

Astronomia de Posição

Notas de Aula – Versão 03/02/2025

Gastão Bierrenbach Lima Neto

Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas (IAG)
Universidade de São Paulo (USP)

A última versão destas notas encontra-se aqui:
www.astro.iag.usp.br/~gastao/astroposicao.html

Aviso: Nesta versão PDF, as referências às figuras, equações e bibliografia contêm “*hyperlinks*” azuis navegáveis com a utilização de AcrobatReader ou equivalente. Alguns links são do próprio documento, outros são externos e necessitam de um navegador WEB (Firefox, Safari, Chrome, etc...) e, obviamente, conexão com a Internet.

A “*homepage*” destas Notas é: <http://www.astro.iag.usp.br/~gastao>.

Ficha catalográfica

Lima Neto, G. B.

Astronomia de Posição: Notas de Aula /

Gastão Bierrenbach Lima Neto – São Paulo: IAG/USP, 2025

209 p.; 21 × 29,7 cm.

Acesso em:

<http://www.astro.iag.usp.br/~gastao/astroposicao.html>

1. Astronomia 2. Calendário 3. Mecânica Celeste 4. Efemérides

I. Título

1	Esfera Celeste	1
1.1	Introdução	1
1.1.1	Brilho dos astros	2
1.2	Representação das estrelas na esfera celeste	4
1.2.1	Horizonte	4
1.2.2	Constelações	5
1.2.3	Bandeira do Brasil	7
1.3	Movimento Aparente dos Astros	8
1.3.1	Movimento aparente dos planetas: direto e retrógrado	12
1.4	Sistema de Referência	13
1.5	Sistema de Coordenadas	15
1.5.1	Coordenadas Horizontais	17
1.5.2	Coordenadas Equatoriais	18
1.5.3	Coordenadas Eclípticas	20
1.5.4	Coordenadas Galácticas	21
1.6	Estações do ano	22
1.7	Movimento diário dos astros	24
1.7.1	Culminação	28
1.8	Relação entre sistemas de coordenadas	30
1.8.1	Matrizes de rotação	30
1.8.2	Transformação de coordenadas Eclípticas e Equatoriais	32
1.8.3	Transformação de coordenadas Equatoriais e Horizontais	33
1.8.4	Transformação de coordenadas Equatoriais e Galácticas	34
1.8.5	Transformação de coordenadas Galácticas e Supergalácticas	34
1.8.6	Determinação da latitude e declinação de um astro	35
1.9	Noções de trigonometria esférica	36
1.10	Projeção da esfera no plano: planisfério	40
2	Tempo	46
2.1	Escalas de Medida de Tempo	46
2.1.1	Introdução	46
2.1.2	Movimento e tempo	46
2.1.3	Tempo sideral	46
2.1.4	Tempo solar, tempo universal e tempo civil	47
2.1.5	Translação da Terra: ano	52

2.1.6	Translação da Lua: mês	56
2.1.7	Tempo dinâmico	58
2.1.8	Tempo atômico	59
2.1.9	Rotação da Terra	61
2.1.10	Tempo universal coordenado e Tempo Legal (ou Civil)	65
2.1.11	<i>Network Time Protocol</i> (NTP)	68
2.2	Calendários	68
2.2.1	Introdução	68
2.2.2	Base astronômica dos calendários	69
2.2.3	Calendário Egípcio	70
2.2.4	Calendário Romano	70
2.2.5	Calendário Juliano	70
2.2.6	Calendário Gregoriano	71
2.2.7	Calendário Judaico	71
2.2.8	Calendário Muçulmano	72
2.2.9	Calendário da Revolução Francesa	72
2.3	Dia Juliano	72
2.4	Relação entre tempo sideral e tempo universal	74
2.5	Cálculo do domingo de Páscoa	75
2.6	Radiação solar e Insolação	76
3	Movimento, forma e perspectiva: Variação de coordenadas	80
3.1	Forma da Terra	80
3.1.1	Sistema astronômico de coordenadas geográficas	81
3.1.2	Sistema geodético de coordenadas geográficas	81
3.1.3	Sistema geocêntrico de coordenadas geográficas	82
3.1.4	GPS	84
3.2	Precessão e Nutação	86
3.2.1	Física da precessão e nutação	86
3.2.2	Efeitos da precessão e nutação nas coordenadas	88
3.3	Movimento do polo	93
3.4	Refração atmosférica	94
3.4.1	Aproximação de planos paralelos	94
3.4.2	Fórmula geral da refração	95
3.5	Nascer, pôr e crepúsculos	98
3.5.1	Crepúsculo	100
3.6	Relação entre coordenadas geocêntricas e heliocêntricas	101
3.7	Paralaxe	102
3.7.1	Paralaxe anual	102
3.7.2	Paralaxe diária e paralaxe horizontal	106
3.7.3	Medida de paralaxe usando uma sonda espacial	108
3.8	Movimento próprio de estrelas	109
3.8.1	Efeito do movimento próprio nas coordenadas	112
3.8.2	Movimento de estrelas próximas do Sistema Solar	113
3.9	Aberração da Luz	114
3.9.1	Aberração anual	115
3.9.2	Aberração planetária	116
3.9.3	Aberração secular	116
3.9.4	Aberração diária	117
3.10	Desvio gravitacional da luz	117

3.11	Redução das coordenadas celestes: Redução ao dia	119
4	Astronomia Clássica	121
4.1	Introdução	121
4.2	Grécia clássica	121
4.2.1	Escola jônica	121
4.2.2	Escola eleática	122
4.2.3	Escola pitagórica	124
4.2.4	Sistema de Eudoxo	125
4.2.5	Sistema de Aristóteles	126
4.3	Sistema híbrido de Heráclides	126
4.3.1	Euclides	127
4.3.2	Aristarco	127
4.3.3	Eratóstenes	128
4.3.4	Aglaonice de Thessália	128
4.4	Hiparco	128
4.4.1	Gêmino de Rodes	129
4.4.2	Posidônio de Apameia	129
4.5	Sistema de epiciclos: Ptolomeu	130
4.6	Sistema geocêntrico de Ptolomeu	130
4.7	Entre Ptolomeu e Copérnico	132
4.7.1	Astronomia fora da Europa	132
4.7.2	Precursores da revolução copernicana na Europa	134
4.8	Sistema heliocêntrico de Copérnico	136
4.8.1	Copérnico	136
4.8.2	Giordano Bruno	137
4.8.3	Galileu Galilei	137
4.8.4	Quebra do paradigma de órbitas circulares – Brahe e Kepler	138
4.9	Configurações planetárias	140
4.9.1	Movimento retrógrado dos planetas	142
4.9.2	Trânsitos e ocultações	144
4.10	Eclipses	148
4.10.1	Eclipse do Sol	148
4.10.2	Eclipse da Lua	151
4.10.3	Ocorrência de eclipses	152
4.11	Libração da Lua	155
4.12	Determinação clássica de distâncias no Sistema Solar	158
4.12.1	Diâmetro da Terra	158
4.12.2	Distância Terra – Lua	158
4.12.3	Distância Terra – Sol	163
4.12.4	Distância Planetas – Sol	164
4.12.5	Paralaxe de Marte e a Unidade Astronômica	165
4.12.6	Trânsito de Vênus e a Unidade Astronômica	166
5	Tópicos de Astronomia de Posição	170
5.1	Estações do ano em outros planetas	170
5.1.1	Visibilidade dos anéis de Saturno	171
5.2	Medida da velocidade da luz por Römer	174
5.3	Leis de Kepler	175
5.3.1	Primeira lei de Kepler	176

5.3.2	Segunda lei de Kepler	176
5.3.3	Terceira lei de Kepler	178
5.4	Problema de 2 corpos	178
5.4.1	Órbitas keplerianas	180
5.4.2	Movimento anual aparente do Sol	183
5.4.3	Raio médio de uma elipse e a terceira lei de Kepler	184
5.4.4	A equação <i>vis viva</i>	185
5.5	Órbita da Lua	186
5.6	Variações seculares dos movimentos da Terra	187
5.7	Baricentro do Sistema Solar e o movimento do Sol	188
5.8	Plano invariante do Sistema Solar	190

Índice Remissivo **192**

Almanaque	199
Domingo de Páscoa	199
Estações do Ano	200
Passagem da Terra pelo periélio e afélio	201
Datas de Lua cheia	202
Oposição de planetas externos visíveis a olho nu	204
Máxima elongação de planetas internos	205
Eclipses do Sol vistos de São Paulo	207
Mapa dos eclipses do Sol que passam pelo Brasil	208
Eclipses totais da Lua	209

1.1 Introdução

No Universo, os astros se distribuem em um espaço tridimensional. Contudo, devido à imensa distância que separa estes astros da Terra, ao observarmos o céu nós temos a impressão de que todos estes astros se encontram em uma esfera. Esta esfera aparente, chamada *esfera celeste* (figura 1.1), está a princípio centrada no observador, (porém as vezes é mais conveniente admitirmos que o centro da esfera celeste esteja em algum outro ponto, no centro da Terra ou no centro do Sol). A esfera celeste não tem um raio definido, assim consideramos este raio como infinito. Como a distância entre um observador qualquer e o centro da Terra (cerca de 6400 km) é muito menor que a distância aos astros (a Lua está, em média, a 380.000 km, o Sol a 150 milhões, e as estrelas estão muito além do sistema solar) o erro que se faz é, na maioria dos casos, desprezível. A superfície total da esfera celeste (como qualquer esfera) é de 4π (em radianos quadrados ou esterradianos) o que equivale a $4\pi(180/\pi)^2 = 41.252,96$ graus².

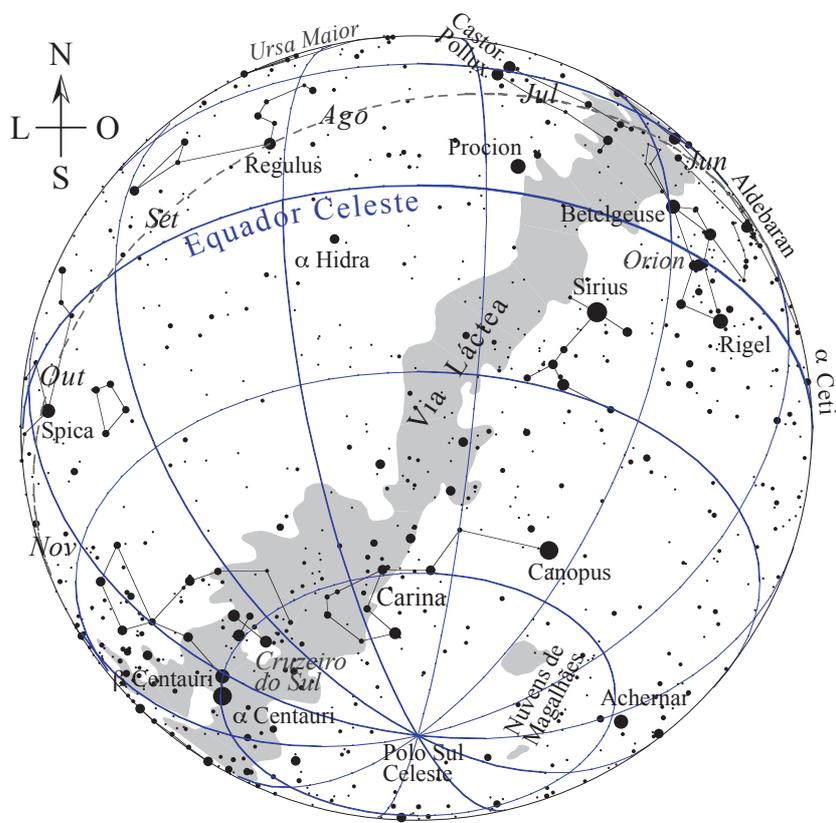


Figura 1.1: Representação da Esfera Celeste, com algumas das principais estrelas, constelações, o equador e o polo Sul Celeste e a trajetória aparente do Sol (a eclíptica, linha tracejada com o mês indicando a posição do Sol).

A olho nu, podemos ver o Sol, a Lua, 5 planetas, milhares de estrelas, eventuais cometas, 4 galáxias (parte da Via Láctea, as 2 nuvens de Magalhães, que são galáxias anãs ligadas gravitacionalmente à nossa, e a galáxia de Andrômeda) e os meteoroides que queimam ao entrar na

atmosfera (os *meteoros*). Isto é apenas uma fração ínfima do que podemos observar com o auxílio de um telescópio modesto.

Para que possamos comunicar nossas observações a outros observadores, é preciso haver um *sistema de referências* onde as coordenadas dos astros sejam definidas, análogo ao sistema de latitudes e longitudes que utilizamos para localizar um dado lugar no globo terrestre.

Além do sistema de referência, dado o caráter dinâmico dos objetos celestes, também é necessária a definição de *escalas de medida de tempo*. Em outras palavras não somente precisamos das coordenadas de um astro, mas também do momento em que a observação foi (ou será) feita.

O objetivo da *astronomia de posição* ou *astrometria* é o estudo das posições dos astros na esfera celeste e de seus movimentos. Sem dúvida, a astronomia de posição é a mais antiga das ciências. Desde a pré-história, as sociedades têm um grande interesse pela posição e movimento dos astros. Estes movimentos, ligados aos ciclos naturais (dia e noite, estações do ano, etc.), regiam as atividades econômicas (plantação e colheita, criação de animais, pesca, etc.) e sociais.

A necessidade de se localizar durante longas viagens, medir a passagem do tempo de modo cada vez mais preciso, estimulou o desenvolvimento tanto da astronomia como de outras ciências como a álgebra e a geometria. Este progresso, junto com o desenvolvimento tecnológico, se faz sentir em toda a história da astronomia de posição, dos monumentos megalíticos de Stonehenge, na Inglaterra, ao satélite espacial HIPPARCOS (*HIgh Precision PARallax COLlecting Satellite* dedicado à astrometria), lançado pela ESA (*European Space Agency*) em 8 de agosto de 1989 e desativado em março de 1993. Lançado em dezembro de 2013 e desativado em janeiro de 2025, o satélite GAIA, também da ESA, nos proporcionou um mapeamento preciso de mais de um bilhão de estrelas da Via Láctea e galáxias vizinhas. GAIA é hoje o último passo de um processo que começou com o catálogo de coordenadas de 850 estrelas feitas pelo grego Hiparco por volta de 150 A.C.

1.1.1 Brilho dos astros

Os astros que observamos no céu têm brilhos (fluxo de energia observado por nós) e cores diferentes. Alguns podem ser observados a olho nu outros só com o auxílio de instrumentos. Na astronomia, o brilho de um astro é dado pela sua **magnitude**. O sistema que usamos para quantificar o brilho tem origem na Grécia, desenvolvido por Hiparco no século II A.C.

A escala de magnitude foi sistematizada matematicamente, relacionando-a ao brilho observado dos astros, pelo astrônomo inglês Norman Robert Pogson em 1856. Nesta escala um astro de magnitude 1 é 100 vezes mais brilhante que um astro de magnitude 6. Quanto menor a magnitude, maior é o seu brilho.

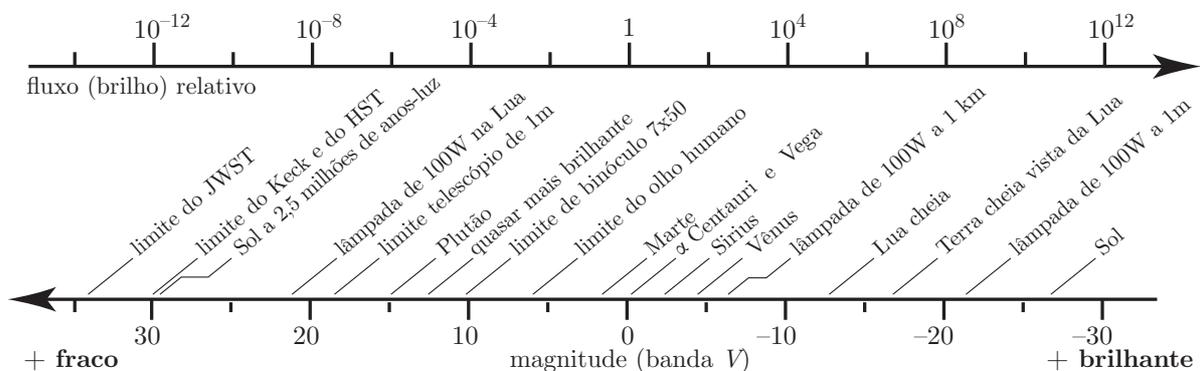


Figura 1.2: Escala de magnitude na banda visível (grosseiramente, é a faixa de luz que observamos a olho nu) com alguns exemplos representativos. Keck é um telescópio de 10 metros de diâmetro no Havai, HST é o telescópio espacial Hubble. A magnitude dos planetas corresponde à condição mais favorável. Vega, Sirius e α Centauri estão entre as estrelas mais brilhantes vistas da Terra.

Na figura 1.2 ilustramos graficamente a escala de magnitude e fluxo relativo com alguns exemplos. A magnitude é sempre medida em alguma *faixa espectral* ou *banda fotométrica*. Uma faixa comumente usada, que se aproxima da forma como observamos a olho nu, é chamada banda V do sistema de Johnson. O astro mais brilhante, o Sol, tem magnitude $-26,7$ nesta banda. Já a Lua Cheia tem magnitude $-12,7$ e o planeta Vênus, quando está mais brilhante, tem magnitude $-4,7$. A estrela mais brilhante do céu, Sirius, tem magnitude $V = -1,44$.

O brilho ou fluxo observado, F , de um astro está relacionado com sua distância, D , e sua luminosidade intrínseca, L , dada pela equação:

$$F = \frac{L}{4\pi D^2}. \quad (1.1)$$

Esta equação diz que, para uma dada luminosidade, o brilho de um astro é dividido por 4 se a distância é dobrada ou é dividida por 9, se a distância é triplicada. O brilho de um astro corresponde à energia por unidade de tempo por unidade de superfície recebida por um observador. A luminosidade, L , é a potência, isto é, a energia emitida por unidade de tempo. Por exemplo, o Sol tem uma luminosidade de $3,83 \times 10^{27}$ Watt.

Usando a escala de Pogson, podemos relacionar a diferença de magnitude de dois astros com a razão de fluxos da seguinte forma:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log (F_1/F_2), \quad (1.2)$$

onde os índices 1 e 2 correspondem a cada um dos astros. Por exemplo, comparando a Lua Cheia com o Sol (representado pelo símbolo \odot), temos:

$$\underbrace{-26,7}_{m_{\odot}} - \underbrace{(-12,7)}_{m_{\text{Lua}}} = -2,5 \log (F_{\odot}/F_{\text{Lua}}) \Rightarrow 5,6 = \log (F_{\odot}/F_{\text{Lua}}) \Rightarrow F_{\odot} \simeq 4 \times 10^5 F_{\text{Lua}},$$

isto é, o Sol é cerca de 400 mil vezes mais brilhante que a Lua Cheia.

A banda fotométrica V corresponde aproximadamente à resposta do olho humano à luz. Em uma noite sem a Lua acima do horizonte, longe de centros urbanos e sem nuvens, podemos enxergar estrelas até magnitude $V \approx 6,5$ a olho nu com a pupila bem dilatada (depois de mais de 10 minutos no escuro). Neste limite de magnitude, contamos cerca de 8800 estrelas em toda a esfera celeste (veja tabela 1.1).

Tabela 1.1: Número total de estrelas na esfera celeste até a magnitude limite na banda V . Baseado no catálogo XHIP (*Extended Hipparcos Compilation*).

mag limite (V):	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5
N ^o . de estrelas:	15	22	48	92	176	287	517	918	1624	2847	5040	8869

As magnitudes discutidas acima são as *magnitudes aparentes*, que são observadas por nós e dependem da luminosidade intrínseca do astro e de sua distância. Definimos a *magnitude absoluta*, M , como a magnitude de um astro observado à distância fixa de 10 parsec (ou 32,6 anos-luz; estas unidades de distância serão definidas na seção 3.7.1). A relação entre as magnitudes aparente e absoluta pode ser escrita de forma simplificada como:

$$m - M = 5 \log (d_{\text{pc}}/10) = 5 \log (d_{\text{pc}}) - 5, \quad (1.3)$$

onde d_{pc} é a distância medida em parsec.

A magnitude absoluta, M_* , está ligada diretamente à luminosidade L_* de um astro pela relação:

$$M_* - M_{\odot} = -2,5 \log (L_*/L_{\odot}), \quad (1.4)$$

onde M_{\odot} e L_{\odot} são a magnitude absoluta do Sol e sua luminosidade.

Como um dado observador na Terra só pode ver metade da esfera celeste, em um dado momento podemos observar em excelentes condições cerca de 4400 estrelas. Para quem mora em centros urbanos, o número de estrelas observáveis é de apenas algumas dezenas, principalmente devido à *poluição luminosa*, a luz das cidades que deixa o céu brilhante e ofusca os astros.

Tabela 1.2: Lista das estrelas mais brilhantes na esfera celeste (excluindo o Sol). “Dist” é a distância em anos-luz, “MagAbs” é a magnitude absoluta e L é a luminosidade em unidades solares (quantas vezes a estrela é mais luminosa que o Sol). Baseado no catálogo XHIP (*Extended Hipparcos Compilation*).

Nome	mag (V)	Dist (A.L.)	MagAbs	L (solar)
α CMa (Sirius)	-1.44	8.61	1.45	25.8
α Car (Canopus)	-0.62	308.12	-5.50	13187.5
α Boo (Arcturus)	-0.05	36.73	-0.31	206.8
α Cen A (Rigel Kentaurus*)	-0.01	4.40	4.34	1.8
α Lyr (Vega)	0.03	25.05	0.60	58.1
α Aur (Capella)	0.08	42.79	-0.51	163.3
β Ori (Rigel)	0.18	854.57	-6.91	62722.6
α CMi (Procyon)	0.40	11.42	2.68	7.2
α Eri (Achernar)	0.45	139.34	-2.70	2858.4
α Ori (Betelgeuse)	0.45	488.56	-5.43	36554.4
β Cen (Hadar ou Agena)	0.61	390.61	-4.78	45273.9
α Aql (Altair)	0.76	16.73	2.21	10.8
α Cru (Acrux)	0.77	321.20	-4.20	30303.0
α Tau (Aldebaran)	0.87	66.63	-0.68	502.1
α Vir (Spica)	0.98	248.89	-3.43	13071.5
α Sco (Antares)	1.06	535.23	-5.02	75900.0
β Gem (Pollux)	1.16	33.79	1.08	44.4
α PsA (Fomalhaut)	1.17	25.11	1.74	16.9
β Cru (Becrux ou Mimosa)	1.25	350.79	-3.91	19920.3
α Cyg (Deneb)	1.25	1380.18	-6.88	48596.1
α Cen B	1.35	1.35	5.71	0.6
α Leo (Regulus)	1.36	79.29	-0.57	239.5
ϵ CMa (Adara)	1.50	405.03	-3.97	16783.9
α Gem (Castor)	1.58	51.53	0.59	53.4
γ Cru (Gacrux ou Rubídea)	1.59	88.55	-0.58	159.8
λ Sco (Shaula)	1.62	559.63	-4.55	36654.7

* Também encontramos frequentemente a grafia Rigil Kentaurus. A palavra *Rigel* vem do árabe, *rijl*, que significa pé. Ambas as estrelas, β Ori e α Cen A, estão no pé das constelações do caçador Órion e do Centauro, respectivamente.

Na tabela 1.2 estão listadas as 22 estrelas mais brilhantes (magnitude $V \leq 1,5$) do céu, assim como suas distâncias em anos-luz¹ e luminosidades. A nomenclatura destas estrelas, dadas por uma letra grega e a abreviação do nome da constelação será visto mais adiante (Sec. 1.2.2).

1.2 Representação das estrelas na esfera celeste

1.2.1 Horizonte

Um dado observador na superfície terrestre pode observar apenas metade da esfera celeste num dado instante. O limite entre a parte observável e a parte invisível ao observador é chamado *horizonte* (do grego *horos*, limite). Os polos deste horizonte, isto é, os pontos exatamente acima e abaixo do observador são chamados *zênite* e *nadir*, respectivamente.

¹Um ano-luz corresponde à distância que a luz percorre no vácuo em um ano, aproximadamente $9,461 \times 10^{12}$ km (trilhões de quilômetros).

O horizonte astronômico é um círculo aparente em torno do observador. No oceano, o horizonte observado é praticamente o horizonte astronômico; em terra, devido às irregularidades do terreno (e construções) o horizonte observado se distingue do horizonte astronômico.

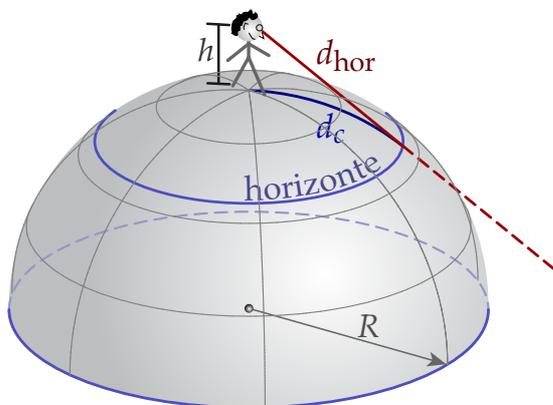


Figura 1.3: Horizonte astronômico. Para um observador a altura h , a distância do horizonte pode ser definida de duas formas: d_{hor} , a distância em linha reta, e d_c , a distância sobre a superfície da Terra (ou do astro onde está o observador). R é o raio da Terra (ou do astro). Além da linha do horizonte, a esfera celeste não pode ser observada.

A distância do horizonte astronômico depende da altura do observador (veja Fig. 1.3). Rigorosamente, se a Terra fosse exatamente uma esfera, temos:

$$d_{\text{hor}} = \sqrt{2Rh + h^2} \quad \text{e} \quad d_c = R \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right), \quad (1.5)$$

onde R (o raio da Terra, $\sim 6,38 \times 10^6$ m) e h são dados nas mesmas unidades (metros, por exemplo). Até alguns quilômetros de altura, $h \ll R$ e $d_c \simeq d_{\text{hor}} \simeq \sqrt{2Rh}$, e podemos utilizar:

$$d_{\text{hor}} \approx 3,572\sqrt{h} \text{ km}, \quad (h \text{ em metros acima da superfície da Terra}). \quad (1.6)$$

As fórmulas acima não levam em conta o efeito de refração atmosférica (veja Sec. 3.4). A refração faz com que, na realidade, podemos observar distâncias ligeiramente superiores (10 a 20%) do que as distâncias obtidas com as equações acima, ou seja, $d_{\text{hor}} \sim 4\sqrt{h}$ km. Por exemplo, do alto de um farol de 36 metros de altura próximo de uma praia, pode-se avistar até cerca de 24 km.

1.2.2 Constelações

Quando observamos as estrelas de uma noite para outra, não notamos praticamente nenhuma mudança na posição relativa entre elas, isto é, a posição de uma estrela em relação a alguma outra. De fato, apenas com observações muito precisas e ao longo de muito tempo é que podemos determinar o *movimento próprio* de algumas estrelas. A estrela com o maior movimento próprio conhecido é a Estrela de Barnard, invisível a olho nu, com um movimento próprio de $10''3$ por ano. Todas as estrelas têm movimento próprio, mas apenas para as mais próximas é que podemos detectar este movimento (o movimento próprio será abordado em mais detalhes na seção 3.8).

Assim, desde a antiguidade, as estrelas são utilizadas como meio de *orientação*. Para facilitar a orientação, as estrelas fixas foram “ordenadas” na esfera celeste: as estrelas mais brilhantes eram organizadas de modo a representarem criaturas mitológicas, animais ou instrumentos, as chamadas *constelações*. Diferentes povos criavam diferentes constelações ao longo da história, representando objetos ou criaturas diferentes. As constelações são construções arbitrárias, que serviam para dividir a esfera celeste em setores e tornava mais prática a identificação das estrelas.

As constelações que utilizamos hoje em dia vêm principalmente da mitologia greco-romana (Andrômeda, Águila, Perseu, Hércules, Órion, etc. . .) e da época das grandes navegações (Triângulo Austral, Cruzeiro do Sul, Horologium, etc. . .). Os gregos, por sua vez adotaram algumas

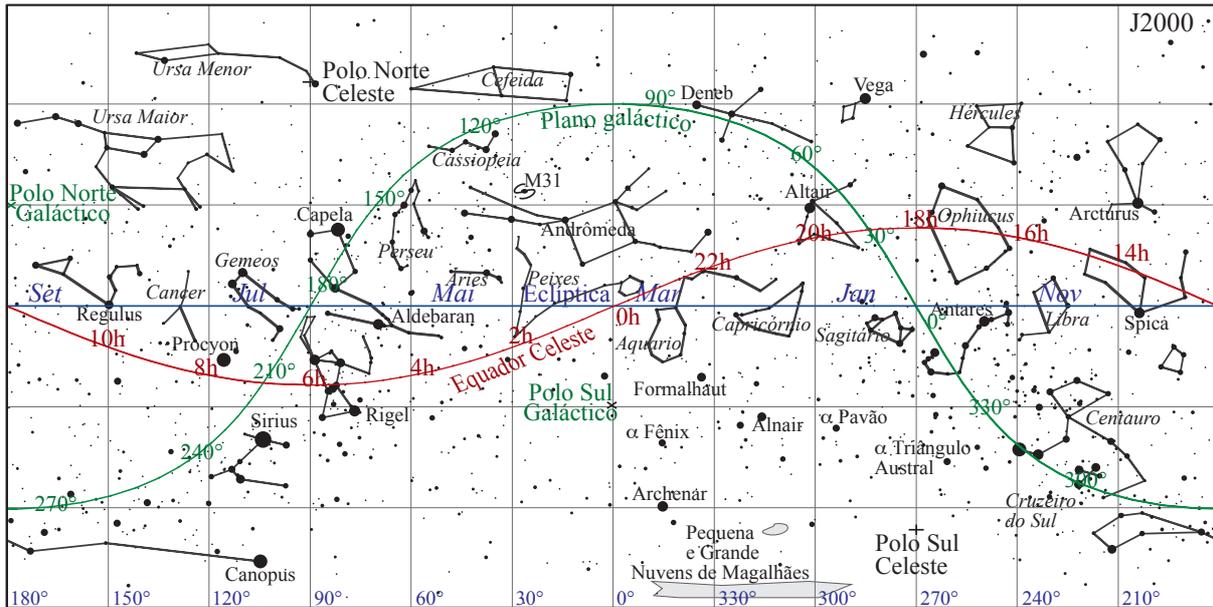


Figura 1.4: Planisfério da esfera celeste mostrando as principais constelações (em itálico), estrelas e círculos de referência (serão definidos mais adiante na seção 1.5).

das constelações utilizadas na Mesopotâmia, possivelmente desde a Suméria, passando pelo Império Acádio e Babilônia, há mais de 5 mil anos, especialmente as constelações do Zodíaco como Touro, Leão e Escorpião.

As constelações atuais foram estabelecidas pelos astrônomos do século **XVII** e suas fronteiras foram homologadas pela União Astronômica Internacional (UAI, em inglês IAU) em 1928. Dois anos depois, o astrônomo Belga Eugène Delporte traça os limites das constelações. Ao todo são 88 constelações definidas atualmente.

Em uma dada constelação as estrelas são ordenadas geralmente segundo seu brilho aparente, a mais brilhante é alfa, a segunda mais brilhante é beta, depois vem gama e assim por diante. Por exemplo, alfa do Cão Maior (α CMa) é a estrela Sirius. Contudo, alfa Órion (α Ori) é a estrela Betelgeuse mas a estrela mais brilhante desta constelação é Rigel (beta Órion ou β Ori). Este sistema foi sugerido e adotado por Johann Bayer em 1603 em seu atlas celeste *Uranometria*.² Depois que termina o alfabeto grego, vem o latino e depois pares de letras latinas na designação das estrelas. Alguns exemplos de nomes de estrelas: Alfa Centauri, Gama Crucis, T Tauri, RR Lyrae, BL Lacertae (uma galáxia que foi confundida com uma estrela), etc.

Entre as constelações destacam-se 12, as constelações do *Zodíaco*. São nestas constelações que encontramos geralmente os planetas, a Lua e o Sol. Do ponto de vista de um observador na Terra, o Sol passa pelas constelações do Zodíaco dando uma volta completa em um ano (Fig. 1.5).

Na realidade, os diversos membros do Sistema Solar também transitam pela constelação de Ophiuchus (Ofiúco ou Serpentário), que não faz parte do Zodíaco tradicional. Isto porque, provavelmente, 360° é divisível por 12, mas não por 13 e por isto foram definidas 12 constelações ao longo do caminho aparente dos planetas. Além disto, possivelmente, como há aproximadamente 12 lunações em um ano, os astrônomos da Mesopotâmia optaram em dividir a trajetória aparente do Sol, o Zodíaco, em doze partes iguais dando origem às constelações que ainda hoje utilizamos.

²O nome vem de Urânia, em grego antigo significa celestial, musa da Astronomia, filha de Zeus e Mnemosine na mitologia grega.

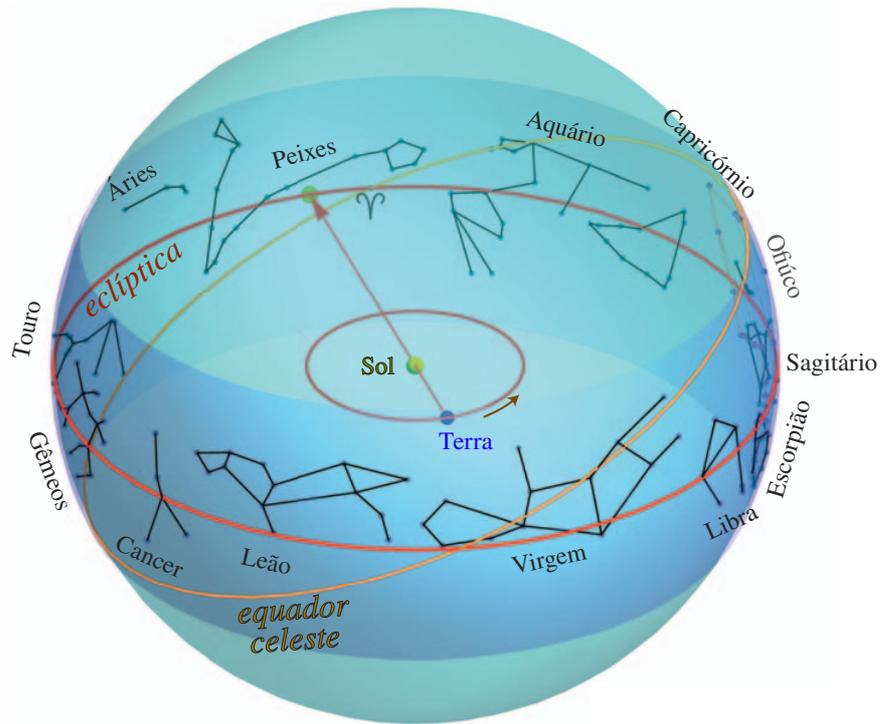


Figura 1.5: O movimento aparente do Sol visto da Terra (círculo no final da flecha) durante um ano, percorrendo as constelações do Zodíaco. A constelação de Ofiúco está no caminho do Sol, mas não é considerada uma das 12 constelações do Zodíaco. As linhas da eclíptica e equador celeste serão definidas mais a frente. O símbolo ♈ representa o ponto vernal na intersecção da eclíptica com o equador celeste.

Contudo, as constelações não servem como um sistema de coordenadas para fins práticos. Na seção 1.5 veremos como são definidos os diversos sistemas de coordenadas utilizados habitualmente na esfera celeste e na seção 1.8 veremos as relações entre estes sistemas. Convém lembrar que as estrelas em uma constelação geralmente não estão próximas entre si nem são fisicamente ligadas! Constelações são simplesmente padrões arbitrários de estrelas que inventamos para ajudar “organizar” os astros ou ilustrar nossas mitologias. A Fig. 1.6 mostra como a mudança de ponto de vista muda a distribuição aparente das estrelas.

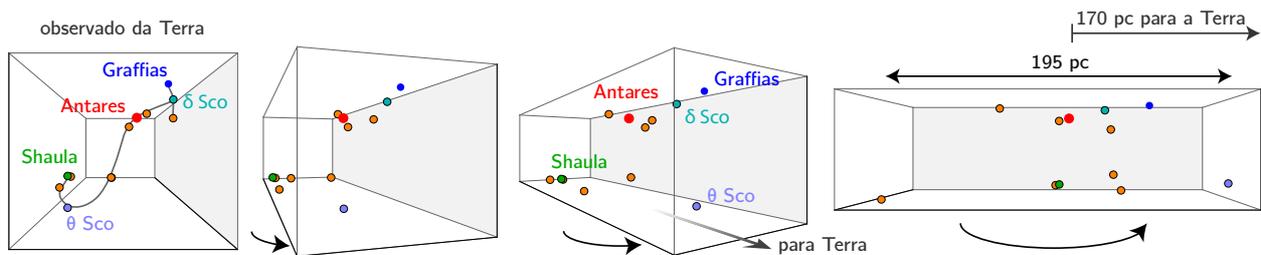


Figura 1.6: Exemplo da mudança da posição aparente (projetada) das estrelas da constelação do Escorpião. À esquerda, o padrão observado da Terra e à direita as mesmas estrelas vistas por um observador hipotético. Parsec (pc) é uma unidade de distância que equivale a 3,26 anos-luz (a definição será dada na seção 3.7.1).

Padrões aparentes de estrelas que geralmente são facilmente reconhecíveis são chamados **asterismos**. Um asterismo pode ser parte de uma constelação ou conter estrelas de várias constelações. Um exemplo de asterismo são as Três Marias na constelação de Órion.

1.2.3 Bandeira do Brasil

Na bandeira brasileira temos uma representação aproximada da esfera celeste (“O lábaro que ostentas estrelado”, Fig. 1.7) que corresponde a uma observação do céu no dia 15 de novembro de 1889 às 8h30 no Rio de Janeiro, com a constelação do Cruzeiro do Sul no centro. Contudo,

a esfera celeste da bandeira está invertida, isto é, corresponde à observação por alguém *fora* da esfera celeste, da forma como olhamos um globo terrestre. Cada estrela representa um estado e o Distrito Federal.

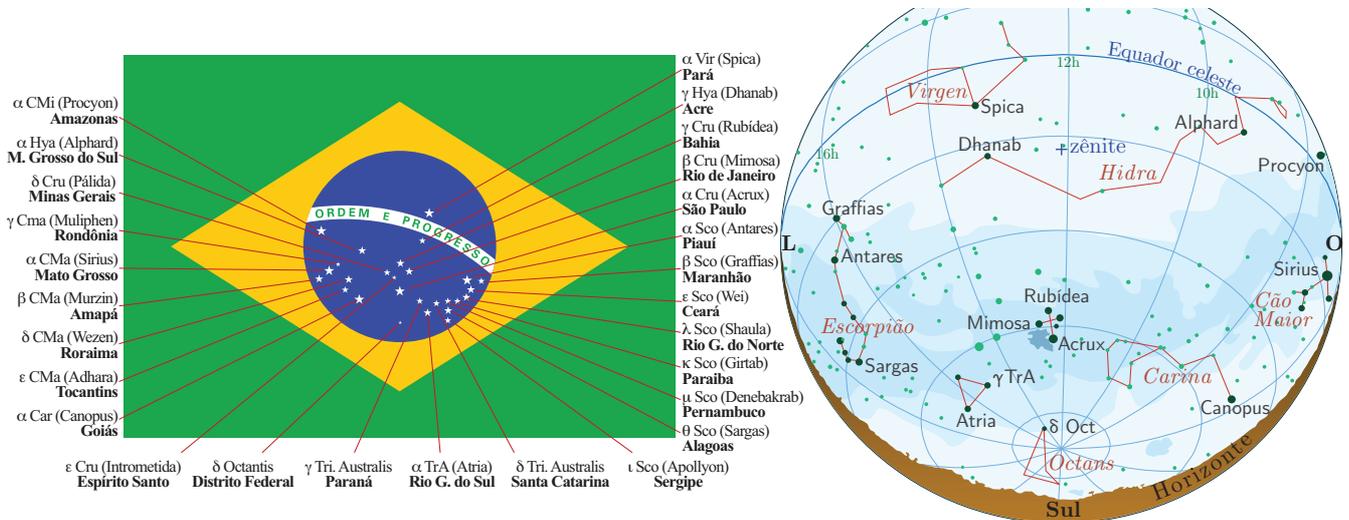


Figura 1.7: Esquerda: Bandeira oficial do Brasil com a identificação das estrelas e estados. Direita: Representação da esfera celeste que seria observada em 15/11/1889 às 8h30 no RJ (as estrelas da bandeira estão em destaque, mais escuras e maiores). Note que o “céu” da bandeira está invertido em relação ao céu que observamos da Terra.

O desenho da bandeira foi estipulado por decreto de 19 de novembro de 1889 e atualizado em 28/05/1968, 01/09/1971 e 11/05/1992.

1.3 Movimento Aparente dos Astros

Chamamos de *movimento aparente* qualquer deslocamento na esfera celeste que possa ser medido por um observador. É importante lembrar que estas medições de movimento nem sempre são feitas em um referencial inercial como, por exemplo, um observador em repouso sobre a Terra (um referencial não-inercial, uma vez que esta gira em torno dela mesma). Para a interpretação física destes movimentos (estudo da mecânica celeste, por exemplo) é necessária uma descrição dos movimentos aparentes em um referencial inercial.

Veremos a seguir os principais movimentos aparentes dos astros. Os movimentos mais lentos ou de menor amplitude serão tratados em seções posteriores (por exemplo, movimentos ligados ao movimento das estrelas na Galáxia).

Mesmo com uma observação casual do céu, podemos facilmente notar que todos os astros se movem de forma semelhante. Se estivermos olhando na direção do Norte, os astros se levantam acima do horizonte à nossa direita, entre o Norte e o Sul, e se põem à nossa esquerda, também entre o Norte e o Sul. De uma forma pouco precisa, poderíamos dizer que os astros se levantam do lado onde fica o Leste e se põem do lado onde fica o Oeste. Dependendo da latitude do observador, alguns astros não se levantam nem se põem, mas aparentam girar em torno de um ponto fixo na Esfera Celeste, o chamado *polo celeste* (Fig. 1.8).

No hemisfério setentrional (norte), o Polo Norte celeste pode ser encontrado facilmente localizando-se a estrela Polar (Polaris ou alfa da constelação da Ursa Menor), uma estrela relativamente brilhante, com magnitude 2,0, em uma constelação facilmente reconhecível. No hemisfério meridional (sul), não há nenhuma estrela brilhante próxima ao Polo Sul celeste; como referência temos as estrelas visíveis a olho nu delta Octans de magnitude 4,31, a cerca de $6^{\circ}25'$

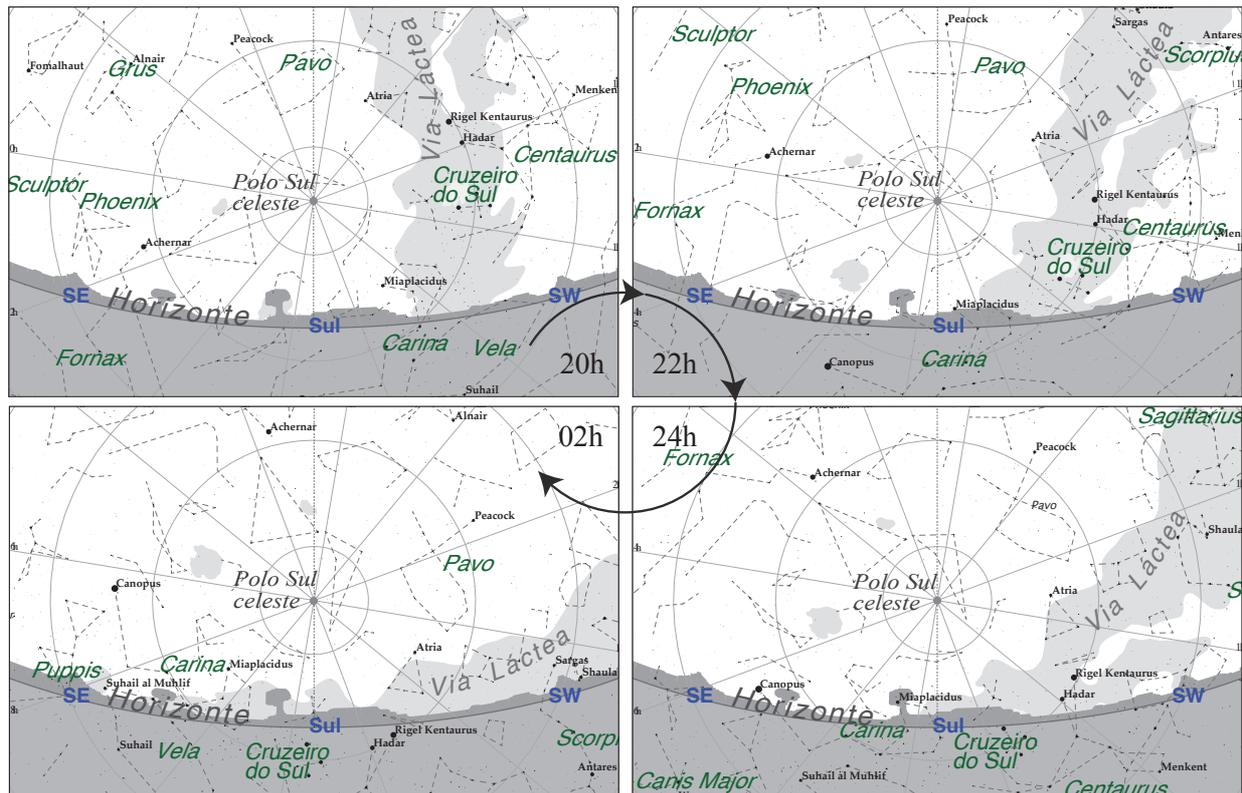


Figura 1.8: Polo celeste sul visto de São Paulo no início de setembro em 4 instantes diferentes: às 20, 22, 24, e 2 horas. Os círculos representam as Declinações e as retas são as Ascensões Retas (este sistema de coordenadas será definido na seção 1.5.2). O tamanho das estrelas é proporcional ao brilho aparente. Estando no Hemisfério Sul e olhando para a direção sul, veremos os astros girando em torno do Polo Sul Celeste no *sentido horário*. No Hemisfério Norte, veríamos os astros girando em torno do Polo Norte Celeste no *sentido anti-horário*.

do polo Sul celeste, e sigma Octans de magnitude 5,45, a cerca de $1^{\circ}12'$ do polo (a olho nu, em um céu limpo, longe das cidades e sem a Lua, podemos ver até estrelas de magnitude ~ 6).

Na prática, podemos localizar o Polo Sul celeste utilizando a constelação do Cruzeiro do Sul, que aponta quase que diretamente para o polo (a estrela α do Cruzeiro, está a cerca de 27° do polo Sul celeste) e tem quatro estrelas brilhantes (Fig. 1.9). A distância angular entre a ponta do cruzeiro e o polo Sul celeste é mais ou menos equivalente ao tamanho aparente de uma mão aberta (um palmo) observado com o braço estendido.

Este movimento diário e aparente da esfera celeste é devido à rotação da Terra em torno do seu próprio eixo. Os polos celestes nada mais são do que uma projeção dos polos terrestres na esfera celeste. Este movimento é chamado *movimento diário*. A Terra leva cerca de 23h56m04s para completar uma rotação em torno de si mesma em relação às estrelas. Na seção 1.7 abaixo, veremos novamente os movimentos diários utilizando os elementos da esfera celeste que serão introduzidos mais adiante.

Como já foi dito, o movimento próprio das estrelas e objetos mais distantes (nebulosas, galáxias, etc. . .) é desprezível em relação ao movimento aparente devido à rotação da Terra. Por outro lado, para os objetos mais próximos, no Sistema Solar, isto não é verdade.

Desde a antiguidade os *movimentos próprios* dos planetas, Sol e Lua em relação às estrelas já haviam sido notado. Comparando a posição da Lua relativa às estrelas em duas noites consecutivas, é imediata a constatação de movimento (veja figura 1.10). De fato, em relação às estrelas a Lua se desloca com um movimento médio de 13,17 graus por dia de Oeste para Leste. Isto

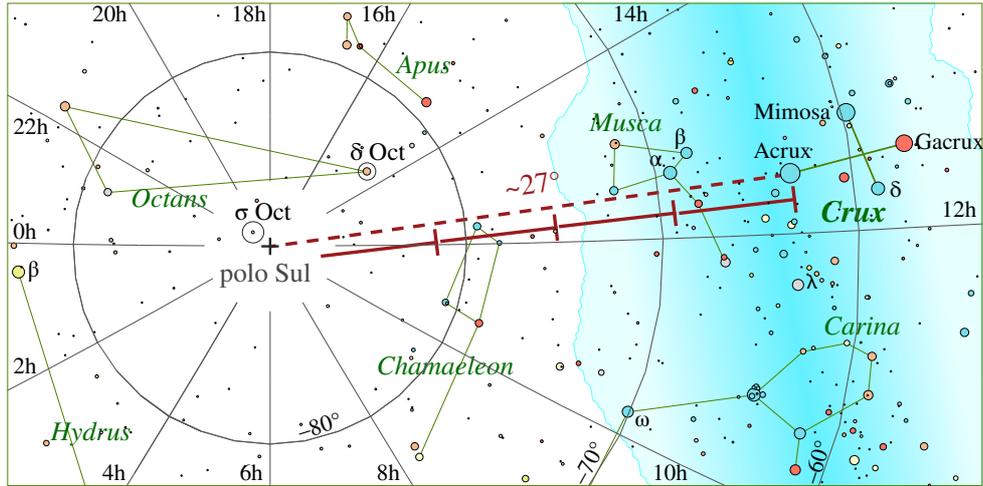


Figura 1.9: O Cruzeiro do Sul pode ser usado para localizar o polo Sul celeste e o polo Sul geográfico. A linha tracejada indica a prolongação aproximada do Cruzeiro até o polo celeste, $\sim 27^\circ$, cerca de 4 vezes o eixo maior da cruz. Também estão destacadas duas estrelas próximas do polo, que podem ser usadas como referência: delta e sigma Octans. A Via Láctea está representada em tons de azul.

corresponde a cerca de $30'$ por hora, uma distância equivalente ao seu diâmetro aparente. Este movimento é devido à translação da Lua em torno da Terra somado ao movimento da Terra ao redor do Sol, isto é, o movimento próprio da Lua (ilustrado na figura 1.11).

