_0} \mathcal{C}(F) dV = - \int_0^{V_0} [F(V) - \xi] = -M(V_0) + \xi V_0. \quad (3.17)$$

Obviamente, para uma outra função  $F'$  também temos a função-H dada por:

$$\mathcal{H}(F') = - \int_0^{V_0} \mathcal{C}(F') dV = - \int_0^{V_0} [F'(V) - \xi] = -M'(V_0) + \xi V_0. \quad (3.18)$$

Se  $F$  é mais misturada do que  $F'$  então, por definição,  $\mathcal{H}(F) - \mathcal{H}(F') > 0$ . Utilizando as equações (3.17) e (3.18) isto implica em:

$$\mathcal{H}(F) - \mathcal{H}(F') = -M(V_0) + M'(V_0) > 0. \quad (3.19)$$

O *teorema da mistura* pode então ser enunciado da seguinte forma:

A função de distribuição  $F$  é mais misturada que a função  $F'$  se e somente se  $M(V) \leq M'(V)$  em todo o espaço de fase.

(uma demonstração mais rigorosa pode ser encontrada em Tremaine, Hénon & Lynden-Bell, 1986).

Uma consequência importante deste teorema é obtida tomando o limite  $V \rightarrow 0$ . Neste caso, a massa no interior de  $V$  é dada aproximadamente por  $M(V) \approx F_{\max} V$ , onde  $F_{\max}$  é o valor central e máximo da função de distribuição. Aplicando o teorema da mistura nos leva a concluir que se  $F$  é mais misturada do que  $F'$  então  $F_{\max} < F'_{\max}$ . Em outras palavras, quanto mais misturado o sistema (maior entropia), menor é a densidade máxima (para sistemas de mesma massa).

### 3.2.3 Relaxação e mistura

Baseado na regularidade observada das propriedades morfológicas, presumimos que sistemas estelares como galáxias, aglomerados globulares e aglomerados de galáxias estejam em equilíbrio quase estacionário. Mas como vimos, o processo de relaxação de dois corpos não pode ser responsável por este equilíbrio pois sua escala de tempo é maior que a idade do Universo.

Uma outra forma de relaxação foi proposta nos anos 60, inicialmente por Hénon, King e Lecar, e posteriormente, de forma mais rigorosa, por Lynden-Bell. Este processo

de relaxação ocorre quando o campo gravitacional médio do sistema não é estacionário. Quando um sistema está em equilíbrio estacionário, a energia de uma partícula se conserva (e é uma integral isolante de movimento); quando uma partícula se move em um potencial que varia com o tempo a energia deixa de se conservar:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} + \frac{d\phi}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t}, \quad (3.20)$$

onde lembramos que  $\nabla\phi = -d\vec{v}/dt$ .

Para sistemas astronômicos, as situações onde o potencial pode variar de forma apreciável são em colapsos (que podem ser o mecanismo de formação de galáxias e aglomerados globulares) ou fusões de galáxias (que podem transformar duas galáxias de massas semelhantes em elípticas).

A escala de tempo deste processo de relaxação pode ser definido pela razão entre a taxa de variação do potencial e o próprio potencial. De fato, Lynden-Bell definiu o tempo de relaxação como:

$$t_{\text{rv}} = \left\langle \frac{(dE/dt)^2}{E^2} \right\rangle^{-1/2} = \left\langle \frac{(d\phi/dt)^2}{E^2} \right\rangle^{-1/2}. \quad (3.21)$$

Como, para uma estrela,  $v^2/2 \sim \phi/4$  então, pelo teorema do virial,  $E \sim -3\phi/4$  e podemos escrever o tempo de relaxação como:

$$t_{\text{rv}} = \frac{3}{4} \left\langle \frac{(\partial\phi/\partial t)^2}{\phi^2} \right\rangle^{-1/2}. \quad (3.22)$$

Para estimar este tempo de relaxação, nós podemos tomar:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \frac{dr}{dt} \approx -\frac{GM}{R} v \quad \text{e} \quad \phi \approx -\frac{GM}{R^2}. \quad (3.23)$$

Tomando os valores acima obtemos:

$$\frac{(\partial\phi/\partial t)}{\phi} \sim \frac{v}{R} = t_{\text{cr}} \Rightarrow t_{\text{rv}} \sim t_{\text{din}}, \quad (3.24)$$

ou seja esta relaxação tem uma escala de tempo comparável com a escala de tempo dinâmico do sistema. Isto significa que este processo de relaxação é muito mais rápido do que a relaxação de dois corpos. Por esta razão, chamamos este processo de *relaxação violenta*.