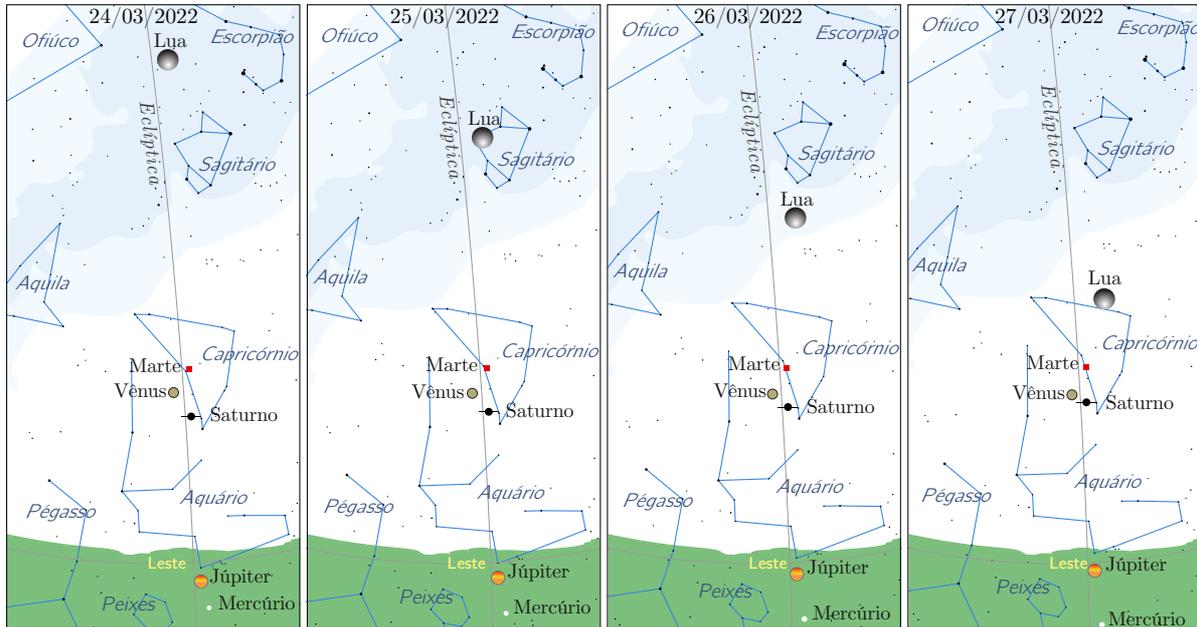


Figura 1.10: Movimentos aparentes na esfera celeste. O movimento aparente da Lua em relação às estrelas fixas pode ser notado comparando as imagens de observações em São Paulo em dias consecutivos feitas no mesmo horário (5h da manhã, hora local). A região verde representa o horizonte na direção Leste e as regiões cinzas representam a Via Láctea. Observe também que as estrelas também apresentam um movimento; a cada dia as estrelas se levantam (“nascem”) cerca de 4 minutos mais cedo. Também podemos notar o movimento aparente de Vênus e Mercúrio (abaixo do horizonte, portanto não observável na realidade) em relação às estrelas “fixas”. Já o movimento próprio de Júpiter e Saturno são imperceptíveis em apenas 4 dias na escala desta figura.

Assim como a Terra, a Lua também gira em torno de seu próprio eixo. Contudo, o período

de rotação da Lua é igual ao seu período de translação ao redor da Terra. O resultado disto é o fato bem conhecido da Lua sempre exibir a mesma face (aproximadamente, como veremos mais adiante) para a Terra.

Apesar da Lua sempre mostrar a mesma face para a Terra, o mesmo não ocorre em relação ao Sol: devido à rotação da Lua em torno de seu eixo, toda a superfície da Lua é eventualmente iluminada pelo Sol. Devido a esta geometria ilustrada na figura 1.11, a Lua apresenta *fases*: *Lua Cheia*, quando a face visível da Lua está toda iluminada; *Lua Nova* quando a face visível da Lua está do lado oposto ao Sol; Quarto Crescente e Minguante, quando apenas parte da face visível é iluminada pelo Sol.

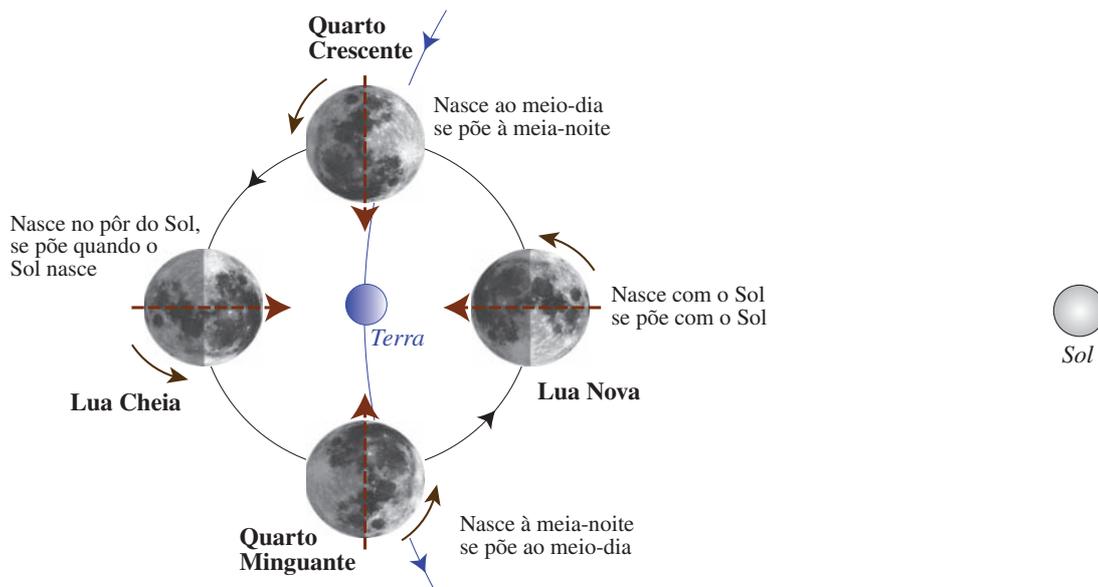


Figura 1.11: Movimento próprio da Lua em torno da Terra. Observe que a Lua apresenta sempre a mesma face voltada para Terra. A Lua gira em torno do seu próprio eixo com o mesmo período em que gira em torno da Terra (simbolizado pela flecha). Também vemos o momento em que a Lua em determinada fase nasce e se põe. Esta figura está completamente fora de escala; para o sistema Terra–Lua em escala realista veja a Fig. 4.39 na página 160.

Como a Lua se move ao redor da Terra com certa rapidez (comparado com o movimento de outros astros), notamos que a hora em que a Lua “nasce” (se levanta acima do horizonte) muda visivelmente de um dia para outro. Esta mudança de horário está associada à fase da Lua. Assim, por exemplo, a Lua Cheia nasce no momento em que o Sol se põe (veja Fig. 1.11).

A órbita da Lua não é estática e apresenta um movimento de *precessão*. A órbita lunar é inclinada em relação à eclíptica de cerca de 5° e, portanto, corta a eclíptica em dois pontos que são chamados *nodos*. Devido a precessão da órbita lunar, os nodos retrocedem cerca de $19;35$ por ano (Fig. 1.12). Este movimento tem consequência na periodicidade dos eclipses (como veremos na seção 4.10) pois altera a trajetória da Lua na esfera celeste.

O movimento aparente do Sol em relação às estrelas é relativamente simples, sempre no sentido direto (note que não estamos nos referindo ao movimento diário, devido à rotação da Terra, que será visto mais adiante na seção 1.7). O único problema é que, em geral, não podemos observar o Sol e as estrelas simultaneamente. Portanto, o movimento aparente do Sol em relação às estrelas é determinado de maneira indireta. Isto é feito notando-se que a cada dia que passa as estrelas se levantam cerca de 4 minutos mais cedo o que significa que a posição relativa aparente do Sol em relação às estrelas se altera neste mesmo ritmo (isto pode ser visto na figura 1.10). Além disto, devido à inclinação do eixo do Terra em relação à sua trajetória em torno do Sol (*eclíptica*), o movimento aparente diário do Sol se altera durante o ano (Fig. 1.13). Isto é

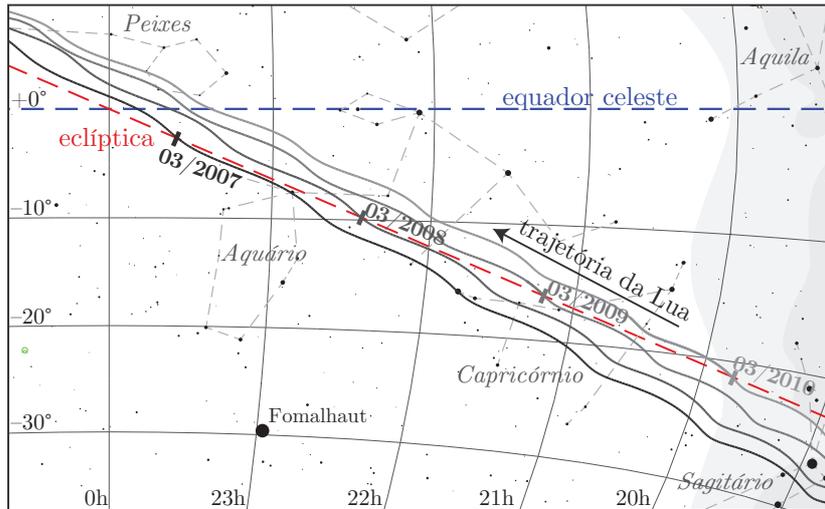


Figura 1.12: A órbita lunar é exibida em 4 momentos (linhas cinzas) separados por aproximadamente um ano cada um. A linha vermelha tracejada representa a eclíptica e a linha azul o equador celeste. Podemos ver que o nodo da órbita retrocede, isto é, se movimenta no sentido oposto à Lua em sua órbita. Note também a inclinação da órbita lunar em relação à eclíptica.

facilmente observado notando-se a mudança na posição onde o Sol nasce ou se põe ao longo do ano.

1.3.1 Movimento aparente dos planetas: direto e retrógrado

O movimento aparente dos planetas pode parecer um pouco mais complexo. Isto se deve ao fato de que observamos uma composição de movimentos devido à translação do planeta e da Terra em torno do Sol. Na figura 1.14 vemos como exemplo o movimento aparente de Marte em 2010 e em 2016. Note que a trajetória aparente pode ser como uma laçada (painel superior) ou como um “zig-zag” (painel inferior) em relação às estrelas.

Podemos ver que a trajetória não é sempre na mesma direção. O movimento pode ser tanto *direto* (como a Lua, isto é, de Oeste a Leste) como *retrógrado* (isto é, no sentido inverso). Quando o planeta passa de direto para retrógrado ou vice-versa dizemos que o planeta se encontra estacionário. Este comportamento dos planetas foi um grande quebra-cabeça da antiguidade e foi uma das razões da adoção do modelo de epiciclos (discutido na Sec. 4.5).

Podemos entender este comportamento estudando o movimento da Terra e dos planetas em torno do Sol e como a combinação destes movimentos resulta na trajetória aparente dos planetas. Na figura 1.15 é mostrado o exemplo de Marte, de uma perspectiva de fora da Terra.

Para os planetas externos (mais distantes que a Terra do Sol), o movimento aparente retrógrado se dá em torno da oposição, quando o planeta está do lado oposto do Sol na esfera celeste (vamos definir isto mais precisamente na Seção 4.9). Durante o movimento retrógrado dos planetas externos, por estarem mais próximos da Terra, os planetas aparecem maiores e mais brilhantes.

Os planetas internos (Mercúrio e Vênus) executam o movimento retrógrado aparente quando estão em conjunção inferior, isto é, quando estão entre o Sol e a Terra. Por isto, não podemos observar todo o movimento retrógrado destes planetas.

Se as órbitas dos planetas fossem rigorosamente coplanares, a trajetória aparente dos planetas seria uma linha que seguiria a eclíptica. Contudo, as órbitas dos planetas são ligeiramente inclinadas em relação à órbita terrestre o que acaba resultando na trajetória observada em forma de uma “laçada” (ou um zig-zag, veja a Fig. 1.14).

O intervalo de tempo em que um planeta apresenta movimento retrógrado e sua amplitude vai depender da composição dos movimentos orbitais da Terra e do próprio planeta. Veremos isto em mais detalhes na Sec. 4.9.1.

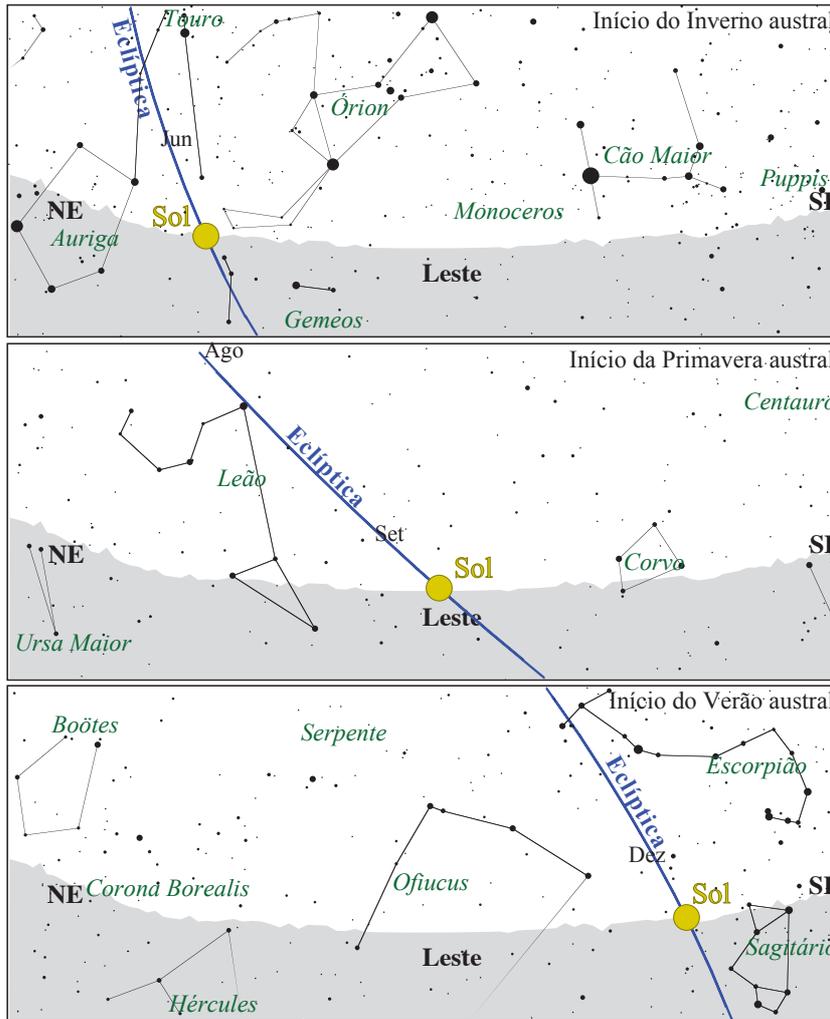


Figura 1.13: Variação anual da trajetória aparente do Sol durante o ano (p. ex., para um observador em São Paulo). No início do Inverno do Hemisfério Sul, o Sol “nasce” na direção do Nordeste; no início da primavera, na direção Leste; e no início do Verão austral Sudeste.

1.4 Sistema de Referência

Para podermos descrever os processos físicos de algum fenômeno observado ou previsto por alguma teoria é necessário um *Sistema de referência*. Mais fundamental ainda, as leis da Física, como as leis de Newton, por exemplo, são definidas a partir de um sistema de referência inercial, isto é, não acelerado.

Em astronomia, os sistemas de coordenadas, que veremos mais adiante, são definidos a partir de um sistema de referência ou *referencial*. Para isto, é necessária uma *realização* do sistema de referência. O princípio é ter um certo número de objetos com posições bem definidas a partir das quais podemos determinar a posição na esfera celeste de qualquer outro objeto ou direção.

Desde a época da Grécia Clássica, há mais de 2 mil anos, esta realização se dá por um *catálogo fundamental* com as posições de objetos astronômicos. O catálogo de 850 estrelas compilado por Hiparco tinha um grau de precisão (cerca de um grau) que permitiu-lhe descobrir o movimento de precessão da Terra (veremos isto na seção 3.2.2). Este catálogo foi consolidado com cerca de 1000 estrelas por Ptolomeu e serviu de base para os sistemas de referências até o século XVI.

O astrônomo dinamarquês Tycho Brahe obteve um salto de qualidade no final do século XVI graças à instrumentação de alta qualidade, conseguindo uma precisão de cerca de $\approx 60''$ usando um catálogo de 1000 estrelas. A partir daí, mesmo com a introdução do telescópio algumas décadas após Brahe, o progresso foi gradual até meados do século XX, quando a precisão era de $0,2''$ com o *Fundamental Katalog 4* (FK4, publicado em 1963 com 1535 estrelas).

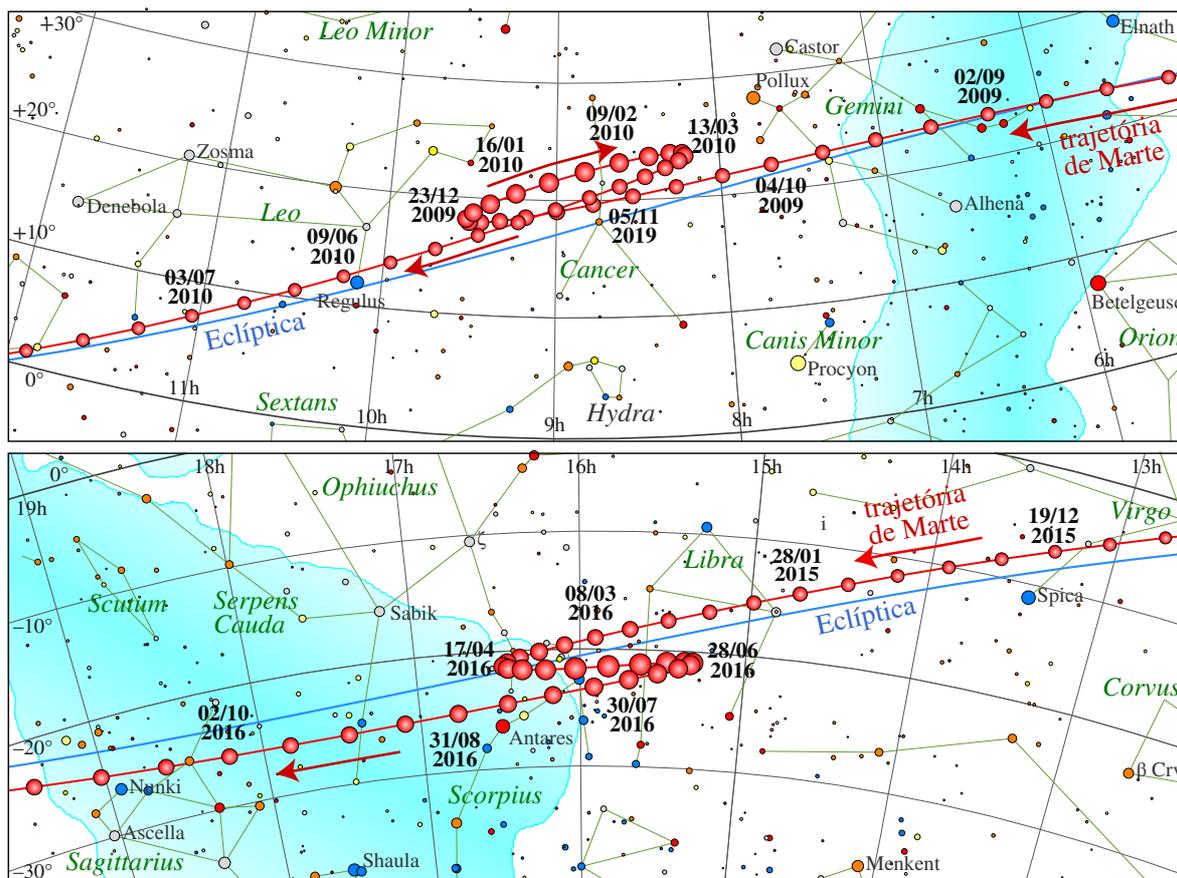


Figura 1.14: Dois exemplos do movimento aparente de Marte na esfera celeste ilustrando o movimento retrógrado. O intervalo entre duas posições ao longo da trajetória corresponde a 8 dias. O tamanho aparente de Marte está representado de forma aproximada (e fora de escala). O movimento retrógrado dos planetas externos ocorre quando o planeta passa pela oposição, por isto o tamanho aparente aumenta (Fig 4.14 na seção 4.9). Também estão indicados algumas estrelas brilhantes, constelações e as coordenadas equatoriais. A Eclíptica está representada pela linha azul. Podemos notar que a trajetória de Marte é próxima, mas não é exatamente sobre a eclíptica devido à inclinação relativa do seu plano orbital em relação ao plano orbital da Terra.

Até a década de 1980, os objetos nos catálogos fundamentais eram estrelas e, a partir da década seguinte, objetos extragalácticos começaram a ser usados. O uso de objetos extragaláctico é importante, pois estes objetos não participam da rotação da nossa galáxia e são, mesmo nos maiores telescópios, fontes puntiformes.

A partir de 1998, o sistema de referência celeste recomendado pela UAI foi o ICRS (*International Celestial Reference System*). Trata-se de um sistema ideal, com origem no centro de massa do Sistema Solar (aproximadamente heliocêntrico, muito próximo do centro do Sol), sem rotação em relação ao conjunto de objetos extragalácticos. O ICRS é realizado pelo ICRF (*International Celestial Reference Frame*), um conjunto de 212 radiogaláxias³. O uso de radiogaláxias é conveniente por duas razões: (I) objetos extragalácticos, a exceção do Grupo Local de galáxias⁴, têm movimento próprio (veja Sec. 3.8) praticamente nulo e, (II) suas posições podem ser determinadas com altíssima precisão, cerca de alguns milissegundos de arco, através da técnica

³ Radiogaláxia é um tipo de galáxia que apresenta forte emissão em frequências de rádio (entre ~ 10 MHz e 100 GHz), geralmente devido à atividade de um núcleo ativo (acréscimo de matéria em um buraco negro supermassivo no centro da galáxia).

⁴ O Grupo Local é o grupo de galáxias onde se encontra a nossa própria galáxia, a Via Láctea.

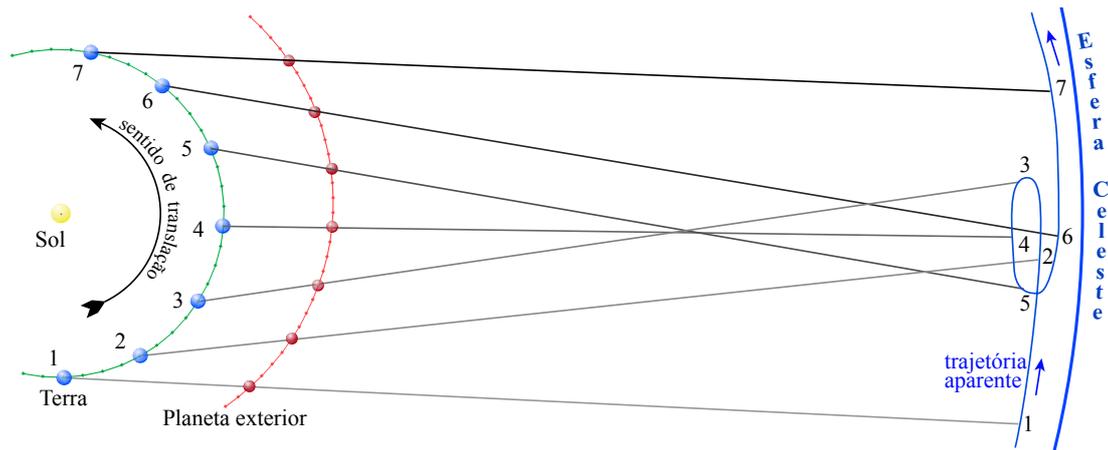


Figura 1.15: Posições da Terra e Marte em suas órbitas em torno do Sol no mesmo período do Fig. 1.14. Entre as posições marcadas 1 e 3, o movimento aparente de Marte é direto. Entre as posições 3 e 5 (quando o planeta está estacionário), o movimento é retrógrado e, em seguida volta a ser direto. Em 4, Marte está em oposição (isto é, o Sol, a Terra e Marte estão aproximadamente alinhados). As posições nas órbitas correspondem a intervalos de 4 semanas.

de interferometria em rádio. No início de janeiro de 2010, o ICRS foi sucedido pelo ICRS2, com 295 fontes em rádio e, em janeiro de 2019, o sistema de referência recomendado passou a ser o ICRS3.

O aumento da precisão na realização dos sistemas de referências celestes foi em grande parte impulsionada pelas observações espaciais feitas pelas missões Hipparcos e Gaia.

Além do sistema de referência celeste, existe também o *sistema de referência terrestre* (ITRS, *International Terrestrial Reference System*). A origem deste sistema é o centro terrestre e, diferente do ICRS, este referencial não é inercial pois gira junto com a Terra. O ITRS depende também de fenômenos geológicos, como a tectônica de placas. O *International Earth Rotation and Reference Systems Service* (IERS) faz a ligação entre o ITRS e ICRS desde 1988, monitorando os parâmetros ligados à rotação da Terra.

1.5 Sistema de Coordenadas

A posição de um astro qualquer na *Esfera Celeste* pode ser definido sem ambiguidade através de dois ângulos em relação ao sistema de coordenadas adotado, que por sua vez é definido a partir de um ponto central. A escolha precisa de um sistema de coordenadas ligado à Esfera Celeste vai depender sobretudo da análise ou problema que se queira resolver.

Os sistemas de coordenadas em astronomia são geralmente dinâmicos, isto é, se alteram com o tempo. Portanto, também precisamos definir a **época** associada às coordenadas de um dado objeto. Desde o final do século ~~XX~~ costumamos usar a época J2000, que corresponde ao sistema de coordenadas das 12h do dia 1^o de janeiro de 2000. Em referências mais antigas encontramos sistemas de coordenadas referentes a B1950, que corresponde aproximadamente ao início do ano de 1950. Esta questão voltará na Sec. 3.2, quando será discutido o principal mecanismo que altera o sistema de coordenadas, a precessão.

Para uma esfera (qualquer uma em princípio), os sistemas de referências utilizados são definidos por um *plano principal* que divide a esfera em duas partes iguais definindo-se assim um grande círculo (Fig. 1.16). Definimos arbitrariamente um ponto de origem neste círculo principal, por onde passa o *meridiano principal*, outro grande círculo perpendicular ao grande círculo precedente.

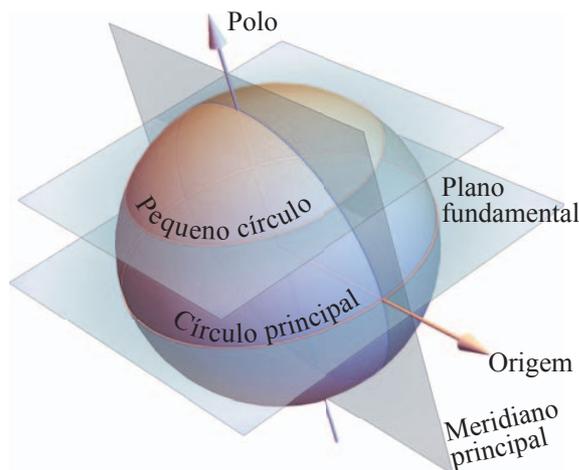


Figura 1.16: As coordenadas em uma esfera são definidas através de um plano fundamental que corta a esfera em duas metades, passando pelo centro (definindo um círculo principal ou equador) e um ponto arbitrário no equador. Através deste ponto traça-se um outro grande círculo, perpendicular ao “equador”, definindo-se assim o meridiano principal. Planos que cortam a esfera, mas não passam pelo centro, definem os pequenos círculos.

Os (pequenos) círculos paralelos ao círculo principal definem as *latitudes* da esfera enquanto os grandes círculos perpendiculares ao círculo principal definem as *longitudes*. Estes ângulos são similares ao que utilizamos para localizar um ponto na superfície terrestre, a longitude e a latitude.

A escolha do ponto central do sistema de coordenadas é arbitrária e depende do problema astronômico em questão. Se o centro do sistema coincide com o centro da Terra, dizemos que o sistema de coordenadas é *geocêntrico*; se o centro for o Sol então temos um sistema *heliocêntrico*; se o centro do sistema de coordenadas for um ponto na superfície da Terra, este sistema será *topocêntrico*.

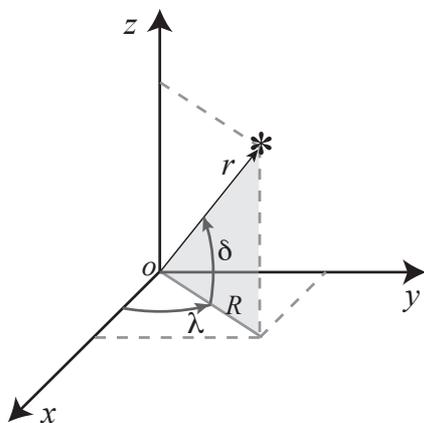


Figura 1.17: Coordenadas esféricas polares, λ e δ de um ponto (sistema dextrogiro, isto é, $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z}$). r é o raio vetor e R é a sua projeção no plano x - y . O ângulo longitudinal é medido a partir do eixo x no sentido anti-horário sobre o plano x - y .

A posição de um ponto qualquer em uma esfera pode ser escrita convenientemente em forma matricial, a partir do sistema de coordenadas esféricas polares (Fig. 1.17):

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \lambda \\ \cos \delta \sin \lambda \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

onde δ e λ são a latitude e a longitude em um dado sistema de coordenadas e ignoramos aqui a coordenada radial, r . Na expressão acima, o vetor (x, y, z) corresponde às coordenadas cartesianas correspondentes às coordenadas esféricas. Esta forma, baseada no sistema de coordenadas esféricas é particularmente útil para o cálculo de transformações de coordenadas (como veremos na seção 1.8).

1.5.1 Coordenadas Horizontais

O plano principal do sistema de coordenadas horizontais é definido como sendo o plano que contém o horizonte do observador. Os dois ângulos que definem a posição de um astro qualquer são a *altura*, h , e o *azimute*, A , como mostra a figura 1.18.

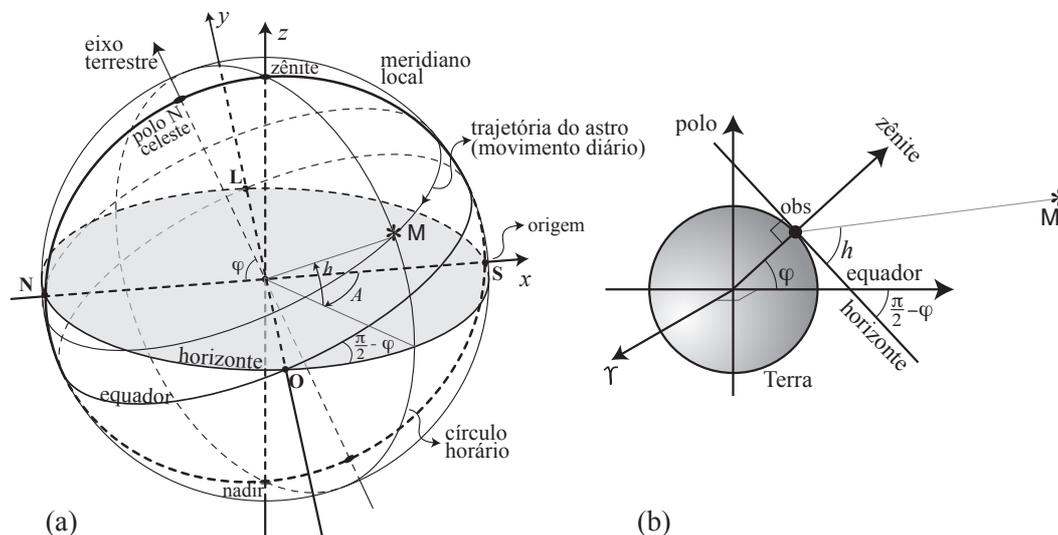


Figura 1.18: Sistema de coordenadas horizontal. O astro M tem coordenadas h (altura) e A (azimute). Os “polos” deste sistema são o zênite e o nadir. O azimute é medido a partir do Sul em direção ao Oeste, ao longo do horizonte (o círculo principal neste sistema). A altura é positiva em direção ao zênite e negativa em direção ao nadir. Também são mostrados na figura os eixos cartesianos x , y e z .

O horizonte do observador deve ser definido corretamente. O horizonte visível ou aparente é sujeito às irregularidades topográficas, não definindo necessariamente desta forma um grande círculo e, conseqüentemente, não servindo como base para a definição de um sistema de coordenadas. Assim, definimos o *horizonte astronômico* como sendo o círculo centrado no observador, perpendicular à sua vertical (definida como paralela ao campo gravitacional), independentemente de acidentes geográficos. A intersecção desta mesma vertical com a esfera celeste, define o **zênite** e o **nadir**.

A altura de um astro é medida a partir do horizonte astronômico, sendo positivo quando o astro está acima do horizonte e negativo no caso contrário. Assim o zênite tem por definição uma altura de 90° e o nadir, -90° . O pequeno círculo paralelo ao horizonte, portanto de altura constante, é chamado de *Almucântar* ou *Almucântara*.

O *meridiano principal* ou **meridiano local** é o grande círculo que passa pelo zênite na direção norte–sul, perpendicular ao horizonte. Também chamamos de **primeiro vertical** (assim mesmo, no masculino) o grande círculo que passa pelo zênite porém na direção Leste–Oeste.

O azimute é por definição medido a partir do meridiano Sul (0°) do observador e os ângulos são contados no sentido \rightarrow Oeste (90°) \rightarrow Norte (180°) \rightarrow Leste (270°). Por ser uma definição arbitrária, o meridiano de origem do azimute é as vezes localizado no Norte ao invés do Sul. Neste caso, teríamos Norte (0°) \rightarrow Leste (90°), etc.

Em notação matricial, a posição de um astro de altura h e azimute A é (atenção com o sinal negativo da coordenada y):

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \cos h \cos A \\ -\cos h \sin A \\ \sin h \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Devemos notar ainda que neste sistema, as coordenadas de um astro variam com o tempo devido sobretudo ao movimento diário (rotação da Terra). De fato, para um observador no

Hemisfério Norte olhando para o Sul, o azimute de um astro (que não seja circumpolar, veja sec. 1.7) sempre aumenta durante o decorrer de um dia (exceto pela descontinuidade a 360°). Já um observador no Hemisfério Sul, olhando para o Norte, verá o azimute de um astro (que não seja circumpolar) diminuir com o passar do tempo.

1.5.2 Coordenadas Equatoriais

No sistema equatorial, o plano principal é a projeção do equador terrestre na esfera celeste, chamado *equador celeste* (Fig. 1.19). A projeções dos polos terrestres na esfera celeste definem os polos celestes Norte e Sul.

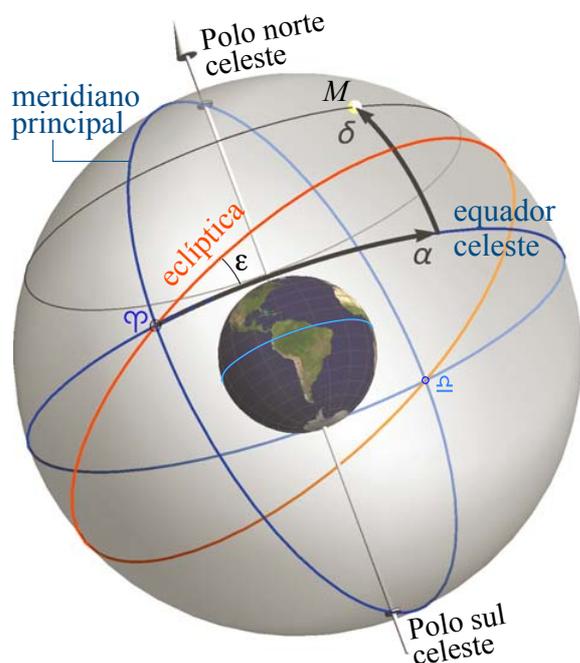


Figura 1.19: Sistema de coordenadas equatoriais. O astro M tem coordenadas ascensão reta (α , medida a partir do ponto vernal, Υ) e declinação (δ). Atualmente, a inclinação do equador celeste em relação à eclíptica, ε , é de aproximadamente $23^\circ 26' 21''.45$ no início do ano 2000.

A origem do sistema de coordenadas é definida pela intersecção do equador celeste com a eclíptica (a trajetória aparente do Sol na esfera celeste durante um ano). Como há duas intersecções entre o equador celeste e a eclíptica, foi escolhido arbitrariamente a intersecção em que o Sol cruza o equador celeste de Sul para Norte. Este ponto é chamado *equinócio vernal* ou primeiro ponto de Áries (usamos o símbolo Υ)⁵. Quando o Sol está neste ponto temos o início do outono no Hemisfério Sul e da primavera no Norte. A palavra equinócio vem do latim e significa “noites iguais” – quando o Sol se encontra no equinócio a duração da noite é a mesma em toda a Terra.

A intersecção entre o equador celeste e a eclíptica a 180° do equinócio vernal, quando o Sol passa de Norte para Sul, é chamada *ponto de Libra*, Ω , ou equinócio de setembro.

A *declinação*, δ , de um ponto M é a distância angular medida sobre o meridiano que passa por este ponto a partir do equador celeste. Quando medido na direção do Polo Norte celeste $\delta > 0$, caso contrário a declinação é negativa. A *ascensão reta*, α , é o ângulo entre o ponto vernal e o meridiano do astro M . A ascensão reta é medida na direção Leste. Note que a ascensão reta cresce no sentido oposto ao azimute das coordenadas horizontais e que a ascensão reta aumenta no sentido do *movimento anual* do Sol e do *movimento direto* do planetas.

⁵ Alguns autores chamam o ponto vernal de “ponto gama”, provavelmente pela semelhança entre a letra grega “ γ ” (gama) e o símbolo Υ .

Em notação matricial, a posição de um astro de *declinação*, δ , e *ascensão reta*, α é:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Por convenção, a ascensão reta é medida em horas, minutos e segundos como o tempo (ao invés de graus, minutos e segundos de arco). A relação é simplesmente $1^{\text{h}} = 15^{\circ}$.

A ascensão reta e a declinação de uma estrela não se alteram devido ao movimento diurno de rotação da Terra. Isto não significa que no sistema equatorial não haja uma variação das coordenadas com o tempo, mas que esta variação é muito mais lenta que no caso das coordenadas horizontais. A figura 1.20 mostra um planisfério de toda a esfera celeste em coordenadas equatoriais, destacando a faixa da Via Láctea e as estrelas mais brilhantes.

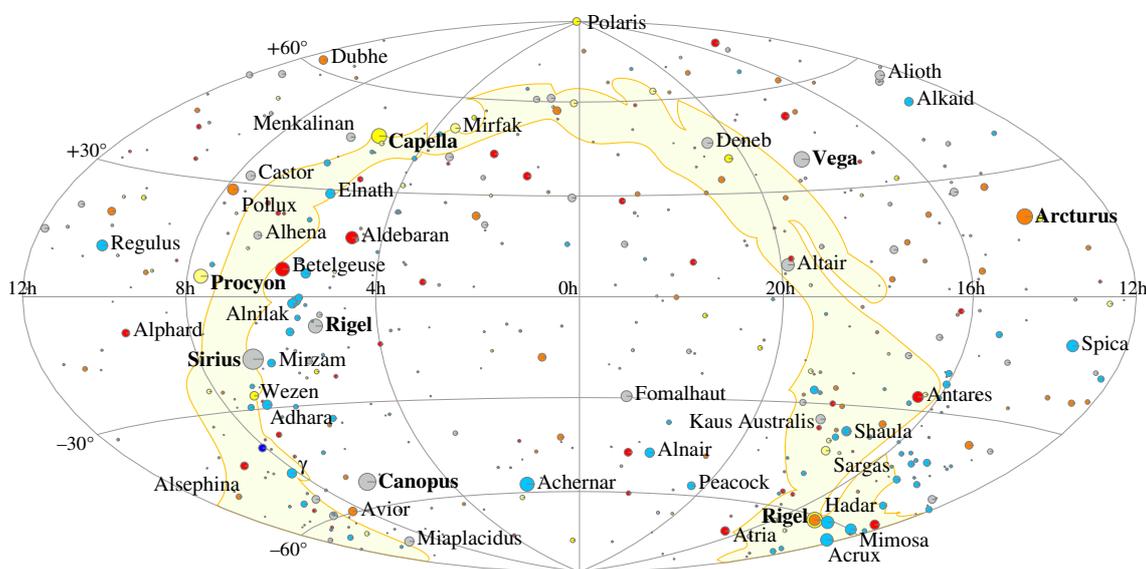


Figura 1.20: Planisfério em coordenadas equatoriais usando projeção Aitoff. O centro do planisfério é o ponto vernal, Υ . A estrela Polaris se encontra praticamente no polo celeste Norte. As estrelas mais brilhantes também estão listadas na Tabela 1.2.

Coordenadas Horárias

O sistema de coordenadas horárias é muito semelhante ao sistema equatorial. O círculo principal também é a projeção do equador terrestre e as declinações são medidas da mesma forma. Contudo, a origem das coordenadas longitudinais é diferente. No sistema horário a origem é o **meridiano local** (ou meridiano principal) do observador, como no sistema horizontal. Este ângulo é chamado **ângulo horário**, H (Fig. 1.21). Note que o ângulo horário é medido no sentido oposto à ascensão reta (mas no mesmo sentido que o azimute). Chamamos de *trânsito* quando um astro passa pelo meridiano local do observador.

Enquanto a ascensão reta não varia devido ao movimento diurno da esfera celeste, o ângulo horário varia. A relação entre estas duas coordenadas está diretamente ligada ao movimento diurno da origem do sistema de coordenadas equatoriais, o ponto vernal, Υ . A soma da ascensão reta com o ângulo horário resulta em

$$T_s = H + \alpha, \quad (1.10)$$

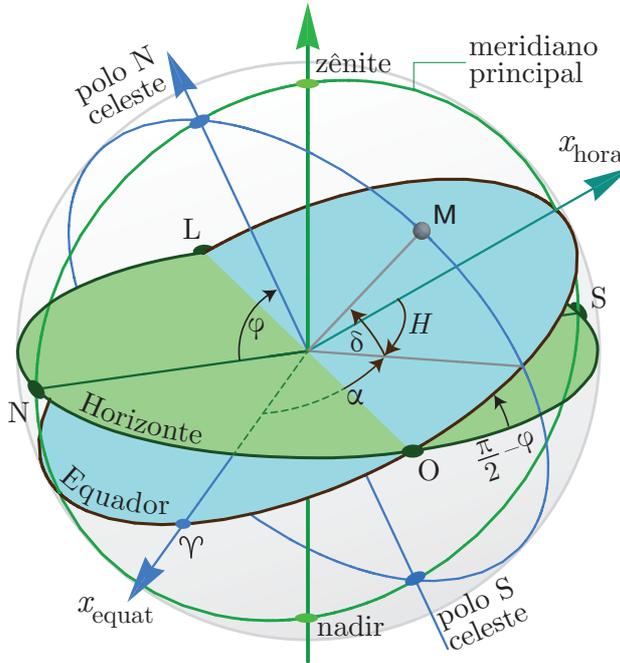


Figura 1.21: Sistema de coordenadas horárias. O astro M tem coordenadas ângulo horário (H) e declinação (δ). A ascensão reta, α , também é medida ao longo do equador celeste, porém a partir do ponto vernal. A latitude do observador é φ , portanto o ângulo entre o equador celeste e o horizonte é $\pi/2 - \varphi$. Os eixos x_{hora} e x_{equat} correspondem aos sistemas horário e equatorial, respectivamente. Como o polo Norte celeste está acima do horizonte, este exemplo é de um observador do Hemisfério Norte.

onde T_s é o *tempo sideral local* (o tempo sideral será discutido em detalhes na seção 2.1.3). Contudo é importante notar que T_s também pode ser interpretado como um ângulo, o *ângulo horário* do ponto vernal.

Em notação matricial, a posição em coordenadas cartesianas de um astro com ângulo horário H e declinação δ é dada por:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos H \\ -\cos \delta \sin H \\ \sin \delta \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

1.5.3 Coordenadas Eclípticas

O plano principal do sistema de coordenadas eclípticas é o plano da órbita da Terra em torno do Sol. Este sistema é particularmente útil no estudo de corpos do Sistema Solar, uma vez que a maioria dos corpos (sobretudo os planetas) estão em órbitas praticamente coplanares.

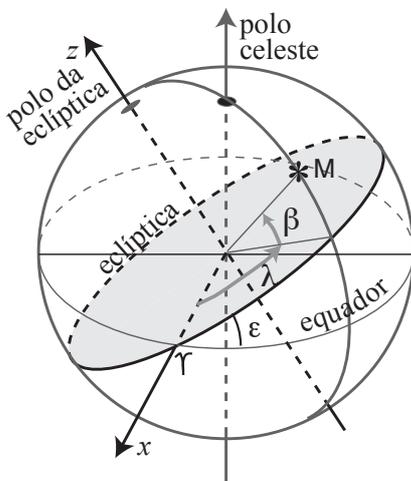


Figura 1.22: Sistema de coordenadas eclípticas. O astro M tem coordenadas longitude eclíptica (λ) e latitude (β). A inclinação da eclíptica em relação ao equador celeste é ε que vale aproximadamente $23^\circ 26' 21''$ atualmente.

As coordenadas neste sistema são a *longitude eclíptica*, λ , e a *latitude eclíptica*, β (Fig. 1.22). O ponto de origem é, como para as coordenadas equatoriais, o ponto vernal. A latitude β é

medida a partir da eclíptica, sendo positivo em direção Polo Norte da eclíptica (o mais próximo do Polo Norte celeste) e negativo em direção ao Sul. A longitude λ , assim como a ascensão reta é medida a partir do ponto vernal, crescendo em direção ao Leste (como a ascensão reta). Uma aproximação boa e útil neste sistema de coordenadas é $\beta_{\odot} \simeq 0$ sempre (só não é exatamente zero porque a órbita da Terra não é fixa no espaço devido ao torque da Lua e dos planetas).

1.5.4 Coordenadas Galácticas

Para as coordenadas galácticas, o plano principal é definido pelo plano do disco da Via Láctea⁶, o chamado *Equador Galáctico*. A origem é dada pela direção do centro galáctico, que se encontra na direção da constelação de Sagitário, com coordenadas $\alpha = 17^{\text{h}}45^{\text{m}}62$ e $\delta = -28^{\circ}56',17$ (J2000), veja Fig. 1.23. O “Polo Norte galáctico” se encontra em $\alpha = 12^{\text{h}}51^{\text{m}}44$ e $\delta = 27^{\circ}07',7$. Também é comum definirmos e usarmos a inclinação do equador galáctico em relação ao equador celeste, o ângulo $i = 90^{\circ} - \delta \approx 62,872$ e a linha dos nodos (a intersecção do equador celeste com o equador galáctico) localizada em $\alpha_{\text{nodo}} = 282,25$.

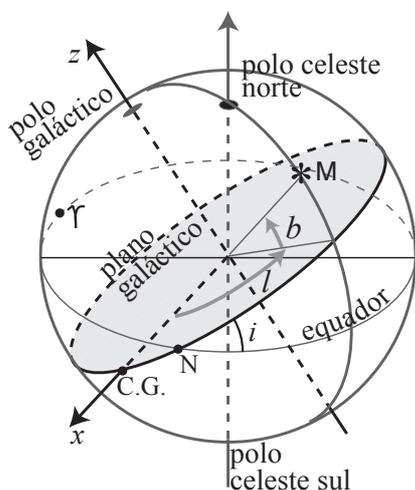


Figura 1.23: Sistema de coordenadas galácticas. O astro M tem coordenadas longitude galáctica (l) e latitude (b). O ponto N é a intersecção do plano galáctico com o equador celeste (o nodo), C.G. é a direção do centro da Galáxia (que fica na constelação de Sagitário) e i é a inclinação do plano galáctico em relação ao equador celeste.

Este sistema é utilizado principalmente em astronomia extragaláctica (como o estudo do Grupo Local de galáxias, no qual a Via Láctea e a galáxia de Andrômeda são os principais membros) ou em problemas ligados à nossa galáxia como um todo (por exemplo, o movimento das estrelas do disco da Via Láctea).

Antes de 1959, a origem do sistema de coordenadas galácticas coincidia com o nodo (intersecção do plano galáctico com o equador celeste). Com a adoção do novo sistema, foram introduzidos os expoentes I e II para indicar o sistema antigo e o novo, i.e., $(l^{\text{I}}, b^{\text{I}})$ e $(l^{\text{II}}, b^{\text{II}})$. A diferença dos dois sistemas é simplesmente $l^{\text{I}} = l^{\text{II}} - 33,0$. Se não tiver o índice (e for uma publicação posterior aos anos 1980), assumimos que l e b sejam do sistema “novo”.

Coordenadas Supergalácticas

Para o estudo de fenômenos ligados à estrutura em grande escala do Universo, foi introduzido o sistema de coordenadas Supergalácticas pelo astrônomo franco-americano Gérard de Vaucouleurs (1918–1995) no início dos anos 1950 e formalizada em 1976. O plano principal é definido pelo

⁶Nossa galáxia, onde se encontra o Sistema Solar, é uma espiral, provavelmente barrada, com a distribuição da maioria das estrelas em um disco relativamente fino, com um diâmetro de cerca de 100 mil anos-luz e uma espessura inferior a 1000 anos-luz.

plano onde se encontram uma grande concentração de galáxias do Superaglomerado Local⁷, com centro no aglomerado de galáxias de Virgo (Constelação da Virgem). As coordenadas deste sistema são a latitude (SGB) e a longitude (SGL) supergalácticas.

A origem deste sistema de coordenadas é, aproximadamente, na direção $\alpha = 2^{\text{h}}49^{\text{m}}$ e $\delta = +59^{\circ}32'$ (J2000, coordenadas equatoriais), na constelação de Cassiopéia. Em coordenadas Galácticas, a origem do sistema supergaláctico é $l = 137^{\circ}37'$ e $b = 0^{\circ}$. O plano fundamental do sistema de coordenadas supergaláctico é quase perpendicular ($83^{\circ}5'$) ao plano da Via Láctea (sistema galáctico).

Também encontramos frequentemente o sistema supergaláctico em coordenadas cartesianas, SBX, SBY e SBZ, onde o eixo z aponta na direção do polo supergaláctico Norte (que corresponde, em coordenadas galácticas, a $l = 47^{\circ}37'$ e $b = +6^{\circ}32'$), na constelação de Hércules.

1.6 Estações do ano

As *estações do ano* são uma forma de subdividirmos o ano em períodos menores, baseada nas mudanças meteorológicas e ecológicas cíclicas. Um exemplo típico de latitudes temperadas (grosseiramente entre 30 e 60 graus de latitude) são as estações: frio \rightarrow ameno \rightarrow quente \rightarrow ameno \rightarrow frio novamente. Na zona equatorial da Terra, temos muitas vezes apenas duas estações: quente e chuvoso \rightarrow muito quente e seco. No Egito antigo, costumava-se dividir o ano em 3 estações: cheia do Nilo \rightarrow emersão (a terra fértil reaparece com a vazão do Nilo) \rightarrow baixa do Nilo (época da colheita). A divisão mais comum de encontrarmos hoje em dia é a de 4 estações: Primavera, Verão, Outono, Inverno.

Dada a importância das estações do ano, principalmente em culturas agrárias, era muito importante poder prever o início de cada estação e conhecer sua duração. Desde a antiguidade, notou-se a correlação entre o movimento anual aparente do Sol e as estações do ano. Algumas observações simples mostravam esta correlação, por exemplo, nas latitudes temperadas: na época fria do ano, as sombras são maiores ao meio-dia; algumas estrelas são observadas na época quente, outras na época fria; o nascer e o pôr do Sol estão mais próximos das direções leste e oeste nas estações intermediárias. Já no Egito antigo, quando a estrela Sirius começava a ser observada no céu pouco antes do nascer do Sol a estação da enchente estaria iniciando.

A razão das alterações meteorológicas anuais se dá devido à mudança da *insolação*, isto é, a quantidade de energia recebida do Sol incide na superfície da Terra. A razão da variação da insolação está ligada ao fato da Terra ser (aproximadamente) uma esfera com o eixo de rotação inclinado em relação ao plano que contém sua órbita em torno do Sol.

Disto resulta que, dependendo da época do ano, os Hemisférios Norte e Sul são iluminados diferentemente, dando origem às estações do ano. A figura 1.24 mostra este fenômeno. Também podemos dizer que as estações do ano decorrem do ângulo entre o eixo de rotação da Terra e o eixo de translação da Terra ao redor do Sol. Com esta geometria, podemos definir mais abaixo as estações astronômicas do ano (o que é um pouco diferente das estações meteorológicas do ano).

A órbita terrestre não é exatamente circular, porém note que a variação da distância da Terra ao Sol não é responsável pelas estações do ano. A diferença de distância entre o **afélio** (maior distância entre a Terra e o Sol) e o **periélio** (menor distância) devido à elipticidade da órbita terrestre é de aproximadamente 5 milhões de quilômetros, ou seja, uma variação de apenas 3,3% da distância média. Isto corresponde a uma variação da luminosidade solar (taxa de energia do Sol que chega na Terra) de cerca de 6,8%, insuficiente para provocar as estações do ano. Além disto, se a distância fosse importante neste fenômeno, a Terra teria a mesma estação do ano nos dois hemisférios, Norte e Sul, simultaneamente.

⁷O Superaglomerado Local ou de Virgo corresponde a uma região de cerca de 30 Mpc de diâmetro que contém o Grupo Local, o Aglomerado de Virgo e várias dezenas de outros grupos de galáxias, com uma distribuição espacial achatada.

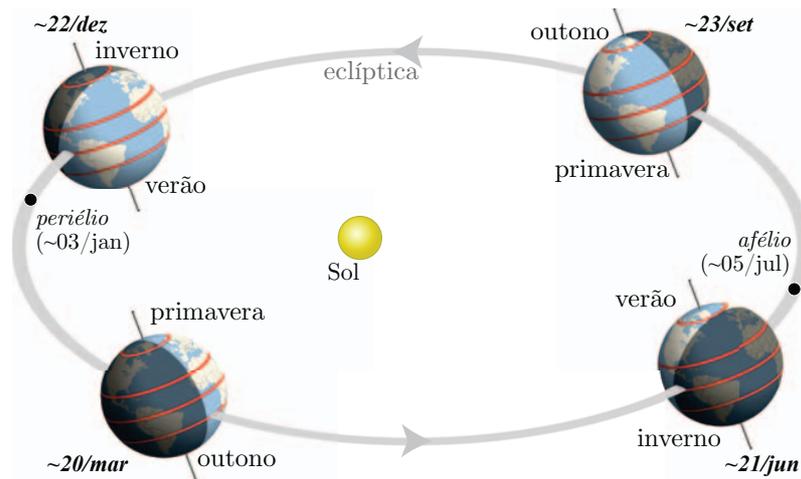


Figura 1.24: As estações do ano ocorrem devido à inclinação do eixo da Terra em relação ao seu plano orbital ao redor do Sol, e nada tem a ver com a distância da Terra ao Sol. Os círculos vermelhos sobre a Terra representam o equador, os trópicos e os círculos polares. Na figura, a órbita parece mais achatada para criar um efeito de perspectiva.

O principal efeito da variação da distância Terra–Sol, devido ao fato da Terra seguir uma elipse e não um círculo em torno do Sol, é que as estações do ano não têm todas exatamente a mesma duração (veja Tabela 1.3) e a duração das estações do ano variam lentamente com o tempo (veja a Fig. 5.16 na pág. 189).

Tabela 1.3: Início e duração das estações do ano no Hemisfério Sul (para o Hemisfério Norte basta permutar Outono \rightarrow Primavera, Inverno \rightarrow Verão, etc.). Estes valores são válidos atualmente (mais ou menos alguns séculos) e variam com o tempo (veja Sec. 5.6).

	Outono	Inverno	Primavera	Verão
Início aproximado	20/03	21/06	23/09	22/12
Duração média (dias)	92,76	93,65	89,84	88,99

O verão no Hemisfério Sul é mais curto que o inverno (e conseqüentemente mais curto que o verão no Hemisfério Norte) porque a Terra se encontra próxima do periélio nesta época do ano (o periélio ocorre por volta do dia 2 a 4 de janeiro) e se move mais rápido em sua órbita ao redor do Sol. No início de julho, a Terra está no afélio e se move mais lentamente; isto é um resultado da 2^a lei de Kepler (veja seção 5.3). Na página 201 temos uma tabela das datas de periélio e afélio.

Como vimos, devido à inclinação do eixo de rotação da Terra em relação ao plano de sua translação, o Sol tem uma trajetória aparente anual – a eclíptica – inclinada em relação ao equador. Podemos relacionar isto às estações do ano que ocorrem na Terra. Em outros planetas do Sistema Solar, que também têm o eixo de rotação inclinado ao plano orbital, também este fenômeno pode ser observado (veja seção 5.1).

A definição astronômica das estações do ano está relacionada com os solstícios e equinócios. A passagem do Sol pelo equinócio vernal marca o início do outono no Hemisfério Sul; neste momento, por definição, a ascensão reta do Sol é zero ($\alpha_{\odot} = 0^{\text{h}}$). O inverno tem início quando $\alpha_{\odot} = 6^{\text{h}}$ (dizemos que o Sol está no solstício de inverno), a primavera se inicia quando $\alpha_{\odot} = 12^{\text{h}}$ (equinócio de primavera), e o verão quando $\alpha_{\odot} = 18^{\text{h}}$ (solstício de verão). No Hemisfério Norte, ao invés do início do verão, temos o início do inverno quando $\alpha_{\odot} = 18^{\text{h}}$ e o solstício é chamado de inverno (Fig. 1.25).

Devido à obliquidade da eclíptica, também podemos definir algumas latitudes especiais. No início do verão do Hemisfério Sul, o Sol passa pelo zênite de observadores que estejam na latitude $\varphi = -\varepsilon$, onde $\varepsilon = 23^{\circ}26'$ é a inclinação do eixo terrestre. Esta latitude é chamada *Trópico de Capricórnio*, veja Fig. 1.26. Da mesma forma, no início do verão do Hemisfério Norte, o Sol passa pelo zênite na latitude $\varphi = +\varepsilon$; este é o *Trópico de Câncer*. Se a latitude do observador estiver

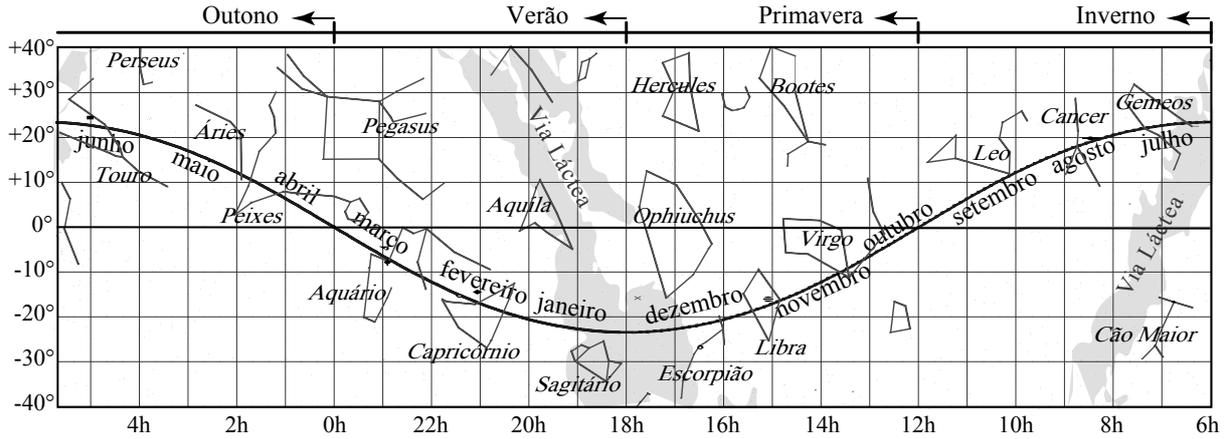


Figura 1.25: Detalhe da esfera celeste em coordenadas equatoriais mostrando a eclíptica com os meses que correspondem à posição do Sol. O início das estações para o Hemisfério Sul está assinalado acima da figura. As constelações do Zodíaco (e Ophiucus) estão no caminho aparente do Sol, com declinação entre $\pm 23^{\circ}44'$.

entre $+23^{\circ}26'$ N e $23^{\circ}26'$ S este ver, pelo menos uma vez por ano, o Sol passar pelo zênite. Para observadores fora desta zona, o Sol nunca passa pelo zênite.

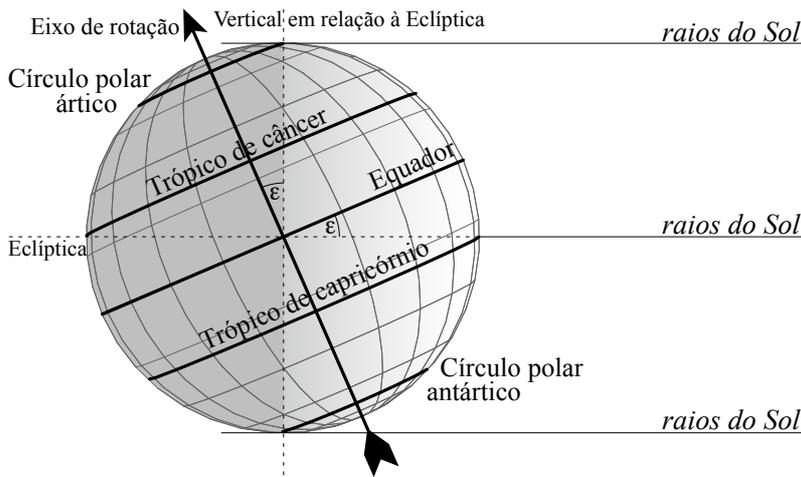


Figura 1.26: Diagrama ilustrando a definição dos trópicos de câncer e capricórnio e os círculos polares. O ângulo ε é a inclinação do eixo da Terra (obliquidade da eclíptica). Como o Sol está muito distante, podemos assumir que os raios de luz chegam paralelos na Terra. A figura corresponde ao momento do solstício no Hemisfério Sul. Após seis meses, os raios do Sol chegam perpendicularmente no Trópico de Câncer (solstício do Hemisfério Norte).

A partir de uma certa latitude podemos observar o Sol durante 24h (o chamado Sol da meia-noite). Para isto, a latitude deve ser superior a $90^{\circ} - \varepsilon$, ou seja $\pm 66^{\circ}33'$ (dependendo se estamos no Hemisfério Norte ou no Sul). Esta latitudes são os *círculos polares Ártico e Antártico*.

A forma como o Sol ilumina a superfície terrestre nos solstícios e equinócios pode ser vista na Fig. 1.27.

Na seção 2.6 veremos como varia a taxa de energia recebida (a iluminação) do Sol durante o ano para diferentes latitudes. Também discutiremos as estações do ano em outros planetas do Sistema Solar na seção 5.1.

1.7 Movimento diário dos astros

Como já foi dito na seção 1.3, os objetos celestes têm um movimento aparente diário, surgindo na direção Leste e se pondo na direção Oeste. Para um observador no Hemisfério Norte, a trajetória

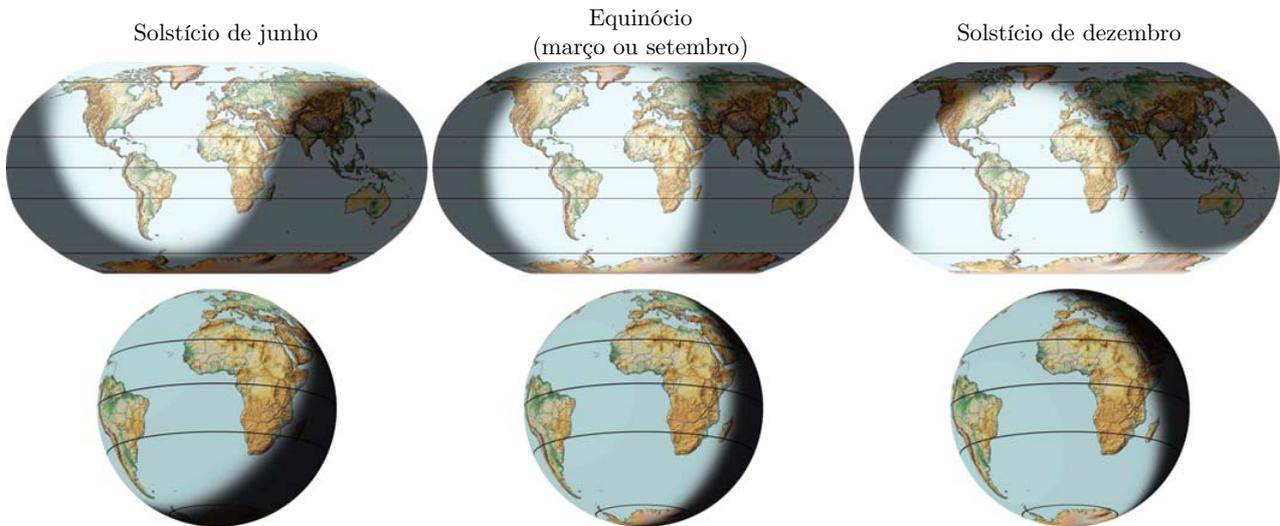


Figura 1.27: Iluminação da Terra no início das estações do ano (solstícios e equinócios) ao meio-dia de Brasília (exceto para o solstício de dezembro, quando o horário de verão pode estar em vigência em alguns estados). Na linha de cima vemos os planisférios com projeção Robinson (linhas de latitudes paralelas) e abaixo na forma de um globo (projeção ortográfica).

diária de um astro é um arco que culmina na direção sul, momento da *passagem meridiana* do astro. A figura 1.28 ilustra este movimento. No Hemisfério Sul, a trajetória é semelhante, mas a **culminação** se dá na direção norte.

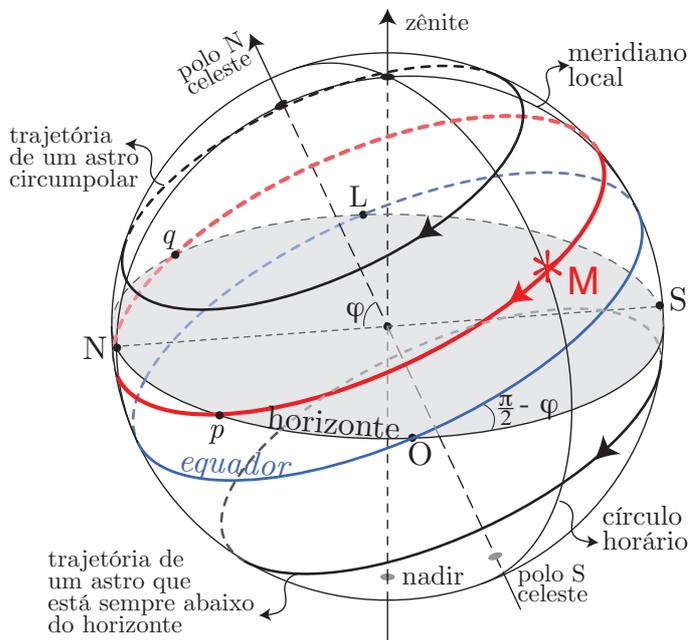


Figura 1.28: Movimento diário aparente. Como a Terra gira em torno do seu eixo de Oeste para Leste, temos a impressão de que a esfera celeste gira de Leste para Oeste. Os astros descrevem uma trajetória de declinação constante; o ângulo Horário e o azimute aumentam à medida que a estrela se desloca na esfera celeste. O astro M “nasce” no ponto q e se põe no ponto p .

Podemos notar nesta figura que nem todos os astros são visíveis para um dado observador: dependendo da declinação do astro, este nunca está acima da linha do horizonte. Por outro lado, também dependendo da declinação, existem astros que sempre estão acima da linha do horizonte. Um tal astro é chamado *circumpolar*. Um astro com declinação igual a zero (isto é, no equador celeste) se levanta exatamente na direção Leste e se põe no Oeste.

Observadores no Hemisfério Sul olhando na direção do Sul geográfico podem ver as estrelas girando no sentido horário, como um relógio (Fig.1.29, esquerda). No Hemisfério Norte ocorre o

oposto, os astros apresentam um movimento aparente no sentido anti-horário quando observador na direção do Norte geográfico (Fig. 1.29, direita). O movimento aparente tem sentido invertido quando observamos na direção oposta, por exemplo, observadores no Hemisfério Sul olhando na direção do Norte geográfico.

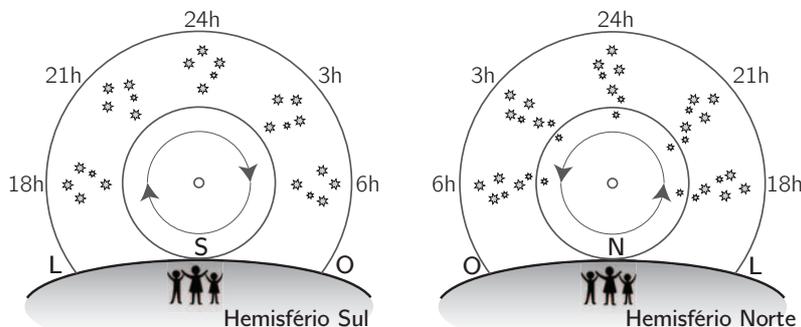


Figura 1.29: Esquerda: Observação do movimento diário dos astros no Hemisfério Sul no sentido horário. Direita: No Hemisfério Norte, os astros têm um movimento aparente anti-horário, quando olhamos na direção do Norte geográfico

Podemos relacionar o sistema de coordenadas equatorial e horizontal *topocêntricos* de um dado observador e obter as declinações que correspondem aos astros circumpolares e aqueles que não são nunca visíveis. A Fig. 1.30 ilustra esta geometria.

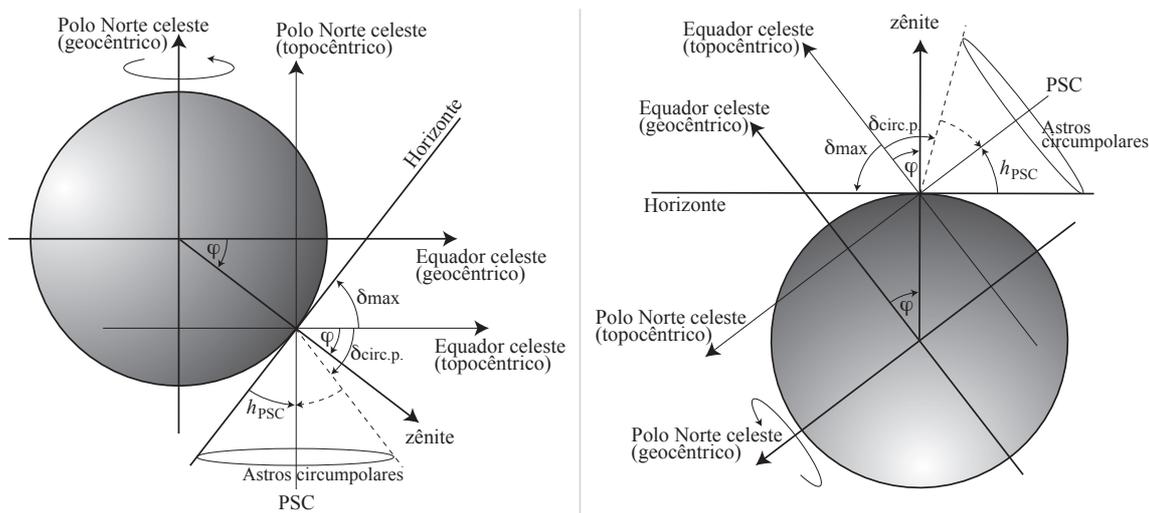


Figura 1.30: Geometria correspondente à declinação máxima de astros visíveis e de astros circumpolares para um observador no Hemisfério Sul. Esquerda: Perspectiva onde o equador está na horizontal (apropriado para coordenadas equatoriais). Direita: perspectiva onde o horizonte do observador está na horizontal (apropriado para coordenadas horizontais).

A latitude ϕ é negativa no Hemisfério Sul. O ângulo h_{PSC} é a altura do Polo Sul celeste. Ela é sempre positiva para um observador no Hemisfério Sul.

O ângulo $\delta_{circ.p.}$ é a declinação a partir da qual os astros são circumpolares (isto é, nunca estão abaixo do horizonte). Ela é negativa para um observador no Hemisfério Sul, positivo no Norte.

O ângulo δ_{max} é a declinação máxima observável para um observador no Hemisfério Sul; neste caso ela é positiva. Para um observador no Hemisfério Norte, teremos uma declinação mínima (negativa) observável.

As seguintes relações, para o Hemisfério Sul, podem ser obtidas:

$$\begin{aligned} h_{PSC} + (90^\circ - |\phi|) &= 90^\circ &\Rightarrow h_{PSC} &= |\phi|; \\ |\delta_{circ.p.}| + h_{PSC} &= 90^\circ &\Rightarrow \delta_{circ.p.} &= -(90^\circ - |\phi|); \\ \delta_{max} + |\phi| &= 90^\circ &\Rightarrow \delta_{max} &= 90^\circ - |\phi|. \end{aligned} \quad (1.12)$$

No Hemisfério Norte temos relações semelhantes (lembrando que no Norte, $\phi > 0$):

$$h_{\text{PNC}} = \phi; \quad \delta_{\text{circ.p.}} = 90^\circ - \phi; \quad \delta_{\text{min}} = -(90^\circ - \phi). \quad (1.13)$$

Estas relações são válidas quando a refração atmosférica é desprezível e os sistemas geocêntrico e topocêntrico são coincidentes (isto é, válido para astros com distância muito maior que o raio da Terra). Discutiremos isto no capítulo 3.

Das relações acima, destacamos que a observação da altura do polo celeste acima do horizonte – no Hemisfério Norte isto é bem simples pois há uma estrela brilhante praticamente no polo, a *Estrela Polar* – dá uma maneira simples para determinarmos a **latitude** geográfica do observador.

As relações acima também implicam que a distância do zênite ao equador celeste é igual (em módulo) à latitude geográfica do observador.

Movimento diário do Sol nos equinócios e solstícios

Durante um ano, o Sol completa uma volta ao longo da eclíptica. Isto significa que a declinação do Sol varia durante o ano (veja a Fig. 1.25) e, portanto, sua trajetória aparente diurna muda com o tempo. Na figura 1.31 podemos ver a trajetória aparente do Sol nos dias de solstício (junho e dezembro) e equinócios (março e setembro, que correspondem à mesma curva). Aqui assumimos uma aproximação de que a variação de declinação do Sol ao longo de um dia pode ser desprezada em primeira aproximação (o que é bem razoável para a escala da Fig. 1.31).

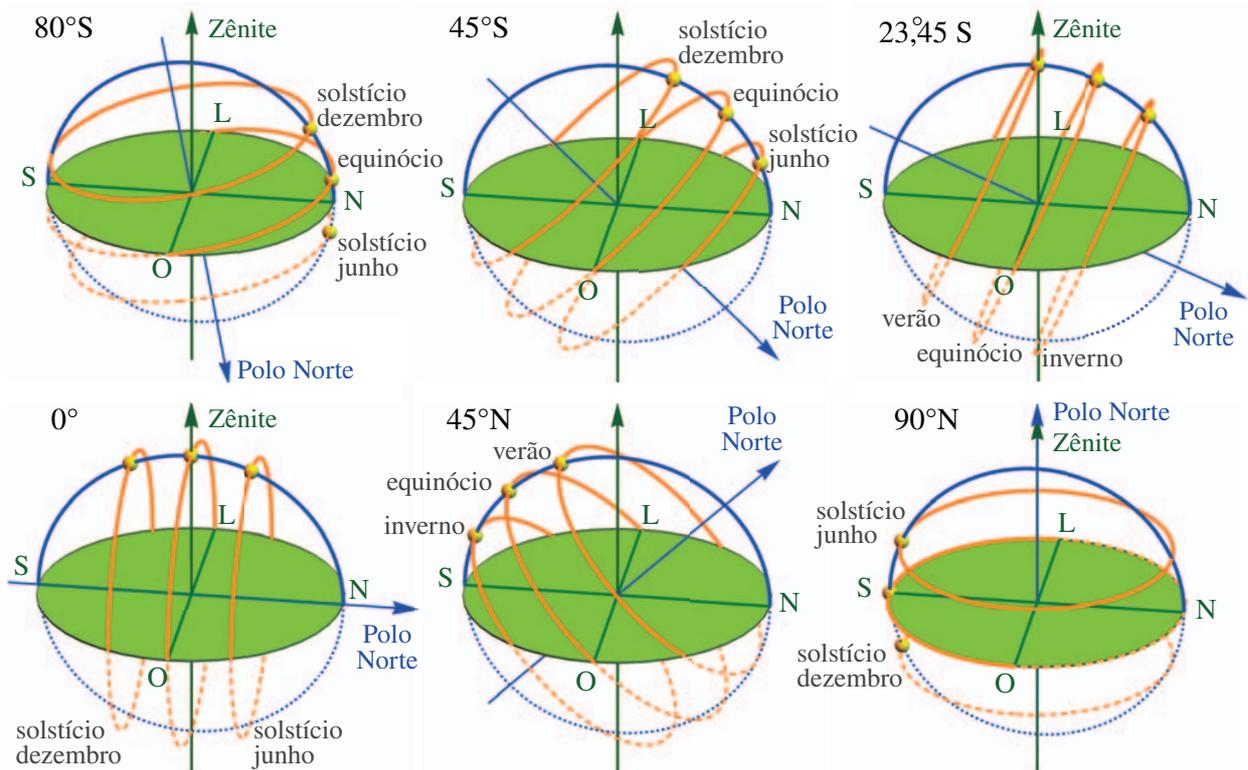


Figura 1.31: Trajetórias do Sol para observadores em diversas latitudes. As linhas laranjas representam em todos os painéis as trajetórias do Sol nos solstícios e equinócios (os dois equinócios correspondem à mesma linha). O disco verde (em perspectiva) representa o horizonte local. O círculo azul é o meridiano principal local (passa pelo Norte, Sul e zênite).

Para observadores em latitudes acima (em módulo) dos círculos polares, o Sol tem uma trajetória circumpolar no solstício de verão (junho no hemisfério Norte, dezembro no hemisfério Sul). Vemos também, como esperado, que o Sol passa pelo zênite no dia do solstício para observadores

nos trópicos de Câncer e Capricórnio ($\sim 23^\circ 44'$). Um observador no equador da Terra observa a passagem do Sol pelo zênite nos dias de equinócio.

As trajetórias mostradas na Fig. 1.31 estão relacionadas com as estações do ano. Esta figura pode ser comparada com as figuras 1.27 e 1.33, mais adiante.

1.7.1 Culminação

Inicialmente, vamos considerar astros que não são circumpolares como o astro M da Fig. 1.28. O movimento aparente diário leva os astros a cruzarem o meridiano principal do observador. Neste momento dizemos que o tem seu *trânsito superior* ou *culminação superior*. No momento da culminação superior o astro terá sua altura máxima. Cerca de 12h depois, o astro cruza o meridiano oposto e ocorre a *culminação inferior*. A culminação inferior ocorre abaixo do horizonte do observador.

Já os astros circumpolares, que estão sempre acima o horizonte, cruzam apenas o meridiano principal, também com culminação superior e inferior, como mostra a Fig. 1.32.

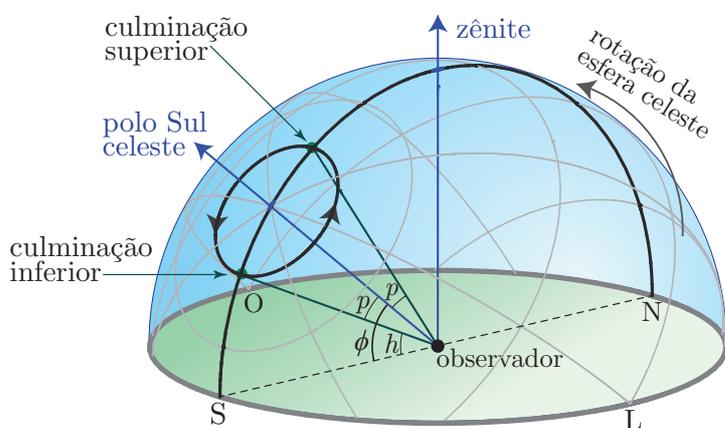


Figura 1.32: Altura de um astro circumpolar observado no Hemisfério Sul nos momentos de culminação superior e inferior devido ao movimento aparente diário. O ângulo ϕ é a altura do polo celeste e a latitude do observador e o ângulo p é medido entre os pontos de culminação superior e inferior em relação ao polo celeste. A altura da culminação inferior neste exemplo é h . Se p for maior que a distância zenital do polo celeste, a culminação superior se dá na direção oposta do polo em relação ao zênite.

A altura máxima que um astro atinge durante um dia será $h_{\text{sup}} = \phi + p$ e a altura mínima, $h_{\text{inf}} = \phi - p$, onde ϕ é a latitude do observador e p é o ângulo entre o ponto de culminação superior e o polo celeste acima do horizonte. O ângulo p é o complemento da declinação, δ , e tomando cuidado com as latitudes e declinações que podem ser negativas, obtemos a seguinte expressão válida para observadores em qualquer latitude:

$$h_{\text{sup}} = 90^\circ - |\phi - \delta|. \quad (1.14)$$

Para sabermos em qual direção, Norte ou Sul em relação ao zênite, será a culminação superior temos:

$$\text{se } \phi > \delta \rightarrow \text{Sul} ; \quad \phi = \delta \rightarrow \text{Zênite} ; \quad \phi < \delta \rightarrow \text{Norte},$$

para qualquer latitude ou declinação. Se $h_{\text{sup}} < 0$ então o astro é circumpolar e nunca está acima do horizonte. Por exemplo, suponha um observador no Hemisfério Sul na latitude $\phi = -23,5^\circ$:

Para $\delta = -60^\circ \rightarrow h_{\text{sup}} = +53,5^\circ$ culminação na direção Sul.

Para $\delta = -10^\circ \rightarrow h_{\text{sup}} = +76,5^\circ$ culminação na direção Norte.

Para $\delta = +70^\circ \rightarrow h_{\text{sup}} = -3,5^\circ$ culminação na direção Norte, abaixo do horizonte.

Para o trânsito da culminação inferior temos:

$$h_{\text{inf}} = -90^\circ + |\phi + \delta|.$$

Para determinarmos a direção da culminação inferior, usamos o mesmo critério descrito acima.

Considerando os astros circumpolares acima do horizonte do observador, podemos somar as culminações superior e inferior, $h_{\text{sup}} = \phi + p$ e $h_{\text{inf}} = \phi - p$, obtendo:

$$\phi = \pm \frac{h_{\text{sup}} + h_{\text{inf}}}{2}, \quad \text{para astros circumpolares,}$$

onde usamos “+” se estamos no Hemisfério Norte e “-” para observadores no Hemisfério Sul.

Usando a Eq. 1.14, podemos calcular, por exemplo, a altura máxima do Sol ao longo do ano. Para isto, precisamos conhecer a declinação do Sol ao longo do ano. De forma aproximada, a declinação do Sol é:

$$\delta_{\odot} = \arcsin(\sin \varepsilon \sin \lambda_{\odot}),$$

onde ε é a obliquidade da eclíptica e λ_{\odot} é a longitude em coordenadas eclípticas do Sol. A equação acima será obtida em detalhes na pág. 33. A variação da longitude do Sol, percorrendo 360° em um ano, será deduzida na Sec. 5.4.1 e dada uma aproximação na Sec. 5.4.2. Com estas aproximações, podemos traçar a altura máxima do Sol como na Fig. 1.33.

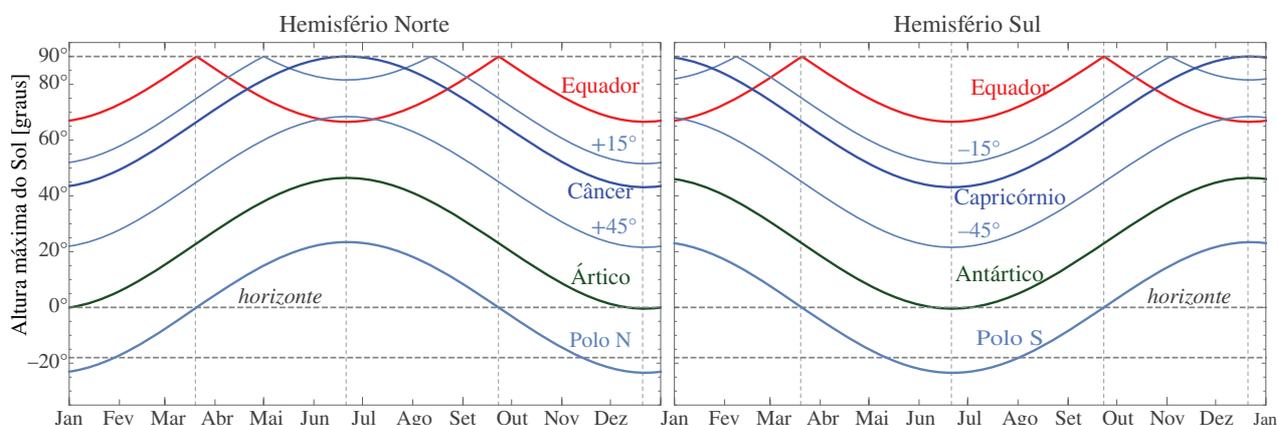


Figura 1.33: Variação da altura máxima do Sol ao longo do ano para diversas latitudes. As linhas verticais indicam os equinócios e solstícios. As linhas horizontais mostram a altura máxima (90° , isto é, o zênite), o horizonte (0°) e a altura abaixo da qual a noite é completamente escura (-18°). Esta figura pode ser comparada com a Fig. 1.31, que mostra a trajetória aparente diurna do Sol para observadores em várias latitudes.

As alturas mostradas na Fig. 1.33 não levam em conta a refração atmosférica e são dadas em relação ao centro do Sol. A refração pode ser desprezada para alturas acima de $\sim 30^{\circ}$ (veja Sec. 3.4.2), mas, próximo do horizonte, o efeito da refração pode chegar a cerca de $1/2$ grau. Observando a figura 1.33 podemos tirar algumas conclusões:

- No equador, o Sol passa pelo zênite duas vezes por ano, nos dias de equinócio.
- Entre o equador e os trópicos, o Sol atinge o zênite duas vezes por ano, durante o primavera e o verão.
- Nos trópicos o Sol atinge apenas uma vez o zênite, no dia do solstício de verão.
- Em latitudes superiores (em módulo) aos trópicos, o Sol nunca passa pelo zênite e a altura máxima é no solstício de verão.
- Nos círculos polares, a altura máxima do Sol é de 0° no solstício de inverno.
- Acima (em módulo) dos círculos polares, o Sol não fica acima do horizonte nos dias (ou até semanas) em torno do solstício de inverno.
- Nos polos, a altura máxima do Sol é 0° nos equinócios.

Estas circunstâncias descritas acima, estão relacionadas com as estações do ano (Sec. 1.6) e a insolação média da Terra pelo Sol (Sec. 2.6).

1.8 Relação entre sistemas de coordenadas

1.8.1 Matrizes de rotação

Os diversos sistemas de coordenadas, Horizontal, Equatorial, Eclíptico e Galáctico, podem ser visualizados e comparados na figura 1.34. Destes, apenas o sistema Horizontal é fixo para um dado observador, isto é, as linhas de azimute e altura que vemos na figura são as mesmas sempre independentemente do dia ou hora de observação. Os outros três sistemas, Equatorial, Eclíptico e Galáctico, acompanham o movimento diurno da esfera celeste. A vantagem destes três sistemas celestes é que a posição dos astros (exceto os membros do Sistema Solar) tem pouca variação ao longo do tempo e para diferentes observadores na Terra.

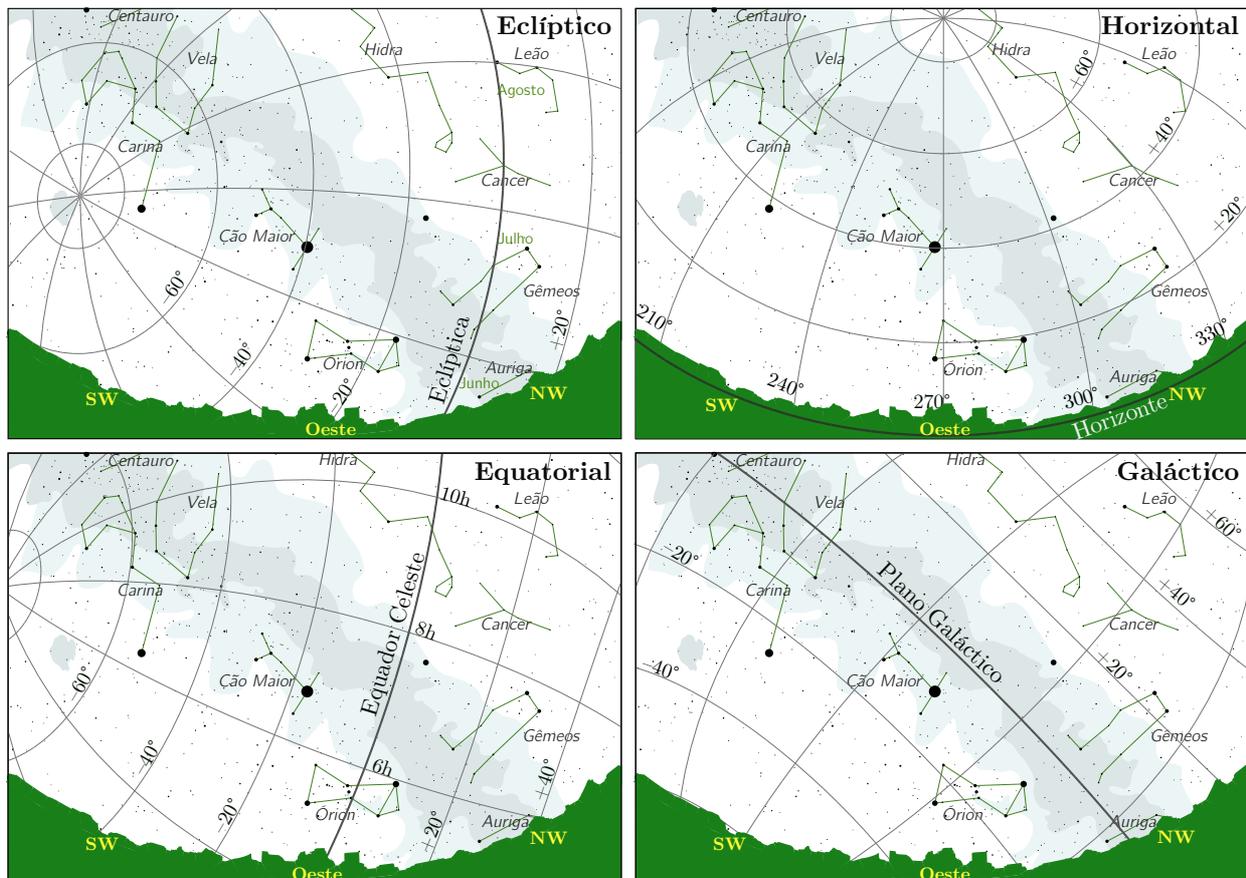


Figura 1.34: Exemplo de quatro sistemas de coordenadas, para um observador em São Paulo no início do Outono, por volta das 22h, olhando para a direção Oeste. A região em cinza escuro representa o horizonte geográfico local, em cinza claro a Via Láctea e a Grande Nuvem de Magalhães (próxima do polo Sul da eclíptica). Em cada um dos painéis podemos ver o círculo principal do sistema de coordenadas.

Uma outra forma de mostrar a relação entre os sistemas de coordenadas é através da comparação de seus respectivos planos fundamentais. A figura 1.35 mostra como estes planos estão orientados uns em relação aos outros. Nesta figura, podemos perceber que a diferença entre os planos fundamentais é a orientação na esfera celeste. A mudança de orientação, de um plano para outro, se dá por uma ou mais rotações.

Como vimos, as coordenadas polares de uma esfera podem ser escritas em forma vetorial em coordenadas cartesianas. A vantagem disto está no fato de que as transformações entre dois sistemas de coordenadas quaisquer podem ser decompostos em rotações que, por sua vez, podem

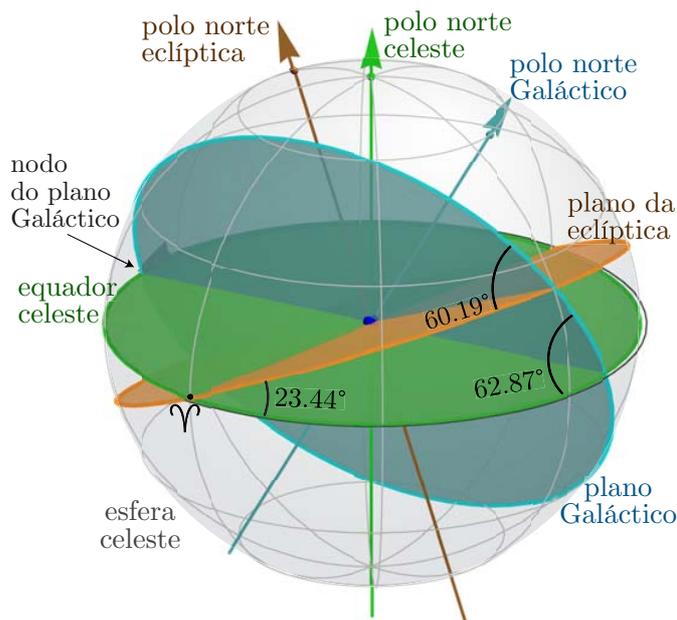


Figura 1.35: Posições relativas dos 3 principais planos de referência celestes, Equatorial, Eclíptica e Galáctico. Também estão ilustrados os eixos perpendiculares aos planos fundamentais e os ângulos de intersecção entre eles. Também está indicado o ângulo do nó do plano Galáctico, medido a partir do ponto vernal, Υ . Os ângulos são válidos para J2000 e variam lentamente com o tempo.

ser representadas por matrizes. Assim, podemos facilmente escrever e calcular uma transformação de coordenadas utilizando produtos de matrizes e vetores.

No caso de uma rotação em torno de um dos eixos cartesianos, podemos considerar uma rotação a duas dimensões (Fig. 1.36). No exemplo desta figura, a rotação se dá ao redor do eixo z . Neste exemplo, passamos as coordenadas (x, y) do ponto P para um novo referencial onde suas coordenadas são (x', y') .

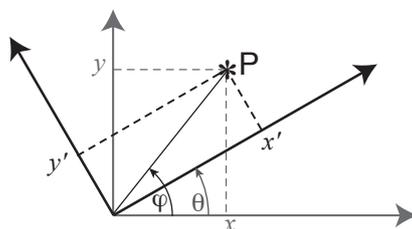


Figura 1.36: Rotação no plano de um ângulo θ . As coordenadas do ponto P se escrevem como:

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x' = \cos(\varphi - \theta) = \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta \\ y' = \sin(\varphi - \theta) = \sin \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta \end{cases}$$

onde φ é o ângulo do raio vetor de P . Eliminando φ obtemos as relações entre os dois sistemas de coordenadas. Note que, para ângulos positivos, a rotação se dá no sentido anti-horário.

Em três dimensões, as rotações básicas ao redor dos eixos cartesianos x , y e z , cada uma com um valor angular α_x , α_y e α_z , são dadas pelas matrizes dos cossenos diretores a seguir:

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & \sin \alpha_x \\ 0 & -\sin \alpha_x & \cos \alpha_x \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \cos \alpha_y & 0 & -\sin \alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} \cos \alpha_z & \sin \alpha_z & 0 \\ -\sin \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Com a formulação acima, as rotações são no sentido anti-horário para valores positivos dos ângulos.

Dado um par de coordenadas em um sistema qualquer, devemos encontrar a ou as rotações necessárias para transformá-las em um outro sistema de coordenadas. Genericamente, podemos escrever:

$$\mathbf{I}(\alpha, \delta) = \mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{R}_y(\phi) \mathbf{R}_z(\psi) \mathbf{I}(l, b), \quad (1.16)$$

onde devemos utilizar apenas as matrizes de rotação relevantes com os ângulos necessários para cada rotação. A equação acima deve ser lida da seguinte maneira: fazemos uma rotação em torno do eixo z de um ângulo ψ , em seguida uma rotação em torno do eixo y de um ângulo ϕ e, finalmente, uma rotação em torno de x de um ângulo θ . Em vários casos, apenas um ângulo é necessário.

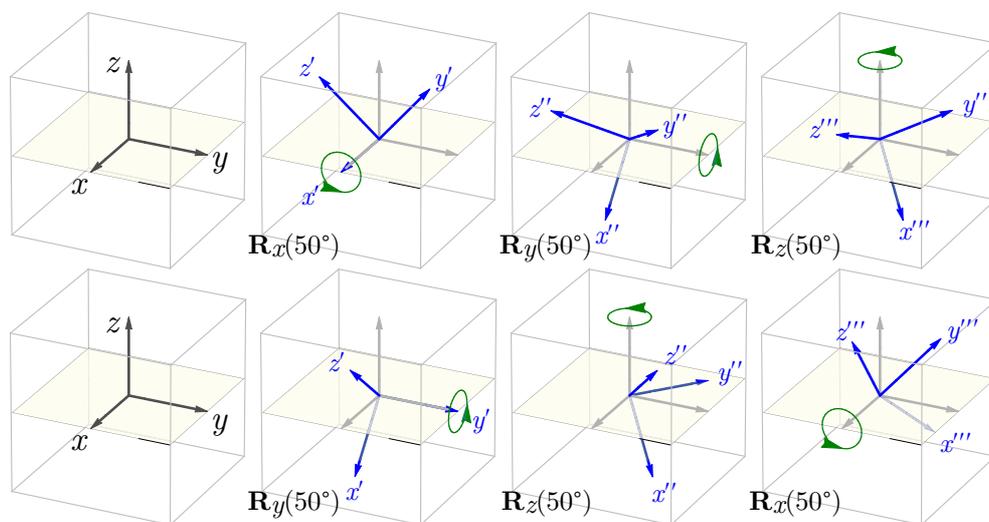


Figura 1.37: Não comutatividade das rotações: a ordem dos fatores *altera* o resultado final. Acima: Rotação $\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z$, cada uma com 50° , operando sucessivamente nos vetores $(x, y, z) \rightarrow (x', y', z') \rightarrow$, etc. Abaixo: Rotação $\mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z, \mathbf{R}_x$, cada uma com 50° . A orientação dos eixos nos painéis finais, acima e abaixo, (x''', y''', z''') são claramente diferentes.

Lembramos que a ordem das operações *é importante* (a multiplicação de matrizes não é comutativa; veja a Fig. 1.37 ilustrando este fato) e que o produto de uma matriz por um vetor é dado por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

1.8.2 Transformação de coordenadas Eclípticas e Equatoriais

Para transformarmos um dado ponto em coordenadas eclípticas para coordenadas equatoriais, devemos notar que a única rotação necessária é do plano fundamental (equador celeste \rightarrow eclíptica) em torno do eixo x (veja Fig. 1.19). O ângulo desta rotação é a inclinação da eclíptica, notado ε , que vale aproximadamente $23^\circ 26' 21''$ (no início do ano 2000). Em notação vetorial resulta:

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \mathbf{R}_x(-\varepsilon) \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

(note o sinal negativo de ε , pois a rotação é no sentido horário). Escrevendo explicitamente a matriz de rotação temos:

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

onde usamos as relações $\cos(-\varepsilon) = \cos(\varepsilon)$ e $\sin(-\varepsilon) = -\sin(\varepsilon)$. Fazendo a multiplicação matricial obtemos 3 equações:

$$\begin{aligned} \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \delta \sin \alpha &= \cos \varepsilon \cos \beta \sin \lambda - \sin \varepsilon \sin \beta \\ \sin \delta &= \sin \varepsilon \cos \beta \sin \lambda + \cos \varepsilon \sin \beta. \end{aligned} \quad (1.20)$$

As duas primeiras equações nos dão a relação entre α (ascensão reta) e as coordenadas eclípticas:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{\cos \varepsilon \cos \beta \sin \lambda - \sin \varepsilon \sin \beta}{\cos \beta \cos \lambda}.$$

A última equação do sistema acima dá a declinação em função da longitude e latitude eclíptica.

A transformação no sentido inverso, isto é, de coordenadas equatoriais em eclípticas é simplesmente:

$$\mathbf{I}(\lambda, \beta) = \mathbf{R}_x(\varepsilon) \mathbf{I}(\alpha, \delta), \quad (1.21)$$

isto é [compare com a Eq. (1.19)],

$$\begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \beta \sin \lambda &= \cos \varepsilon \cos \delta \sin \alpha + \sin \varepsilon \sin \delta \\ \sin \beta &= -\sin \varepsilon \cos \delta \sin \alpha + \cos \varepsilon \sin \delta \end{aligned} \quad (1.22)$$

1.8.3 Transformação de coordenadas Equatoriais e Horizontais

A passagem entre coordenadas equatoriais e horizontais é mais delicada. Como as coordenadas horizontais possuem um movimento diário, é mais conveniente utilizarmos as coordenadas horárias do que as coordenadas equatoriais diretamente. Observando as figuras 1.18 e 1.21, vemos que a passagem de um sistema ao outro se efetua por uma rotação em torno do eixo cartesiano y . Esta rotação é igual ao complemento da latitude do observador, $90^\circ - \varphi$. Obtemos assim,

$$\mathbf{I}(H, \delta) = \mathbf{R}_y(-[90^\circ - \varphi]) \mathbf{I}(A, h), \quad (1.23)$$

o que resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \cos H \cos \delta &= \cos A \cos h \sin \varphi + \sin h \cos \varphi \\ \sin H \cos \delta &= \sin A \cos h \\ \sin \delta &= -\cos A \cos h \cos \varphi + \sin h \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.24)$$

A transformação inversa se faz pela rotação no sentido contrário,

$$\mathbf{I}(A, h) = \mathbf{R}_y(90^\circ - \varphi) \mathbf{I}(H, \delta), \quad (1.25)$$

o que resulta, após simplificação:

$$\begin{aligned} \cos A \cos h &= \cos \delta \cos H \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \\ \sin A \cos h &= \cos \delta \sin H \\ \sin h &= \cos \delta \cos H \cos \varphi + \sin \delta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.26)$$

A ascensão reta pode ser então obtida usando a Eq. (1.10), conhecendo o tempo sideral local.

1.8.4 Transformação de coordenadas Equatoriais e Galácticas

Vamos considerar agora as transformações entre as coordenadas equatoriais e galácticas. Neste caso devemos notar que as suas origens respectivas não coincidem (como, por exemplo no caso equatorial e eclíptico). Observando-se a figura 1.23, podemos notar que a transformação pode ser feita considerando-se três rotações distintas. Em primeiro lugar devemos deslocar a origem das coordenadas galácticas até a intersecção dos planos equatorial e galáctico (o nodo, notado N na Fig. 1.23). Em coordenadas galácticas, esta rotação se escreve simplesmente $l' \rightarrow l - l_{CG}$. Em segundo lugar, devemos efetuar uma rotação do nodo até a origem do sistema equatorial, o ponto vernal. Isto se faz simplesmente em coordenadas equatoriais, $\alpha \rightarrow \alpha - \alpha_N$. Finalmente, realizamos a rotação do plano galáctico em torno do eixo cartesiano x (uma vez que as duas rotações precedentes fizeram com que as origens coincidissem). Resumindo, temos $\mathbf{I}(l - l_{CG}, b) = \mathbf{R}_x(i)\mathbf{I}(\alpha - \alpha_N, \delta)$, ou:

$$\begin{pmatrix} \cos b \cos(l - l_{CG}) \\ \cos b \sin(l - l_{CG}) \\ \sin b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_N) \\ \cos \delta \sin(\alpha - \alpha_N) \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

onde i é a inclinação do plano galáctico, $i = 62^\circ;6$, $l_{CG} = 33^\circ$ e $\alpha_N = 18^{\text{h}}49^{\text{m}} = 282^\circ;25$ (valores por definição exatos, válidos para B1950 = J1949,99979, isto é, $22^{\text{h}}9^{\text{m}}47^{\text{s}}$ de 31/12/1949 UTC, como foi definido originalmente).