Se, por exemplo, considerarmos uma esfera de estrelas que colapsa sob ação da (auto) gravidade, o tempo de relaxação violenta será:

$$t_{\text{rv}} \sim \sqrt{\frac{1}{G\bar{\rho}}}, \quad (3.25)$$

onde  $\bar{\rho}$  é a densidade média do sistema [cf. a equação (2.51)].

Apesar da dedução um tanto aproximada de  $t_{\text{rv}}$ , verifica-se experimentalmente (isto é, através de simulações numéricas) que as fórmulas (3.24) ou (3.25) são justas.

### 3.3 Catástrofe gravo-térmica

#### 3.3.1 Entropia máxima

Considerando um sistema auto-gravitacional, como uma galáxia em formação, podemos nos perguntar qual será seu aspecto após a fase de relaxação violenta. Podemos utilizar conceitos da termodinâmica e mecânica estatística para tentar responder esta questão. Já vimos que um tal sistema pode ser representado por uma função de distribuição no espaço- $\mu$ , onde  $f \geq 0$  e  $\int_{\mu} f d^3x d^3v = M$ . A *entropia* de Boltzmann-Gibbs deste sistema é definido como:

$$S = \int_{\mu} f \ln f d^3x d^3v, \quad (3.26)$$

onde a integral é feita em todo o espaço de fase. Se para um sistema dado existe somente um estado de equilíbrio estacionário, independente das condições iniciais, este estado corresponde a um equilíbrio global e está associado a um máximo global da entropia (segundo postulado da termodinâmica, na sua versão mais forte). Por outro lado, se existem vários estados de equilíbrio termodinâmico, então cada um destes estados está associado a um máximo local da entropia e o equilíbrio será meta-estável ou, dependendo da escala de tempo de evolução do sistema, o equilíbrio será quase-estacionário (segundo postulado da termodinâmica, na sua versão fraca).

Voltando à nossa questão inicial, devemos procurar a função de distribuição  $f$  que maximiza a entropia de um sistema de massa  $M$  e energia  $E$ . Isto foi feito em 1967 e 1968 por Lynden-Bell e Wood para determinar o estado de equilíbrio de um sistema auto-gravitacional. Para tanto foi utilizada a técnica dos multiplicadores de Lagrange, onde maximizamos a entropia com os vínculos de massa e energia constantes. Podemos escrever a variação total da entropia como:

$$dS = \delta S - \beta \delta E - \alpha \delta M \quad (3.27)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são os multiplicadores de Lagrange. Utilizando a definição dada pela eq. (3.26), o primeiro termo da equação (3.27) resulta em:

$$\delta S = -\delta \int_{\mu} f \ln f d^3x d^3v = -\int_{\mu} (\delta f \ln f + f \delta \ln f) d^3x d^3v = -\int_{\mu} \delta f (\ln f + 1) d^3x d^3v, \quad (3.28)$$

onde foi utilizada a relação  $\delta \ln f = \delta f / f$ .

A energia,  $E = T + U$ , pode ser expressa como:

$$E = \int_{\mu} \frac{v^2}{2} f d^3x d^3v - \frac{G}{2} \int_{\mu} \int_{\mu} \frac{f f'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x d^3x' d^3v d^3v', \quad (3.29)$$

e a variação da energia é dada por:

$$\begin{aligned} \delta E &= \int_{\mu} \frac{v^2}{2} \delta f d^3x d^3v - \frac{G}{2} \int_{\mu} \frac{f \delta f + \delta f f'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x d^3x' d^3v d^3v' \\ &= \int_{\mu} \delta f \left[ \frac{v^2}{2} - G \int_{\mu} \frac{f}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' d^3v' \right] d^3x d^3v \\ &= \int_{\mu} \delta f \left[ \frac{v^2}{2} + \phi(\vec{r}) \right] d^3x d^3v. \end{aligned} \quad (3.30)$$