Para o referencial de J2000, após transformar os valores precedentes pela *precessão* entre as épocas B1950 a J2000 (isto será visto em detalhes na seção 3.2.2), adota-se $i = 62^\circ;8717$, $\alpha_N = 18^{\text{h}}51^{\text{m}};44 = 282^\circ;8595$, e $l_{CG} = 32^\circ;9319$. Desenvolvendo a Eq. (1.27) para o referencial de J2000 temos:

$$\begin{aligned} \cos(l - 32^\circ;9319) \cos b &= \cos \delta \cos(\alpha - 282^\circ;8595) \\ \sin(l - 32^\circ;9319) \cos b &= \sin \delta \sin 62^\circ;8717 + \cos \delta \sin(\alpha - 282^\circ;8595) \cos 62^\circ;8717 \\ \sin b &= \sin \delta \cos 62^\circ;8717 - \cos \delta \sin(\alpha - 282^\circ;8595) \sin 62^\circ;8717. \end{aligned} \quad (1.28)$$

A transformação de coordenadas acima também pode ser expressa em termos da posição do Polo Norte galáctico em coordenadas equatoriais, $b = 90^\circ \rightarrow (\alpha_{NG} = 192^\circ;8595, \delta_{NG} = 27^\circ;1283)$, e da longitude galáctica do Polo Norte celeste, $\delta = 90^\circ \rightarrow l_N = 122^\circ;9319$, (valores válidos para J2000). Podemos reconhecer algumas equivalências entre os valores dos ângulos usados na transformação de coordenadas equatoriais e galácticas: $i = 90^\circ - \delta_{NG}$, $l_{CG} = l_N - 90^\circ$ e $\alpha_N = 90^\circ + \alpha_{NG}$.

Usando as coordenadas equatoriais do Polo Norte Galáctico, podemos calcular as coordenadas em coordenadas eclípticas usando as Eqs. 1.22: $\lambda_{NG} = 180^\circ;0232$ e $\beta_{NG} = 60^\circ;1885$. Disto, deduzimos que a inclinação entre a eclíptica e o plano Galáctico é $90^\circ - \beta_{NG} = 60^\circ;1885$ (J2000). Em outras palavras, o plano definido pelas órbitas dos planetas no Sistema Solar está inclinado em ralação ao plano da Via Láctea de um ângulo $\sim 60^\circ$ (lembrando que o plano do Sistema Solar está mais próximo da órbita de Júpiter do que da eclíptica).

1.8.5 Transformação de coordenadas Galácticas e Supergalácticas

A relação entre coordenadas galácticas (l, b) e supergalácticas (SGB, SGL) é relativamente simples, pois envolve apenas duas rotações, nos eixos x e z . A rotação em z é de $l_0 = 137^\circ;37$, que corresponde à longitude galáctica da origem do sistema de coordenadas supergalácticas. A rotação em x é de $i_G = 83^\circ;68$, que corresponde à inclinação do plano galáctico em relação ao plano supergaláctico.

A transformação de coordenadas galácticas para supergalácticas se escreve:

$$\begin{aligned}\cos \text{SGB} \cos \text{SGL} &= \cos b \cos(l_0 - l) \\ \cos \text{SGB} \sin \text{SGL} &= \sin b \sin i_G - \cos b \cos i_G \sin(l_0 - l) \\ \sin \text{SGB} &= \sin b \cos i_G + \cos b \sin i_G \sin(l_0 - l).\end{aligned}\quad (1.29)$$

No sentido inverso, a transformação de coordenadas se torna:

$$\begin{aligned}\cos b \cos l &= \cos l_0 \cos \text{SGB} \cos \text{SGL} + \sin l_0 (\cos i_G \cos \text{SGB} \sin \text{SGL} + \sin i_G \sin \text{SGB}) \\ \cos b \sin l &= \cos l_0 \sin i_G \sin \text{SGB} + \cos \text{SGB} (\cos l_0 \cos i_G \sin \text{SGL} - \sin l_0 \cos \text{SGL}) \\ \sin b &= \cos i_G \sin \text{SGB} - \cos \text{SGB} \sin i_G \sin \text{SGL}.\end{aligned}\quad (1.30)$$

1.8.6 Determinação da latitude e declinação de um astro

Vamos utilizar as relações que vimos nesta seção para mostrar como podemos determinar a latitude e a declinação de um astro a partir de duas observações. Vamos supor que o astro não se movimenta entre estas 2 observações.

Hemisfério norte: A primeira observação é feita quando o astro passa pelo meridiano do observador e medimos sua altura, a_1 . Mais tarde, observamos o astro novamente quando seu azimute é igual a 90° (isto é, está no Oeste, na direção do *primeiro vertical* [sim, é masculino]) e sua altura é medida novamente, a_2 (ignoramos a refração atmosférica, que veremos na sec. 3.4). Resumindo, temos:

$$\text{primeira obs.:} \begin{cases} A_1 = 0; \\ h_1 = a_1; \\ H_1 = 0, \end{cases} \quad \text{e segunda obs.:} \begin{cases} A_2 = 90^\circ; \\ h_2 = a_2; \\ H_2 = \text{desconhecido}, \end{cases}$$

onde H é o ângulo horário.

Os sistemas equatorial e horário se relacionam pelas Eqs. (1.24); usando os valores da 1ª observação obtemos duas equações:

$$\begin{cases} \cos \delta = + \cos a_1 \sin \varphi + \sin a_1 \cos \varphi; & \text{(I.a)} \\ \sin \delta = - \cos a_1 \cos \varphi + \sin a_1 \sin \varphi, & \text{(I.b)} \end{cases}$$

e, para a 2ª observação, temos 3 equações:

$$\begin{cases} \cos H \cos \delta = \sin a_2 \cos \varphi; & \text{(II.a)} \\ \sin H \cos \delta = \cos a_2; & \text{(II.b)} \\ \sin \delta = \sin a_2 \sin \varphi. & \text{(II.c)} \end{cases}$$

Substituindo (II.c) em (I.b) e eliminando $\sin \delta$ vem:

$$\begin{aligned}\sin a_2 \sin \varphi = - \cos a_1 \cos \varphi + \sin a_1 \sin \varphi &\Rightarrow \sin \varphi (\sin a_2 - \sin a_1) = - \cos a_1 \cos \varphi. \\ \Rightarrow \tan \varphi = \frac{\cos a_1}{\sin a_1 - \sin a_2}; & \text{[Hemisfério Norte]},\end{aligned}$$

com a condição que $a_1 \neq a_2$ (o que só ocorre se a estrela estiver no polo celeste). As duas medidas da altura da estrela nos dão a latitude do observador. A equação acima pode ser reescrita como:

$$\cos \varphi = \sin \varphi \frac{\sin a_1 - \sin a_2}{\cos a_1},$$

(válida se $a_1 \neq 90^\circ$, isto é, o astro não pode estar no zênite na 1ª medida). Substituindo a Eq. (II.c) obtemos:

$$\cos \varphi = \frac{\sin \delta}{\sin a_2} \frac{\sin a_1 - \sin a_2}{\cos a_1},$$

Usando agora a Eq. (I.a) e eliminando φ obtemos:

$$\cos a_1 \left(\frac{\cos \delta}{\sin a_1} - \frac{\cos a_1 \sin \delta}{\sin a_1 \sin a_2} \right) = (\sin a_1 - \sin a_2) \frac{\sin \delta}{\sin a_2}.$$

Com um pouco de álgebra, simplificamos a expressão acima e obtemos finalmente:

$$\Rightarrow \tan \delta = \frac{\sin a_2 \cos a_1}{1 - \sin a_1 \sin a_2}; \text{ [Hemisfério Norte]},$$

o que nos dá a declinação do astro.

Por exemplo, suponha que uma estrela foi observada na passagem meridiana com altura $a_1 = 58^\circ 30' 03''$, e algumas horas depois, foi observada ao passar pelo 1^o vertical com altura $a_2 = 13^\circ 50' 01''$. Com isto podemos dizer que o observador estava na latitude $\phi = 40^\circ 25' \text{ N}$ e a declinação da estrela é $\delta = +08^\circ 55'$.

Hemisfério Sul Neste caso, observando a passagem meridiana na direção Norte, o azimute da primeira observação é $A_1 = 180^\circ$. As outras grandezas permanecem iguais. Usando o mesmo procedimento obtemos para a latitude e declinação:

$$\tan \varphi = \frac{\cos a_1}{\sin a_2 - \sin a_1} \quad \text{e} \quad \tan \delta = \frac{\sin a_2 \cos a_1}{\sin a_1 \sin a_2 - 1}; \text{ [Hemisfério Sul]}.$$

1.9 Noções de trigonometria esférica

As relações entre os diversos sistemas de coordenadas que vimos nas seções anteriores também podem ser deduzidas a partir da trigonometria esférica. A trigonometria esférica apresenta diferenças fundamentais em relação à trigonometria plana. Por exemplo, na trigonometria plana (ou *Euclidiana*) a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° . Sobre uma esfera, esta mesma soma dos ângulos internos de um *triângulo esférico* está no intervalo entre 180° e 540° (ou entre π e 3π radianos). Um triângulo esférico, diferente de um triângulo plano, pode ter um, dois ou mesmo três ângulos retos (de 90°).

Na trigonometria plana a distância mais curta entre dois pontos é uma reta. Generalizando para geometrias não planas, a distância mais curta entre dois pontos é uma *geodésica* e, em geral, não é uma reta. No caso particular da geometria esférica, as geodésicas são segmentos de grandes círculos. Um exemplo disto está na Fig. 1.38.

A figura 1.39 ilustra um exemplo de triângulo esférico. Da mesma forma que um triângulo plano é definido por retas, o triângulo esférico é definido por segmentos de grandes círculos. Vamos supor que a esfera onde se encontra o triângulo tem raio unitário. Isto significa que os módulos dos vetores \vec{OA} , \vec{OB} e \vec{OC} são iguais a 1 e os ângulos a , b e c , quando medidos em radianos, correspondem aos comprimentos dos arcos \widehat{BC} , \widehat{AC} e \widehat{AB} , respectivamente.

O produto escalar dos vetores \vec{OB} e \vec{OC} é igual a $\cos(a)$ assim como $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos(c)$ e $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \cos(b)$. Na figura 1.39 os pontos B' e C' são as projeções dos vértices B e C no eixo OA . Assim, o produto escalar $\vec{OB} \cdot \vec{OC}$ pode ser escrito como

$$\vec{OB} \cdot \vec{OC} = (\vec{OB}' + \vec{B'B}) \cdot (\vec{OC}' + \vec{C'C}).$$

Mas $\vec{OB}' \perp \vec{C'C}$ e $\vec{OC}' \perp \vec{B'B}$ (pois \vec{OB}' e \vec{OC}' estão sobre o eixo OA e $\vec{C'C}$ e $\vec{B'B}$ são, por definição, perpendiculares a este eixo). Obtemos desta forma,

$$\vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OB}' \cdot \vec{OC}' + \vec{B'B} \cdot \vec{C'C}.$$

Como $\vec{OB}' \parallel \vec{OC}'$, então $\vec{OB}' \cdot \vec{OC}' = \cos b \cos c$ e, por outro lado, $\vec{B'B} \cdot \vec{C'C} = \sin b \sin c \cos \hat{A}$, o que resulta em:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A}, \quad (1.31)$$

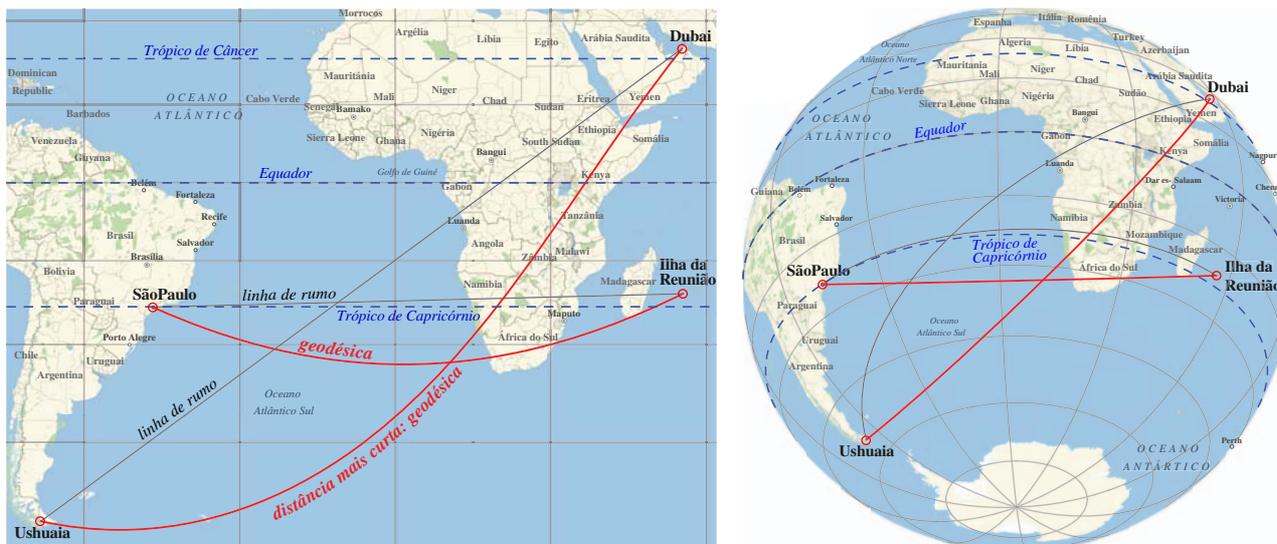


Figura 1.38: Distância mais curta entre dois pontos sobre uma superfície esférica (no caso, a Terra). Esquerda: A geodésica é a linha contínua em vermelho, mostrando a distância mais curta entre São Paulo e a Ilha da Reunião, e entre Ushuaia e Dubai. Qualquer projeção plana (*planisfério*) de uma esfera irá deformá-la. Aqui temos a projeção de Mercator, onde as linhas de rumo (linha contínua em cinza) aparecem como linhas retas. Direita: A mesma coisa que o painel da esquerda, mas com uma projeção ortográfica, onde a projeção tem uma aparência 3D e, neste caso, as geodésicas aparecem mais curtas que as linhas de rumo. Os trópicos e equador estão representados por linhas tracejadas azuis.

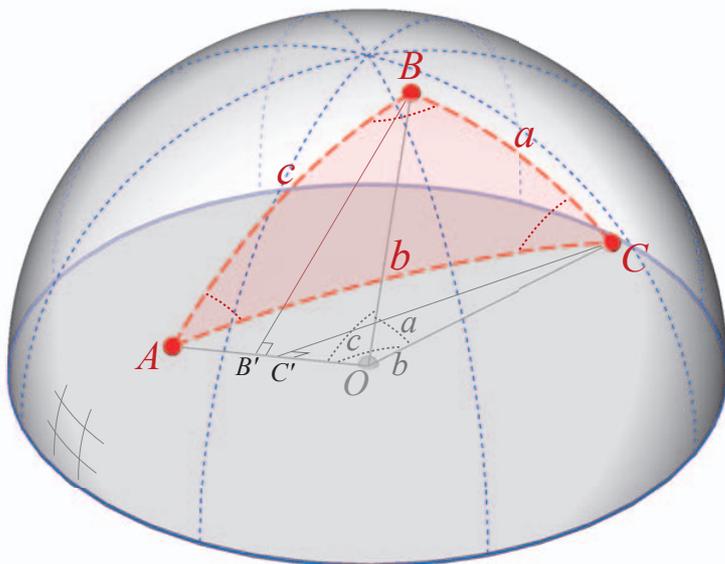


Figura 1.39: Triângulo esférico com vértices ABC sobre a superfície de um hemisfério (meia esfera). Os lados do triângulo, a, b e c , são segmentos de grandes círculos. A origem da esfera (centro) está no ponto O . O triângulo esférico é um caso particular de um *polígono esférico*, definido sobre uma superfície esférica, limitado por arcos de grandes círculos.

conhecida como *fórmula fundamental* da trigonometria esférica. Esta fórmula também é válida através da permutação circular $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$.

Outra relação fundamental da trigonometria esférica é a chamada *lei dos senos*, relacionando 2 ângulos e dois lados do triângulo esférico:

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } \hat{C}}. \tag{1.32}$$

O comprimento de um segmento de arco de um grande círculo é simplesmente o seu valor em radianos multiplicado pelo raio da esfera.

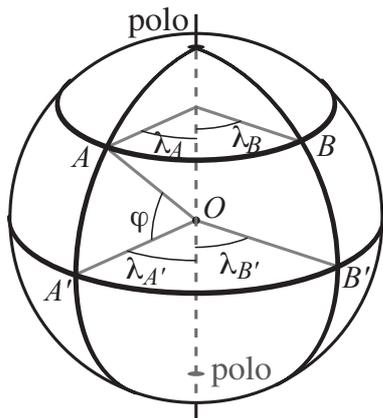


Figura 1.40: Comprimento de segmentos de arco. O segmento $\widehat{A'B'}$ faz parte do círculo principal (equador), o segmento \widehat{AB} , do pequeno círculo de latitude φ .

A Eq. (1.31) pode ser usada para determinarmos a distância mais curta, D_{12} , entre 2 pontos no globo terrestre com longitude e latitude (λ_1, φ_1) e (λ_2, φ_2) :

$$D_{12} = R \arccos [\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)] ,$$

onde R é o raio da Terra. Aqui estamos supondo que a Terra seja uma esfera (veremos na Sec. 3.1 que isto não é a melhor aproximação da forma da Terra).

Por exemplo, a cúpula do telescópio do IAG/USP na Cidade Universitária tem coordenadas $\lambda_1 = 46^\circ 44' 07''$, $\varphi_1 = -23^\circ 33' 34''$ (negativo pois está no Hemisfério Sul), e a cúpula do telescópio *Gemini Norte* está em $\lambda_2 = 155^\circ 28' 08''$ e $\varphi_2 = +19^\circ 49' 26''$, logo a distância entre estes dois lugares é $d = 12.731$ km (levando em conta a forma da Terra, uma “esfera achatada”, veja a Sec. 3.1, esta distância é de 12.721 km, uma diferença inferior a 0,08%).

No caso dos pequenos círculos é diferente. Consideraremos aqui apenas os pequenos círculos paralelos ao círculo principal (isto é, as latitudes ou declinações). Neste caso temos (Fig. 1.40):

$$\widehat{AB} = \widehat{A'B'} \cos \varphi = (\lambda_A - \lambda_B) \cos \varphi , \quad (1.33)$$

onde φ é a latitude do segmento de arco \widehat{AB} e λ_A e λ_B são as longitudes (ou ascensão reta) de A e B .

Notemos que a distância *mais curta* entre os pontos A e B na mesma latitude φ é dada pela Eq. (1.31), isto é:

$$\widehat{AB}_{\text{mais curta}} = \arccos \left[\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos(\lambda_A - \lambda_B) \right] .$$

Para o caso em que a separação seja pequena, i.e. $\delta\lambda \equiv (\lambda_A - \lambda_B) \ll 1$ (em radianos), temos:

$$\begin{aligned} \widehat{AB}_{\text{mais curta}} &\simeq \arccos \left[\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi - \frac{\delta\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi \right] = \arccos \left[1 - \frac{\delta\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi \right] \\ &\Rightarrow \widehat{AB}_{\text{mais curta}} \simeq \delta\lambda \cos \varphi . \end{aligned}$$

Quanto mais próximo do equador ($\varphi \rightarrow 0$), melhor é esta aproximação.

Tradicionalmente, a *milha náutica* era definida como o segmento de arco que corresponde à 1' sobre a superfície da Terra, ao longo de um meridiano. Assim, por exemplo, um arco na superfície terrestre de comprimento igual a 1 radiano (igual a 3437,75 minutos de arco) equivale a 3437,75 milhas náuticas.

Sabendo-se que a circunferência polar da Terra (seguindo um grande círculo meridiano) mede aproximadamente 40.007,9 km, correspondendo a 360×60 minutos de arco, podemos concluir que uma milha náutica corresponde a cerca de 1,852 km. Porém, este valor varia segundo a latitude

devido ao achatamento da Terra (veja Sec. 3.1). Por isto, por convenção, a milha náutica é definida exatamente igual a 1852 metros hoje em dia.

A área, s , de um triângulo esférico é dado pelo *teorema de Girard*. Sejam os ângulos internos de um triângulo esférico \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} medidos em radianos, temos:

$$s = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)R^2, \quad (1.34)$$

onde R é o raio da esfera onde está definido o triângulo. Note que na Eq. (1.34), a área deve ser positiva, portanto a soma dos ângulos internos precisa ser maior do que π . O termo entre parênteses na equação acima é chamado *excesso angular* e deve ser maior ou igual a zero.

Linha de rumo: loxodromia

A curva sobre uma esfera que cruza os meridianos com um ângulo constante é chamada de *linha de rumo* ou *loxodromia* (do grego, “caminho oblíquo”). Esta é a trajetória utilizadas por navios e aviões que mantêm um rumo constante em relação aos pontos cardeais. Apesar de ser a rota mais simples de ser seguida, ela não é um grande círculo (exceto no caso particular de seguir exatamente a direção Norte–Sul, ao longo de um meridiano). Logo, a loxodromia não é o caminho mais curto entre dois pontos sobre uma esfera (Fig. 1.41).

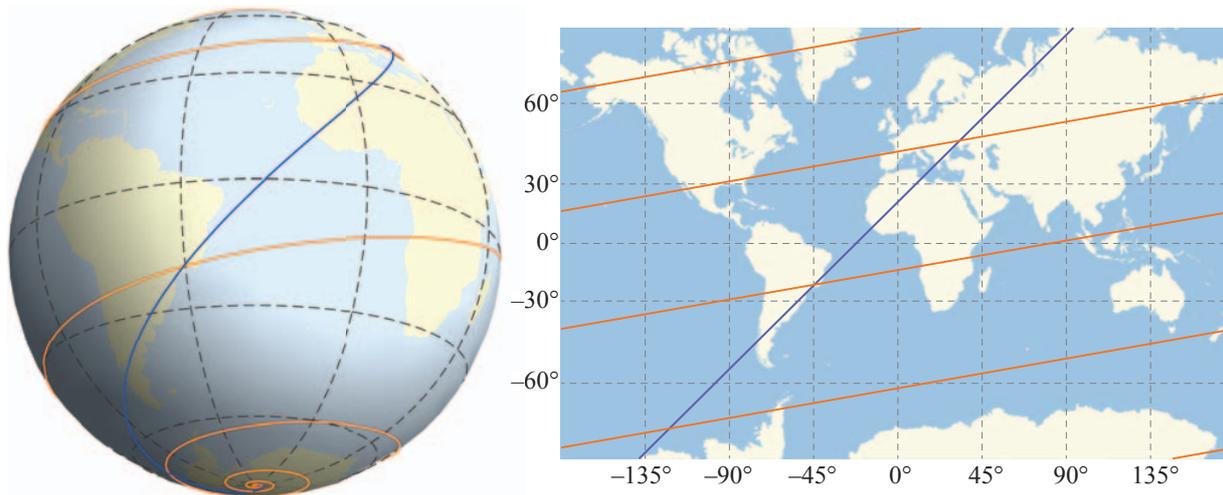


Figura 1.41: Linhas de rumo (loxodromia) em uma esfera (esquerda) convergem para os polos (exceto as linhas com inclinação zero, i.e., ao longo das latitudes). A linha azul faz um ângulo constante de 45° com os meridianos; a linha laranja tem um ângulo de 80° (a partir do Norte, em sentido horário). Na projeção de Mercator (direita, limitado aqui entre as latitudes $\pm 75^\circ$), as loxodromias são linhas retas. Note que as linhas de rumo geralmente **não** correspondem às distâncias mais curtas entre dois pontos na superfície da esfera (a distância mais curta é a geodésica).

O conceito de loxodromia foi estudado e popularizado pelo matemático português Pedro Nunes (1502–1578), também conhecido por sua tradução do “*Tratado da Esfera*”, de João de Sacrobosco (veja mais na pág. 135).

Sobre uma esfera de raio r , uma loxodromia pode ser escrita em forma paramétrica, pela posição cartesiana $[x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)]$, como:

$$\begin{cases} x = r \frac{\cos \lambda}{\cosh[(\lambda - \lambda_0) \cot \alpha]}; \\ y = r \frac{\sin \lambda}{\cosh[(\lambda - \lambda_0) \cot \alpha]}; \\ z = r \tanh[(\lambda - \lambda_0) \cot \alpha], \end{cases} \quad \text{para } -\ell < \lambda < \ell, \quad (1.35)$$

onde ℓ é o comprimento da curva de rumo, $\ell = 2\pi / \cos \alpha$ e o ângulo α é medido a partir o Norte em sentido horário e é constante ao longo da loxodromia (Fig. 1.41). Observamos que as linhas de rumo são retas nos mapas com projeção de Mercator (discutida na próxima seção); isto foi particularmente útil para as grandes navegações, quando é muito mais simples manter o rumo (seguindo uma direção fixa) do que seguir a distância mais curta na superfície de uma esfera (a geodésica).

1.10 Projeção da esfera no plano: planisfério

A representação da esfera celeste ou do globo terrestre em uma superfície plana, um mapa, é um problema com mais de 2 milênios de história. Certamente vários mapas celestes foram feitos na Antiguidade, mas apenas os relatos chegaram até nós. Cláudio Ptolomeu sintetizou o conhecimento da antiguidade sobre projeções de esferas em planos por volta do ano 150 da nossa era em sua obra “*Geografia*”. O mapa celeste mais antigo que ainda existe é Chinês, feito na segunda metade do século **VIII**⁸ retratando a posição aparente das estrelas com uma precisão inferior a cerca de 4°.

A dificuldade deste problema está na *impossibilidade* de representarmos uma superfície esférica em um plano, sem causar deformações. Qualquer projeção de uma esfera em um plano resulta em alguma imperfeição: ou os ângulos entre retas mudam, ou as distâncias se alteram, ou as áreas são ampliadas ou reduzidas, ou há uma deformação (por exemplo, um círculo na esfera passa a ser uma elipse no plano). Em outras palavras, não é possível transformar uma esfera em um plano sem rasgar, dobrar, esticar ou amassar de alguma forma. Esta impossibilidade gerou, ao longo do tempo, inúmeras propostas de soluções aproximadas, com vantagens e desvantagens.

De forma um pouco mais rigorosa, a projeção de uma esfera em uma superfície plana é uma relação da forma:

$$\underbrace{\begin{matrix} x = f_1(\theta, \phi) \\ y = f_2(\theta, \phi) \end{matrix}}_{\text{projeção}} \iff \underbrace{\begin{matrix} \theta = g_1(x, y) \\ \phi = g_2(x, y) \end{matrix}}_{\text{proj. inversa}} \quad \text{com a condição: } J(\theta, \phi) = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \phi} - \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \phi} \neq 0, \quad (1.36)$$

onde θ e ϕ representam a latitude (ou declinação) e a longitude (ou ascensão reta), o par (x, y) são as coordenadas cartesianas no plano, as funções $f_{\{1,2\}}$ e $g_{\{1,2\}}$ definem as transformações direta (a projeção) e a inversa, e $J(\theta, \phi)$ é o *Jacobiano* da transformação. Centenas destas funções foram propostas na história da cartografia e da **uranografia** (o mapeamento do céu).

As projeções podem ser divididas em dois tipo: **perspectivas** e **não-perspectivas**. Geometricamente, as projeções perspectivas são feitas, como diz o nome, por linhas retas que saem da superfície da esfera e atingem o plano (ou cone ou cilindro) em um dado ponto. É como se projetássemos a esfera como uma sombra na superfície plana, com uma fonte de luz. As projeções não-perspectivas são relações puramente matemáticas que não são interpretadas de forma geometricamente simples. Na Fig. 1.42 ilustramos três casos simples de projeções perspectivas: *azimutal* (ou plana), *cônica* e *cilíndrica*. Além das três projeções perspectivas, é possível generalizar este conceito para projeções não-perspectivas como: pseudo-cilíndrica, pseudo-cônica e policônica, e pseudo-azimutal.

Tanto o cone como o cilindro são formas geométricas semelhantes ao plano; matematicamente dizemos que são superfícies com curvatura de Gauss nula. Uma esfera tem curvatura de Gauss positiva, enquanto a superfície de uma sela de cavalo tem curvatura negativa. Por esta razão, quando queremos uma projeção plana da esfera escolhemos um cilindro, um cone ou um plano como ponto de partida.

⁸Bonnet-Bidaud et al. 2009, Journal Astron. History and Heritage: “*The Dunhuang Chinese Sky*”

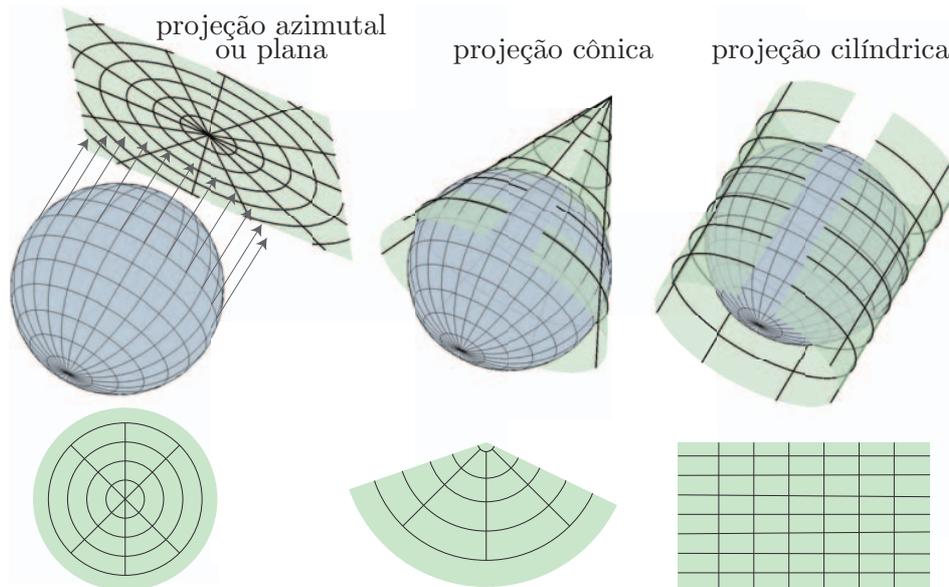


Figura 1.42: Tipo de projeções usadas em planisférios. Cada ponto da superfície da esfera corresponde a um ponto da superfície plana (projeção azimutal, caso polar), cônica ou cilíndrica dada pelas Eqs. (1.36). Lembramos que tanto o cone quanto o cilindro podem ser “desenrolados” sem deformação e são, portanto, equivalentes ao plano.

O **aspecto** da projeção pode ser polar (geralmente as projeções azimutais e cônicas são usadas para isto) quando a projeção se faz na direção dos polos do sistema de coordenadas; equatorial (geralmente com a projeção cilíndrica ou azimutal) quando a projeção é na direção paralela dos polos; oblíqua (geralmente usando a projeção azimutal) em qualquer outra direção que não seja polar nem equatorial. No exemplo da Fig. 1.42, as projeções azimutal e cônica são polares e a projeção cilíndrica é equatorial.

Também podemos classificar as projeções da esfera no plano pelos atributos da esfera que são (ou não) conservados no plano. Temos as projeções **conformes** que preservam localmente a forma. Neste tipo de projeção as linhas de latitude e longitude (declinação e ascensão reta) se cruzam exatamente a 90° .

As projeções de **áreas iguais** preservam, como o nome indica, a área de uma superfície da esfera. Em todos os pontos deste tipo de projeção, a área da esfera corresponde à área no plano às custas de uma deformação.

Projeções **equidistantes** preservam localmente as distâncias entre dois pontos. Nenhuma projeção pode ser equidistante em toda a esfera. Por exemplo, na projeção sinusoidal (Fig. 1.45) as distâncias sobre o equador e as latitudes são corretas (iguais às distâncias medidas sobre uma esfera).

As projeções de **direção verdadeira** transformam alguns grandes círculos (distâncias mais curtas entre dois pontos ou geodésicas na esfera) em linhas retas no plano. Este é o caso de projeções azimutais.

Em astronomia, para pequenas áreas da esfera celeste (menos que algumas dezenas de graus), as projeções mais utilizadas são as **azimutais**. Entre as projeções azimutais os tipos **Gnomônica**, **Estereográfica** e **Ortográfica** são os mais comuns. A projeção estereográfica era conhecida por Hiparco na Antiguidade e Albrecht Dürer usou-a para representar a esfera celeste centrada no Polo Norte da eclíptica em 1515.

Estas projeções são perspectivas, no caso da projeção gnomônica ela pode ser obtida através de linhas retas que se originam no centro da esfera, atravessam sua superfície e chegam no plano de projeção (Fig. 1.43). No caso estereográfico, as linhas de projeção se originam do polo da esfera

oposto ao plano. Matematicamente, a projeção estereográfica, com o Polo Norte no centro, pode ser escrita como:

$$\begin{cases} r = 2 \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right); \\ \phi = \text{longitude}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r \cos \phi; \\ y = -r \sin \phi, \end{cases}$$

onde θ é a latitude na esfera (ou declinação na esfera celeste, por exemplo). As coordenadas cartesianas no plano, x e y , correspondem às coordenadas polares (também no plano), ϕ e θ .

As projeções gnomônica e ortográfica podem apenas representar um único hemisfério simultaneamente, enquanto que a projeção estereográfica pode representar toda a esfera (mas com uma enorme deformação a medida que nos afastamos do centro de projeção). A projeção ortográfica representa o ponto de vista de um observador a distância infinita da esfera. Esta é a forma que geralmente a esfera tem uma aparência 3D em uma folha ou tela de computador.

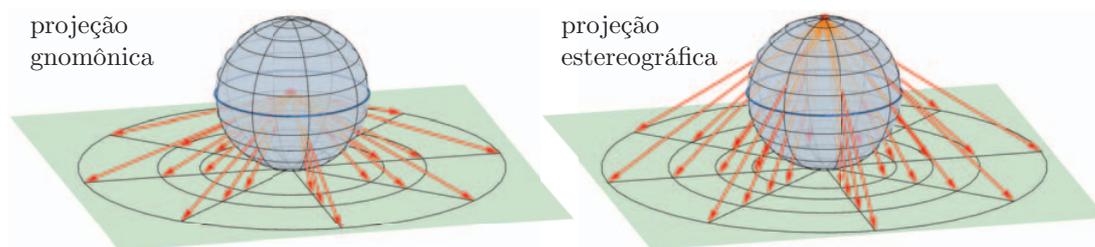


Figura 1.43: Na projeção gnomônica os raios emanam do centro da esfera; na projeção estereográfica os raios vêm do polo oposto ao plano onde a esfera é projetada. Em ambos os casos deste exemplo o aspecto é polar. Para a projeção ortográfica, quando os raios são paralelos e vêm do infinito, veja a Fig. 1.42.

A descrição mais antiga que temos de projeções cônicas vêm de Ptolomeu. No século XVII as projeções cônicas e pseudo-cônicas começaram a ser usadas para mapear o céu com as cartas celestes de Wilhelm Schickard. A vantagem desta projeção é propiciar uma distorção relativamente pequena da forma das constelações nas declinações intermediárias entre os polos e o equador celeste.

Na figura 1.44 podemos comparar três tipos diferentes de projeções cônicas. Nestes casos, as declinações (latitudes) são sempre circulares e as linhas de ascensão reta (longitudes) são linhas retas; o ângulo entre ascensão reta e declinação é, corretamente, 90° .

As projeções cônicas geralmente têm duas latitudes chamadas **paralelo padrão** onde a deformação é mínima. Para latitudes distantes dos paralelos padrões a deformação é significativa. Geometricamente, os paralelos padrões correspondem às intersecções do cone com a esfera. A projeção cônica introduzida por Johann Heinrich Lambert no século XVIII é conforme, porém a área tende ao infinito em um dos polos (Fig. 1.44).

A projeção **cônica equidistante**, introduzida por Ptolomeu e desenvolvida por Johannes Ruysch e Gerard Mercator no século XVI, mantém as distâncias corretas, porém causa uma deformação. Neste caso é possível ter um mapa de todo o céu, mas de utilidade limitada. Matematicamente, temos:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \alpha; \\ y = \rho_0 - \rho \cos \alpha, \end{cases} \text{ onde } \alpha = n(\phi - \phi_0) ; \begin{cases} \rho = G - \theta; \\ \rho_0 = G - \theta_0; \end{cases} G = \frac{\cos \theta_1}{n} + \theta_1 ;$$

$$\text{e } n = \begin{cases} \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_2}{\theta_2 - \theta_1}, & \text{se } \theta_1 \neq \theta_2; \\ \sin \theta_1, & \text{se } \theta_1 = \theta_2, \end{cases}$$

onde θ_1 e θ_2 são os paralelos padrões, θ_0 o paralelo de referência (zero se for o equador) e ϕ_0 é a ascensão reta ou longitude central (o centro do mapa). Se $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0$ então temos o caso limite da projeção cilíndrica *plate carrée* (descrita mais abaixo).

Por fim, a projeção cônica introduzida por Heinrich Christian Albers no início do século **XIX** projeta as áreas corretamente, mas introduz uma deformação na forma e escala (Fig. 1.44).

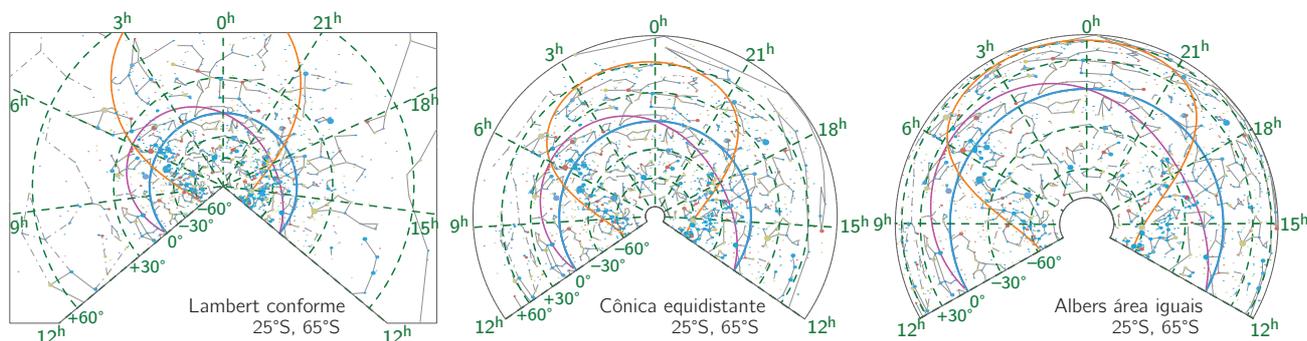


Figura 1.44: Comparação de três projeções cônicas: Lambert (conforme), Cônica equidistante e Albers (áreas iguais). Todas mostram a mesma região da esfera celeste em coordenadas equatoriais centradas no Polo Sul, com paralelos padrões 25 S e 65 S. O equador celeste é a linha em ciano, em magenta está representada a eclíptica e o equador galáctico em cor laranja.

Quando queremos representar toda a esfera celeste, as projeções mais comuns e convenientes são as cilíndricas ou as pseudo-cilíndricas (são baseadas nas cilíndricas, mas não são necessariamente perspectivas). A Fig. 1.45 mostra algumas das projeções usadas para todo o céu, usando sistemas de coordenadas equatoriais.

A projeção matematicamente mais simples é a **equiretangular** (também chamada de **equidistante**) que é expressa por:

$$\begin{cases} x = (\phi - \phi_0) \cos \theta_0; \\ y = (\theta - \theta_0), \end{cases} \text{ se o centro estiver na origem, } \theta_0 = 0 \text{ e } \phi_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \phi; \\ y = \theta, \end{cases}$$

onde a relação simplificada é chamada de projeção **plate carrée** (literalmente, “quadrado plano”). Nesta projeção a distância entre as linhas (retas) de latitude e longitude são constantes, o ângulo entre latitude e longitude são sempre 90° no plano. Esta projeção não é conforme nem conserva a área. Contudo ela é útil para se armazenar imagens de esferas em uma matriz retangular simples.

A projeção de **Mercator** é semelhante à plate carrée, porém introduzindo uma divergência nos polos. Esta projeção foi introduzida por Gerardo Mercator (nascido em 1512 próximo de Antuérpia, nos Fladres, Bélgica) em 1569 e rapidamente adotado para cartografia da Terra. As vantagens da projeção de Mercator é que a transformação é conforme e as linhas de direção constante são retas (como vimos na seção 1.9). A projeção, em relação ao equador ($\theta_0 = 0$), é dada por:

$$\begin{cases} x = (\phi - \phi_0); \\ y = \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right], \end{cases} \text{ onde } \phi_0 \text{ é o meridiano de origem.}$$

A projeção de Mercator também pode ser vista como o caso limite da projeção conforme de Lambert, onde o equador é o único paralelo de referência.

As projeções **sinusoidal**, **Hammer-Aifoff** e **HEALPix** (*Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelation*)⁹ são exemplos de projeções pseudo-cilíndricas com a propriedade de conservarem a área, mas não serem conformes. Estas três projeções são usadas frequentemente para exibir algumas propriedades e mapas de toda a esfera celeste (distribuição de estrelas e/ou galáxias,

⁹<https://healpix.sourceforge.io/>

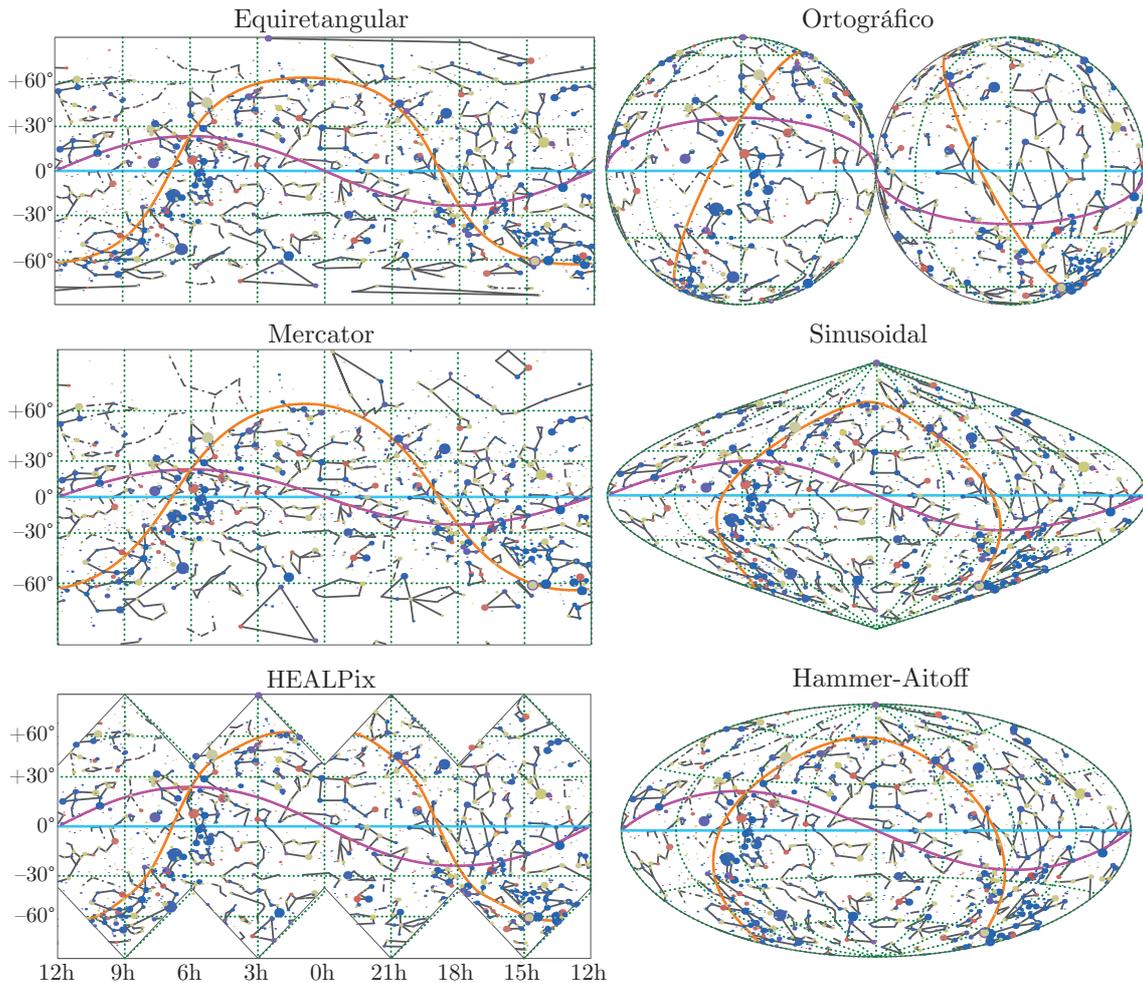


Figura 1.45: Exemplos de projeções de toda a esfera. O sistema de coordenadas é o equatorial (a linha ciano horizontal representa o equador celeste). Também estão representados a eclíptica (magenta) e o plano Galáctico (plano da Via Láctea em laranja). As estrelas mais brilhantes são mostradas junto com as linhas simbólicas das constelações.

mapas da emissão de hidrogênio neutro, etc.). A projeção HEALPix em particular é muito usada para codificar o mapa da Radiação Cósmica de Fundo.

Na astronomia, a projeção Hammer-Aitoff é usada frequentemente para mapas de todo o céu. Neste caso a esfera celeste é projetada em uma elipse de razão de eixos 2:1. A transformação para a projeção equatorial é:

$$\begin{cases} x = \frac{2 \cos \theta \operatorname{sen}(\phi/2)}{z}, & \text{onde } z^2 = \frac{1 + \cos \theta \cos(\phi/2)}{2}; \\ y = \frac{\operatorname{sen} \theta}{z}. \end{cases}$$

A projeção sinusoidal também é usada para mapas de todo o céu, mas ultimamente tem-se preferido a projeção Hammer-Aitoff, onde a deformação próxima dos polos é menos. A transformação sinusoidal é particularmente simples no aspecto equatorial, dada por:

$$\begin{cases} x = (\phi - \phi_0) \cos \theta; \\ y = \theta. \end{cases}$$

Na projeção sinusoidal, as linhas de latitude são retas horizontais, uniformemente espaçadas.

Em 1859, o matemático francês Nicolas Auguste Tissot introduziu uma forma visual para avaliar as distorções produzidas pela projeção de uma esfera em um plano, que chamamos de **indicatriz de Tissot**. A ideia é ver como círculos infinitesimais na superfície de uma esfera são projetados no plano. Tissot mostrou que estes círculos podem ter apenas duas formas: ou continuam sendo círculos ou se alongam e se tornam elipses. Se um círculo sobre a esfera permanece um círculo no plano então a projeção é conforme. Se os círculos se tornam elipses, mas suas áreas são as mesmas do círculo original, então trata-se de uma projeção de áreas iguais. É impossível que a projeção de uma esfera seja conforme e de áreas iguais em todo o plano de projeção simultaneamente.

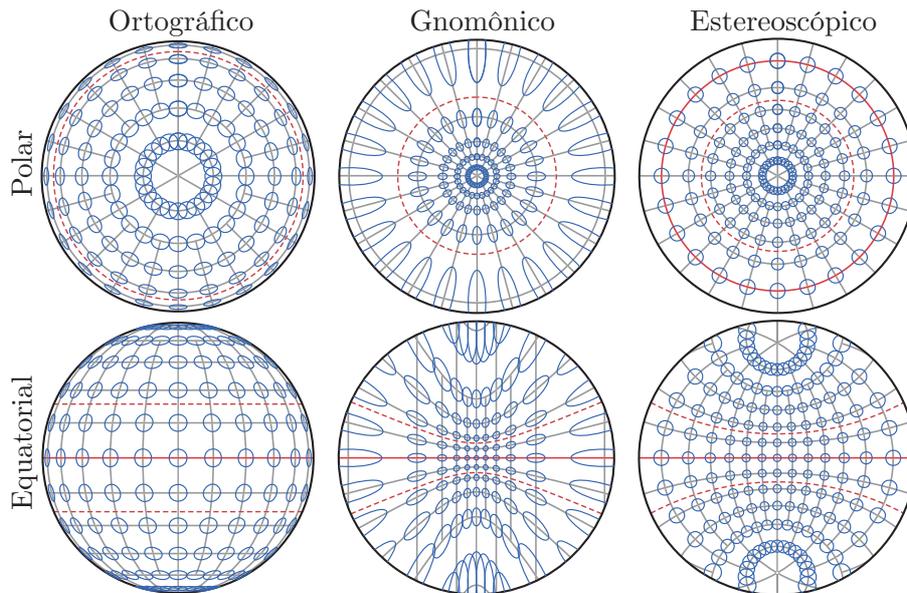


Figura 1.46: Indicatriz de Tissot (elipses/círculos azuis) para projeções azimutais, em aspectos polar e equatorial. As linhas de latitude (declinação) e longitude (ascensão reta) estão em intervalos de 15° . O equador é a linha cheia vermelha. A projeção gnomônica é limitada em 76° e a estereoscópica em 110° para evitar deformações excessivas. A projeção ortográfica está limitada a 90° por construção (a projeção ortográfica pode mostrar no máximo metade da esfera, isto é, um hemisfério).

Na prática, a indicatriz de Tissot é calculada e desenhada em todo o mapa (a indicatriz é ampliada para que possamos vê-la) para que seja possível visualmente avaliarmos as deformações introduzidas pela projeção. A Fig. 1.46 dá exemplos da indicatriz de Tissot para projeções azimutais, tanto de aspecto polar como equatorial.

Podemos ver que a projeção estereoscópica é conforme (só há círculos) e nenhuma das três projeções ilustradas conservam a área. A projeção gnomônica causa grandes deformações longe do centro de projeção, porém os grandes círculos são sempre linhas retas no mapa como, por exemplo, o equador celeste ou a eclíptica. Isto significa que qualquer reta traçada nesta projeção é uma geodésica, isto é, corresponde à distância mais curta entre 2 pontos da esfera.



2.1 Escalas de Medida de Tempo

2.1.1 Introdução

Desde a antiguidade, as medidas de tempo foram baseadas nos movimentos aparentes dos astros. Isto se deve ao fato de que estes movimentos são extremamente regulares e, em muitos casos, facilmente observáveis. Foi somente no século **XX**, com o advento da física quântica, que as escalas de tempo passaram a serem baseadas em transições atômicas.

De qualquer forma, mesmo sendo o tempo padrão definido em termos da física atômica, as escalas de tempo que utilizamos ainda são baseadas nos movimentos da Terra, Sol e Lua. A rotação da Terra em torno do seu eixo, por exemplo, é praticamente uniforme e pode ser medido de maneira muito precisa observando-se o movimento aparente das estrelas.

2.1.2 Movimento e tempo

Historicamente, as medidas de tempo estão relacionadas com o movimento da Terra e dos astros. Muitas das unidades de tempo que usamos estão relacionadas a **ciclos astronômicos**. A escala básica de medida do tempo, baseada no período de rotação da Terra em torno do seu próprio eixo, é chamado *dia*. A definição precisa do dia depende do ponto de referência que se utiliza para medi-lo (como veremos mais abaixo, onde definiremos com precisão este e as demais escalas de tempo aqui apresentadas).

Temos também uma escala de tempo natural definida pelo período de rotação da Lua em torno da Terra, o *mês*. Novamente, a definição precisa de mês lunar depende de como medimos o período de translação da Lua, em relação às estrelas ou ao Sol. O mês pode ser dividido em quatro partes correspondendo as *fases da Lua* (Lua cheia, quarto minguante, crescente e Lua nova), definindo-se aproximadamente assim a *semana* (mas note que a semana não corresponde a um ciclo astronômico).

Finalmente, temos o período correspondente à translação da Terra em torno do Sol, o *ano*. Este pode ser ainda dividido em quatro, de acordo com as estações do ano (primavera, inverno, outono e verão).

2.1.3 Tempo sideral

O *dia sideral* é definido como o intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas do ponto vernal, Υ , pelo meridiano do observador. Exceto por efeitos pequenos devido às flutuações na rotação da Terra, a *hora sideral local* é simplesmente o ângulo horário do ponto vernal (H , nas coordenadas horárias). A *hora sideral verdadeira* é o ângulo horário do equinócio verdadeiro da data, assim como a *hora sideral média* é o ângulo horário do equinócio médio da data (as definições de médio e verdadeiro neste caso estão relacionados à nutação como veremos na seção 3.2).

Devemos notar que a definição de tempo sideral é feita em termos do ponto vernal e não utilizando as estrelas como referencial (veja a figura 2.1). Assim, exceto pelo movimento do ponto

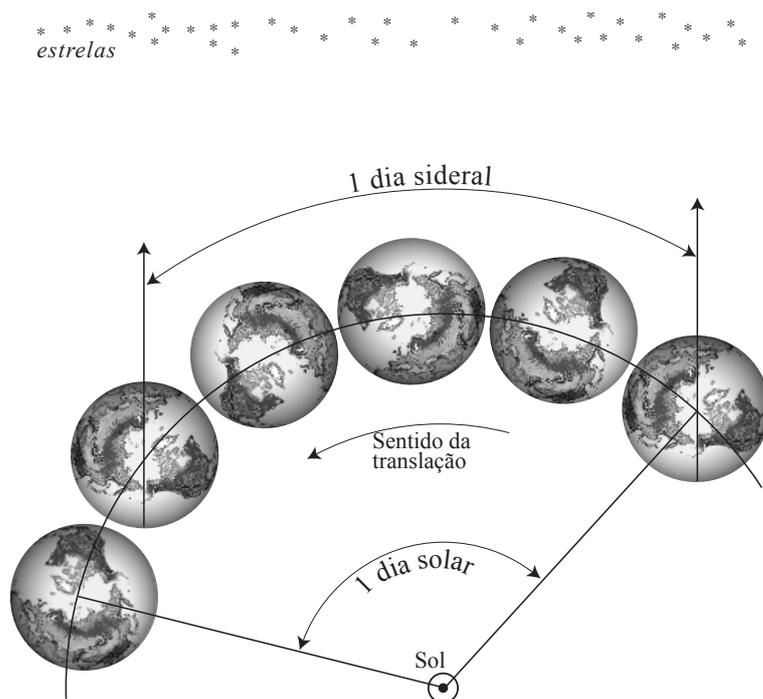


Figura 2.1: Diferença entre dia sideral (uma rotação completa em relação às estrelas fixas) e dia solar (rotação em relação ao Sol). Rigorosamente, o dia sideral é definido em relação ao ponto vernal, Υ , contudo, em um período de 24 horas, o movimento do ponto vernal em relação às estrelas fixas pode ser desprezado em primeira aproximação.

vernal em relação a um referencial inercial (devido à precessão dos equinócios), o dia sideral é uma medida direta da rotação da Terra em torno do seu próprio eixo. O tempo sideral pode então ser determinado diretamente pelo movimento aparente dos astros na esfera celeste.

Para cada meridiano terrestre podemos definir uma *hora sideral local* que se relaciona com a *hora sideral de Greenwich* pela relação:

$$\text{tempo sideral local} = \text{tempo sideral de Greenwich} + \text{longitude}$$

onde a longitude é positiva se for medida à Leste de Greenwich e negativa à Oeste. Lembre-se que a longitude deve ser convertida em unidade de tempo antes de ser somada ao tempo sideral de Greenwich (ou seja, se for dada em graus, devemos dividi-la por 15). A vantagem em se definir o tempo sideral a partir do meridiano de Greenwich é que existe uma relação empírica entre esta hora (ou simplesmente *tempo sideral*) e o tempo universal que será definido mais abaixo.

O dia sideral tem por definição 86.400 segundos de tempo sideral; em outras palavras podemos definir o *segundo de tempo sideral* como a fração $1/86.400$ do dia sideral. Como veremos a seguir, a definição de segundo varia segundo o sistema de tempo utilizado. Utilizando-se o segundo definido pelo sistema internacional de unidades (SI), o dia sideral tem aproximadamente $23^{\text{h}}56^{\text{m}}4,0905^{\text{s}}$ ou 86164,0905 segundos.

Se, ao invés de definirmos o dia em relação ao ponto vernal, mas em relação às estrelas fixas, teremos o *dia estelar*. A diferença entre o dia sideral e estelar é de cerca de 0,0084 segundos. O dia estelar é ligeiramente mais longo que o dia sideral devido ao movimento retrógrado do ponto vernal em relação às estrelas.

2.1.4 Tempo solar, tempo universal e tempo civil

O tempo solar é baseado na rotação da Terra em relação ao Sol. Esta definição difere do tempo sideral, uma vez que a Terra tem um movimento de translação em torno do Sol ao mesmo tempo em que gira em torno de si mesma (Fig. 2.1). É este movimento combinado que define o tempo solar. Assim, o tempo solar é baseado no *dia solar* que é equivalente à noção intuitiva que nós temos do dia, relacionado ao movimento diurno aparente do Sol.

Existem duas definições distintas de tempo solar:

tempo solar local aparente ou verdadeiro, dado pela posição aparente do centro do disco solar. Esta é uma medida de tempo muito irregular, mas é a mais intuitiva; ela está diretamente relacionada ao tempo medido em um relógio de Sol. Está em desuso em astronomia desde 1965.

tempo solar médio, definido como o ângulo horário do *Sol médio* +12^h (para que o dia comece à meia-noite). O Sol médio é um objeto fictício que se move ao longo do equador celeste a uma velocidade uniforme, enquanto que o *Sol verdadeiro* move-se ao longo da eclíptica com um ritmo não uniforme (devido principalmente à elipticidade da órbita da Terra, à inclinação da eclíptica e as perturbações devido à Lua e aos planetas, cf. Fig. 2.2).

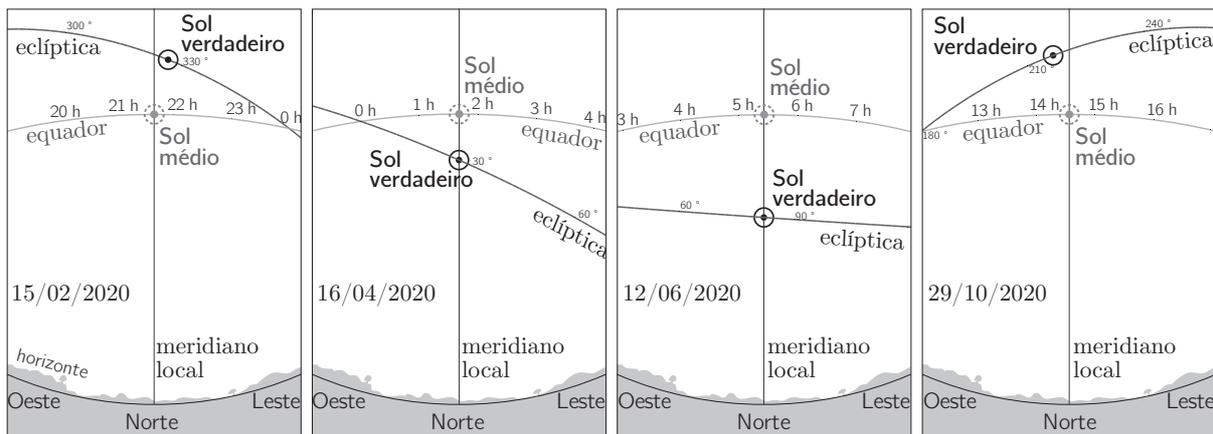


Figura 2.2: Diferença entre o *Sol verdadeiro* (aparente) e o *Sol médio*, que é aproximadamente a projeção do Sol aparente sobre o equador celeste. Para diferentes dias do ano, o Sol verdadeiro pode tanto estar atrasado em relação ao Sol médio (p.ex. 15/02) como adiantado (p.ex. 26/10). Por volta dos dias 16/04 e 12/06 a passagem meridiana de ambos coincidem. As horas sobre o equador celeste indicam o valor da ascensão reta aproximada naquele ponto. A figura corresponde a um observador no Hemisfério Sul olhando exatamente para a direção Norte. O traço vertical corresponde ao meridiano local do observador.

O dia solar médio é uniforme ao longo do tempo, porém medindo o intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas do Sol verdadeiro pelo meridiano local, constatamos que esta duração geralmente difere de 24h (mais adiante definiremos de maneira mais rigorosa a duração do dia). Por exemplo, um observador em São Paulo verá o centro do Sol verdadeiro cruzar o meridiano local às 12h01m42s no dia 15/09/2020 e às 12h01m20s no dia seguinte; o intervalo de tempo é de 23h59m38s. Entre os dias 02 e 03/11/2020 o intervalo de tempo é de 24h e entre os dias 15 e 16/12/2020 o intervalo é de 24h00m26s.

Se nós marcamos a posição do Sol (verdadeiro) exatamente ao meio-dia civil (o momento da *passagem meridiana* do Sol médio, ou seja, o meio-dia marcado pelo relógio) durante todo um ano, veremos que estas posições do Sol traçam a figura na forma de um “oito” na esfera celeste, como mostra a Fig. 2.3. Esta figura é chamada de **analema**. De fato, podemos fazer esta experiência a qualquer momento do dia, o importante é usar a mesma hora local (hora legal, sem levar em conta a eventual horário de verão) durante o ano todo.

A construção de analemas pode ser generalizada para observadores na superfície de outros planetas, usando o mesmo princípio: observação do Sol verdadeiro a cada intervalo de dia solar local. Por exemplo, em Marte, o Sol seria observado a cada intervalo de 24^h39^m35^s (dia solar médio marciano). Neste caso, como mostra a Fig. 2.4 os desenhos dos analemas seriam diferentes do analema terrestre. A forma do analema depende basicamente da inclinação do planeta em relação ao seu plano orbital (obliquidade) e da excentricidade de sua órbita (o quanto a órbita não é circular), como veremos em seguida.

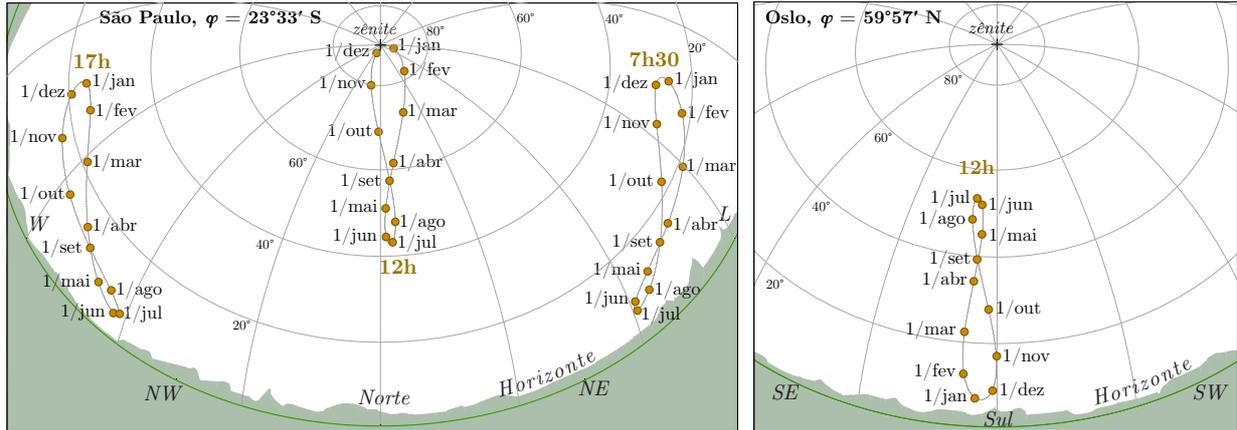


Figura 2.3: Esquerda: Analemas observáveis em São Paulo, a posição aparente do Sol verdadeiro (círculos laranjas), exatamente ao meio-dia civil (12h no relógio), ao amanhecer (7h30) e no final da tarde (17h) durante todo um ano (o primeiro dia de cada mês está indicado). Note que no verão, o Sol passa muito próximo do zênite. Direita: Analema de Oslo no Hemisfério Norte para comparação. Note que a trajetória aparente do Sol parece invertida. Por estar distante da região dos trópicos, o analema tem uma altura menor do que m São Paulo. A grade de linhas cinzas correspondem às coordenadas horizontais, com o zênite indicado no topo e a linha do horizonte local na parte inferior das figuras (o horizonte astronômico, um grande círculo de altura zero e o horizonte “geográfico”, com suas irregularidades).

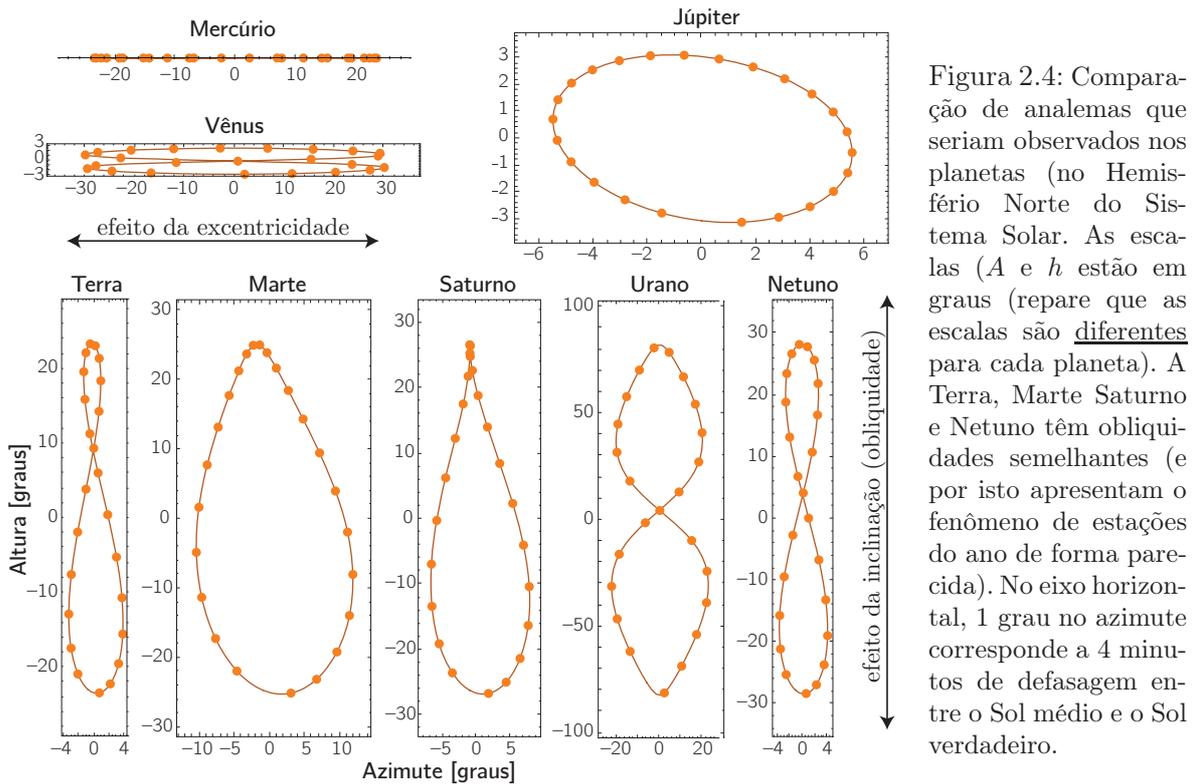


Figura 2.4: Comparação de analemas que seriam observados nos planetas (no Hemisfério Norte do Sistema Solar). As escalas (A e h estão em graus (repare que as escalas são diferentes para cada planeta). A Terra, Marte Saturno e Netuno têm obliquidades semelhantes (e por isto apresentam o fenômeno de estações do ano de forma parecida). No eixo horizontal, 1 grau no azimute corresponde a 4 minutos de defasagem entre o Sol médio e o Sol verdadeiro.

Equação do tempo

A diferença entre o tempo solar médio e o tempo solar aparente é conhecida como *equação do tempo*:

$$\text{equação do tempo} = \text{tempo solar aparente} - \text{tempo solar médio},$$

isto é, a equação do tempo é a diferença entre os ângulos horários do Sol verdadeiro e o Sol médio, descritos mais acima. Como o ângulo horário é $H = T_s - \alpha$ [veja Eq. (1.10), onde T_s é o *tempo sideral*], então a equação do tempo pode ser interpretada como a diferença entre a longitude do Sol médio e a ascensão reta do Sol verdadeiro ($L_{\odot} - \alpha_{\odot}$). Alguns autores adotam uma convenção com o sinal trocado para a equação do tempo (tempo médio menos o aparente).

A equação do tempo era muito usada para que a leitura de um relógio de Sol desse a hora certa; sem a equação do tempo, um relógio de Sol adianta ou atrasa até cerca de 16 minutos, dependendo da época do ano.

A ascensão reta do Sol verdadeiro está relacionada com a longitude em coordenadas eclípticas pelas equações (1.20). Como a latitude eclíptica do Sol é praticamente zero (varia de alguns segundos de arco devido a perturbações), podemos tomar $\beta_{\odot} = 0$ e obtemos:

$$\tan \alpha_{\odot} = \cos \varepsilon \tan \lambda_{\odot}.$$

Introduzimos agora a chamada *Equação do Centro*, C , da seguinte forma:

$$C = \lambda_{\odot} - L_{\odot}.$$

A origem desta equação será discutida em detalhes posteriormente na Sec. 5.4.1. Substituindo a Eq. do Centro na equação do tempo temos:

$$\text{equação do tempo} = L_{\odot} - \alpha_{\odot} = (\lambda_{\odot} - \alpha_{\odot}) - C = -(R + C), \quad (2.1)$$

onde definimos $R = \alpha_{\odot} - \lambda_{\odot}$ a *Redução ao Equador*. Usando a equação de conversão entre coordenadas equatoriais e eclípticas, temos:

$$R = \arctan(\cos \varepsilon \tan \lambda_{\odot}) - \lambda_{\odot}; \quad (2.2)$$

onde ε é a obliquidade da eclíptica. A redução ao equador pode ser expressa por uma série, adequada para $\varepsilon \lesssim 0,5$:

$$R \simeq -\tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\lambda_{\odot} + \frac{1}{2} \tan^4 \frac{\varepsilon}{2} \sin 4\lambda_{\odot} - \frac{1}{3} \tan^6 \frac{\varepsilon}{2} \sin 6\lambda_{\odot} + \dots$$

Para obliquidade pequena, ainda pode ser feita a expansão em série das funções tangentes:

$$R \simeq -\left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^4}{24} + \frac{17\varepsilon^6}{2880}\right) \sin 2\lambda_{\odot} + \left(\frac{\varepsilon^4}{32} + \frac{\varepsilon^6}{96}\right) \sin 4\lambda_{\odot} - \frac{\varepsilon^6}{192} \sin 6\lambda_{\odot} + \dots$$

A equação do centro, C , também tem uma forma simplificada através de uma expansão em série para pequenas excentricidades, isto é, $e \ll 1$. Isto é mostrado na Sec. 5.4.1 e aqui damos uma versão mais simples da Eq. (5.18):

$$C = \left(2e - \frac{1}{4}e^3\right) \sin M + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4\right) \sin 2M + \left(\frac{13}{12}e^3\right) \sin 3M + \left(\frac{103}{96}e^4\right) \sin 4M, \quad (2.3)$$

onde M é a *anomalia média* que nada mais é que a representação do movimento médio de um corpo em uma órbita elíptica, $M = L_{\odot} - \varpi_{\odot}$ e ϖ_{\odot} é a longitude do perigeu (no caso, da órbita aparente do Sol na eclíptica).

Desta forma podemos ver que a equação do tempo tem duas componentes principais (Fig. 2.5). A redução ao equador, devido à obliquidade da eclíptica, faz com que, a cada 6 meses, o Sol verdadeiro (λ_{\odot}) ultrapasse o Sol médio (L_{\odot}) para, em seguida ser ultrapassado. Em outras palavras, o Sol verdadeiro oscila em torno do Sol médio com um período de 6 meses com uma amplitude $\tan^2(\varepsilon/2) \approx 9,9$ minutos (isto é, o Sol verdadeiro pode adiantar ou atrasar em relação ao Sol

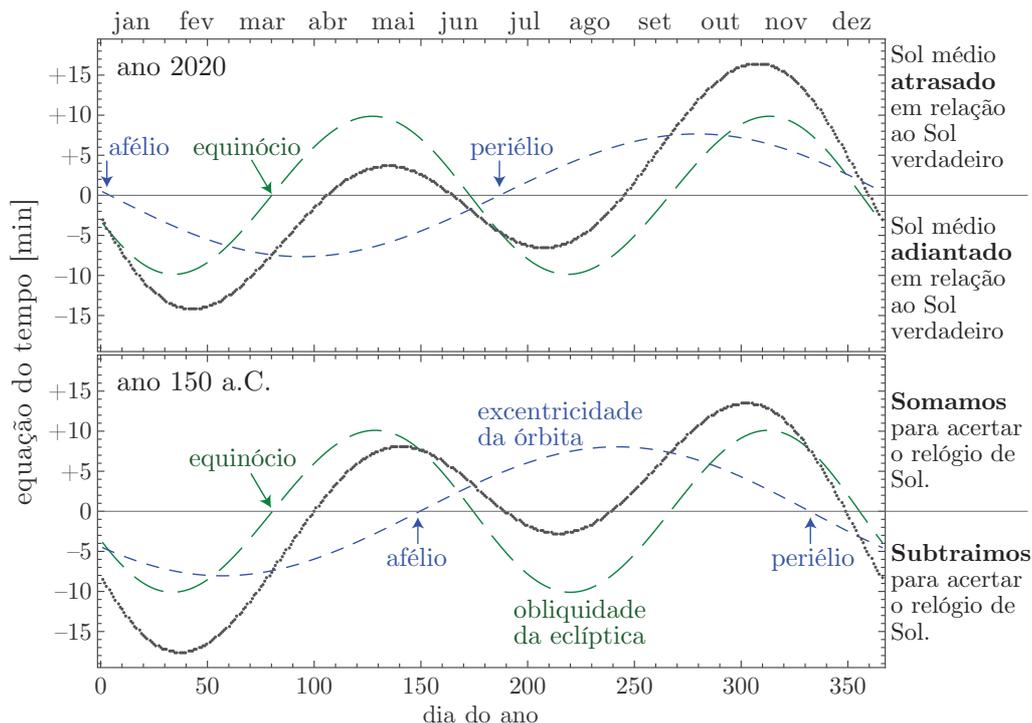


Figura 2.5: Equação do tempo ao longo de um ano. A curva tracejada azul indica a contribuição pelo fato da órbita terrestre ser uma elipse; a curva verde indica a contribuição da inclinação do equador celeste (perpendicular ao eixo de rotação da Terra) em relação à órbita terrestre (a obliquidade da eclíptica). A soma destas duas componentes mais algumas perturbações lunares e planetárias, resulta na equação do tempo, mostrada aqui em minutos, em função do dia no ano. O painel de cima mostra a equação do tempo para os dias de hoje, o painel de baixo mostra para o ano 150 A.C., época do astrônomo grego Hiparco. A equação do tempo varia lentamente com o tempo, devido às variações da excentricidade e da obliquidade.

médio até quase 10 minutos somente devido à obliquidade da eclíptica). Note que este efeito é puramente geométrico.

Além disto, a elipticidade da órbita terrestre também provoca uma oscilação do Sol verdadeiro em torno do Sol médio, mas com um período de um ano (este é um efeito dinâmico). Quando a Terra se encontra próxima do periélio sua velocidade é maior do que quando ela se encontra próxima do afélio. Isto se reflete na velocidade do movimento anual aparente do Sol, fazendo com que seu movimento não seja uniforme como o do Sol médio.

A soma das oscilações devido à obliquidade e à elipticidade (mais as perturbações lunares e planetárias, que são muito menores) resulta no comportamento observado da equação do tempo (Fig. 2.5). Quando projetamos esta diferença na esfera celeste obtemos os analemas (Fig. 2.3). O valor da equação do tempo deve ser somado à hora lida em um relógio de Sol para obtermos a hora que usamos, baseada no Sol médio.

A equação do tempo tem dois máximos e dois mínimos. Nas datas que correspondem a estes pontos a variação da equação do tempo (matematicamente, sua derivada) é nula. Nestas datas, o intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas do Sol verdadeiro é igual ao intervalo de tempo entre as passagens meridianas do Sol médio, isto é, 24h. Quando a variação da equação (sua derivada) é máxima, então temos a maior discrepância entre o intervalo de tempo entre duas passagens meridianas do Sol verdadeiro em relação a 24h.

Como a excentricidade da órbita terrestre e a obliquidade da eclíptica variam lentamente com o tempo, a forma da equação do tempo varia lentamente. Para algumas décadas a modificação é imperceptível na escala de menos de um minuto, porém quando comparamos a equação do

tempo, por exemplo, da época do astrônomo grego Hiparco com a equação do tempo de hoje a diferença é notável (Fig. 2.5, painéis de cima e de baixo).

Como a variação é lenta, usando apenas alguns termos da expansão em série da equação do tempo obtemos uma expressão adequada (dentro de algumas dezenas de segundos) para um intervalo de tempo entre 1000 A.C. e 5000 D.C.:

$$\begin{aligned} \text{equação} &= (-7,6584 + 0,0192663T) \text{sen}(6,24006 + 628,302T) + \\ \text{do tempo} &+ (9,8563 - 0,0112386T) \text{sen}[9,790126 + 1256,664T + \\ \text{[em min]} &+ (0,06683215 - 0,00016813T) \text{sen}(6,24006 + 628,302T)] , \end{aligned}$$

onde $T = (\text{JD} - 2451545,0)/36525$ (JD é o dia juliano, definido na Sec. 2.3).

Tempo universal

O *tempo civil*, a escala de tempo que utilizamos no nosso dia-a-dia, era até os anos 70 definido pelo tempo solar médio $+12^{\text{h}}$, para que o dia comece à meia-noite e não ao meio-dia. Atualmente, a definição precisa do tempo civil depende do tempo atômico (que veremos mais adiante) e não da rotação da Terra.

Chamamos de *Tempo Universal* (UT, do inglês *Universal Time*), o tempo civil de Greenwich. Historicamente, o UT era chamado GMT (do inglês, *Greenwich Mean Time* ou tempo de Greenwich médio). Apesar de ultrapassada, ainda hoje a notação GMT é utilizada em algumas áreas.

Podemos ainda corrigir o tempo universal levando em conta o movimento do polo geográfico em relação ao eixo de rotação da Terra (discutiremos este fenômeno na seção 3.3). O tempo universal assim corrigido é chamado UT1 (e o UT sem correção é as vezes chamado UT0).

A rotação da Terra é afetada também por efeitos periódicos ligados ao aquecimento diferenciado da atmosfera para cada estação do ano. Este efeito sazonal redistribui uma grande quantidade da atmosfera durante o ano o que provoca uma variação do momento de inércia total da Terra. Podemos então o tempo universal levando-se em conta esta variação sazonal da velocidade de rotação terrestre. Chamamos de UT2 o tempo universal que leva em conta esta correção (além da correção do movimento do polo).

2.1.5 Translação da Terra: ano

As escalas de tempo solar e sideral são baseadas essencialmente no movimento diurno da esfera celeste, o dia. Podemos também definir unidades de tempo baseadas na translação da Terra em torno do Sol. Esta unidade, é claro, chama-se ano. Da mesma forma que o dia, vários tipos de ano podem ser definidos de acordo com o referencial adotado.

Ano sideral

Chamamos de ano sideral o intervalo de tempo de uma volta da Terra em torno do Sol em relação às estrelas fixas, veja Fig. 2.6. Este é o período para que a Terra percorra exatamente 360° em relação a um referencial fixo (supostamente inercial). O ano sideral tem atualmente 365d 6h 9m 10s.

Do ponto de vista do observador terrestre, o ano sideral é o tempo necessário para o Sol completar 360° sobre a eclíptica. Podemos então definir o *movimento médio do Sol*, n_\odot como:

$$n_\odot = 360^\circ / 365,256366 \text{ dia} = 0,9856091 \text{ por dia} , \quad (2.4)$$

lembrando que este movimento aparente anual do Sol é no sentido direto (ascensão reta ou longitude eclíptica crescente).

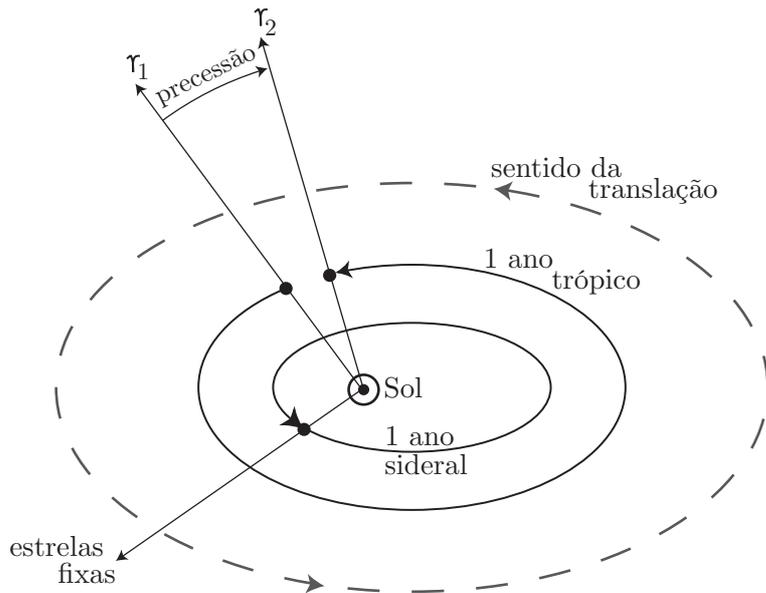


Figura 2.6: Ano trópico é o período orbital da Terra em relação ao ponto vernal, Υ , e ano sideral, em relação às estrelas “fixas”. A diferença se dá devido ao movimento retrógrado do ponto vernal, causado pela precessão do eixo de rotação terrestre (trataremos disto mais adiante, na seção 3.2).

Nascimento heliacal Chamamos de nascimento *heliacal* ou “nacer heliaco” quando um astro aparece logo acima do horizonte seguido imediatamente pelo Sol. Devido ao movimento anual aparente do Sol, a cada dia os astros nascem cerca de 4 minutos mais cedo e, assim, a cada dia após o dia do nascimento heliacal, vemos o astro mais tempo antes do nascer do Sol. A Fig. 2.7 ilustra o fenômeno do nascimento heliacal.

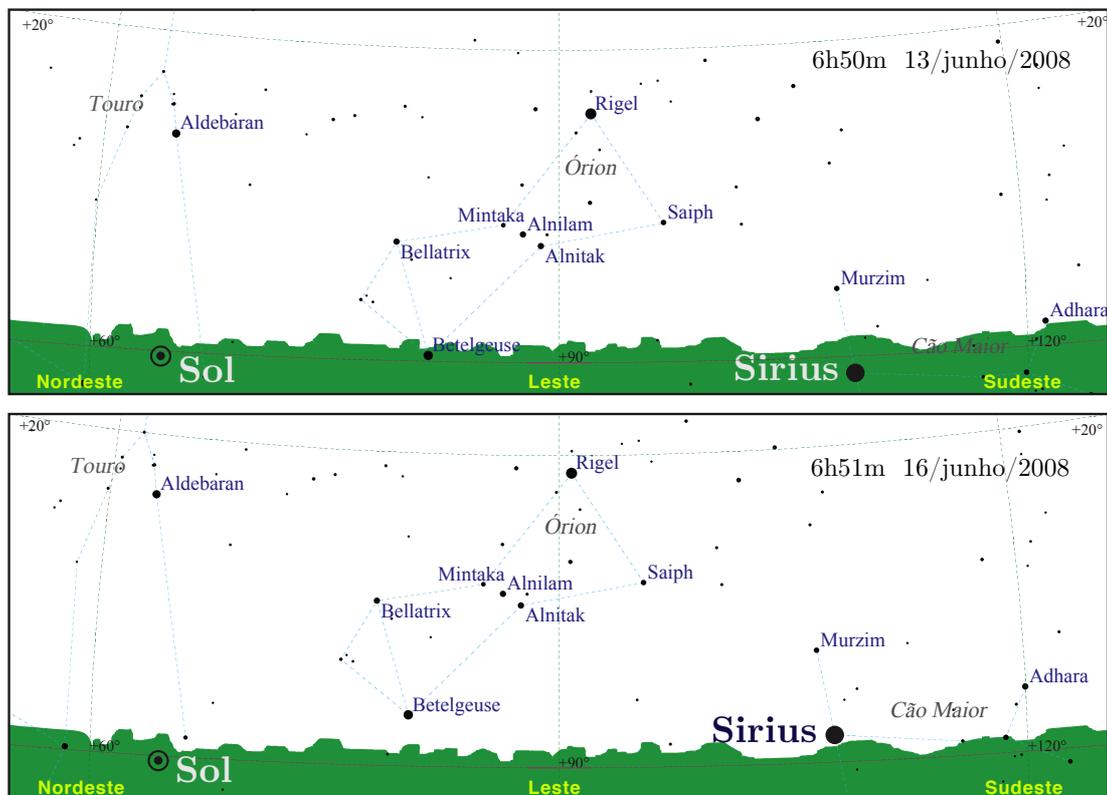


Figura 2.7: Nascimento heliacal de Sirius para um observador em São Paulo. No painel de cima, o Sol nasce um pouco antes da estrela Sirius. Neste dia, Sirius não é observada, ofuscada pelo Sol. Alguns dias depois (painel de baixo) Sirius nasce antes do Sol e pode ser observada por alguns instantes. O dia em que Sirius é observada pela primeira vez é o dia do seu *nascimento heliacal*.

O nascimento heliacal depende da localização geográfica do observador, a diferença pode ser de várias semanas. Comparando com o exemplo da Fig. 2.7, um outro observador no Cairo, Egito, observa o nascimento heliacal de Sirius apenas no dia 26/07 em 2008, mais de mês após o observador de SP.

Há uma variação lenta da data em que ocorre o nascimento heliacal de um astro devido à precessão dos equinócios (discutido na Sec. 3.2). Tomando novamente o exemplo de um observador no Egito, por volta do ano 2000 A.C. o nascimento heliacal de Sirius era por volta do dia 9 de julho.

A observação do nascimento heliacal de estrelas (próximas da eclíptica) permite a determinação empírica da duração do ano sideral. Foi desta forma, inclusive utilizando a estrela Sirius, que os antigos egípcios determinaram a duração do ano há mais de 4000 anos.

Ano trópico

O *ano trópico* é o intervalo médio de tempo entre duas passagens consecutivas do Sol pelo ponto vernal, Υ , para um observador na Terra. O nome vem do fato do Sol completar uma oscilação completa entre os trópicos de Câncer e Capricórnio, isto é, o Sol está sempre entre os trópicos.

Quando o Sol se encontra no ponto vernal sua declinação é zero (pela própria definição do ponto vernal). No dia em que o Sol está no ponto vernal, o dia e a noite têm aproximadamente 12 horas cada, e por isto, esta data é chamada de *equinócio* (de Outono no Hemisfério Sul e de Primavera no Hemisfério Norte). Aproximadamente 6 meses depois, o Sol cruza novamente o equador celeste no ponto oposto ao ponto vernal e temos novamente um equinócio (de Primavera no Hemisfério Sul, de Outono no Norte). Entre os equinócios de Outono e Primavera (do Hemisfério Sul) a declinação do Sol atinge um valor máximo para, seis meses depois, atingir um mínimo. Estes extremos são chamados de *solstício* (de Verão no Hemisfério Sul quando a declinação é mínima, de Inverno no Hemisfério Sul quando a declinação é máxima). Estes quatro pontos são chamados *estações* e definem (como diz o nome) o início das estações do ano. Por sua definição, o ano trópico corresponde à nossa noção intuitiva de ano, como sendo o tempo necessário para que as estações do ano se repitam.

Como o ponto vernal se move em relação às estrelas fixas (devido à precessão dos equinócios, como veremos em detalhes na seção 3.2), o ano trópico difere ligeiramente do ano sideral. O ano trópico tem atualmente uma duração de 365d 5h 48m 45s (ou 365,24219 dias), sendo um pouco mais curto que o ano sideral, já que o ponto vernal tem um movimento retrógrado. Devido às irregularidades do movimento da Terra, tanto da precessão e nutação como da translação, a duração do ano trópico varia como mostra a Fig. 2.8.

Devido a esta variação, é mais conveniente definir o ano trópico em termos do movimento médio do Sol ao longo da eclíptica, de forma que um ano é o intervalo de tempo necessário para o Sol médio percorrer 360° . A duração deste movimento médio varia lentamente com o tempo da seguinte forma, baseada no trabalho do astrônomo francês Jacques Laskar, por sua vez baseado no astrônomo inglês Simon Newcomb:

$$\text{ano trópico} = 365,24218967 - 6,1536 \times 10^{-5}t - 7,29 \times 10^{-8}t^2 + 2,64 \times 10^{-7}t^3 \text{ dias}, \quad (2.5)$$

onde $t = (\text{JD} - 2451545.0)/365250$ é medido em *milênio juliano* e JD é o dia juliano, veja Eq. (2.11) na seção 2.3.

Ano de Bessel O ano de Bessel (ou *ano besseliano*) é praticamente igual ao ano trópico, porém o início é definido como o momento em que a longitude do Sol médio (corrigido pela aberração, $-20''5$) é de 280° (ou, a ascensão reta é $18^{\text{h}}40^{\text{m}}$). Esta coordenada, medida a partir do ponto vernal médio, foi escolhida para que o começo do ano fosse aproximadamente no dia primeiro de janeiro.

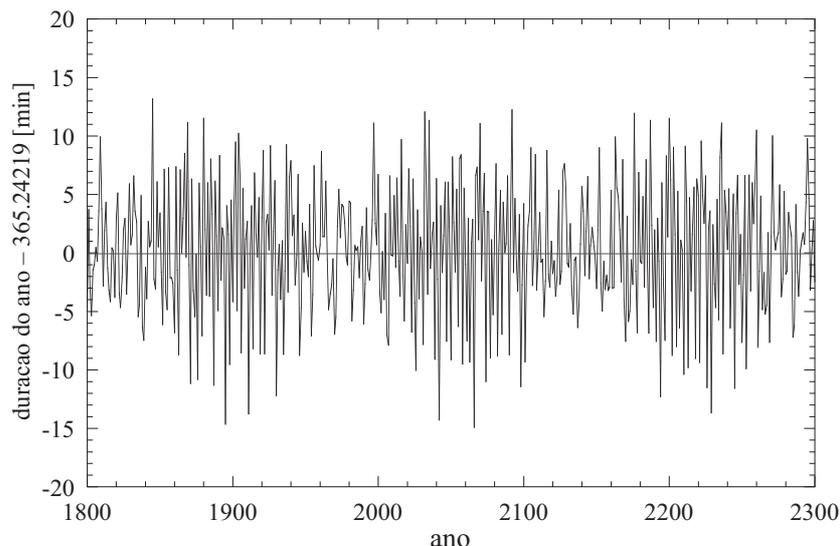


Figura 2.8: Variação da duração do ano trópico em minutos em relação ao valor médio de 365,24219 dias, medido entre duas passagens consecutivas do Sol pelo ponto vernal, levando em conta efeitos de precessão e nutação (veja Sec. 3.2).

A notação (agora em desuso, mas muito presente em referências históricas) B1900.0, por exemplo, indica o início do ano de Bessel ou *época de Bessel* para 1900. A relação entre a época de Bessel e o calendário gregoriano e data juliana para algumas épocas muito usadas historicamente são:

época	data juliana	calendário gregoriano (UTC)	
B1850	2396758,2036	31/12/1849 16h52m19s	primeiro padrão usado
B1875	2405889,2586	31/12/1874 18h12m23s	usado para os limites das constelações
B1900	2415020,3135	31/12/1899 19h31m27s	usado no catálogo Henry Draper (HD)
B1950	2433282,4235	31/12/1949 22h09m50s	usado no catálogo FK4

O ano de Bessel deixou de ser usado em astronomia em 1984.

Ano anomalístico

Como a órbita da Terra é uma elipse, também podemos definir um ano como o intervalo entre duas passagens da Terra pelo periélio. Este ano é chamado *ano anomalístico* e tem uma duração de 365d 6h 13m 52,5 s, sendo um pouco mais longo que o ano sideral devido à precessão da órbita terrestre (que é no sentido direto e não retrógrado como o movimento do ponto vernal). Atualmente, a Terra passa pelo periélio por volta do dia 3 de janeiro, e pelo afélio por volta do dia 5 de julho (veja a tabela 5.8 na página 201).

O *ano anomalístico* aparece naturalmente quando resolvemos o chamado problema de Kepler (dois corpos ligados gravitacionalmente) para o sistema Sol-Terra (discutido em detalhes na seção 5.4.1), onde os ângulos ligados ao movimento são medidos a partir do eixo de passa pelo foco da elipse e o periastro.

Ano draconiano

A órbita da Lua também define um grande círculo na esfera celeste. Assim como a intersecção do equador celeste com a eclíptica definem dois pontos precisos (nos equinócios de março e setembro), a intersecção da projeção da órbita lunar na esfera celeste e a eclíptica também definem dois pontos de referência, os nodos ascendente e descendente. O intervalo entre duas passagens do Sol pelo *nodo ascendente* define o *ano draconiano*, cuja duração média atual é aproximadamente 346,62 dias.

O ano draconiano está relacionado com o ciclo de recorrência dos eclipses (uma vez que os eclipses apenas ocorrem quando o Sol e a Lua estão próximos dos nodos ascendente ou descendente), correspondendo a 1/19 do ciclo de saros (isto será visto na seção 4.10).

O nome “draconiano” vem de dragão, pois havia uma lenda em que um dragão vivia próximo dos nodos e de vez em quando tentava comer o Sol ou a Lua (durante os eclipses).

2.1.6 Translação da Lua: mês

Da mesma forma que a translação da Terra define o ano, a translação da Lua em torno da Terra deu origem ao *mês*. Devemos notar, contudo, que o movimento da Lua é extremamente complexo e as irregularidades no seu movimento muito mais importantes do que, por exemplo, o movimento de translação terrestre.

Mês sinódico

O *mês sinódico* ou *lunação* é, por definição, o intervalo de tempo entre duas configurações idênticas e sucessivas, por exemplo duas “Luas Novas” (quando a Lua se encontra entre a Terra e o Sol) ou duas “Luas Cheias” (quando a Lua se encontra em oposição). O mês sinódico corresponde portanto ao intervalo entre duas fases iguais da Lua, veja Fig. 2.9. O mês sinódico tem atualmente uma duração média de 29,53059 dias (29 dias, 12^h44^m2^s9).

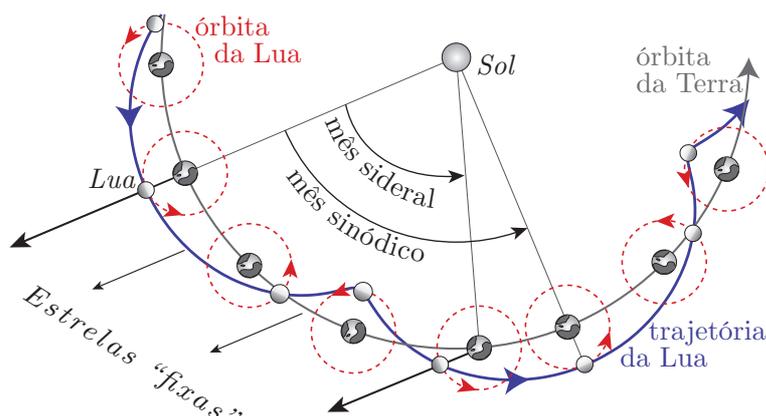


Figura 2.9: Mês sinódico (em relação ao Sol) e sideral (em relação às estrelas fixas). O traço espesso (azul) representa o movimento na Lua no espaço (totalmente fora de escala... Para uma ilustração em escala, veja a Fig. 5.14 na página 186).

Devido à complexidade da órbita lunar, em razão da perturbação da Terra, dos planetas e do Sol, da excentricidade e da inclinação de sua órbita, a duração real do mês sinódico pode variar de ± 7 horas em torno do valor médio (Fig. 2.10). As lunações mais longas ocorrem quando a Terra está próxima do periélio e as lunações mais curtas quando a Terra está próxima do afélio. Entre 1850 e 2150 as lunações mais curtas (sempre em junho) são em: 1885 (29d 6h 33,7m), 2053 (29d 6h 35,0m), 1903 (29d 6h 35,3m), 2071 (29d 6h 35,6m), 1876 (29d 6h 35,9m). As lunações mais longas (em dezembro): 1973 (29d 19h 54,9m), 2150 (29d 19h 54,5m), 1955 (29d 19h 54,0m), 2132 (29d 19h 51,3m).

É o mês sinódico que deu origem ao mês utilizado nos calendários (a recorrência das fases da Lua).

“Super Lua”, “Mini Lua” e “Lua Azul” Alguns termos referentes à Lua têm se popularizado e geralmente ganham algum destaque nos meios de comunicação.

A chamada “*Super Lua*” corresponde à Lua Cheia quando ela se encontra próxima do perigeu e, portanto, tem um tamanho aparente maior e um brilho maior que na maioria das vezes. Como o tamanho aparente é proporcional ao quadrado da distância e tomando a distância média da Lua como 384.399 km, a área aparente da Lua é cerca de 14% maior quando esta está próxima do perigeu (os menores valores do perigeu são em torno de 356.500 km).

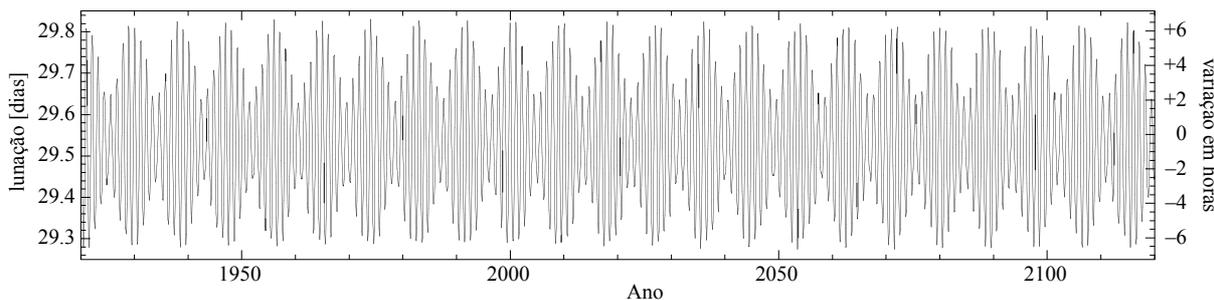


Figura 2.10: Duração de uma luação (mês sinódico, período entre duas luas novas) em um período de 200 anos. No eixo à direita é mostrada a variação em horas em relação ao período médio de luação.

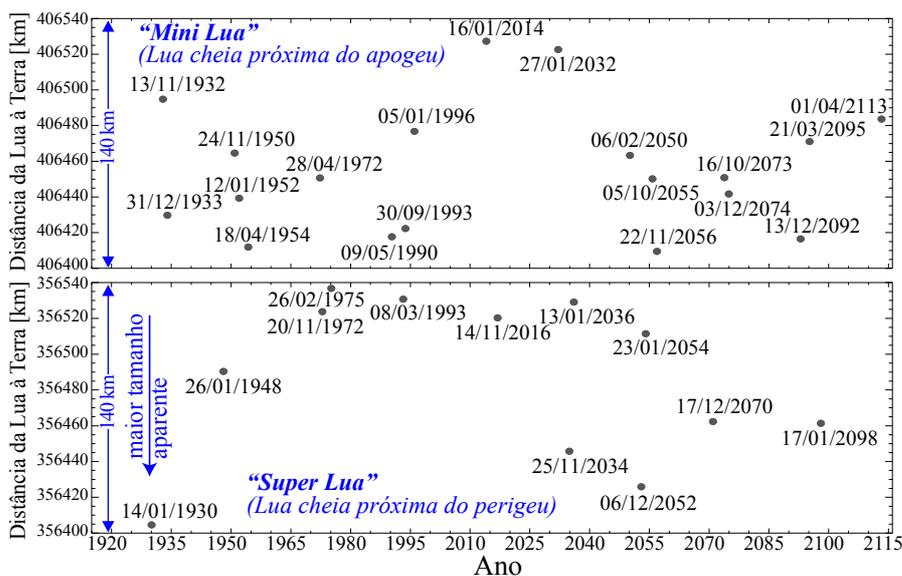


Figura 2.11: Datas da ocorrência de “Mini Lua” (painel acima) e “Super Lua” (painel abaixo) em um intervalo de tempo de 200 anos. Os pontos pretos indicam a data e distância geocêntrica da Lua.

Uma “Mini Lua” é o inverso, a Lua Cheia ocorre próxima do apogeu e, conseqüentemente, o tamanho aparente da Lua e seu brilho são menores. A Fig. 2.11 mostra alguns dos fenômenos de super e mini Lua utilizando um corte arbitrário (cerca de 140 km do perigeu e apogeu, respectivamente). No intervalo entre 1916 e 2116, as maiores Super Luas são de 14/02/1930, 25/11/2034 e 06/12/2052.

Tanto as “Mini Luas” como as “Super Luas” mais extremas ocorrem preferencialmente quando a Terra está mais próxima do Sol, e seu efeito perturbador na órbita da Lua ao redor da Terra é maior. Assim, estes fenômenos mais extremos ocorrem geralmente entre outubro e abril, com uma concentração maior em dezembro e janeiro.

“Lua Azul” é o nome que se dá à segunda Lua Cheia em um dado mês. Como o período sinódico é menor que a duração de um mês (exceto fevereiro), é possível ocorrer uma Lua Cheia no início do mês e outra Lua Cheia no final. O “azul” do nome não tem nenhuma relação com a cor da Lua, é apenas um nome derivado do termo em inglês, *blue moon*.

Mês sideral

O *mês sideral* é o período de translação da Lua em relação a um referencial fixo. A duração média de um mês sideral é de 27,3217 dias. A diferença com o mês sinódico se explica pelo fato deste depender de uma composição dos movimentos da Terra e da Lua (Fig. 2.9).

O mês sideral é exatamente igual (com uma precisão de 0,1 segundos) ao “dia” sideral lunar, isto é, o período de rotação da Lua em torno dela mesma. É por esta razão que sempre vemos a

mesma face da Lua. Na realidade vemos cerca de 59% da superfície lunar devido às perturbações solar e planetárias, além da inclinação relativa da órbita lunar e da órbita elíptica. Este fenômeno é chamado *libração*, que será visto em detalhes na seção 4.11.