O último termo é a variação da massa, dado simplesmente por:

$$\delta M = \int_{\mu} \delta f d^3x d^3v. \quad (3.31)$$

Substituindo as variações dadas pelas eqs. (3.28), (3.30) e (3.31) na variação total da entropia, eq. (3.27), obtemos:

$$dS = \int_{\mu} \delta f (-[\ln f + 1] + \beta\varepsilon - \alpha) d^3x d^3v, \quad (3.32)$$

onde utilizamos a eq. (2.144) para a energia. A condição para equilíbrio estacionário é  $dS = 0$ , a entropia é máxima. Pela equação (3.32) vemos que para satisfazer esta condição, basta que o termo entre parênteses se anule. Logo, em equilíbrio, a função de distribuição deve verificar a equação:

$$[\ln f + 1] - \beta\varepsilon + \alpha = 0, \quad (3.33)$$

e, portanto obtemos finalmente:

$$f(\varepsilon) = f_* e^{\beta\varepsilon} \quad ; \quad f_* = e^{-\alpha-1}. \quad (3.34)$$

A função de distribuição acima corresponde a uma esfera isotérmica (cf. seção 2.7.3). Comparando a equação (3.34) acima com a equação (2.170), podemos identificar  $\beta = 1/\sigma_*^2$  e  $e^{-\alpha-1} = \rho_*/(2\pi\sigma_*^2)^{3/2}$ .

Resumindo, maximizando a entropia com os vínculos de massa e energia constantes resulta na função de distribuição de uma esfera isotérmica. Infelizmente, esta solução não é aceitável! A esfera isotérmica, como já vimos, tem massa infinita o que, obviamente, está em contradição com o vínculo de massa constante. Além disto, o perfil  $\rho(r) \propto r^{-2}$  da esfera isotérmica não é observado nos sistemas estelares astronômicos.

Este resultado negativo pode ser compreendido por uma experiência hipotética proposta por J. Binney. Vamos supor uma sistema estelar esférico de massa  $M$  e energia total  $E$  e vamos dividi-lo em duas partes arbitrárias, um halo de massa  $M_h$  e energia  $E_h$  e uma região central de massa  $M_c$  e energia  $E_c$ , como ilustrado na figura 3.3.

Supomos ainda que a massa da região central seja muito maior que a massa do halo,  $M_h \ll M_c$ . Como a região central tem praticamente toda a massa do sistema, isto nos permite tratá-la como um objeto isolado e, aplicando o teorema do virial, obtemos:

$$M_c \sigma_c^2 - \frac{G M_c^2}{r_c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_c^2 = \frac{G M_c}{r_c} = -\frac{E_c}{M_c}, \quad (3.35)$$

onde  $\sigma_c$  e  $r_c$  são, respectivamente, a dispersão de velocidade e o raio característico da região central. Podemos também estimar a densidade característica no espaço de fase na região central,  $f_c$ :

$$f_c = \frac{M_c}{r_c^3 \sigma_c^3} = \frac{|E|^{3/2}}{G^3 M_c^{7/2}}. \quad (3.36)$$

Por hipótese, a massa do halo é muito menor do que a massa da região central e, portanto, as partículas do halo estão sujeitas à ação do campo gravitacional da região central. Aplicando o teorema do virial no halo resulta em:

$$M_h \sigma_h^2 = G \frac{M_h M_c}{r_h} = -E_h, \quad (3.37)$$

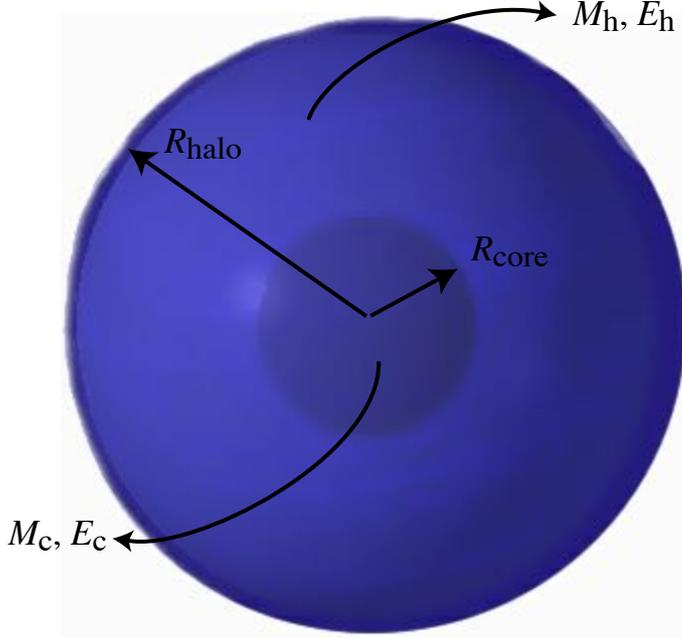


Figura 3.3: Sistema estelar esférico dividido arbitrariamente em um halo e uma região central.

onde  $\sigma_h$  e  $r_h$  são a dispersão de velocidades e o raio característico do halo. A densidade típica no espaço de fase do halo será:

$$f_h = \frac{M_h}{r_h^3 \sigma_h^3} = \frac{|E|^{3/2}}{G^3 M_c^3 M_h^{1/2}}. \quad (3.38)$$

Para este sistema, a entropia de Boltzmann-Gibbs é expressa como a soma da entropia da região central e do halo:

$$S \approx -M_c \ln f_c - M_h \ln f_h. \quad (3.39)$$

Substituindo os valores de  $f_c$  e  $f_h$  obtidos nas eqs. (3.36) e (3.38) na expressão acima resulta em:

$$S \approx -\frac{3}{2} M_c \ln |E - E_h| - \frac{3}{2} M_h \ln |E_h| + \text{constante}, \quad (3.40)$$

onde  $E = E_c + E_h$ .

Imaginemos agora que, mantendo a mesma massa, a região central encolhe por um fator  $\delta r$ , isto é  $r_c \rightarrow (r_c - \delta r)$ . Isto provoca uma alteração na energia da região central de um fator:

$$\delta E \approx -\delta r \frac{G M_c^2}{r_c^2}. \quad (3.41)$$

Por conservação de energia, o halo adquire a energia perdida pela região central e, conseqüentemente, se expande. Se a região central continua a se contrair, o halo irá expandir de modo que  $r_h \rightarrow \infty$  e sua energia aumenta de modo que  $E_h \rightarrow 0$  (lembrando que, como o sistema está ligado gravitacionalmente, a energia é negativa). Ora, pela equação (3.40), fica claro que se  $E_h \rightarrow 0$  então  $S \rightarrow \infty$ .

Concluimos que a entropia de um sistema estelar auto-gravitacional pode aumentar indefinidamente, ou seja, não existe um máximo global da entropia.

### 3.3.2 Instabilidade Gravo-térmica

O fato da entropia de um sistema gravitacional não tem um máximo global nos faz suspeitar da eventual existência de uma instabilidade ligada ao aumento indefinido de uma concentração central de massa. De fato, podemos mostrar como uma tal instabilidade se produz. Vamos supor novamente um sistema gravitacional em equilíbrio que satisfaz o teorema do virial. Neste caso temos  $E = -K$  onde  $K$  é a energia cinética total. Podemos definir uma temperatura  $T$  para este sistema de maneira análoga a um gás ideal:

$$T = \frac{1}{3} \frac{m \sigma^2}{k} \quad (3.42)$$

onde  $m$  é a massa de uma partícula e  $k$  é a constante de Boltzmann. A dispersão de velocidades,  $\sigma$ , não é necessariamente a mesma em todo o sistema; pode ser mais conveniente definir uma temperatura média,  $\bar{T}$ , dada por:

$$\bar{T} = \frac{\int_V T(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV}{\int_V \rho(\vec{r}) dV} = \frac{1}{3 N k} \int_V \rho(\vec{r}) \sigma^2(\vec{r}) dV, \quad (3.43)$$

onde  $N$  é o número de partículas do sistema de volume  $V$ . Assim, a energia cinética total pode ser expressa como:

$$K = \frac{3}{2} N k \bar{T}, \quad (3.44)$$

e, com o teorema do virial, obtemos imediatamente a energia do sistema:

$$E = -\frac{3}{2} N k \bar{T}. \quad (3.45)$$

Finalmente, tendo uma relação ligando a energia do sistema à sua temperatura, podemos calcular a *capacidade térmica* do sistema:

$$C \equiv \frac{\partial E}{\partial \bar{T}} = -\frac{3}{2} N k < 0. \quad (3.46)$$