Ciclo de Meton

O filósofo e astrônomo **Meton de Atenas** descobriu no século V A.C. que o período de 19 anos (trópicos) ocorriam 235 lunações (meses sinódicos). Em outras palavras, o período $19 \times 365, 24219 = 6939, 60$ dias é muito próximo de $235 \times 29, 5306 = 6939, 69$, isto é uma diferença da ordem de 2 horas em 19 anos. Este período de 19 anos, ou 6040 dias, é chamado de *Ciclo metônico*.

Isto significa que a cada 19 anos as fases da Lua caem aproximadamente no mesmo dia do ano. Por exemplo, nos anos 1959, 1978, 1997, 2016, 2035, 2054 tem uma Lua Cheia que ocorre no dia 20/06. Após alguns ciclos de 19 anos, o excesso de 2 h faz com que a fase da Lua não aconteça exatamente na mesma data do calendário. Além disto, temos os *anos bissextos* que introduzem uma descontinuidade na contagem dos dias e as lunações que podem variar de algumas horas de mês para outro. Assim, o mais frequente é que haja uma pequena variação de um dia para mais ou para menos em torno do ciclo de Meton, como ilustra a tabela 2.1.

Tabela 2.1: Exemplo do ciclo de Meton e a recorrência da mesma fase da Lua nas mesmas datas (aproximadamente) a cada 19 anos.

Ano	Data da Lua Cheia (UTC)									
1960:	13/01,	12/02,	13/03,	11/04,	11/05,	09/06,	08/07,	07/08,	05/09	
1979:	13/01,	12/02,	13/03,	12/04,	12/05,	10/06,	09/07,	08/08,	06/09	
1998:	12/01,	11/02,	13/03,	11/04,	11/05,	10/06,	09/07,	08/08,	06/09	
2017:	12/01,	11/02,	12/03,	11/04,	10/05,	09/06,	09/07,	07/08,	06/09	
2036:	13/01,	11/02,	12/03,	10/04,	10/05,	08/06,	08/07,	07/08,	05/09	
2055:	13/01,	11/02,	13/03,	11/04,	11/05,	09/06,	08/07,	07/08,	06/09	

2.1.7 Tempo dinâmico

O *tempo dinâmico* (TD) é a variável independente que aparece nas equações de movimento dos corpos celestes. Na física newtoniana a escala de tempo dinâmico é absoluta (invariante para qualquer observador). Contudo, segundo a teoria da relatividade, o tempo dinâmico depende do sistema de coordenadas utilizado. Assim define-se o *tempo dinâmico terrestre*, TDT, referente à Terra, e o *tempo dinâmico baricêntrico*, TDB, referente ao baricentro do sistema solar (aproximadamente o centro do Sol). A menos que se queira uma precisão muito alta (inferior a um milissegundo) podemos admitir que $TDT = TDB = TD$.

Tempo Terrestre (antigo Tempo das Efemérides)

Já nos anos 1920 ficou claro que a escala de tempo baseada no dia solar sofria de muitas irregularidades devido à rotação terrestre, principalmente devido à diminuição progressiva da velocidade de rotação da Terra causado pelos efeitos de maré luni-solar. A necessidade de uma escala uniforme levou ao desenvolvimento do *tempo das efemérides* (ET) nos anos 1940 e sua adoção em 1952, baseada nas equações de movimento dos planetas e da Lua. Para tanto, foi introduzido um fator de conversão entre o tempo universal e o tempo das efemérides, $\Delta T = ET - UT$.

Considerando-se, na época, que o ano tropical era mais significativo que o ano sideral, foi decidido em 1956 que a unidade fundamental de tempo seria o segundo definido como a fração $1/31.556.925, 9747$ do ano tropical médio de 1900 (com início às 12h do dia 31 de dezembro, ou

“0 de janeiro”). Para isto, foi utilizada a expressão de Newcomb que nos dá a longitude média do Sol em relação ao equinócio médio da data:

$$L = 279^{\circ}41'48''.04 + 129.602.768''.13T + 1''.089T^2 \quad (2.6)$$

de onde o tempo em segundos para o Sol completar uma volta de 360° é:

$$\frac{360^{\circ} \times 60' \times 60''}{129.602.768''.13} \times 36525\text{dias} \times 86400\text{s/dia} = 31.556.925,9747\text{s de efemérides.}$$

Na expressão (2.6), T é medido em séculos julianos, que será definido mais abaixo na seção 2.3.

A diferença entre o tempo universal (solar) e o tempo das efemérides, ΔT , não pode ser predita com precisão pois depende dos movimentos irregulares da Terra que só são conhecidas após as observações serem feitas, e comparando-se as posições preditas dos astros pelas teorias dinâmicas com as observações. Não podemos, portanto, prever o valor de ΔT para períodos superiores a alguns anos. Spencer Jones propôs a seguinte fórmula aproximativa:

$$\Delta T = 68,0 + 102,3T + 29,95T^2 + 1.821B \text{ (seg)}, \quad (2.7)$$

onde T medido em séculos julianos e B depende das irregularidades da rotação terrestre, não pode ser previsto e podendo chegar a dezenas de segundos em módulo. Os três primeiros termos do segundo membro da expressão (2.7) representam o movimento uniformemente acelerado de frenagem da rotação da Terra. Os valores medidos ou deduzidos de ΔT de 1600 a 2023 (além das previsões até 2033) são mostradas no gráfico 2.12.

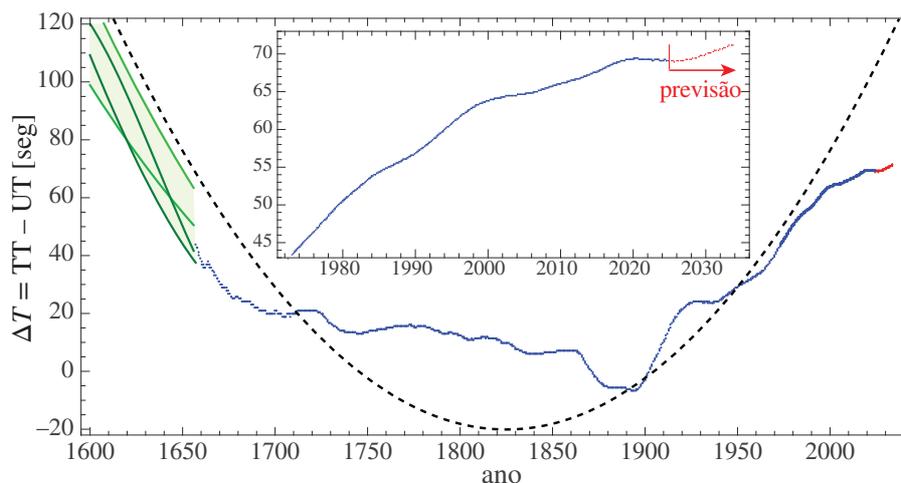


Figura 2.12: $\Delta T = \text{TT} - \text{UT}$ (ou, antigamente, $\text{ET} - \text{UT}$, como será visto mais abaixo) em segundos. Os valores para os anos superiores a 2025 são previsões (pontos vermelhos) cujas incertezas são de cerca de 1 segundo para o ano 2026 e ~ 3 segundos para 2033. A parábola (linha tracejada) representa o comportamento secular esperado quando consideramos vários séculos para o passado ou futuro. As linhas verdes para anos antes de 1650 são diferentes estimativas de ΔT . Fonte: *IERS Rapid Service/Prediction Center*

A partir de 1984, passamos a utilizar o tempo dinâmico (TD) ao invés do tempo das efemérides (ET). Posteriormente, a partir de 1991, o TD passou a se chamar *Tempo Terrestre* (TT), usado até hoje. A escala de Tempo Terrestre é, na prática, uma continuação da escala de tempo das efemérides, porém sua definição depende do tempo atômico.

2.1.8 Tempo atômico

A definição do sistema de tempo atômico (TAI, *Tempo Atômico Internacional*) não está relacionado à Astronomia, mas sim à Física atômica. O tempo atômico é baseado em uma transição

hiperfina do Césio-133, correspondente a uma radiação em micro-ondas de cerca de 3,26 cm ou 9,19 GHz.

Até os anos 1920, não havia relógio tão estável como a rotação da Terra. Esta situação muda nas décadas seguintes. O primeiro relógio atômico de Césio foi construído em 1955 e, em 1958, após extensiva comparação com medidas astronômicas, foi estabelecido que um segundo de tempo equivale a 9.192.631.700 ciclos da frequência de transição hiperfina do nível fundamental do Césio. Em 1967, a unidade de segundo do Sistema Internacional de unidades deixa de se basear na rotação da Terra e é redefinido pela frequência de transição hiperfina do Césio.

Desde 1972, o TAI é utilizado oficialmente como escala de tempo padrão a partir do qual as outras escalas de tempo podem ser derivadas. A grande vantagem do TAI sobre o tempo dinâmico é que o TAI não depende da análise das observações dos movimentos dos astros e pode ser obtido imediatamente. Além disto, o TAI é determinado com uma precisão de 3×10^{-16} segundos, isto é, uma precisão de 1 segundo em 100.000.000 anos (um bom relógio comercial tem uma precisão de 1 segundo em alguns dias). Em um futuro próximo a precisão do TAI pode chegar a 2×10^{-18} segundos, isto é, 1 segundo em ~ 16 bilhões de anos (veja Fig. 2.13 para uma visão global da evolução da precisão da medida da passagem do tempo).

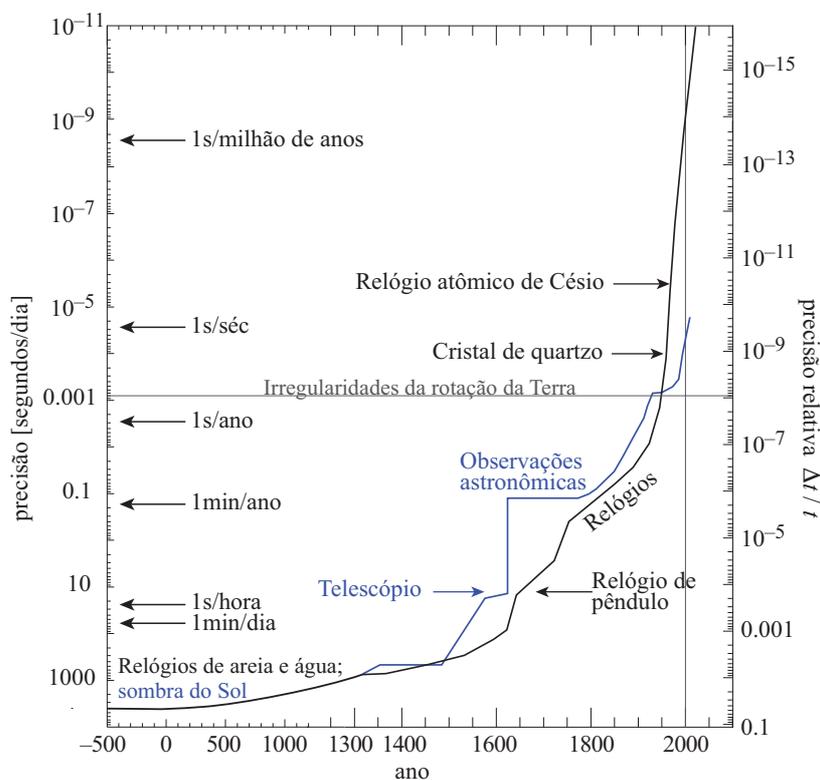


Figura 2.13: Evolução da precisão da medida do tempo. A partir do Séc. XIV, é mostrado de forma separada a evolução dos métodos baseados em observações astronômicas e através de relógios terrestres. Fonte: D.D. McCarthy, *Metrologia* 48, S132 (2011); W.A. Marrison, *Bell Sys. Tech. J.* 27, 510 (1948)

Em 1972, quando foi introduzido, a relação entre o TAI e o tempo das efemérides, ET, foi fixado da seguinte forma: $ET = TAI + 32,184 \text{ s}$; atualmente, utilizamos $TT = TAI + 32,184 \text{ s}$. Desta forma, a escala “TAI + 32,184” pode ser considerada como uma extensão da escala baseada no tempo terrestre (antigo tempo das efemérides).

Finalmente é importante notar que o segundo do tempo atômico foi definido de forma a ser idêntico à fração $1/31.556.925,9747$ do ano trópico de 1900. Isto é, um segundo do TAI foi fixado de forma a ser idêntico ao segundo médio medido em 1900, de acordo com a definição do segundo do Sistema Internacional feita em 1958.

Esta definição do segundo tem uma consequência importante quando comparado com o segundo baseado na rotação da Terra (em tempo universal) como veremos a seguir.

2.1.9 Rotação da Terra

Evidências da rotação da Terra

Devido ao tamanho da Terra, não sentimos diretamente o efeito de sua rotação diária ao redor do eixo polar. Observamos o movimento dos astros (seções 1.3 e 1.7) e definimos o dia solar (seção 2.1.4) como consequência da rotação da Terra.

Uma evidência da rotação da Terra vem de uma experiência relativamente simples (mas na prática complicada de se realizar), onde basta soltarmos um corpo do alto de uma torre. Se a Terra não girasse em torno de si, o corpo cairia verticalmente, em linha reta. Contudo, devido ao movimento de rotação, este corpo é desviado para o Leste e para o Sul (no Hemisfério Norte) ou para o Norte (no Hemisfério Sul).

O chamado **desvio para o Leste** de um corpo em queda livre ocorre porque há uma diferença entre a velocidade horizontal no topo da torre e no solo (pontos A e B no painel (I) da Fig. 2.14). Devido à rotação terrestre temos as seguintes velocidades:

$$v_A = \frac{2\pi \cos \varphi}{P}(R + h) \quad \text{e} \quad v_B = \frac{2\pi \cos \varphi}{P}R, \quad \text{onde } P = 86.164 \text{ seg é o período de rotação,}$$

R é o raio da Terra (por simplicidade, assumimos uma esfera), φ é a latitude de onde o corpo é solto e h é a altura da torre.

No referencial em que a torre está estacionária, observamos uma velocidade inicial $v_A - v_B > 0$ na direção horizontal de Oeste para Leste. Devido a esta diferença de velocidade, o corpo vai cair a uma distância s do ponto B :

$$s = (v_A - v_B)t \quad \text{e} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

onde t é o tempo de queda livre assumindo que não há resistência do ar, e g é a aceleração da gravidade (constante se $h \ll R$).

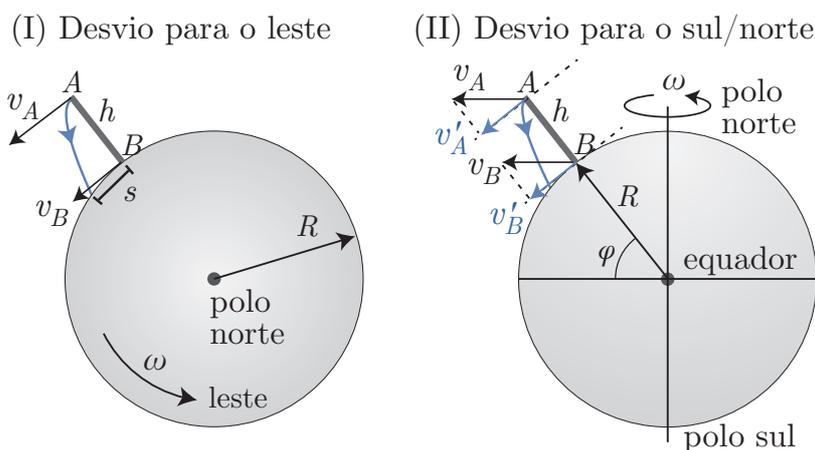


Figura 2.14: (I) objeto lançado de uma torre de altura h não cai verticalmente, mas sobre um desvio para o Leste (trajetória azul) (II) No Hemisfério Norte, o corpo também sofre um desvio para o Sul (e vice-versa no Hemisfério Sul). A velocidade angular da Terra no equador é $\omega = 2\pi/P$, P é o período de rotação.

Logo, obtemos o seguinte desvio da vertical:

$$s = \frac{(2h)^{3/2} \pi \cos \varphi}{\sqrt{g}P} \simeq 0,0033h^{3/2} \cos \varphi \text{ cm, } (h \text{ em metros}). \quad (2.8)$$

Se, por exemplo, o corpo for solto de uma altura $h = 300$ metros (um prédio de 100 andares), o desvio será de aproximadamente $17,1 \cos \varphi$ centímetros. No trópico de Capricórnio ou Câncer, $\varphi \simeq \pm 23^\circ 43'$, portanto $s = 15,7$ cm. Este efeito é máximo no equador e se torna nulo nos polos.

Observando o painel (II) da Fig. 2.14, vemos que existe outro deslocamento, desta vez em direção ao Sul (para a experiência feita no Hemisfério Norte). O deslocamento neste caso depende da diferença $v'_A - v'_B$. No painel (II) da Fig. 2.14, v_A e v_B correspondem às velocidades que um corpo adquire quando soltos devido à aceleração centrífuga, devido à velocidade angular de rotação ω da Terra. O deslocamento s (diferente do caso (I) anterior), é:

$$s = (v'_A - v'_B)t = (v_A - v_B) \cos(\pi/2 - \varphi)t = \frac{2\pi t}{P} \cos \varphi [(R + h) - R] \sin \varphi.$$

Substituindo t pelo tempo de queda livre e usando a identidade $\sin 2\varphi = 2 \cos \varphi \sin \varphi$, obtemos:

$$s = \sqrt{\frac{2h^3}{g}} \frac{\pi \sin 2\varphi}{P} \simeq 0,00164h^{3/2} \sin 2\varphi \text{ cm } (h \text{ em metros}). \quad (2.9)$$

Este desvio tem metade do valor da Eq. (2.8) e é máximo quando $\varphi = \pm 45^\circ$ e mínimo nos polos e no equador. Por exemplo, no trópico de Capricórnio, para um corpo largado a 300 metros de altura, o desvio será para o Norte de cerca de 2,2 cm.

As expressões acima são aproximadas (qualitativamente corretas), um tratamento mais rigoroso envolve o uso de forças não inerciais em um referencial acelerado, como a força centrífuga e a força de Coriolis.

Ao invés de considerarmos um corpo caindo, podemos também estudar o movimento de um pêndulo. A rotação da Terra também é demonstrada pela famosa experiência do **Pêndulo de Foucault**, que tem este nome em homenagem ao físico francês Léon Foucault (18/09/1819–11/02/1868) que fez que realizou esta experiência no Panthéon de Paris em 1851.

Por simplicidade, vamos considerar um pêndulo no polo (Norte ou Sul) terrestre. O princípio do pêndulo de Foucault nos polos é que o plano de oscilação de um pêndulo é invariante em um referencial inercial, na ausência de forças externas. Em outras palavras, a oscilação de um pêndulo se dá em um plano fixo em relação, por exemplo, às galáxias distantes (veja a seção 1.4). Porém, um observador na Terra está em um referencial não-inercial devido à rotação terrestre. Para este observador, o plano de oscilação do pêndulo se move, dando uma volta por dia sideral (lembrando que o pêndulo está no polo) no sentido oposto da rotação da Terra (Fig. 2.15).

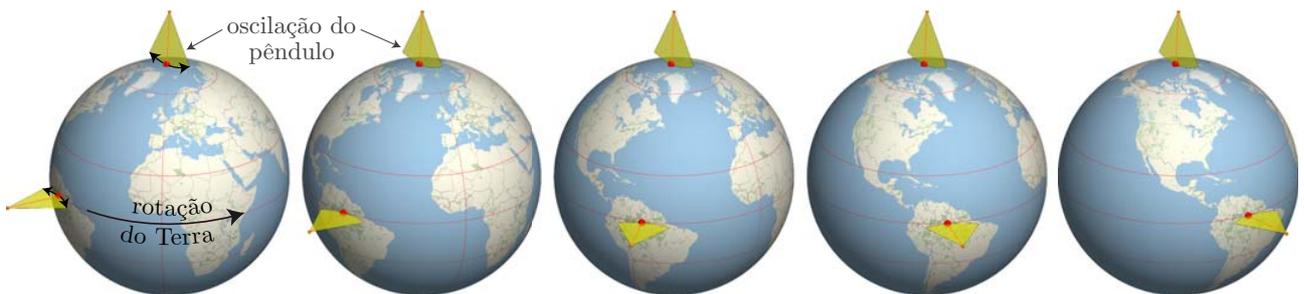


Figura 2.15: Pêndulo de Foucault no polo Norte e no equador. O plano de oscilação do pêndulo (representado pelos triângulos amarelos no polo Norte e no equador) não se move enquanto a Terra gira. Um observador na Terra observaria o pêndulo do polo Norte girar em sentido horário e o pêndulo no equador oscilando na mesma direção. A sequência de imagens ilustra a rotação da Terra.

No Polo Norte, o plano de oscilação do pêndulo gira no sentido horário, dando uma volta completa em um dia sideral (não é o dia solar), aproximadamente 23,93447 horas. No Polo Sul, o movimento é no sentido anti-horário, no mesmo período.

No equador, o pêndulo gira junto com a Terra, porém seu plano de oscilação não se altera em relação a um observador próximo ao pêndulo. Em outras palavras, não temos o efeito observado nos polos.

Para as latitudes intermediárias, entre o equador e os polos, não temos uma forma intuitiva para, por exemplo, dar o período de rotação do plano de oscilação do pêndulo de Foucault. Nestes casos, resolvemos as equações que descrevem o movimento do pêndulo em um referencial não-inercial (a Terra girando) onde a força de Coriolis aparece. A Fig. 2.16 mostra alguns exemplos da trajetória de um pêndulo e a mudança gradual do plano de oscilação, quando as equações de movimento são resolvidas.

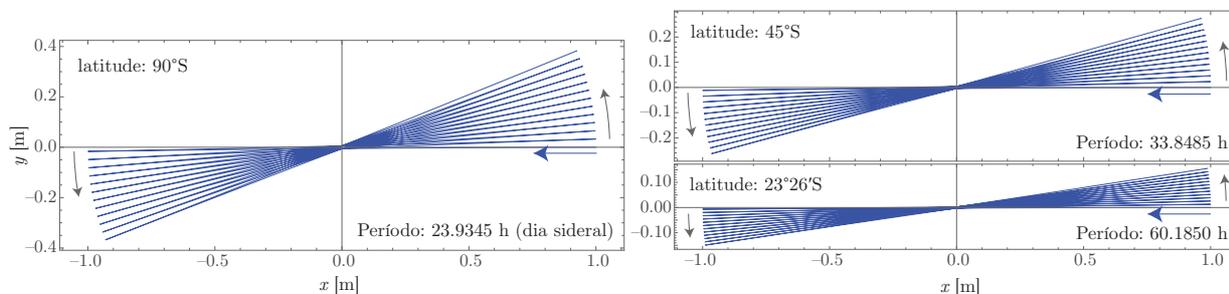


Figura 2.16: Trajetória observado na superfície da Terra de um pêndulo de Foucault hipotético de 50 km de comprimento e período de 448,6 s em três latitudes diferentes. Os exemplos se referem ao Hemisfério Sul; no Hemisfério Norte, a precessão do plano de oscilação do pêndulo de Foucault gira no sentido horário.

O tratamento detalhado do pêndulo de Foucault mostra que o período de rotação do plano de oscilação depende apenas da latitude em que o pêndulo se encontra da seguinte forma:

$$P_{\text{plano}} = \frac{\text{dia sideral}}{\text{sen } \varphi} = \frac{23,93447}{\text{sen } \varphi} \text{ horas}, \quad (2.10)$$

onde φ é a latitude. Por exemplo, em São Paulo (Trópico de Capricórnio), o período para uma rotação completa do plano é cerca de $60^{\text{h}}10^{\text{m}}$ (sentido anti-horário); em Paris (onde Léon Foucault montou seu pêndulo) é cerca de $31^{\text{h}}47^{\text{m}}$ (sentido horário).

Evolução da rotação da Terra

Antes dos relógios atômicos, a rotação da Terra servia como base para medir a passagem do tempo. Em 1959, logo depois que o tempo atômico começou a ser utilizado (mas não ainda oficialmente), foi determinada precisamente a diferença entre o tempo medido pela rotação terrestre em relação a um referencial inercial (o dia sideral) e por transições atômicas.

A rotação precisa da Terra é complexa. Em primeiro lugar existe um efeito cumulativo que diminui a velocidade de rotação da Terra (Fig. 2.17). A primeira pista da frenagem da rotação da Terra veio da ponderação de Edmund Halley em 1695 de que os eclipses observados na Grécia antiga pareciam implicar em uma *aceleração aparente da Lua*. Este foi um enigma por cerca de 2 séculos. Em 1786, Laplace calculou que a aceleração aparente da Lua seria devida à variação da excentricidade da órbita da Terra porém, em 1853, John Couch Adams mostrou que este fenômeno não explicava completamente a aceleração aparente lunar. Dez anos depois, Simon Newcomb sugere que o efeito responsável pela aceleração aparente da Lua é a variação da rotação da Terra.

Este efeito de frenagem da rotação terrestre é principalmente devido ao efeito de maré causado pela Lua e, em menor parte, pelo Sol. Este fenômeno é análogo a uma colisão inelástica: o efeito de maré provoca um movimento dos oceanos que, devido ao atrito com o fundo do mar, dissipa a energia cinética de rotação da Terra, mas, por outro lado, o momento angular total do sistema Terra-Lua e Terra-Sol, se conserva. Assim, a diminuição da velocidade de rotação da Terra implica em um **afastamento da Lua** em relação à Terra, de maneira a que o momento angular

total do sistema se conserve. Atualmente, a Lua se afasta com uma velocidade média de 3,5 a 4,0 cm/ano.

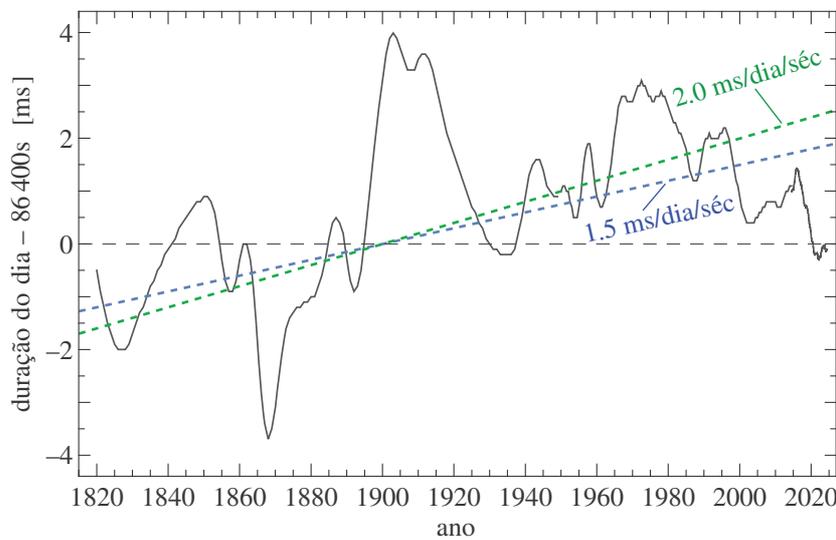


Figura 2.17: Variação secular (excluindo flutuações rápidas e sazonais) da duração do dia (definido como 86.400 segundos SI) em milissegundos. As retas inclinadas ilustram a frenagem (variação secular) média de 1,5 e 2,0 ms/dia/século. Figura feita com dados do IERS e do Almanaque Náutico Britânico (*HM Nautical Almanac Office*).

Por outro lado, outros fenômenos contribuem à complexidade da rotação terrestre. Por exemplo, o movimento das placas (*tectônica de placas*), terremotos e fluxos de matéria no centro da Terra. Também já foi apontado que a mudança climática, com o derretimento do gelo polar, redistribui a massa da Terra e aumentando o nível do mar, alterando a velocidade de rotação terrestre.

A distribuição desigual das massas de terra e mar entre os Hemisférios Norte e Sul, provoca um aquecimento diferente da atmosfera nestes hemisférios. Esta desigualdade provoca uma variação sazonal no momento de inércia terrestre (devido à dilatação da atmosfera) que atua na rotação da Terra (2.18).

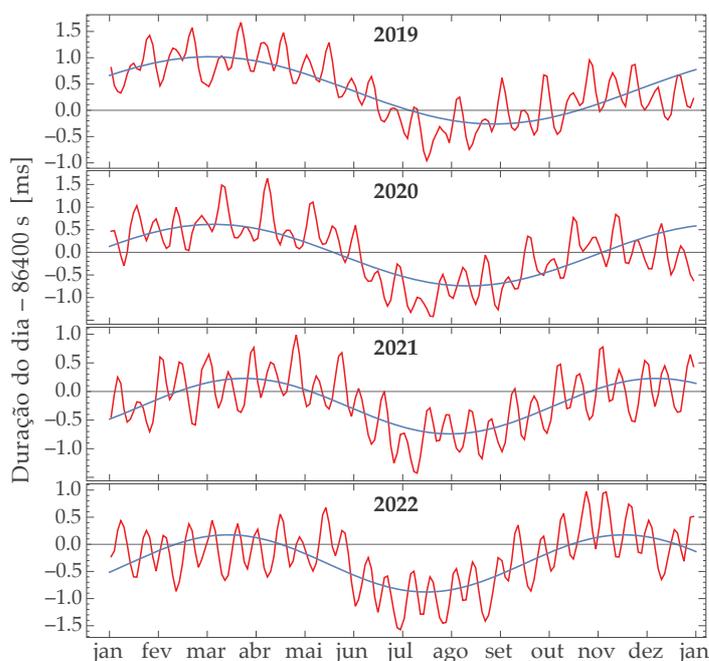


Figura 2.18: Variações sazonais da duração do dia (definido como 86400 segundos SI) em milissegundos para os anos de 2019 a 2022. As senoides ilustram a variação anual (note que ela é assimétrica) devido às diferentes estações do ano. As oscilações de maior frequência correspondem a variações devido às marés e diárias e outros ciclos.

Atualmente, a frenagem (desaceleração) da rotação terrestre é estimada em cerca de 1,5 a 2 milissegundos por dia por século, principalmente baseado na análise de eclipses e trânsitos de

Mercúrio e Vênus pelo disco solar (veja, por exemplo, Morrison L.V. & Hohenkerk C.Y., 2016, *Royal Society's Proceedings*).

Estes valores de frenagem implicam que a duração do dia 1^a de janeiro de 2000 seria tipicamente cerca de 0,002 segundo mais longo que o dia 1^a de janeiro de 1900 (veja Fig. 2.17). Na realidade, o fenômeno é muito mais complexo, a Terra não é um objeto exatamente sólido, e a magnitude da variação da duração do dia pode também sofrer flutuações de vários milissegundos em alguns anos. É interessante notar que, observando o intervalo entre aproximadamente 1972 e 2021 percebemos uma tendência de *aceleração* da rotação da Terra, com uma diminuição da duração do dia. Esta aceleração das últimas décadas é provavelmente devido a mudanças na circulação de fluidos no núcleo terrestre, com a contribuição do degelo dos polos e consequente redistribuição de massa dos oceanos. Contudo, a tendência global da frenagem é de fato dada pelo valor supracitado ao longo dos últimos séculos.

Como o segundo atômico (igual a um segundo do Sistema Internacional) é baseado na duração do dia no ano 1900, hoje, mais de um século depois, o dia baseado na rotação da Terra é, em média, cerca de 0,002 segundos mais longo. Isto significa que, em relação ao TAI, o tempo universal (UTC) perde 0,002 segundos por dia e, após cerca de 500 dias a diferença atinge cerca de 1 segundo. Isto *não* significa que a duração do dia esteja aumentando de 1 segundo a cada 500 dias; isto é uma consequência da definição do segundo do SI como idêntico ao segundo medido em 1900, então baseado na rotação da Terra.

2.1.10 Tempo universal coordenado e Tempo Legal (ou Civil)

A partir do tempo atômico internacional, define-se o *tempo universal coordenado*, UTC. UTC é simplesmente TAI mais um número inteiro de segundos de modo a que a diferença entre UTC e UT1 não seja nunca superior a um segundo.

A diferença entre UT1 e UTC (ou TAI) é simplesmente devido a frenagem da rotação da Terra e das definições de segundo no TAI e no UT. Como vimos, esta desaceleração está por volta de 2 milissegundos por dia por século atualmente. Este efeito é muito pequeno e só tem um efeito notável em intervalos de tempo geológicos. Além disto é muito provável que a frenagem era mais importante no passado que hoje.

Contudo, como vimos, atualmente o dia medido em tempo universal ganha cerca de 0,002 segundo (de TAI) por dia. Este efeito é cumulativo e a cada 400–500 dias (ou um ano e meio) aproximadamente a diferença entre UT1 e UTC chega a um segundo (Fig. 2.19). Disto vem a necessidade da introdução de um segundo a mais no ano. Este segundo é chamado *segundo intercalar* (em inglês, *leap second*). Por convenção, o segundo intercalar é sempre somado ao último segundo do mês de junho ou dezembro, quando necessário.

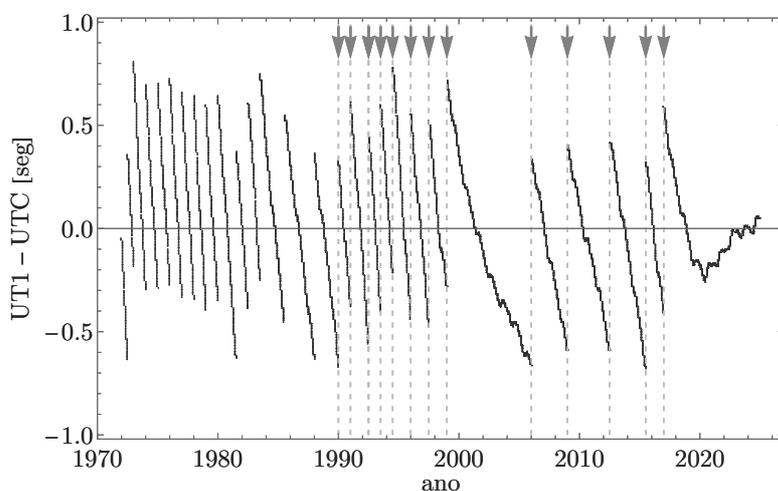


Figura 2.19: Diferença entre o UT1 e UTC em função do tempo. As discontinuidades correspondem à introdução de um segundo intercalar (as flechas indicam os últimos segundos intercalares). Figura feita com dados do IERS.

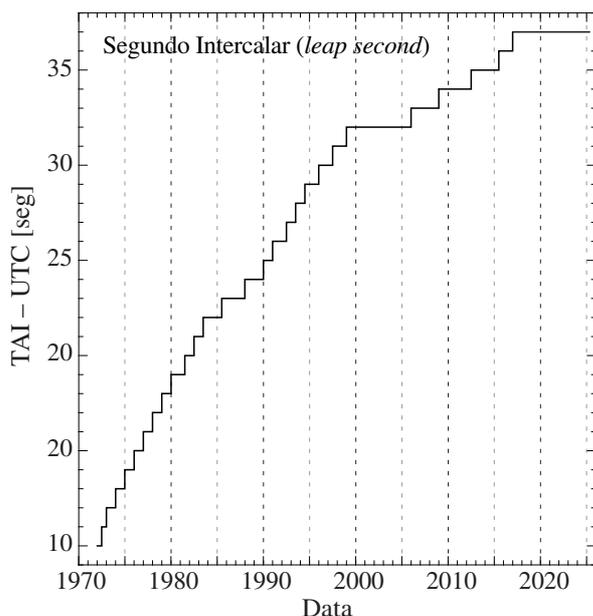


Figura 2.20: Diferença entre os tempos atômico e universal coordenado mais recentes. O fim do último intervalo ainda não é conhecido.

Intervalo de validade (0 ^h UT)	TAI–UTC (seg)
01/01/1988 a 01/01/1990 24
01/01/1990 a 01/01/1991 25
01/01/1991 a 01/07/1992 26
01/07/1992 a 01/07/1993 27
01/07/1993 a 01/07/1994 28
01/07/1994 a 01/01/1996 29
01/01/1996 a 01/07/1997 30
01/07/1997 a 01/01/1999 31
01/01/1999 a 01/01/2006 32
01/01/2006 a 01/01/2009 33
01/01/2009 a 01/07/2012 34
01/07/2012 a 01/07/2015 35
01/07/2015 a 01/01/2017 36
01/01/2017 a ?? 37

A diferença entre o Tempo Terrestre (ou Tempo Dinâmico, antigo Tempo das Efemérides) e o UT1 é dado atualmente da seguinte forma:

$$\Delta T \equiv TT - UT1 = 32,184 + (TAI - UTC) - (UT1 - UTC),$$

onde $(TAI - UTC)$ é o número de segundos intercalares acumulados (veja Fig. 2.20) e a diferença $UT1 - UTC$ pode ser visto na Fig. 2.19. Curiosamente, desde 2017 não é incluído um segundo intercalar.

Tempo Legal. Atualmente o tempo civil ou tempo legal (que é utilizado no dia a dia) é definido a partir do UTC. Em geral o tempo civil em um dado país é simplesmente UTC mais (ou menos) um número de horas correspondente ao **fuso horário** local (Fig. 2.21).

Idealmente, o fuso horário deveria acrescentar 1 hora para cada 15 graus na direção Leste de Greenwich e subtrair 1 hora para cada 15 graus na direção Oeste. Por razões geográficas e, principalmente, políticas os fusos horários são adaptados regionalmente seguindo fronteiras ou divisões arbitrárias. Por exemplo, a Espanha encontra-se praticamente toda no fuso “0h” (o mesmo do Reino Unido), mas adota o fuso horário “+1h” (o mesmo da Alemanha). Em alguns países, o fuso horário não é um número inteiro (p.ex., Venezuela, Índia, centro da Austrália). Já a China, apesar de toda sua extensão tem apenas um fuso horário, o de Beijing (Pequim).

No Brasil, é adotada a hora oficial de Brasília, que se encontra na longitude $47^{\circ}53' \simeq 47,883 \simeq 3,192$ h a Oeste de Greenwich. Assim, arredondando, adotamos UTC–3h para o fuso horário de Brasília.

No meridiano oposto ao de Greenwich, longitude 180° Oeste ou Leste, encontra-se a *linha de mudança de data*. Ao atravessarmos esta linha imaginária, em qualquer momento, mudamos de data: indo no sentido do Leste (do Ásia para a América, por exemplo) volta um dia no calendário. Viajando no sentido contrário, devemos acrescentar um dia ao atravessarmos a linha de mudança de data. Este fato foi usado no livro de Jules Verne, “A volta ao mundo em 80 dias”.

Devido a sua extensão territorial, entre 1913 e 2008, o Brasil era dividido em 4 fusos horários. A partir de abril/2008 passamos a ter 3 fusos: UTC–2h no arquipélago Fernando de Noronha e na ilha da Trindade; UTC–3h todo o litoral do Brasil, o Distrito Federal e os Estados interiores, exceto os Estados de Mato Grosso, Mato Grosso do Sul, Amazonas, Rondônia, Roraima e Acre que seguem UTC–4h. Contudo, em outubro de 2013, o Brasil voltou a ser dividido em 4 fusos

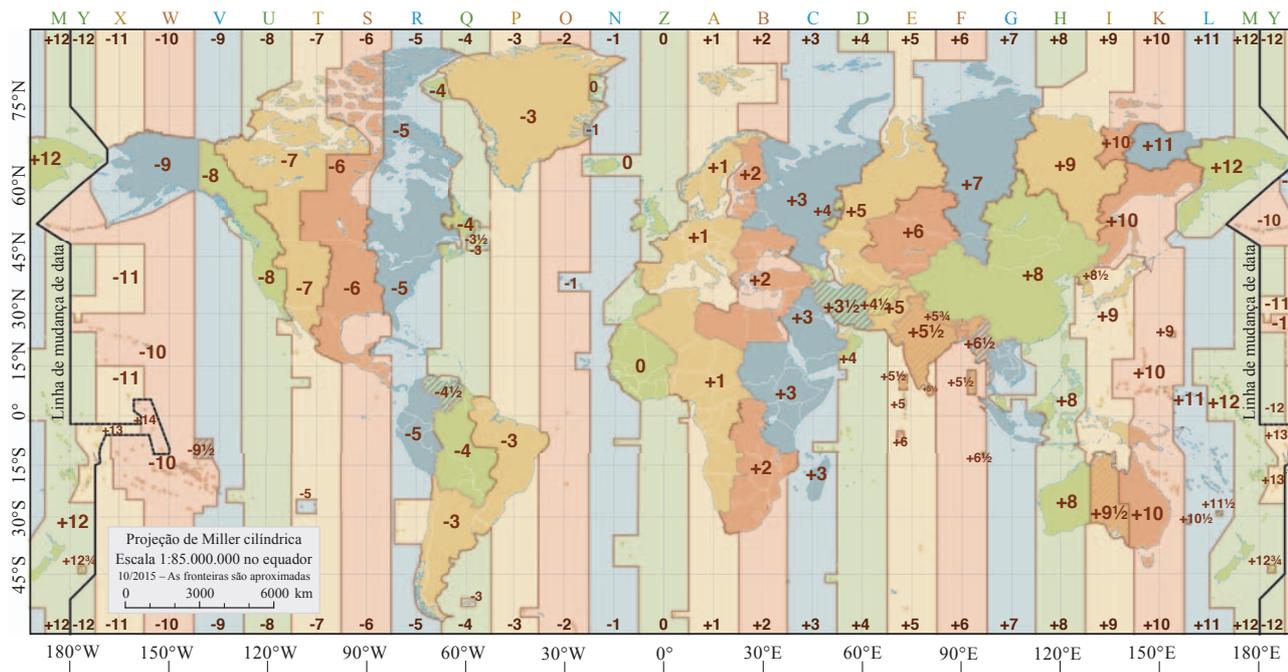


Figura 2.21: Fusos horários legais no mundo. Como os fusos horários dependem de decisões políticas, este mapa deve ser atualizado de tempos em tempos. Quando passamos ao “horário de verão”, acrescentamos uma hora ao fuso horário local.

horários, de UTC–2h (dos arquipélagos do Atlântico) até UTC–5h (Acre e parte do Amazonas) como ilustra a figura 2.22.

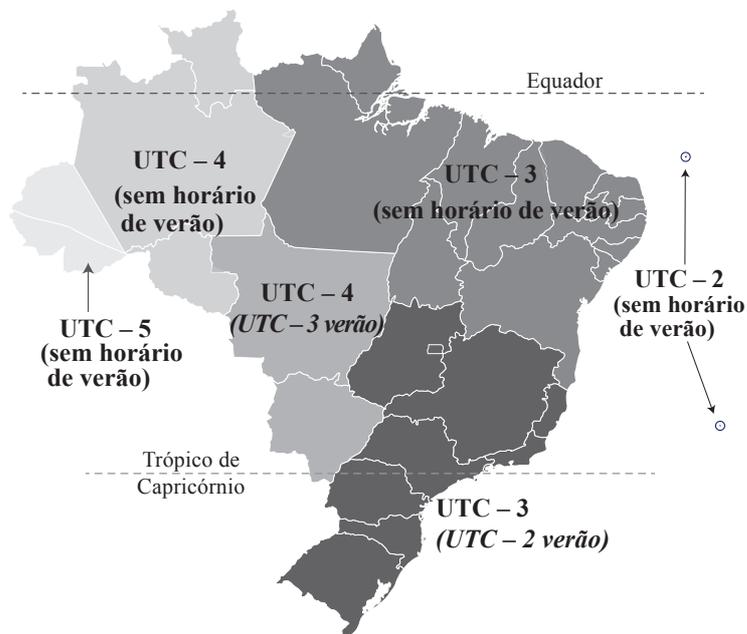


Figura 2.22: Fusos horários no Brasil desde outubro/2013. Nos estados próximos do Equador, não é adotado o horário de Verão. Pontualmente, alguns estados como Bahia e Tocantins, por exemplo, podem mudar sua política de adoção do horário de verão. Dependendo de vontades políticas, o horário de verão pode ser completamente abolido, como de fato foi em 2019.

Chamamos de **Horário de Verão** quando somamos 1 h à hora oficial local entre meados da primavera e meados do verão, isto é, aproximadamente dois meses antes e dois meses depois do solstício de verão. O objetivo da introdução do horário de verão é reduzir o consumo de energia elétrica durante os meses em que as noites são curtas. Isto só ocorre em latitudes elevadas (em módulo), portanto estados do Brasil e países próximos da linha do Equador não costumam adotar o horário de verão. Ao passo que a adoção do horário de verão em vários países segue regras bem

estabelecidas e estáveis, no Brasil este é um assunto volátil, podendo mudar de um ano para outro.

No Brasil, o horário de verão foi adotado pela primeira vez em outubro de 1931. Entre 1985 e 2018, o horário de verão esteve em vigor todos os anos. De 2019 até 2024, o horário de verão não foi adotado.

2.1.11 *Network Time Protocol (NTP)*

Um aspecto importante relacionado ao tempo e à hora legal é a sincronização dos relógios, especialmente dos aparelhos que estejam conectados em rede. A sincronização precisa tem aplicações nas transações financeiras, compartilhamento de arquivos digitais, comunicações, observações astronômicas, etc.

A maioria dos dispositivos de rede possui relógios que não são muito precisos durante longos períodos de tempo. O uso de um protocolo de sincronização diminui este problema. O NTP (*Network Time Protocol*) é um dos protocolos mais antigos da Internet, usado desde 1985 para sincronização de dispositivos digitais tomando como base o UTC.

O NTP conta o tempo em segundos e frações de segundos a partir da 0h UTC de 01/01/1900. A unidade deste contador de tempo é o *timestamp* (“estampa de tempo”). O protocolo NTP troca timestamps entre os dispositivos. O formato mais compacto, de 64 bits, os primeiros 32 bits determinam o número de segundos após 01/01/1900. Os 32 bits restantes dão a fração de segundos. A resolução neste formato é de cerca de $2^{-32} \simeq 2,328 \times 10^{-10}$ segundos. Um exemplo de timestamp NTP é `EEE1778C.4110A0D0` que corresponde a 4.007.815.200 de segundos após 01/01/1900, ou seja, 01/01/2027 1h 0m 0.25416s UTC.

O formato atual do timestamp do NTP é de 128 bits, o que corresponde a uma precisão de cerca de $5,4 \times 10^{-20}$ segundos e um número de segundos muito maior que a idade do Universo.

2.2 Calendários

2.2.1 Introdução

Para podermos especificar quando um dado evento ocorreu ou quando ele está previsto, é necessário que tenhamos não apenas uma escala de tempo definida como também é preciso um sistema de contagem ou medida do tempo que passa. O fenômeno periódico natural mais simples de se observar é, sem dúvida, o ciclo dia-noite. Assim, por convenção, adotou-se o dia (solar) como unidade básica de medição da passagem do tempo, a *cronologia*.

Notemos que a palavra “*dia*” tem um duplo sentido: (I) pode se referir ao oposto de noite, isto é, o período dominado pela luz vinda do Sol; (II) pode se referir ao intervalo de tempo entre duas passagens do Sol pelo meridiano do observador, isto é, o período de rotação da Terra. Geralmente, distinguimos o significado de dia pelo contexto.

A solução mais simples para esta medida da passagem do tempo é escolhermos uma data arbitrária, a origem do sistema de medida e, em seguida, numerar os dias que passam. As datas anteriores ao início da origem podem ser referidos como dias ‘antes da origem’, por exemplo, ‘dia 1 Antes da Origem’, ‘dia 2 A.O.’, ‘dia 3 A.O.’, etc..., e os dias depois da origem podem ser chamados de ‘depois da origem’, ‘dia 1 Depois da Origem’, ‘dia 2 D.O.’, ‘dia 3 D.O.’, etc... Tradicionalmente, não existe ano zero: o ano anterior a 1 D.O. é 1 A.O. e não 0 D.O.

Para facilitar a contagem, podemos agrupar os dias em outras unidades maiores como semanas, meses, anos, etc. Assim como o dia, algumas destas unidades também têm origem astronômica.

É este sistema de contagem de dias, em geral a partir de uma origem arbitrária, que chamamos *calendário*. Os calendários que foram inventados ao longo da história humana suprem uma necessidade de praticamente todas as sociedades de prover um meio de ‘controlar’ a passagem do

tempo. De uma certa forma, este controle do tempo dado pelos calendários servem como ligação entre a humanidade e os ciclos celestes; provavelmente por esta razão os calendários tiveram em várias sociedades um caráter místico-religioso, assim como tem um papel de identificação sociocultural (semelhante a um idioma). Desde a antiguidade, os calendários proporcionam a base para podermos planejar as mais diversas atividades individuais e sociais.

A história do desenvolvimento dos calendários é extremamente rica e mostra como o controle do tempo, traduzido pelo controle dos calendários, era um instrumento de poder fartamente utilizado desde o início da História até o Renascimento, quando a precisão exigida pelas medidas da passagem do tempo tirou definitivamente o controle dos calendários dos clérigos e nobres.

Atualmente existem cerca de 40 calendários em uso (e muitos outros extintos) dos quais cerca de meia dúzia são utilizados por praticamente toda a humanidade.

2.2.2 Base astronômica dos calendários

Desde a antiguidade, o movimento aparente dos astros nos serviu de referência para medirmos a passagem do tempo. Os principais ciclos astronômicos para este fim são: o **dia** (movimento diurno do Sol devido à rotação da Terra em torno de seu eixo), o **mês** (ciclo das fases da Lua devido à sua translação em torno da Terra) e o **ano** (translação da Terra em torno do Sol). A diversidade e complexidade dos calendários vêm do fato que estes ciclos não são comensuráveis entre si, além de não serem exatamente constantes, por exemplo, o ano trópico (sec. 2.1.5) não pode ser dividido em um número inteiro de dias solares (sec. 2.1.4) ou de meses sinódicos (sec. 2.1.6).

Os calendários que foram utilizados durante toda a história da humanidade podem ser divididos em três categorias principais:

lunar, onde a unidade fundamental é o mês, baseado na recorrência das fases da Lua;

solar, baseado na periodicidade das estações do ano;

luni-solar, onde é definido um ano solar (baseado nas estações do ano) que é subdividido em meses que têm aproximadamente o mesmo período que o mês sinódico.

Semana, um ciclo não astronômico

Notamos aqui que a *semana* é um ciclo artificial usado nos calendários, sem um ciclo astronômico correspondente. A semana corresponde a um período de 7 dias solares que se repetem indefinidamente. Nem os meses (com exceção de fevereiro em anos não-bissextos) e nem os anos possuem um número inteiro de semanas.

A introdução de um período de 7 dias vem da Mesopotâmia, possivelmente criado pelos Sumérios e herdado pelos Babilônios, onde cada dia era dedicado a um dos astros com movimento aparente conhecido: dia da Lua, de Marte, de Mercúrio, de Júpiter, de Vênus, de Saturno e do Sol. Estes nomes ainda estão em uso (total ou parcialmente) em diversas línguas como, espanhol, francês, e inglês, por exemplo. O uso do ciclo de 7 dias foi disseminado a partir da Mesopotâmia pelas culturas bíblicas, judeus e, posteriormente, cristãos.

Durante a Idade Média, a igreja católica tentou mudar o nome dos dias da semana para algo menos pagão, distanciando o calendário dos deuses greco-romanos (por sua vez ligados aos planetas, Lua e Sol). Apenas em Portugal esta mudança teve sucesso e, por isto, os dias da semana seguem uma ordem numérica: segunda, terça, quarta, quinta e sexta-feira. o nome Sábado vem do Hebreu, *Shabbat* – o dia do repouso –, e Domingo vem do latim, *Dominica* – o dia do Senhor.

2.2.3 Calendário Egípcio

Os egípcios já usavam calendários há cerca de 6 mil anos atrás. O calendário egípcio daquela época era solar, baseado no início das cheias anuais do Nilo, tendo inicialmente 360 dias. Quando os egípcios passaram a utilizar a posição relativa da estrela Sirius em relação ao Sol, notou-se que eram necessários mais 5 dias (totalizando 365) na duração do ano. Posteriormente, com observações mais precisas, os egípcios concluíram que era necessário acrescentar um dia a cada 4 anos para compensar um lento deslocamento da posição do Sol: concluiu-se que a duração do ano era de 365,25 dias.

Diferente das culturas de climas temperados, os egípcios dividiam o ano em três estações: a estação da enchente do Nilo, a estação da sementeira, e a estação da colheita.

2.2.4 Calendário Romano

O calendário romano era de origem lunar, com um ano de 10 meses, baseados no ciclo lunar, com 30 ou 31 dias: martius, aprilis, maius, junius, quintilis, sextilis, september, october, november, december. Um ano tinha 304 dias. Cerca de 61 dias, durante o inverno, simplesmente não eram contados.

Posteriormente, o calendário romano foi reformado com a introdução de 2 meses suplementares após december: ianuaris e februarius. O número de dias nos meses passou a ser 29 ou 30 dias (o período sinódico da Lua sendo em média 29,53 dias). Um ano de 12 meses tinha, portanto, 354 dias. Havia então uma diferença de cerca de 11 dias entre o ano assim definido e o ano trópico. Para resolver este problema, os romanos introduziam a cada 3 anos um 13^o mês. Infelizmente, este mês extra era introduzido de maneira em geral arbitrária e irregular.

Apesar disto, a origem da maioria dos meses que utilizamos até hoje são originários deste calendário.

2.2.5 Calendário Juliano

O calendário Juliano foi instituído em 46 A.C. (ou 708 AUC, *ab urbe condita* – “depois da criação de Roma”) por Júlio César seguindo o conselho do astrônomo Sosígenes de Alexandria para resolver as deficiências do antigo calendário romano. Este é um calendário de tipo solar, cujos meses tinham durações bem definidas. Os anos eram ‘normais’ com 365 dias ou “*bissextos*” com 366. A introdução de um dia a cada 4 anos tinha por objetivo manter o começo das estações do ano sempre na mesma data. Foi durante esta época, em que o calendário Juliano esteve em vigor, que os meses do ano que utilizamos até hoje foram definidos de maneira definitiva.

A origem do nome bissexto vem da forma romana de contar os dias do mês. Na introdução do calendário Juliano, foi estipulado que a cada quatro anos um dia a mais seria adicionado ao sexto dia que precedia as calendas de março (isto é, seis dias antes do início de março, ou seja, dia 24 de fevereiro porque nesta época, fevereiro ainda tinha 30 dias). Por isso, haveria dois dias sextos, ou “bi-sexto”, isto é, *bissexto*. Isto significa também que o dia extra em fevereiro não é dia 29, mas é o dia 24 que ocorre duas vezes. Hoje em dia, em vez de contar duas vezes o dia 24, acrescentamos um dia a mais no fim de fevereiro.

Nesta época, após a morte de Julio Cesar, o mês de quintilis passou a se chamar *julius*. Mais tarde, em 8 D.C., o mês de sextilis foi chamado de *augustus*, em homenagem ao imperador Augusto.

No Início da Idade Média, estabeleceu-se que a origem do calendário Juliano (o ano número “1”) seria o ano do nascimento de Jesus. O cálculo que foi feito pelo abade Dionysius Exiguus (Dionísio ou Denis, o Pequeno) colocava este nascimento em 753 AUC; o ano 754 AUC passa a corresponder a 1 AD, *anno domini*. Contudo, o cálculo de Dionysius estava historicamente

errado, pois Jesus nasceu enquanto Herodes ainda estava vivo, mas este morreu em 750 AUC, ou seja, no ano 4 A.C.! Isto, é claro, é sem importância pois a origem dos calendários é arbitrária.

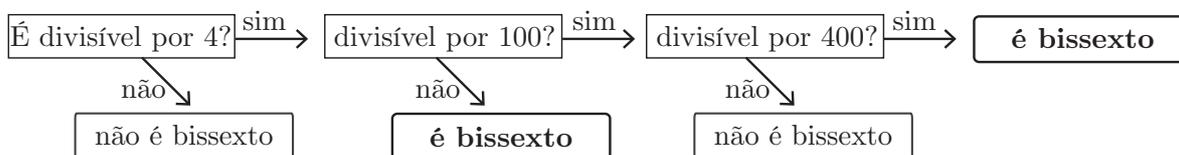
2.2.6 Calendário Gregoriano

O calendário Juliano foi um grande avanço em relação aos calendários precedentes. Contudo, no calendário Juliano, o ano tinha em média 365,25 dias, isto é, $(3 \times 365 + 366)/4$ enquanto o ano trópico (que corresponde ao ciclo das estações do ano) tem aproximadamente 365,2422 dias. Isto significa que, a cada 128 anos o início da primavera (ou qualquer outra estação) adianta de um dia em relação ao calendário Juliano.

Se nos primeiros séculos, a diferença de alguns dias era imperceptível, no século **XVI** a diferença já atingia cerca de 10 dias. A primavera no Hemisfério Norte, isto é, a passagem do Sol pelo ponto vernal, Υ , começava no dia 10 ou 11 de março ao invés de 20 ou 21 de março (como nos primeiros séculos D.C.). Para a Igreja Católica isto era um problema grave, uma vez que a data da comemoração mais importante, a Páscoa, depende do dia do Equinócio de primavera (do Hemisfério Norte).

Isto levou, em 1582, à adoção de um novo calendário – proposto por Aloysius Lilius e, posteriormente, por Cristóvão Clavius – oficializado pela Bula pontifícia “*Inter Gravissimas*” do Papa Gregório **XIII** no Concílio de Trento. Para tanto, foram suprimidos por decreto os dias entre 4/10 e 14/10/1582, inclusive. A introdução do **ano bissexto** foi também modificada; a princípio, os anos múltiplos de 4 são bissextos, mas os anos que são múltiplos de 100 e não são múltiplos de 400, não são bissextos. Assim, por exemplo, os anos 1980, 1996, 2000 são bissextos, mas 1700, 1800 e 1900 não o são.

Em resumo, um dado ano do calendário gregoriano será bissexto da seguinte forma:



Desta forma, o ano do calendário gregoriano tem, em média, uma duração de $365 + 1/4 - 1/100 + 1/400$ dias ou 365,2425 dias. A diferença com o ano trópico passa a ser 0,0003 dias por ano ou 1 dia a cada 3300 anos aproximadamente. Isto significa que o ano 4880 ou 4884 não deveria ser bissexto! Contudo, ao contrário do que alguns textos dizem, não existe uma regra para subtrair um dia a cada 3300 anos.

A origem (o ano número 1) do calendário Gregoriano é a mesma do calendário Juliano (e com o mesmo erro histórico...).

Notemos por último que o calendário gregoriano não foi adotado simultaneamente por todos em 1582. No início, o calendário foi adotado pelos países majoritariamente católicos (já que era um decreto papal), sendo adotado posteriormente e aos poucos pelos outros países. Vários países o adotaram somente no século **XX** (por exemplo a Turquia e a antiga União Soviética).

2.2.7 Calendário Judaico

O calendário Judaico, assim como o Babilônico, é luni-solar, meses de 29 e 30 dias que se alternam (semelhante ao calendário Romano) mais um mês adicional que é intercalado a cada 3 anos segundo um ciclo de 19 anos, o *Ciclo de Meton* (Sec. 2.1.6). A origem deste calendário é o dia da criação do mundo, em 3761 A.C., segundo o Velho Testamento (isto é, um dia arbitrário qualquer, já que a Terra se formou há 4,5 bilhões de ano e o Universo há mais de 13 bilhões).

O ano do calendário Judaico começa no *Rosh Hashanah* e varia em relação ao calendário gregoriano. Por exemplo, no pôr do Sol de 18/09/2020 do calendário gregoriano começou o ano 5781.

2.2.8 Calendário Muçulmano

O Calendário Muçulmano (ou Islâmico) é lunar com 12 meses, e portanto, o início dos meses (e do ano) varia em relação às estações do ano. O início de cada mês é dado pelo dia em que se avista o quarto crescente da Lua após a Lua Nova. A origem deste calendário é o dia após a *Hégira*, o dia em que Maomé vai de Meca para Medina, em julho/622 D.C.. Por exemplo, o ano 1431 do calendário Muçulmano teve início em 18/dezembro/2009; o ano 1441 inicia em 01/setembro/2019.

Diferentemente do calendário Gregoriano, em que o dia começa à meia-noite, o dia no calendário Muçulmano começa no pôr do Sol.

2.2.9 Calendário da Revolução Francesa

Após a revolução francesa, a Convenção Nacional adotou em outubro de 1793 o chamado *Calendário Republicano*. O ano neste calendário começa no dia do equinócio de outono (do Hemisfério Norte) medido pelo Observatório de Paris (dia 22, 23 ou 24 de setembro). Assim, o ano 1 começou à meia-noite do dia 22/09/1792.

O ano é dividido em 12 meses iguais de 30 dias cada e, ao final dos 12 meses são acrescentados 5 dias (dias complementares), totalizando um ano de 365 dias. A semana de 7 dias é abolida e cada mês é dividido em 3 partes iguais de 10 dias. A cada 4 anos é acrescentado mais um dia aos 5 dias complementares, chamado de Dia da Revolução; este ano bissexto é chamado Sextile. A regra para ano bissexto é um pouco mais simples e precisa que a regra do calendário Gregoriano: um ano seria bissexto se fosse divisível por 4, mas não seria se fosse divisível por 128. Assim, o ano teria em média $365 + 1/4 - 1/128 = 365,2421875$ dias, bem próximo da duração do ano trópico (em média, igual a 365,24218967 dias no início do século XXI).

Os meses do calendário republicano têm nomes relacionados às estações do ano (do Hemisfério Norte):

- Outono: Vendémiaire, Brumaire, Frimaire;
- Inverno: Nivôse, Pluviôse, Ventôse;
- Primavera: Germinal, Floréal, Prairial;
- Verão: Messidor, Thermidor, Fructidor.

O calendário republicano nunca foi adotado universalmente e foi abolido por Napoleão I em 01/01/1806 (11 nivôse do ano 14).

2.3 Dia Juliano

O uso de calendários tradicionais, com anos e meses de duração variável não é cômodo. O uso de calendários era incrivelmente mais complexa durante a idade média. No século XVI, o francês *Joseph Justus Scaliger* (1540–1609) procurou organizar as informações e uso de calendários em vigor desde a antiguidade. Em 1583, ele publica *Opus de emendatione temporum* no ano seguinte à reforma Gregoriana do calendário.

Nesta obra, Scaliger sugere o uso de um sistema contínuo para contagem dos anos com início no passado antes dos registros históricos. Para isto, ele usa três ciclos bem conhecidos do século XVI:

- **Ciclo solar:** é o ciclo do calendário Juliano em que os dias do ano caem no mesmo dia da semana (por exemplo, o dia 21 de março caindo num domingo). Devido aos anos bissextos, este ciclo tem $4 \times 7 = 28$ anos.

- **Ciclo metônico** ou “Ciclo áureo”, relacionado com a recorrência das fases da Lua aproximadamente no mesmo dia do ano. Este ciclo tem 235 lunações o que corresponde a um período de 19 anos (veja descrição na Sec. 2.1.6).
- **Ciclo de indicção** ou ciclo de impostos romanos. A *indicção* era usada desde o final da antiguidade pelo Império Romano do Oriente para ajustar os impostos anuais. O ciclo de indicção tinha 15 anos de duração.

A ideia de Scaliger foi combinar os três ciclos definindo um período de $28 \times 19 \times 15 = 7980$ anos, onde cada ano poderia ser caracterizado de forma unívoca a cada ciclo. Este período foi chamado de *Período Juliano*, em razão da associação com o calendário Juliano (mas não devemos confundir o calendário instituído por Júlio Cesar com o período definido por Scaliger).

Pela cronologia da época, Scaliger calculou que o início da contagem, correspondente ao ano 1 dos três ciclos, seria o ano 4713 A.C.. O ano de 1582 seria então o ano 6295 do Período Juliano, que irá terminar em 3267 e recomeçar em 3268. A relação com os ciclos solar, metônico e de indicção ficaria assim:

Ano:		4713 A.C.	1 A.C.	1 D.C.	1582	2000	2020	3267
Período Juliano:		1	4713	4714	6295	6713	6733	7980
solar :		1	9	10	23	21	13	28
ano no	metônico:	1	1	2	6	6	7	19
ciclo	indicção:	1	3	4	10	8	13	15

Esta metodologia, contudo, não teve grande adesão na época. Apenas em 1849, o astrônomo inglês John Herschel começou a defender o uso de um sistema contínuo de contagem de tempo, não baseado em anos, mas em dias. Surgiu aí e popularizou-se o conceito de *dia juliano* ou *data juliana*.

Assim, para se contar os dias de um modo prático para a utilização nos cálculos astronômicos, foi criado um sistema onde os dias são contados de maneira consecutiva. Este sistema é chamado *dia juliano*, JD. Cada dia do calendário corresponde a um certo dia juliano. Por definição a contagem dos dias julianos, o dia 0 (zero), começa ao meio-dia da segunda-feira de 1^o de janeiro de 4713 A.C. (extrapolando o calendário Juliano para o passado, ou na forma “astronômica” de contar os anos, -4712). Assim, por exemplo, o meio-dia de 1^o de janeiro de 2000 D.C. corresponde a JD 2.451.545,0 e a meia-noite de 13 de março de 1970 corresponde a JD 2.440.658,5.

Um outro exemplo, na descontinuidade entre o calendário Juliano e o Gregoriano (Sec. 2.2.6) a contagem de dias julianos permanece contínua. Assim, o meio-dia de 4/10/1582 (calendário Juliano) corresponde a JD 2.299.160,0 e o meio-dia de 15/10/1582 (Gregoriano) corresponde a JD 2.299.161,0. Ao contrário dos calendários utilizados habitualmente, a contagem de dias julianos não utiliza o conceito de meses ou anos.

Conversão calendário Gregoriano/Juliano para Dias Juliano. O cálculo do dia juliano para uma data qualquer é feito da seguinte forma (válida para $JD > 0$):

1. Suponha que a data seja dada pelo dia \mathcal{D} , mês \mathcal{M} e ano \mathcal{A} . O dia pode ser dado com decimais, por exemplo, o meio-dia do dia 13 é igual a 13,5. Os anos “A.C.” são contados de maneira matemática, isto é, 1 A.C. = 0, 2 A.C. = -1 , 10 A.C. = -9 , etc.
2. Se $\mathcal{M} = 1$ ou 2 , então $\mathcal{A} = \mathcal{A} - 1$ e $\mathcal{M} = \mathcal{M} + 12$; caso contrário tanto \mathcal{M} quanto \mathcal{A} permanecem o mesmo.
3. Se a data for posterior a 15/10/1582 (calendário Gregoriano) então calcule, $A_1 = \text{int}(\mathcal{A}/100)$ e $A_2 = 2 - A_1 + \text{int}(A_1/4)$.
Se a data for anterior a 4/10/1582 (calendário Juliano), então $A_2 = 0$.

4. Finalmente o dia juliano é:

$$\text{JD} = \text{int}(365,25 \times [\mathcal{A} + 4716]) + \text{int}(30,6001 \times [\mathcal{M} + 1]) + \mathcal{D} + A_2 - 1524,5.$$

Conversão Dias Juliano para calendário Gregoriano/Juliano. Para calcularmos o dia do calendário, Gregoriano para depois de JD 2.299.160,0, Juliano antes disto, usamos o seguinte algoritmo:

1. Calcule $Z = \text{int}(\text{JD} + 0,5)$;

2. Se $Z < 2.299.161$ então $A = Z$, senão calcule $Y = \text{int}\left(\frac{Z - 1.867.216,25}{36524,25}\right)$ e, em seguida, $A = Z + 1 + Y - \text{int}(Y/4)$.

3. Agora calcule os seguintes números inteiros: $B = A + 1524$,

$$C = \text{int}([B - 121, 1]/365,25), \quad D = \text{int}(365,25 \times C), \quad E = \text{int}([E - D]/30,6001).$$

4. Calcule $F = \text{JD} - Z$, a parte fracionária do dia. Obtemos assim,

$$\text{dia} = B - D - \text{int}(30,6001 \times E) + F ;$$

$$\text{mês} = \begin{cases} E - 1 & ; \text{se } E < 14 \\ E - 13 & ; \text{se } E = 14 \text{ ou } E = 15 ; \end{cases}$$

$$\text{ano} = \begin{cases} C - 4716 & ; \text{se mês } > 2 \\ C - 4715 & ; \text{se mês } = 1 \text{ ou } 2. \end{cases}$$

Assim, por exemplo, o dia 01/01/2000 corresponde a JD 2.451.544,5 (o dia juliano começa ao meio-dia, por isto o 0,5) ou JD 2.460.000,0 corresponde a 12h de 24/02/2023.

Século Juliano. Por definição, chamamos de *século juliano*, T , o intervalo de tempo igual a 36.525 dias. Em geral contamos os séculos julianos a partir de uma dada *época*. Ainda hoje encontramos as vezes T contados a partir do início do ano 1900 (mais precisamente o meio-dia de 31/12/1899, notado B1900.0), mas a época mais utilizada hoje em dia é a partir do início do ano 2000 (o meio-dia de 01/01/2000, ou J2000). Chamando de T_{B1900} os séculos julianos a partir de B1900.0 e T_{J2000} a partir de J2000 temos:

$$T_{B1900} = \frac{\text{JD} - 2.415.020}{36.525} \quad \text{e} \quad T_{J2000} = \frac{\text{JD} - 2.451.545}{36.525}. \quad (2.11)$$

Eventualmente, chamaremos T_{J2000} simplesmente de T , isto é, utilizaremos como época inicial o J2000.0. Analogamente ao século juliano, também podemos definir um *milênio juliano* de 365.250 dias.

2.4 Relação entre tempo sideral e tempo universal

Como vimos, o tempo sideral, T_s , é o ângulo horário do ponto vernal e está diretamente relacionado com o dia sideral terrestre (o período de rotação terrestre em relação ao ponto vernal).

O tempo sideral que corresponde a 0^h UT para um observador no meridiano principal (de Greenwich) é dado pela fórmula proposta em 1982 pela União Astronômica Internacional (UAI):

$$T_s = 6^{\text{h}}41^{\text{m}}50^{\text{s}}5484 + \\ + 8.640.184^{\text{s}}812866 \times T_{J2000} + 0^{\text{s}}093104 \times T_{J2000}^2 - 6^{\text{s}}2 \times 10^{-6} \times T_{J2000}^3. \quad (2.12)$$

Para qualquer outra hora que não seja 0^h UT, multiplique a hora de tempo universal por 1,00273790935 e some com o resultado obtido utilizando a fórmula (2.12) para 0^h do dia em

questão. Este fator, 1,00273790935, nada mais é que a razão entre o dia solar (24^h) e o dia sideral ($23^h56^m4^s0989$).

Se quisermos calcular o tempo sideral local, devemos simplesmente acrescentar ou subtrair a longitude do local (como foi dito na seção 2.1.3).

2.5 Cálculo do domingo de Páscoa

A Páscoa é um evento religioso central no mundo cristão. A importância desta data é tal que desde o primeiro Concílio de Niceia (atual Turquia, a cerca de 100 km de Istambul) em 325 D.C. foram propostas regras para definir o cálculo do dia da Páscoa.

Com a reforma do calendário gregoriano foram fixadas as regras para determinação da Páscoa: o domingo de Páscoa é o primeiro domingo após a lua cheia que ocorre logo após o equinócio vernal (início do outono no Hemisfério Sul). A regra não é aplicada de forma rigorosa em relação à astronomia, o equinócio vernal é fixado no dia 21/março (quando, na realidade, o equinócio vernal pode ocorrer até no dia 19/março e isto ainda depende do fuso horário adotado). Além disto, a data da Lua cheia é feita segundo a regra eclesiástica e não coincide sempre com a data da lua cheia astronômica. Por exemplo, nos anos de 1924, 2019, 2038, 2057, 2079 e 2095, a primeira lua cheia ocorre de fato um dia após o dia do equinócio, contudo a lua cheia eclesiástica considerada é a seguinte, cerca de 29 ou 30 dias depois. Nestes anos, o equinócio ocorre nos dias 19 ou 20/03 e não no dia 21/03.

Assim, o domingo de Páscoa só pode ocorrer entre os dias 22/março e 25/abril (inclusive). A figura 5.18 na página 199 mostra a frequência das datas do calendário em que ocorre o domingo de Páscoa no calendário Gregoriano. As datas mais frequentes para o domingo de Páscoa são: 30/03, 05/04, 10/04 e 15/04 nos 3 mil primeiros anos do calendário Gregoriano. Contudo, usando um período muito maior, de 5,7 milhões de anos, a data mais frequente para a Páscoa é 19/04 segundo Jean Meeus.

Um algoritmo prático para calcular o dia e o mês do domingo de Páscoa foi proposto por J.-M. Oudin em 1940. Neste algoritmo, todas as variáveis são números inteiros de forma que, nas operações de divisão, desprezamos os restos (por exemplo, $17/4 = 4$, pois desprezamos o resto 0,25):

$$\begin{aligned} c &= a/100 ; & n &= a - 19 * (a/19) ; & k &= (c - 17)/25 ; \\ i &= c - c/4 - (c - k)/3 + 19 * n + 15 ; \\ i &= i - 30 * (i/30) ; \\ i &= i - (i/28) * (1 - (i/28) * (29/(i + 1)) * ((21 - n)/11)) ; \\ j &= a + a/4 + i + 2 - c + c/4 ; \\ j &= j - 7 * (j/7) ; & l &= i - j ; \\ \Rightarrow & \begin{cases} m = 3 + (l + 40)/44 ; \\ d = l + 28 - 31 * (m/4) , \end{cases} \end{aligned}$$

onde o dia é d e o mês é m do domingo de Páscoa no ano a . Por exemplo, para o ano $a = 1963$ temos:

$$\begin{aligned} c &= 1963/100 = 19 ; & n &= 1963 - 19 * (1963/19) = 6 ; & k &= (19 - 17)/25 = 0 ; \\ i &= 19 - 19/4 - (19 - 0)/3 + 19 * 6 + 15 = 138 ; \\ i &= 138 - 30 * (138/30) = 18 ; \\ i &= 18 - (18/28) * (1 - (18/28) * (29/(18 + 1)) * ((21 - 6)/11)) = 18 ; \\ j &= 1963 + 1963/4 + 18 + 2 - 19 + 19/4 = 2458 ; \\ j &= 2458 - 7 * (2458/7) = 1 ; & l &= 18 - 1 = 17 ; \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 3 + (17 + 40)/44 = 4 ; \\ d = 17 + 28 - 31 * (4/4) = 14 , \end{cases}$$

isto é, o domingo de Páscoa foi no dia 14/abril/1963. Na página 199 estão as datas do domingo de Páscoa entre 1990 e 2049.

Como a igreja católica ortodoxa ainda usa o calendário Juliano, que não é uma aproximação tão boa quanto o calendário Gregoriano para o ano Trópico, sua comemoração da Páscoa se dá geralmente 2 semanas após a data calculada pelo método acima.

Datas baseadas na Páscoa Possivelmente descendente de uma festa romana da antiguidade, o carnaval é marcado pela *Quarta-feira de cinzas* onde tradicionalmente tem início um período de 40 dias até o domingo de Ramos (o domingo que precede à Páscoa). O carnaval é o período que antecede a *Quaresma*, do latim, “*Quadragesima*”. Por exemplo, em 1970 o domingo de Páscoa foi no dia 29/03, logo o domingo de Ramos foi 22/03; 40 dias antes (contando o próprio domingo) corresponde à 4^a-feira de cinzas, 11/02/1970.

Outro feriado católico móvel é a *Pentecostes* (de quinquagésimo, em grego), comemorado no domingo 50 dias (isto é, 7 semanas) após o domingo de Páscoa (contando ambos os domingos). Na 5^a-feira, após duas semanas (11 dias depois da Pentecostes), comemora-se o *Corpus Christi*. No exemplo acima, temos o domingo de Pentecostes no dia 17/05/1970 e o Corpus Christi no dia 28/05.

2.6 Radiação solar e Insolação

A fim de ilustrar o uso de vários conceitos ligados à passagem do tempo, estações do ano e coordenadas astronômicas e geográficas iremos calcular a potência da radiação incidente na Terra. *Insolação* é o fluxo de radiação solar (energia por unidade de tempo e por unidade de área) que atinge a Terra. A potência total do Sol é $L_{\odot} = 3,84 \times 10^{26}$ Watt, isto é, sua luminosidade emitida em todas as direções. Por comparação, a potência elétrica consumida no Brasil foi de cerca de 10^{11} Watt no início da década de 2020.

O Sol está a cerca de 1 AU de distância (a distância varia ao longo do ano devido à excentricidade da órbita terrestre), logo o fluxo recebido no topo da atmosfera terrestre em um plano perpendicular aos raios solares é:

$$C_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi(1 \text{ AU})^2} = 1365 \text{ Watt/m}^2 .$$

Este valor é chamado *Constante Solar*. Na literatura, encontramos o valor da Constante Solar entre 1361 a 1366 Watt/m².

O energia recebida no topo da atmosfera depende da posição do receptor (sua latitude), posição aparente do Sol e distância entre a Terra e o Sol. O Sol nem sempre está no zênite, portanto temos um efeito geométrico a considerar (Fig. 2.23).

A órbita da Terra não é exatamente um círculo, mas uma elipse atualmente com excentricidade $e = 0,0167$. Dentro de um intervalo de ± 4000 anos, a excentricidade da órbita terrestre é dada por:

$$e = 0,01670862 - 4,2037 \times 10^{-5}T - 1,236 \times 10^{-7}T^2 + 4 \times 10^{-11}T^3 ,$$

onde T é o intervalo de tempo medido a partir de J2000 em séculos julianos (de 36.525 dias, veja Sec. 2.3). Devido à excentricidade a distância Terra–Sol varia e, conseqüentemente, a insolação varia proporcionalmente ao quadrado da distância:

$$F_{\odot} = C_{\odot} \left(\frac{1 \text{ AU}}{r} \right)^2 \cos(90^{\circ} - h) , \quad (2.13)$$

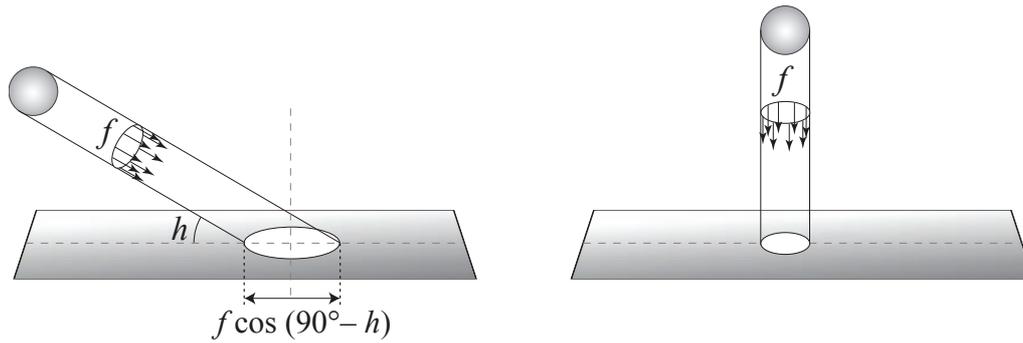


Figura 2.23: O fluxo solar, f , depende da inclinação relativa da posição do Sol. Quando o Sol não está no zênite (direita) o fluxo coletado se dilui por um fator $\cos\theta = \cos(90^\circ - h)$, onde h é a altura do Sol. Por exemplo, se $h = 0$, o fluxo coletado é nulo.

onde r é a distância entre o Sol e a Terra em unidades astronômicas¹ e aqui já levamos em conta a altura do Sol, ou o ângulo zenital, $\theta \equiv (90^\circ - h)$. A insolação, Eq. (2.13) depende da posição do Sol e do observador através das variáveis h e r .

Usando a transformação de coordenadas horizontais para coordenadas horárias, Eq. (1.25), temos a relação:

$$\begin{aligned} \sen h &= \sen(90^\circ - \theta) = \sen \delta \sen \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H \\ \Rightarrow \cos \theta &= \sen \delta \sen \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H, \end{aligned}$$

onde ϕ é a latitude do observador, δ e H são a declinação e o ângulo horário do Sol.

Portanto, temos a insolação:

$$F_{\odot} = C_{\odot} \left(\frac{1 \text{ AU}}{r} \right)^2 (\sen \delta \sen \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H),$$

onde r é medido em Unidades Astronômicas (AU).

Usando agora a relação entre as coordenadas eclíptica e equatorial, Eq. (1.20), nós temos para o Sol:

$$\sen \delta = \sen \varepsilon \sen \lambda, \quad (\text{assumindo } \beta = 0),$$

onde $\varepsilon = 23,439^\circ$ é a obliquidade da eclíptica (inclinação do eixo de rotação da Terra), e λ é a longitude do Sol.

Para a longitude do Sol, podemos aproximar seu movimento como uniforme ao longo de um círculo (não estamos preocupados com uma precisão de horas aqui). Logo, o movimento médio do Sol ao longo da eclíptica é simplesmente:

$$\lambda(t) = \frac{2\pi}{P} t \quad (\text{em radianos}),$$

onde P é o período de translação da Terra (1 ano $\approx 365,2422$ dias) e t é o tempo. Em $t = 0$, $\lambda = 0$, isto é, o Sol está no ponto vernal (por volta de 20/março).

A distância Terra-Sol é obtida pela equação de uma elipse [primeira lei de Kepler, veja Eq. (5.1)]:

$$r(t) = 1 \text{ AU} \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \nu} \approx 1 \text{ AU} \frac{1 - e^2}{1 + e \cos[\lambda(t) - \omega]},$$

onde ω é a longitude do periélio da órbita aparente do Sol, isto é, o periélio terrestre somado a 180° ($\approx 282,5^\circ$) e ν é a *anomalia verdadeira*, medida a partir do periélio. Em uma primeira aproximação, podemos tomar $\lambda = \nu + \omega$ (este problema é tratado em detalhes na seção 5.4.1).

¹A Unidade Astronômica, AU, foi definida como o semi-eixo maior da órbita terrestre, com o Sol em um dos focos. 1 AU é aproximadamente a distância Terra-Sol. 1 AU = 149.597.870,7 km ou ~ 150 milhões de km.

Uma grandeza mais interessante do que o valor instantâneo de F_{\odot} é o valor médio da insolação durante um dia. Isto pode ser obtido integrando F_{\odot} entre o ângulo horário do nascer e do pôr do Sol (Sec. 3.5). Por simetria, assumindo que as coordenadas do Sol (declinação e raio r) não variem significativamente durante um dia, podemos escrever:

$$\overline{F}_{\odot} = \frac{1}{2\pi} \int_{-H_d}^{+H_d} F_{\odot} dH = \frac{C_{\odot}}{\pi} \left(\frac{1 \text{ AU}}{r} \right)^2 \int_0^{+H_d} [\sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H] dH.$$

(Os limites de integração são simétricos porque o meio-dia solar corresponde a $H = 0$.) Finalmente, temos:

$$\overline{F}_{\odot} = \frac{C_{\odot}}{\pi} \left(\frac{1 \text{ AU}}{r} \right)^2 [H_d \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \sin H_d], \quad (2.14)$$

onde H_d é o ângulo horário do nascer do Sol, isto é, quando a altura do Sol é $h = 0^\circ$ (veremos isto em mais detalhes na Sec. 3.5). Utilizando a transformação de coordenadas horárias em horizontais temos a relação

$$\cos H_d = -\tan \phi \tan \delta.$$

Aqui devemos apenas ter o cuidado no cálculo de H_d pois, além do círculo polar o Sol pode não se pôr durante um certo período do ano (então, consideramos $H_d = \pi/2$) ou o Sol pode não nascer (daí, usamos $H_d = 0$).

A figura 2.24 mostra a insolação média diária, \overline{F}_{\odot} , em função da época do ano e latitude, acima da atmosfera da Terra, usando as aproximações acima.

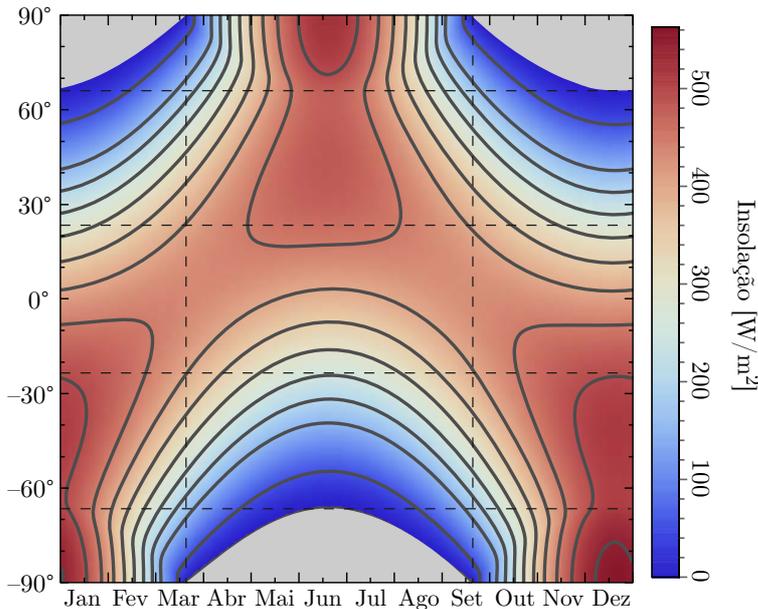


Figura 2.24: Insolação no topo da atmosfera em função da época do ano e da latitude. As linhas tracejadas horizontais marcam as latitudes dos trópicos de Câncer e Capricórnio e os círculos polares. As linhas tracejadas verticais mostram os momentos dos equinócios. A cor cinza é quando o Sol está abaixo do horizonte durante todo o dia.

Próximo dos polos, há períodos sem insolação, na figura representado em cor cinza. Por outro, no verão o Sol não se põe e são nestas regiões polares onde a insolação média diária atinge o maior valor, durante alguns dias acima de 500 W/m^2 .

Para calcular o valor médio anual para uma latitude dada, podemos somar a insolação média diária e dividir pelo período de um ano, $\overline{F}_{\text{anual}} = (\sum_{\text{dia}} F_{\odot})/365,24$. Obtemos assim a Fig. 2.25.

Fica claro que, como esperado, em média o equador terrestre recebe a maior quantidade de radiação solar. Entre os trópicos e os círculos polares a insolação decresce rapidamente. No Equador, em um ano, a taxa de insolação média é de $\sim 420 \text{ W/m}^2$ por dia, à medida que no Polo Sul é apenas $\sim 180 \text{ W/m}^2$ e no Polo Norte, $\sim 170 \text{ W/m}^2$ por dia (a diferença é devido à Terra passar pelo periélio durante o Verão do Hemisfério Sul, veja Sec. 1.6).

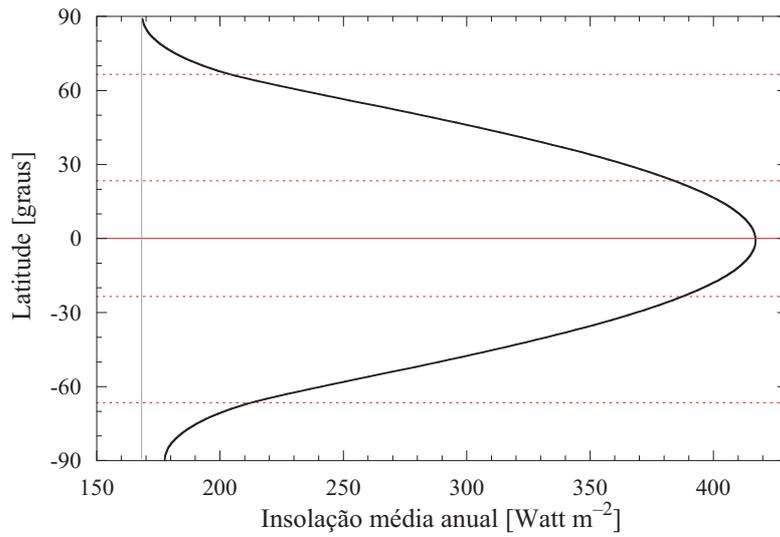


Figura 2.25: Insolação média anual em função da latitude. Repare que o polo Sul recebe um pouco mais de radiação solar que o polo Norte devido à excentricidade da órbita terrestre. As linhas horizontais correspondem aos Trópicos de Câncer e Capricórnio, aos círculos polares e ao Equador.



3.1 Forma da Terra

A Terra não é uma esfera perfeita, mas, em primeira aproximação tem a forma de um elipsoide, “achatado” nos polos, Figs. 3.1. Em coordenadas cartesianas, a equação que descreve a superfície de um elipsoide com centro na origem $(0, 0, 0)$ é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

onde a , b e c são os semi-eixos do elipsoide. Se $a = b = c$, temos uma esfera.

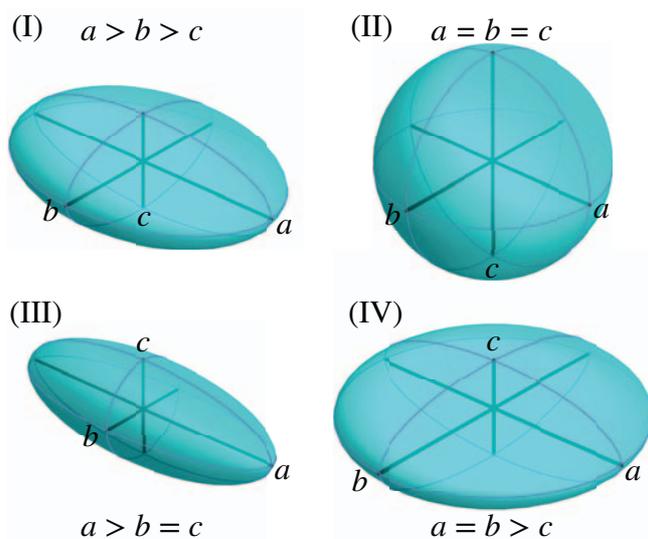


Figura 3.1: Exemplo de elipsoides. (I) Elipsoide triaxial (3 eixos diferentes); (II) Esfera (3 eixos iguais); (III) Elipsoide prolato (2 eixos iguais menores que o eixo maior); (IV) Elipsoide oblato (2 eixos iguais, maiores que o eixo menor). O elipsoide que representa a Terra é aproximadamente oblato (mas não tão exagerado quando esta figura).

Mais precisamente, a forma da Terra pode ser aproximada por um elipsoide de revolução (a superfície descrita por uma rotação em torno do eixo menor de uma elipse) com um achatamento, $f \equiv 1 - b/a = 1/298,257223$ ¹, onde a e b são os raios equatorial ($a = 6.378.136,6$ metros) e polar, respectivamente. Este achatamento se traduz em uma diferença de aproximadamente 21 km entre os eixos equatorial e polar. Além disto, o eixo de rotação da Terra (que é equivalente ao eixo menor do elipsoide) é inclinado em relação ao plano de sua órbita em torno do Sol. Esta inclinação, ε , chamada *obliquidade da eclíptica*, é da ordem de $23^\circ 26' 21''$ ($23,439167$) no início do século XXI.

Devido ao achatamento e à rotação da Terra, existem pelo menos três formas diferentes de se definir um sistema de coordenadas terrestres. Enquanto a longitude é praticamente a mesma nos três sistemas, a latitude de um ponto na superfície terrestre é diferente segundo o sistema adotado.

¹Valor do achatamento do elipsoide de referencia do padrão WGS-84 (*World Geodetic System*).

A *latitude*, independentemente do sistema de coordenadas terrestre escolhido, é sempre medido a partir da “linha do equador” (ou melhor dizendo, do grande círculo do equador). Este é o grande círculo perpendicular ao eixo de rotação da Terra, e assim é definido de forma unívoca. A latitude é positiva ao norte do equador e negativa ao sul. Esta convenção sempre foi utilizada e nunca houve uma disputa quanto a isto.

Já para a *longitude*, a história é outra. As longitudes são medidas a partir de um meridiano principal, mas como não existe um meridiano que se distingue dos outros, a definição de um meridiano principal é completamente arbitrária. Por exemplo, os franceses adotavam como meridiano principal o meridiano que passa pelo observatório de Paris, os norte americanos adotavam o meridiano de Washington, os holandeses, o meridiano de Amsterdam, os espanhóis o meridiano de Tenerife (Ilhas Canárias), e os portugueses o meridiano do Cabo de São Vicente (sul de Portugal). A adoção do meridiano de Greenwich como meridiano principal universal só ocorreu em 1884 e, mesmo assim, alguns países ainda levaram algumas décadas para adotá-lo definitivamente.

3.1.1 Sistema astronômico de coordenadas geográficas

O sistema astronômico de coordenadas geográficas tem como plano fundamental o plano perpendicular ao eixo de rotação da Terra, definindo assim o *equador geográfico*. Para cada ponto na superfície terrestre, é definida ainda uma *vertical astronômica* que é a direção do zênite local, dado pela direção do campo gravitacional local, isto é, a vertical é aquela obtida com um fio de prumo (veja a figura 3.2).

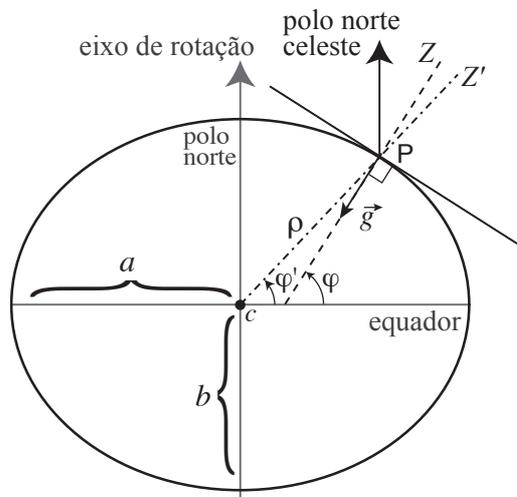


Figura 3.2: Sistemas de coordenadas geográficas. A elipse representa um corte longitudinal do elipsoide de revolução que representa a Terra (o achatamento está aumentado para facilitar a interpretação da figura). O ponto c é o centro da Terra e ρ a distância de um ponto na superfície P ao centro. Os ângulos φ e φ' são as latitudes astronômicas e geocêntricas, respectivamente. O vetor \vec{g} representa o campo gravitacional local em P e Z é a direção do zênite

Como a Terra não é uma esfera perfeita, o prolongamento da vertical astronômica não passa pelo centro da Terra. O ângulo desta vertical com o plano do equador (ou o complemento do ângulo entre a direção do polo celeste com a vertical) define a *latitude astronômica* do ponto P .

3.1.2 Sistema geodético de coordenadas geográficas

A forma da Terra pode ser aproximada a um *geoide* (Fig. 3.3). O geoide terrestre é a superfície de isopotencial gravitacional que coincide, em primeira aproximação, com o nível médio dos oceanos. A (pequena) diferença vem do fato que a distribuição de massas na Terra não é exatamente uniforme e, portanto, há pequenas diferenças entre o geoide e o nível médio dos mares. A superfície de isopotencial não é perfeita (e simples) como o elipsoide.

A diferença nas coordenadas geográficas determinadas no sistema astronômico e geodético é sempre inferior a alguns segundos de arco. As verticais dos sistemas astronômico e geodético são

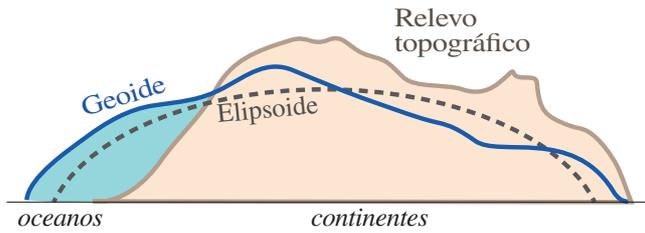


Figura 3.3: A forma da Terra pode ser aproximada por um elipsoide de revolução. A superfície de equipotencial (mesma aceleração da gravidade) define o *geóide* que segue aproximadamente o nível do mar. Por fim temos a topografia da Terra com montanhas e vales acima e abaixo do geóide.

praticamente as mesmas, a diferença é que a vertical do sistema geodético não é dada exatamente pela direção do campo gravitacional local. A diferença entre o geóide e o elipsoide de referência varia entre -108 (no Oceano Índico, ao sul da Índia) e $+85$ (na Indonésia) metros de altura.

É o sistema geodético de coordenadas que utilizamos para fins geográficos, atlas, mapas, etc.

3.1.3 Sistema geocêntrico de coordenadas geográficas

No sistema geocêntrico de coordenadas geográficas, também definimos o equador geográfico perpendicular ao eixo de rotação da Terra. Contudo, as *latitudes geocêntricas*, φ' , são definidas pelo ângulo entre o raio vetor, ρ , de um ponto na superfície terrestre e o centro da Terra (cf. Fig. 3.2).

Enquanto a latitude geodética, φ , é utilizada para se localizar pontos na superfície terrestre, é necessário, por outro lado, a latitude geocêntrica na astronomia de posição. A latitude geocêntrica é utilizada, por exemplo, para se corrigir o fato do observador estar sobre a Terra e não no centro, isto é, transformar um sistema de coordenadas geocêntrico em topocêntrico.

Assim torna-se necessário transformar as coordenadas geodéticas (ou astronômicas) habituais em coordenadas geocêntricas (e, é claro, realizar a transformação inverso caso necessário). Dado a simetria axial do problema, as transformações que nos interessam são somente nas latitudes, as longitudes sendo as mesmas nos dois sistemas. Podemos simplificar o problema e tratá-lo com duas dimensões apenas. Fazendo-se um corte longitudinal na superfície do geóide, ao nível do mar, nós temos a equação da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.1)$$

onde a e b são os semi-eixos equatorial e polar da elipse e, pela trigonometria, os ângulos φ e φ' são:

$$\tan \varphi' = \frac{y}{x} \quad \text{e} \quad \tan \varphi = \frac{y a^2}{x b^2}. \quad (3.2)$$

Substituindo a equação de φ na equação da elipse obtemos duas relações para x e y :

$$x^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad \text{e} \quad y^2 = \frac{a^2 (1 - e^2)^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}, \quad (3.3)$$

onde definimos a *excentricidade* da elipse como $e^2 \equiv 1 - (b/a)^2$. Mas, também podemos escrever uma elipse de forma paramétrica com as equações:

$$x = \rho \cos \varphi' \quad \text{e} \quad y = \rho \sin \varphi', \quad (3.4)$$

o que resulta, substituindo as equações precedentes nas equações (3.3), em:

$$\begin{aligned} \rho \cos \varphi' &= C \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi' &= S \sin \varphi, \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde, com um pouco de álgebra obtemos:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} = (1-e^2) C \\ C &= \frac{a}{[\cos^2 \varphi + (1-f)^2 \sin^2 \varphi]^{1/2}} = \frac{S}{(1-f)^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Se o observador não estiver no nível do mar (isto é, sobre o geóide), mas tiver uma altitude a_{obs} , sendo $|a_{obs}| \ll \rho$, então as equações (3.5) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \rho \cos \varphi' &= (C + a_{obs}) \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi' &= (S + a_{obs}) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Finalmente, a razão entre as equações (3.5) nos dá:

$$\tan \varphi' = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \tan \varphi = (1-f)^2 \tan \varphi. \quad (3.8)$$

A diferença entre as latitudes geodéticas e geocêntricas, $\varphi - \varphi'$, é chamada *ângulo da vertical*. Desenvolvendo com relações trigonométricas o termo $\tan(\varphi - \varphi')$ obtemos a identidade:

$$\tan(\varphi - \varphi') = \frac{\tan \varphi - \tan \varphi'}{\tan \varphi \tan \varphi' + 1}, \quad (3.9)$$

e utilizando a equação (3.8) resulta em:

$$\tan(\varphi - \varphi') = \frac{[1 - (1-f)^2] \tan \varphi}{(1-f)^2 \tan^2 \varphi + 1} = \frac{m \sin(2\varphi)}{m \cos(2\varphi) + 1}, \quad (3.10)$$

onde definimos $m \equiv e^2/(2 - e^2)$. O ângulo da vertical pode ainda ser expandido em série, válido para $f \ll 1$

$$\varphi - \varphi' \simeq m \sin 2\varphi - \frac{m^2}{2} \sin 4\varphi + \frac{m^3}{3} \sin 6\varphi - \dots,$$

e aproximado simplesmente por:

$$\varphi - \varphi' \approx 692''7262 \sin 2\varphi - 1''1632 \sin 4\varphi + 0''0026 \sin 6\varphi. \quad (3.11)$$

O ângulo da vertical é nulo nos polos e no equador, e atinge um valor máximo de cerca de $11'30''$ próximo da latitude de 45° (compare com a diferença entre os sistemas astronômico e geodético, onde a diferença é sempre menor que alguns segundos de arco).

Gravidade da Terra

Se a Terra fosse uma esfera sem rotação, a aceleração da gravidade seria simplesmente

$$g_0 = -\frac{GM}{r^2} = -9,78 \text{ m s}^{-2} \quad (\text{no nível do mar}),$$

onde o sinal de menos indica que a aceleração é em direção ao centro da Terra, r é o raio da Terra e M é a massa da Terra no interior da esfera de raio r .

Contudo, como vimos a forma da Terra é melhor aproximada por um elipsoide. A não esfericidade introduz uma dependência de \vec{g} com a latitude que, para elipsoides pouco achatados, pode ser aproximado por:

$$g = g_0(1-f) \sin^2 \varphi' = g_0(1-f) \sin^2 \varphi - \frac{f^2}{8} \sin^2(2\varphi),$$

onde as latitudes φ e φ' são os ângulos definidos na Fig. 3.2 e f é o achatamento do elipsoide.

Além disto, a Terra está em rotação o que produz no referencial terrestre uma força centrífuga de direção oposta à força gravitacional. Combinando o elipsoide e a rotação da Terra, podemos escrever a aceleração efetiva no nível do mar como:

$$g = -9,78033 \left[1 + 0,0053024 \text{sen}^2 \varphi - 0,0000059 \text{sen}^2(2\varphi) \right] \text{ m s}^{-2}. \quad (3.12)$$

Este resultado (com valores ligeiramente diferentes) foi obtido pela primeira vez por Alexis Claude Clairaut em 1743.

Também é comum encontramos a expressão obtida por Carlo Somigliana,

$$g = -9,78033 \left(\frac{1 + 0,00193185 \text{sen}^2 \varphi}{\sqrt{1 - 0,00669438 \text{sen}^2 \varphi}} \right) \text{ m s}^{-2}. \quad (3.13)$$

3.1.4 GPS

GPS é a sigla para *Global Positioning System* (Sistema de Posicionamento Global), controlado pelos EUA, e funcionando desde 1995. Este foi o primeiro *Sistema de navegação por satélite* (GNSS, *Global Navigation Satellite System*, em inglês), baseado na posição recebida na Terra por quatro ou mais satélites entre o total de 24 que estão distribuídos em seis trajetórias orbitais diferentes a 20.180 km de altitude (Fig. 3.4). A esta altitude, cada satélite dá uma volta completa em torno da Terra em 11^h58^m, isto é, meio dia sideral².