Ao contrário de um gás ordinário, um gás de estrelas auto-gravitacional tem uma capacidade térmica negativa. Se, por exemplo, há um gradiente de temperatura no sistema, então as regiões mais frias perdem calor (por expansão, como vimos na seção anterior), enquanto as regiões mais quentes se tornam ainda mais quentes (por contração). O gradiente de temperatura se acentua e o processo continua indefinidamente. Este tipo de instabilidade é chamada *instabilidade gravo-térmica*, levando à *catástrofe gravo-térmica*.

# Bibliografia

- [1] Binney J., Tremaine R., 1987, 'Galactic Dynamics', Princeton University Press
- [2] Combes F., Boisé P., Mazure A., Blanchard A., 1991, 'Galaxies et Cosmologie', InterEditions/Editions du CNRS [em inglês: 1995, 'Galaxies and Cosmology', Springer Verlag]
- [3] Mihalas D., Binney J., 1981, 'Galactic astronomy: structure and kinematics', 2<sup>a</sup> edição
- [4] Saslaw W.C., 1985, 'Gravitational Physics of Stellar and Galactic Systems', Cambridge University Press

# Índice

- aproximação contínua, 6  
aproximação impulsiva, 5
- brilho superficial, 10
- capacidade térmica, 51  
catástrofe gravo-térmica, 51  
coarse-grained, 44  
colchetes de Poisson, 21  
collisionless system, 6  
constante de movimento, 30
- densidade de luminosidade, 10  
densidade do espaço de fase, 18  
densidade superficial, 16  
densidade-potencial, 13  
distribuição diferencial de massa, 39
- ensemble, 18  
entropia, 42, 48  
equação de Boltzmann não-colisional, 20  
equação de continuidade, 19  
equação de Lane–Emden, 36  
equação de Laplace, 13  
equação de Liouville, 19  
equação de Poisson, 12  
equação de Vlasov, 20  
equações de Hamilton, 41  
equações de Jeans, 24  
equilíbrio hidrostático, 16  
equilíbrio quase-estacionário, 8  
ergódico, 8  
escala de tempo, 1  
esfera isotérmica singular, 38  
espaço de fase, 18, 20
- espaço- $\Gamma$ , 18  
espaço- $\mu$ , 18
- fine-grained, 44  
função de distribuição, 18  
função de distribuição de grão fino, 44  
função de distribuição de grão grosso, 44  
função hipergeométrica, 12  
função-H, 44  
fórmulas de Eddington, 35
- half-mass radius, 16
- identidade de Lagrange, 8  
índice de politropo, 35  
instabilidade gravo-térmica, 51  
integrais isolantes, 32  
integral de movimento, 30  
invariante integral, 30
- late-type, 12  
linha de visada, 25  
livre caminho médio, 3  
logaritmo de Coulomb, 5
- matéria escura, 1, 27  
mistura no espaço de fase, 42  
modelo de Plummer, 36  
modelo de Schuster, 36  
modelo- $\beta$ , 12  
momentos da equação de Boltzmann, 22
- operador de Frobenius-Perron, 42  
oscilador harmônico simples, 14
- parâmetro de anisotropia, 26

---

politropos, 35  
potencial gravitacional, 12  
princípio do máximo de entropia, 41

raio do virial, 2  
raio efetivo, 2, 9  
raio gravitacional, 9  
razão massa-luminosidade, 10  
relaxação violenta, 47  
relaxação à dois corpos, 4  
root mean square, 9

sistema sem colisões, 6  
stress tensor, 24

tempo de colapso, 14  
tempo de cruzamento, 1, 2  
tempo de queda livre, 14  
tempo de relaxação, 3  
tempo dinâmico, 2, 9, 15  
tensor dispersão de velocidade, 24  
teorema da mistura, 46  
teorema de Gauss, 17  
teorema de Liouville, 19  
Teorema do Virial, 7  
teorema do virial tensorial, 30  
transformações irreversíveis, 44

velocidade circular, 13  
velocidade kepleriana, 13  
virial, 7