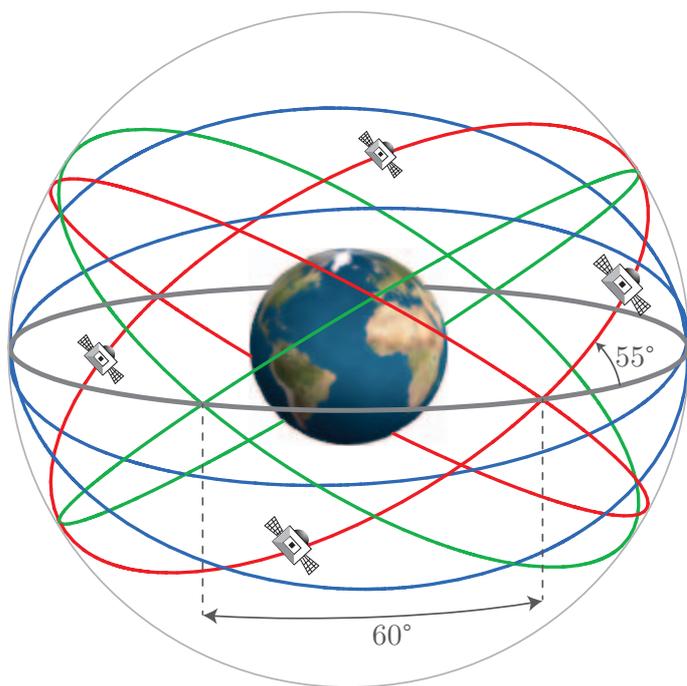


Figura 3.4: Representação esquemática das 6 órbitas praticamente circulares, cada uma com 4 satélites GPS (para não sobrecarregar a figura, só aparecem 4 satélites). Todas as órbitas estão na mesma altitude e são inclinadas em relação ao equador com ângulo de $\approx 55^\circ$. Os nodos das órbitas estão distribuídos em intervalos de 60° ao longo do equador celeste (o círculo cinza espesso).

Além do sistema norte-americano, a Rússia tem um sistemas semelhante de GNSS, o *GLO-NASS* (ГЛОУАСС, Sistema de Satélites para Navegação Global), com os primeiros satélites lançados em 1982. Com o fim da União Soviética o desenvolvimento do GLONASS sofreu atrasos em sua implementação completa. A partir de 2011 sua cobertura se tornou completamente global e atualmente funciona paralelamente as sistema GPS (desde o início da década de 2010, muitos receptores captam os sinais do GPS e GLONASS).

²O período de um satélite em órbita circular em torno da Terra é aproximadamente $P = 1,408 \sqrt{(1 + h/6378,14)^3}$ hora, onde h é a altura acima do nível do mar em quilômetros

A comunidade europeia está implantando um sistema próprio de posicionamento via satélite, chamado *Galileo*. Os primeiros satélites foram colocados em órbita em 2011 e começou a operar parcialmente em 2016. Este serviço deverá estar completamente operacional em 2020. O *Galileo* terá 24 satélites (mais 6 reservas) distribuídos em três órbitas a 23.222 km de altitude.

A China também desenvolveu seu próprio GNSS, o *BeiDou* (北斗) *Navigation Satellite System* (BDS). Desde 2012, este sistema está em operação com 10 satélites. O BeiDou está ganhando uma nova geração de satélites que deverá estar em operação em 2020 com 35 satélites. Beidou é o nome chinês do asterismo das 7 estrelas mais brilhantes da constelação da Ursa Maior (na Europa, este asterismo é conhecido como “panela”, “carruagem”, entre outros nomes).

Posicionamento com uso de GPS

Cada satélite GPS envia continuamente sua posição orbital e o momento em que estava nesta posição. Estes satélites possuem relógios com uma precisão de nanossegundo (10^{-9} segundos), necessário para que a precisão da medida seja de poucos metros na superfície da Terra.

Se um receptor capta o sinal de apenas um satélite podemos determinar a distância que estamos do satélite, $d = c\delta t$, onde δt é o intervalo de tempo entre a emissão e a recepção e c é a velocidade da luz. O receptor poderia estar em qualquer ponto de uma esfera de raio d centrada no satélite GPS. Com o sinal de 2 satélites, restringimos esta superfície à intersecção de duas esferas, um círculo como mostra a Fig. 3.5.

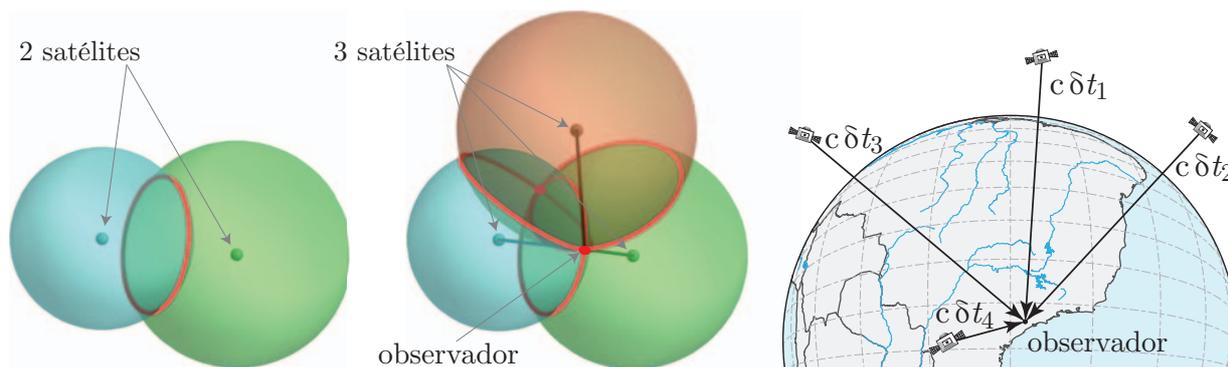


Figura 3.5: A intersecção de duas esfera é um círculo (em vermelho no painel a esquerda). A intersecção entre três esferas, se dá em 2 pontos. O usuário de um receptor GPS está em uma destas intersecções, captando o sinal de três satélites neste exemplo. O painel a direita mostra as pseudo-distâncias $c\delta t_i$ de cada um dos 4 satélites necessários para determinar a posição do observador, onde δt é o intervalo de tempo que o sinal leva para chegar no receptor.

Se captamos o sinal de três satélites temos duas soluções e podemos nos situar na superfície da Terra, pois uma das soluções pode ser descartada por estar longe da superfície terrestre (Fig. 3.5).

Contudo, existe um problema maior. Os relógios dos satélites GPS são muito precisos, porém os relógios dos receptores são, na grande maioria, muito menos acurados, o que prejudica a determinação das distâncias dos satélites. Um erro de microssegundos corresponde a uma incerteza de ~ 300 metros na posição do observador em relação aos satélites.

Para resolver este problema, precisamos da observação de um quarto satélite como veremos em seguida. A distância de um dado satélite i é:

$$d_i^2 = (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2,$$

onde (x_0, y_0, z_0) é a posição do observador em coordenadas cartesianas em relação ao centro da Terra e (x_i, y_i, z_i) são as coordenadas do satélite i . Por outro lado, a distância d_i também pode

ser calculada por:

$$d_i = c(t_i - t_0 + t_c) = c(\delta t_i - t_c),$$

onde t_i é o momento em que o sinal é enviado do satélite, t_0 o momento em que o sinal chega no receptor (dado pelo relógio do receptor) e t_c é o erro do relógio no receptor em relação ao satélite. A distância calculada pela forma acima é chamada *pseudo-distância* (em inglês, *pseudo-range*, veja a Fig. 3.5, painel da direita). Igualando as equações acima para cada um dos 4 satélites obtemos um sistema de 4 equações:

$$\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2} = c(\delta t_i - t_c); \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (3.14)$$

onde as quatro incógnitas são as 3 coordenadas cartesianas da posição do observador e o erro no tempo, t_c . Por exemplo, suponha que um receptor GPS capte o sinal de 4 satélites com as seguintes coordenadas e momento de emissão:

	x_i	y_i	z_i		δt_i
Sat 1:	(17368,3,	17674,1,	-14422,1)	km;	0,0877270 seg
Sat 2:	(12981,8,	6081,11,	-24829,8)	km;	0,0935228 seg
Sat 3:	(11921,6,	25566,0,	5126,44)	km;	0,0934974 seg
Sat 4:	(18048,2,	18238,2,	-12792,9)	km;	0,0875838 seg

Resolvendo o sistema de 4 equações (3.14) obtemos duas soluções (isto porque as equações são quadráticas e admitem duas soluções):

	x_0 (km)	y_0 (km)	z_0 (km)	t_c (seg)	latitude	longitude	altitude (km)
solução 1:	(-6964,62,	-6983,8,	4286,51)	0,219056	41°29'04" N	134°55'16" E	4283,23
solução 2:	(4131,69,	4243,07,	-2607,55)	0,013500	23°45'48" S	45°45'43" O	0,00

Na tabela acima, as coordenadas cartesianas foram transformadas nas coordenadas polares usuais, longitude, latitude e altitude. Uma das soluções coloca o observador a mais de 4 mil km de altitude, mais de 10 vezes a altitude da *Estação Espacial Internacional* (ISS). Além disto, esta solução está do lado oposto do planeta, onde os satélites não poderiam ser observados. Assim, podemos descartar esta posição e a solução 2, portanto, deve ser a correta, onde o observador se encontra à beira mar na Barra do Una/SP.

3.2 Precessão e Nutação

Antes de vermos quais são as influências da precessão e nutação nas coordenadas dos astros, nós definiremos estes fenômenos e veremos quais são suas origens físicas.

3.2.1 Física da precessão e nutação

Como vimos, a Terra não é uma esfera perfeita e, além disto, seu eixo de simetria está inclinado em relação ao seu plano orbital (eclíptica) e ao plano orbital da Lua. A ação conjugada do Sol e da Lua no excesso de massa equatorial da Terra provoca um torque nesta. A figura 3.6 ilustra a ação de um corpo sobre o excesso de massa, δM , no equador terrestre. O torque é produzido pela diferença entre as forças $\vec{F} - \vec{F}_1$ e $\vec{F} - \vec{F}_2$ (note que $|\vec{F}_1| > |\vec{F}| > |\vec{F}_2|$). Esta diferença (em módulo e supondo os vetores paralelos) é $F_M = F_1 - F \simeq G\delta M M_L [1/(r - R_T)^2 - 1/r^2]$ e, quando $r \gg R_T$ podemos expandir δF em série de Taylor, o que resulta em

$$F_M \approx G\delta M M_L \left(\frac{2R_T}{r^3} + \frac{3R_T^2}{r^4} + \frac{4R_T^3}{r^5} + \dots \right), \quad (3.15)$$

e podemos manter apenas o primeiro termo da expansão no caso Terra-Lua ou Terra-Sol.

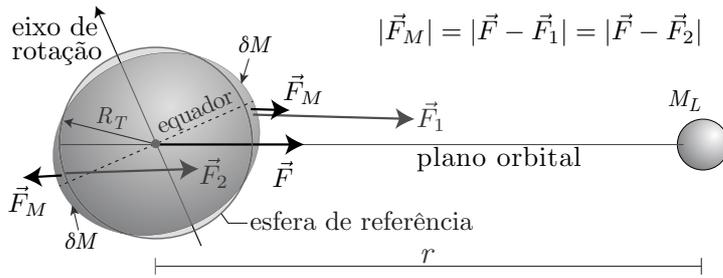


Figura 3.6: Força de maré. O corpo de massa M_L atua sobre um elemento de massa δM . As forças \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F} diferem devido ao fato do corpo principal ter um raio não nulo (R_T). A força de maré é \vec{F}_M .

Esta força F_M é chamada de *força de maré* pois é ela que produz as marés que observamos no mar.

O efeito deste torque no eixo de rotação da Terra é o mesmo que ocorre com um pião cujo eixo de rotação não seja paralelo à vertical: o eixo de rotação gira em torno da vertical (no caso da Terra, a vertical é o eixo perpendicular à eclíptica). Este efeito de giroscópio dá origem ao fenômeno da *precessão luni-solar*, já conhecido por Hiparco no século III A.C. (apesar dele não conhecer a causa física da precessão).

O período da precessão luni-solar é cerca de 25.800 anos, sendo que aproximadamente dois terços deste efeito é devido à Lua e um terço devido à ação do Sol.

Como os planos orbitais dos planetas do Sistema Solar estão aproximadamente alinhados com a Eclíptica, também há um torque produzido e, conseqüentemente, uma contribuição dos planetas na precessão da Terra. Contudo, como vimos, este efeito é proporcional a M/r^3 (M é a massa e r a distância do corpo perturbador), de forma que a ação dos planetas é cerca de 160 mil vezes menor que a ação combinada da Lua e do Sol.

A precessão luni-solar tem um período muito superior ao período de translação da Terra e, por isto, dizemos que é um efeito secular. Se as órbitas da Terra em torno do Sol e da Lua em torno da Terra fossem circulares e coplanares e, além disto a forma da Terra fosse um elipsoide de rotação perfeito, então a precessão luni-solar seria o único efeito notável sobre o eixo de rotação da Terra. Porém, as condições supracitadas não são verificadas exatamente o que resulta em um movimento mais complexo do eixo terrestre em torno do polo da eclíptica. Por tradição separamos estes efeitos em duas partes: por um lado a precessão luni-solar (secular) que vimos anteriormente, por outro lado um efeito de período mais curto, mas de pequena amplitude, chamada *nutação*.

A nutação tem como efeito uma mini-precessão do eixo em torno de sua posição média cujo período é cerca de 18,61 anos (Fig. 3.13, mais adiante), sendo a Lua a principal responsável deste efeito. Na realidade, a nutação pode ser decomposta em várias centenas de termos periódicos, alguns com períodos da ordem de dias.

As órbitas dos planetas não são coplanares e, por esta razão, os demais planetas do Sistema Solar tem um efeito perturbador na órbita terrestre. Neste caso, não é o eixo de rotação da Terra que se move, mas sim o plano da eclíptica (uma vez que este é definido pela órbita terrestre). Este efeito é chamado *precessão planetária*.

Como mostra a Fig. 3.7, a precessão planetária provoca um movimento do eixo da eclíptica consideravelmente menor e cerca de 520 vezes mais lento (em graus por ano) que o movimento de precessão do eixo de rotação da Terra.

Finalmente, existe ainda um outro fenômeno que assimilamos à precessão, ligada à teoria da relatividade geral. Este efeito, muito menor que os precedentes, tem por origem o fato de que o referencial inercial na vizinhança da Terra (em órbita em torno do Sol) possui uma pequena rotação em relação ao referencial heliocêntrico inercial. Este fenômeno é chamado *precessão geodésica*.

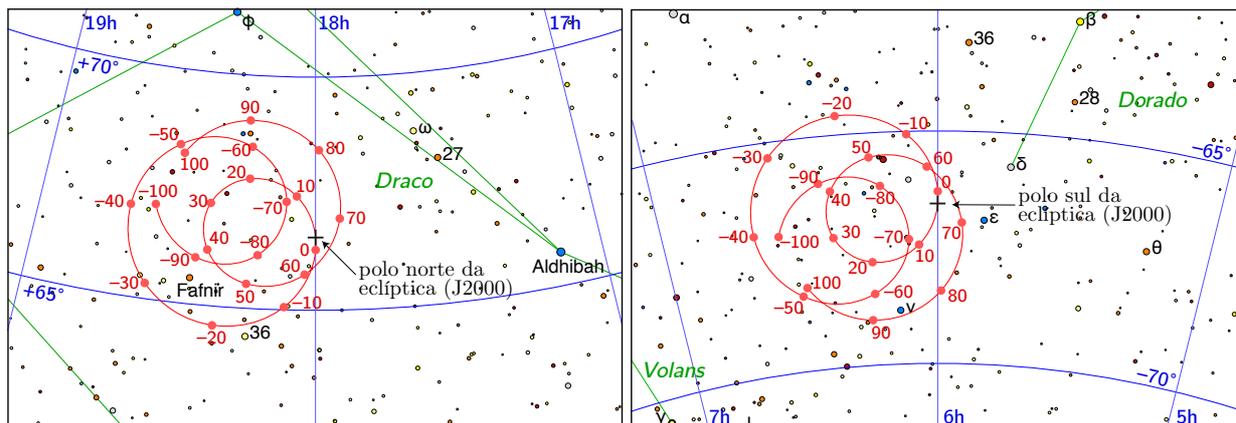


Figura 3.7: Precessão da eclíptica (isto é, do plano orbital da Terra) devido à ação dos planetas durante 200 mil anos. O traço vermelho representa o movimento do polo da eclíptica (norte a esquerda e sul a direita) em relação ao referencial equatorial J2000, com círculos vermelhos a cada 10 mil anos (os números em vermelho correspondem ao ano em unidades de mil; 0 é 1 A.C., -10 é 10.001 A.C., etc.). O Polo Norte da eclíptica tem um movimento no sentido anti-horário e o Polo Sul no sentido horário.

3.2.2 Efeitos da precessão e nutação nas coordenadas

Na astronomia de posição, costuma-se tratar separadamente estes efeitos nas coordenadas dos astros. A ação da Lua, Sol e planetas na inclinação do eixo terrestre e no movimento do eixo de rotação da Terra são divididos em três partes:

- Evolução secular da inclinação do eixo de rotação terrestre;
- Precessão geral, que inclui os termos seculares de grandes amplitudes devido à precessão luni-solar, planetária e geodésica;
- Nutação, que inclui as variações periódicas de curta duração e pequena amplitude.

Evolução secular da obliquidade da eclíptica

Atualmente, a inclinação do eixo de rotação terrestre está diminuindo lentamente, isto é, a obliquidade da eclíptica, ε , diminui. O valor médio de ε é dado pela fórmula de Jacques Laskar válida para um intervalo de tempo de ± 10.000 anos a partir do ano 2000:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & 23^{\circ}26'21''448 \\ & -4680''93t - 1''55t^2 + 1999''25t^3 - 51''38t^4 - 249''67t^5 \\ & -39''05t^6 + 7''12t^7 + 27''87t^8 + 5''79t^9 + 2''45t^{10}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde $t = T/100$ e T é dado em séculos julianos a partir da época J2000, dado pela equação (2.11). O uso desta fórmula fora do seu período de validade dará resultados errados.

No início do Séc. XXI, $t \approx 0$, a taxa de variação da inclinação do eixo da Terra é de $-0''00128/\text{dia}$. Esta variação da inclinação significa que as linhas dos Trópicos de Câncer e de Capricórnio e dos Círculos Polares se deslocam na superfície da Terra. Como vimos (Fig. 1.26 na seção 1.6), a latitude dos Trópicos em módulo é igual à obliquidade da eclíptica, assim como a latitude dos Círculos Polares (em módulo) é igual a $90^{\circ} - \varepsilon$.

Tomando o raio polar da Terra, 6356,752 km, podemos calcular o quanto a variação da inclinação da Terra faz mover as linhas dos Trópicos de Câncer e Capricórnio de cerca de 14,4 metro/ano no nível do mar, em direção ao Equador. Da mesma forma, as linhas dos Círculos Polares se aproximam dos respectivos polos a 14,4 metro/ano. Por exemplo, no início de 1900, o Trópico

de Capricórnio estava na latitude $23^{\circ}27'08''26$ e no início de 2020 estava em $23^{\circ}26'12''09$. Logo, neste período de 120 anos o Trópico de Capricórnio moveu-se cerca de 1,73 km em direção ao Norte.

Em intervalos de tempo maior, o comportamento do eixo da Terra é oscilatório, sendo que a obliquidade da eclíptica varia aproximadamente entre 22 e 24,5 graus em um período de ~ 41.000 anos. A Fig. 3.8 mostra a variação da obliquidade em um intervalo de tempo de 4 milhões de anos, segundo cálculo de J. Laskar do *Bureau de Longitudes de Paris*.

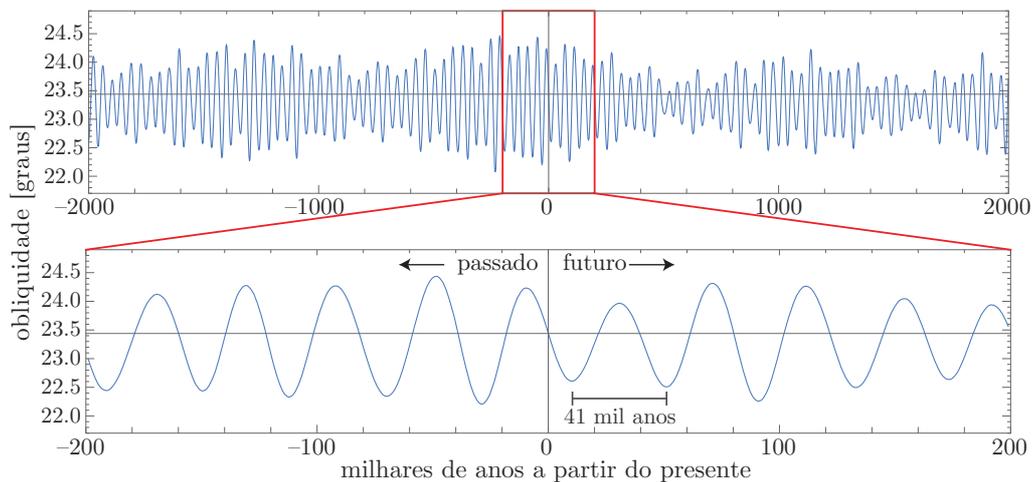


Figura 3.8: Evolução da inclinação do eixo terrestre (obliquidade da eclíptica) em um intervalo de tempo de ± 2 milhão de anos a partir do presente (painel superior) e um intervalo de ± 200 mil anos (painel inferior). Podemos notar facilmente o ciclo de 41.000 anos de oscilação do eixo da Terra, assim como ciclos quase-periódicos de maior período. A linha horizontal corresponde ao valor da obliquidade da eclíptica em J2000, dada pela Eq. (3.16).

Precessão geral: rotação de coordenadas

A precessão também tem um efeito secular nas coordenadas. Por um lado, a precessão luni-solar produz uma rotação do eixo de rotação terrestre em torno do polo da eclíptica, fazendo com que o equador celeste (projeção do equador terrestre, perpendicular ao eixo de rotação) se mova em relação à eclíptica (veja figure 3.9).

Logo, a origem do sistema de coordenadas equatorial e eclíptica (o ponto vernal) se move ao longo do grande círculo definido pela eclíptica.

Por outro lado, o efeito da precessão planetária é de alterar a orientação da órbita terrestre em torno do Sol em relação a um referencial fixo. Neste caso, é a própria eclíptica que precessa.

O principal efeito da precessão geral é um deslocamento retrógrado do ponto vernal em torno do polo da eclíptica com um período de ~ 25.800 anos ou cerca de $50''4$ por ano. Nas figuras 3.10 e 3.11 mostramos o percurso do polo celeste em torno do polo da eclíptica devido à precessão nos Hemisférios Sul e Norte respectivamente. Nestas figuras, foi usada a formulação de Vondrák e colaboradores (2011, A&A 534, A22).

O efeito total da precessão geral pode ser comparado a uma série de rotações tanto da eclíptica como do equador celeste, da mesma forma que quando fazemos uma transformação de coordenadas. Na realidade, o que fazemos aqui é uma transformação de coordenadas de uma época que tem a origem em um ponto vernal dado para outra época. Assim, em coordenadas eclípticas, seja λ_{t_0} e β_{t_0} a posição de uma astro em t_0 (isto é, no sistema de coordenadas definidas pela posição do ponto vernal em t_0), e λ_f e β_f a posição em t_f (que tanto pode ser antes ou

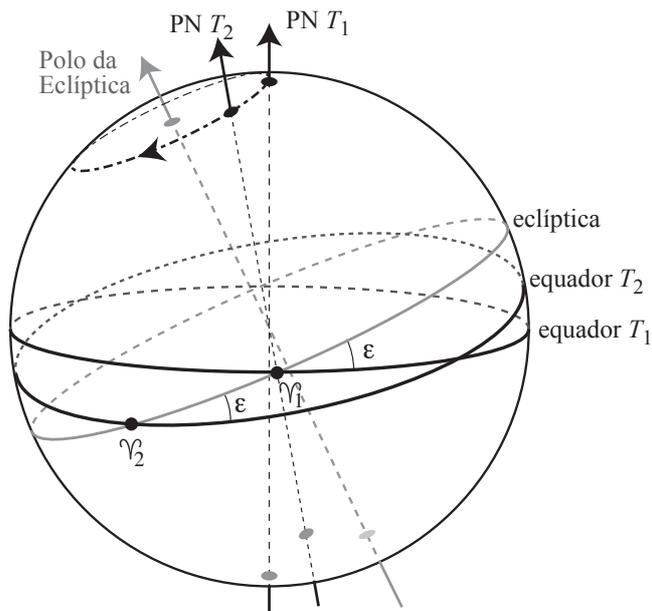


Figura 3.9: Efeito da precessão luni-solar no eixo de rotação da Terra e, consequentemente, no equador celeste. Na figura estão ilustrados o equador celeste em dois momentos T_1 e T_2 , mostrando o deslocamento do ponto vernal (γ , origem dos sistemas equatorial e eclíptico de coordenadas) sobre a eclíptica. Aqui, ‘PN’ significa Polo Norte celeste e ‘PE’ Polo Norte da eclíptica.

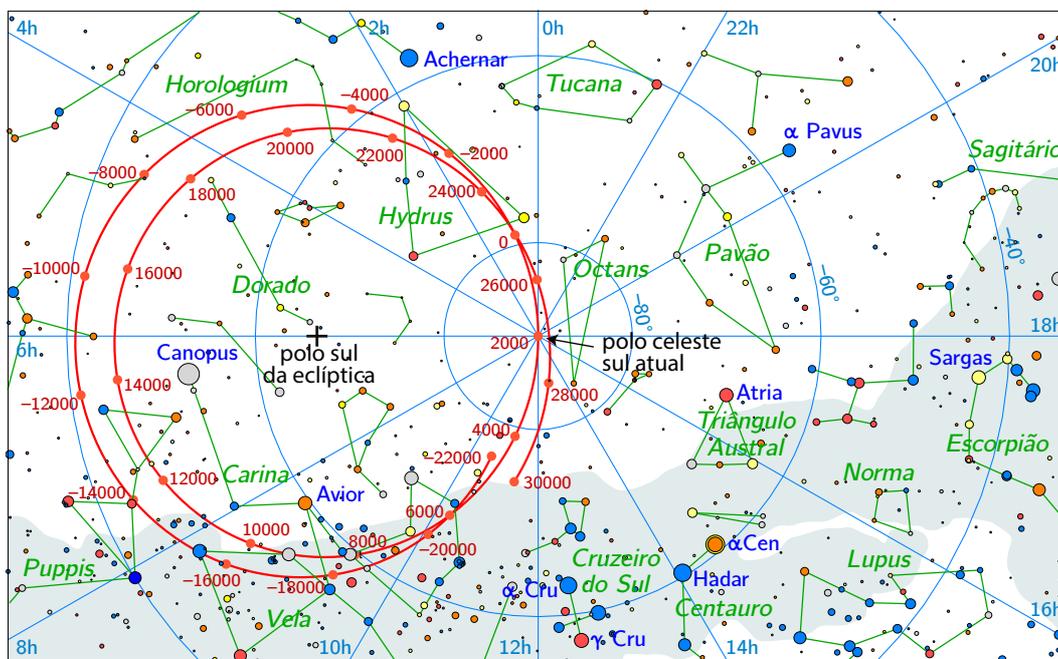


Figura 3.10: Trajetória do Polo Sul celeste em torno do Polo Sul da eclíptica devido à precessão (círculo vermelho) em relação ao sistema de coordenadas equatoriais J2000. A posição do polo está marcada a cada 2000 anos. A trajetória não é um círculo pois a inclinação do eixo da Terra (a obliquidade da eclíptica) varia com o tempo (Eq. (3.16) e Sec. 5.6). O nome de algumas constelações está em verde e de algumas estrelas brilhantes em azul. A volta completa leva cerca de 25.800 anos.

depois de t_0). A relação entre estas coordenadas é (veja a figura 3.12):

$$\mathbf{R}_z([p_A + \Pi_A])\mathbf{I}(\beta_f, \lambda_f) = \mathbf{R}_x(\pi_A)\mathbf{R}_z(\Pi_A)\mathbf{I}(\beta_{t_0}, \lambda_{t_0}), \quad (3.17)$$

o que resulta, após simplificação, em:

$$\begin{aligned} \cos \beta_f \cos(p_A + \Pi_A - \lambda_f) &= \cos \beta_{t_0} \cos(\Pi_A - \lambda_{t_0}) \\ \cos \beta_f \sin(p_A + \Pi_A - \lambda_f) &= \cos \beta_{t_0} \sin(\Pi_A - \lambda_{t_0}) \cos \pi_A - \sin \pi_A \sin \beta_{t_0} \\ \sin \beta_f &= \cos \beta_{t_0} \sin(\Pi_A - \lambda_{t_0}) \sin \pi_A + \cos \pi_A \sin \beta_{t_0}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

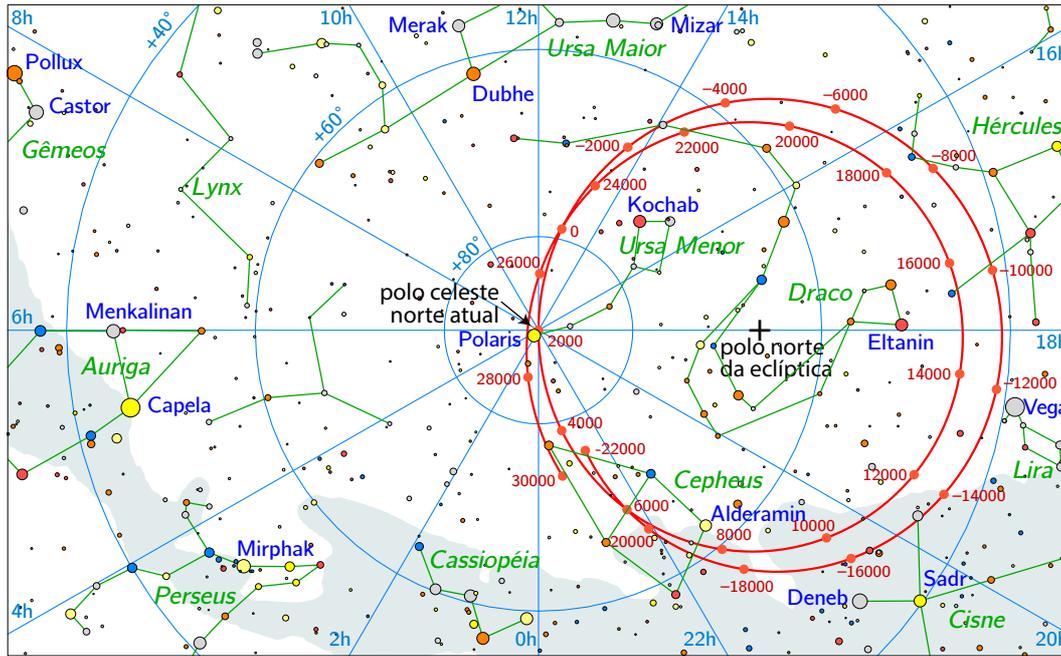


Figura 3.11: Trajetória do Polo Norte celeste em torno do Polo Norte da eclíptica devido à precessão (círculo vermelho). Há 14 mil anos, a estrela polar era Vega da constelação de Lira. Daqui a cerca de 12 mil anos Vega estará próxima do polo, mas não como na última vez devido à variação da inclinação do eixo de rotação da Terra em relação à eclíptica.

onde o ângulo Π_A é o arco $\widehat{\Upsilon_{t_0}N}$ e $p_A = \widehat{\Upsilon_f N} - \widehat{\Upsilon_{t_0}N}$.

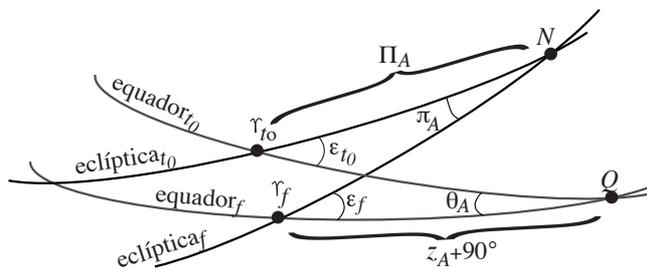


Figura 3.12: Ângulos necessários para transformação de coordenadas de um instante t_0 a t_f devido à precessão geral (luni-solar e planetária). Definimos ainda $\zeta_A = 90^\circ - \widehat{\Upsilon_{t_0}Q} - p_A = \widehat{\Upsilon_f N} - \widehat{\Upsilon_{t_0}N}$

A transformação em coordenadas equatoriais se faz utilizando as rotações:

$$\mathbf{R}_z([z_A + 90^\circ])\mathbf{I}(\delta_f, \alpha_f) = \mathbf{R}_x(\theta_A)\mathbf{R}_z(90^\circ - \zeta_A)\mathbf{I}(\delta_{t_0}, \alpha_{t_0}), \quad (3.19)$$

ou seja, após simplificação,

$$\begin{aligned} \cos \delta_f \cos(\alpha_f - z_A) &= \cos \delta_{t_0} \cos(\alpha_{t_0} + \zeta_A) \cos \theta_A - \sin \delta_{t_0} \sin \theta_A \\ \cos \delta_f \sin(\alpha_f - z_A) &= \cos \delta_{t_0} \sin(\alpha_{t_0} + \zeta_A) \\ \sin \delta_f &= \cos \delta_{t_0} \cos(\alpha_{t_0} + \zeta_A) \sin \theta_A + \sin \delta_{t_0} \cos \theta_A, \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde $z_A = \widehat{\Upsilon_f Q} - 90^\circ$ e $\zeta_A = 90^\circ - \widehat{\Upsilon_{t_0}Q}$.

Nutação: coordenadas médias e verdadeiras

Contrariamente à precessão, que é um efeito secular de grande amplitude, a nutação corresponde a uma oscilação de curto período e pequena amplitude em torno de uma posição média (Fig. 3.13). Este efeito da nutação se traduz em uma oscilação da longitude e da obliquidade da eclíptica com

período principal de cerca de 18,61 anos, e escrevemos as variações devido à nutação como $\Delta\psi$ e $\Delta\varepsilon$, respectivamente. O valor de $\Delta\psi$ oscila entre $\pm 18''{,}5$ e $\Delta\varepsilon$ entre $\pm 9''{,}8$ aproximadamente. Por ser muito menor que o efeito secular da precessão, a nutação só foi descoberta em 1747 por James Bradley.³

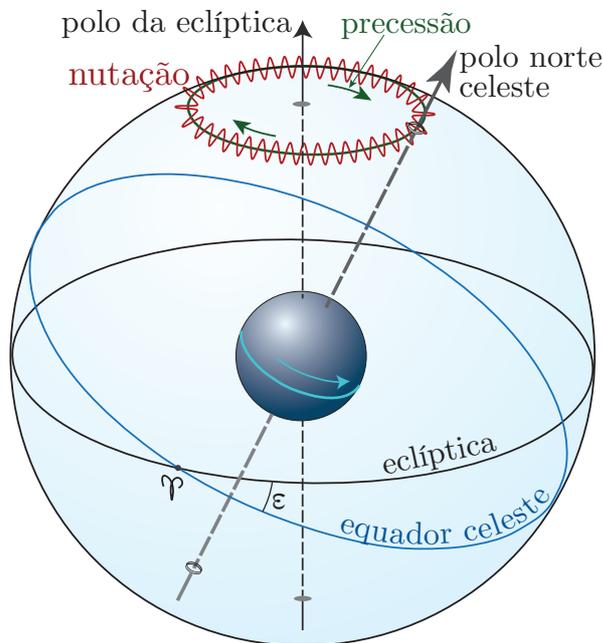


Figura 3.13: Efeito da nutação. O eixo de rotação da Terra oscila (em vermelho) em torno de sua posição média (trajetória da precessão, em verde escuro). A direção de rotação da Terra está representada pela flecha azul clara. O efeito da nutação na figura está exagerado. O ângulo ε representa a obliquidade média da eclíptica na data.

Quando corrigimos as coordenadas de um astro apenas utilizando os termos seculares da precessão e da inclinação da eclíptica, dizemos que as coordenadas são *médias*. Quando corrigimos também os efeitos periódicos da nutação, dizemos que as coordenadas são *verdadeiras*. Desta forma, em coordenadas eclípticas, a relação entre as coordenadas médias e verdadeiras se escreve simplesmente como:

$$\begin{aligned}\lambda_v &= \lambda_m + \Delta\psi \\ \beta_v &= \beta_m \\ \varepsilon_v &= \varepsilon_m + \Delta\varepsilon,\end{aligned}\tag{3.21}$$

onde os índices v e m referem-se a verdadeiro e médio, respectivamente. Se quisermos as coordenadas equatoriais verdadeiras, devemos simplesmente utilizar as coordenadas eclípticas verdadeiras da Eq. 3.21 e realizarmos a transformação de coordenadas.

A teoria atual da nutação é baseada em um modelo geofísico da Terra complexo, levando-se em conta a elasticidade e não homogeneidade terrestre, além de um modelo detalhado dos movimentos relativos da Lua e da Terra em torno do Sol. Além do termo principal de período 18,61 anos, existem centenas de outros termos, com períodos de até alguns dias. Os principais períodos da nutação, além do termo de 18,61 anos, são: 164,9, 13,55, 3399,2, 113,61, 13,58 e 9,084 dias.

Esta teoria nos dá os valores de $\Delta\psi$ e $\Delta\varepsilon$ com precisão de centésimos de segundo de grau para qualquer momento até cerca de quatro mil anos no futuro ou no passado (por exemplo, Fig. 3.14).

Desde 2006, a nutação é descrita pelo modelo IAU2000A que leva em conta a forma do geoide que descreve a Terra e os efeitos da atmosfera, oceanos e núcleo líquido (isto é, as componentes não sólidas da Terra). Além da Lua e do Sol, a ação dos planetas também é levada em conta.

³Publicada em Philosophical Transactions, 1748, vol. 45, p. 1.

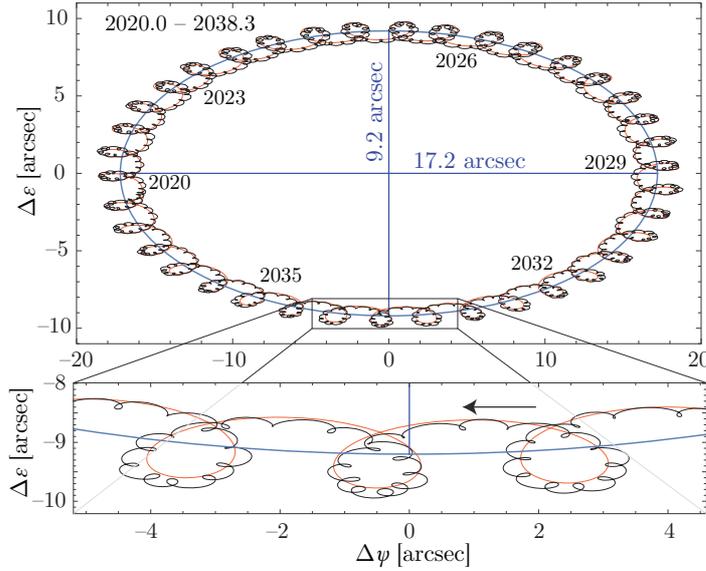


Figura 3.14: Variação da obliquidade ($\Delta\epsilon$) e longitude ($\Delta\psi$) devido à nutação. A elipse azul representa o principal termo da nutação de 18,61 anos, com os semi-eixos indicados. A linha laranja mostra o efeito de usarmos também o 2^o termo de 164,9 dias da nutação. Em destaque, abaixo, detalhe do movimento de nutação calculado com o modelo IAU2000A.

As constantes que descrevem a nutação, $\Delta\psi$ e $\Delta\epsilon$ são dadas na forma de uma soma de mais de mil termos. Os principais são:

$$\begin{aligned} \Delta\psi = & -(17'',2064161 + 0'',0174666T) * \text{sen } \Omega - (1'',3170906 + 0'',0001675T) * \text{sen}(2[F - D + \Omega]) \\ & - 0'',2276413 \text{sen}[2(F + \Omega)] + 0'',2074554 \text{sen } 2\Omega + (0'',1475877 - 0'',0003633T) \text{sen } l' \\ & + 0'',0711159 \text{sen } l - (0'',0516821 - 0'',0001226T) \text{sen}(l' + 2[F - D + \Omega]) \\ & - 0'',0387298 \text{sen}(2F + \Omega) - 0'',0301461 \text{sen}(l + 2[F + \Omega]) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon = & (9'',2052331 + 0'',0009086T) \cos \Omega + (0'',5730336 - 0'',0003015T) \cos(2[F - D + \Omega]) \\ & + 0'',0978459 \cos(2[F + \Omega]) - 0'',0897492 \cos 2\Omega + 0'',0224386 \cos(l' + 2[F - D + \Omega]) \\ & + 0'',0200728 \cos(2F + \Omega) + \dots \end{aligned}$$

onde os argumentos das funções trigonométricas seno e cosseno são (aqui truncados em segunda ordem):

$$\begin{aligned} \Omega &= 450160'',398036 - 6962890'',5431T + 7'',4722T^2; & \text{Longitude no nodo ascendente da Lua,} \\ D &= 1072260'',70369 + 1602961601'',2090T - 6'',3706T^2; & \text{Elongação média entre a Lua e o Sol,} \\ F &= 335779'',526232 + 1739527262'',8478T - 12'',7512T^2; & \text{Argumento da latitude média da Lua,} \\ l' &= 1287104'',79305 + 129596581'',0481T - 0'',5532T^2; & \text{Anomalia média do Sol,} \\ l &= 485868'',249036 + 1717915923'',2178T + 31'',8792T^2; & \text{Anomalia média da Lua,} \end{aligned}$$

e $T = (\text{JD} - 2451545.0)/36525$ é o número de séculos julianos desde J2000 (Sec. 2.3). **Elongação** é a distância angular entre dois astros. Sua definição precisa será vista na seção 4.9. As **anomalias**, definidas na seção 5.4.1, são ângulos que descrevem o movimento médio de corpos em órbita elíptica, medidos a partir do periastro.

3.3 Movimento do polo

Como vimos, a Terra não é uma esfera perfeita, mas sim um *elipsoide de revolução*. Isto implica que, se a direção do eixo de rotação não é exatamente a mesma que o eixo de simetria do elipsoide, então o eixo de rotação precessa em torno do eixo de simetria do elipsoide. Contrariamente à precessão e à nutação, este fenômeno é intrínseco da Terra, não dependendo da ação de outros astros.

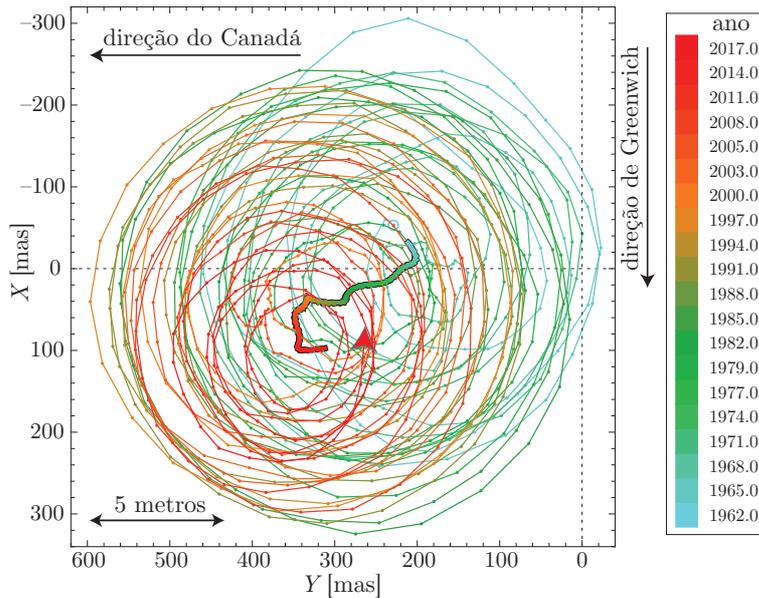


Figura 3.15: Movimento anual do polo terrestre (traço fino colorido, em unidades de milissegundo de arco, [mas]) determinado a partir das medidas feitas pelo IERS (*International Earth Rotation Service*). No polo, 100 mas ($0''1$) corresponde a aproximadamente 3 metros na superfície da Terra. O traço espesso mostra o movimento médio do polo em 55 anos e seu deslocamento sistemático em direção ao Canadá.

Este efeito é pequeno e só foi medido pela primeira vez em 1891, apesar de que já havia sido previsto teoricamente desde o fim do século XVIII. A distância entre o polo definido pelo eixo de rotação instantâneo e o eixo de simetria nunca é superior a cerca de 20 metros, o que corresponde a alguns décimos de segundos de arco. Na figura 3.15 vemos o movimento do polo desde 1962 até primeiros meses de 2017 (indo da cor azul clara até vermelho na figura). A posição instantânea do eixo de rotação terrestre é dado em função de dois ângulos, X e Y , que são medidos em direção do meridiano de Greenwich e na direção do meridiano $90^\circ W$, respectivamente.

Este movimento é na realidade muito complexo devido à distribuição irregular de massas da Terra, além do fato da Terra não ser um corpo perfeitamente rígido. Os principais componentes deste movimento são um termo anual aproximadamente elíptico (devido à translação da Terra) e um termo aproximadamente circular com um período de ~ 435 dias, chamado *termo de Chandler* ou *oscilação de Chandler*. Além disto, a posição média do polo se desloca sistematicamente (e lentamente) na direção 80° Oeste.

Devido à sua complexidade, não é possível prever com precisão a posição instantânea do eixo de rotação da Terra por mais do que alguns meses. O que pode ser feito com precisão é monitorar este movimento – isto é feito por colaborações internacionais coordenadas pelo “*National Earth Orientation Service*” (NEOS) e o “*International Earth Rotation Service*” (IERS).

A correção do movimento do polo é muito pequena, e ela é feita principalmente para corrigir o tempo universal (após esta correção, o tempo universal é chamado UT1).

3.4 Refração atmosférica

A *atmosfera terrestre* não é homogênea: a densidade da atmosfera diminui progressivamente a medida que a altitude aumenta. Como o índice de refração da atmosfera é função da densidade (quanto maior a densidade, maior o índice de refração), a luz de um astro sofre uma alteração em sua trajetória ao atravessar a atmosfera terrestre e esta alteração será função da altitude.

3.4.1 Aproximação de planos paralelos

A figura 3.16 ilustra este fenômeno. Nós representamos a atmosfera como N camadas paralelas, cada uma com um índice de refração n_i . Nesta aproximação, nós desprezamos a curvatura da Terra, o que é válido apenas para direções próximas do zênite. Dado um astro cuja luz atinge

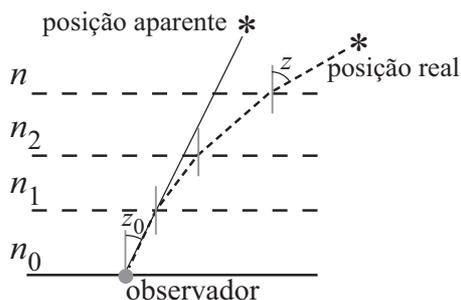


Figura 3.16: Refração atmosférica na aproximação de planos paralelos. Os índices de refração variam de $n = 1$ (vácuo) a n_0 , o índice à altitude do observador, igual a 1,00028 ao nível do mar, a 0°C , para a luz visível (centro do filtro V , igual a 5500 \AA).

a atmosfera com um ângulo z (ou seja, um astro de altura, $h = 90^\circ - z$), o raio luminoso é refratado pela atmosfera de forma que, na camada i , o ângulo com a vertical será z_i e assim por diante até o observador que medirá um ângulo z_0 . Aplicando a lei de Snell-Descartes para camadas consecutivas temos:

$$\dots n_{i+1} \sin z_{i+1} = n_i \sin z_i = n_{i-1} \sin z_{i-1} \dots \quad (3.22)$$

Como $n = 1$ fora da atmosfera, podemos então deduzir que $\sin z = n_0 \sin z_0$, independentemente do número de camadas. Em outras palavras, este resultado é válido no limite de infinitas camadas ou de uma atmosfera contínua. Por outro lado, esta aproximação é boa apenas para astros que se encontram próximos do zênite. Para astros de altitude menor, é necessário levarmos em conta a curvatura terrestre e a aproximação de planos paralelos deixa de ser boa. Notemos também que a refração é *independente* do azimute do astro.

Se definirmos o *ângulo de refração*, (também conhecido como *refração astronômica*) $R \equiv z - z_0$, podemos escrever a lei de Snell-Descartes como:

$$n_0 \sin z_0 = \sin R \cos z_0 + \cos R \sin z_0. \quad (3.23)$$

Para pequenos ângulos de refração, isto é, $R \ll 1$, podemos utilizar a aproximação $\sin R \approx R$ e $\cos R \approx 1$, o que implica em:

$$R = (n_0 - 1) \tan z_0 \text{ (radiano)}. \quad (3.24)$$

Assim, para $n_0 = 1,00028$ por exemplo, $R \approx 2,8 \times 10^{-4} \tan z_0$ radianos ou $R \approx 57'',8 \tan z_0$.

3.4.2 Fórmula geral da refração

Infelizmente a fórmula (3.24) só é válida para altitudes próximas de 90° . Para o caso geral, é necessário levarmos em conta a curvatura da Terra. A figura 3.17 representa este caso.

Utilizando a notação das figuras 3.16 e 3.17, a lei de Snell-Descartes nos dá, $n' \sin z' = n \sin \psi$ e, pelo triângulo CFE , nós temos $r' \sin \psi = r \sin w = r \sin z$ (pois $w = 180^\circ - z$). Assim, obtemos uma relação válida para qualquer camada:

$$r' n' \sin z' = r n \sin z. \quad (3.25)$$

Da mesma forma que para a aproximação de planos paralelos, podemos utilizar a relação acima até o observador resultando em

$$R_T n_0 \sin z_0 = r n \sin z, \quad (3.26)$$

onde R_T é o raio da Terra.

Calculemos agora a expressão (3.25) para duas camadas infinitesimais, isto é,

$$r n \sin z = (r + \delta r)(n - \delta n) \sin(z + \delta z) \quad (3.27)$$

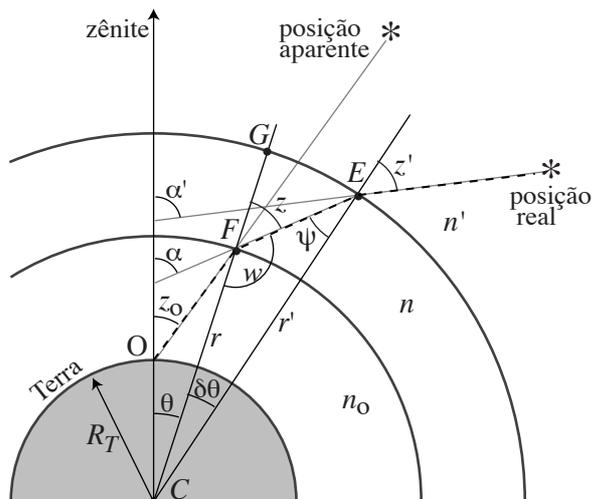


Figura 3.17: Refração atmosférica levando-se em conta a curvatura da Terra. A representação aqui é semelhante à figura 3.16 onde n é o índice de refração da atmosfera.

onde lembramos que quando r aumenta o índice de refração n diminui. Desenvolvendo o produto acima e desprezando os termos cruzados de infinitesimais (como $\delta r \delta n$, por exemplo), obtemos

$$\frac{\delta z}{\tan z} + \frac{\delta r}{r} - \frac{\delta n}{n} = 0, \quad (3.28)$$

onde utilizamos $\sin(z + \delta z) = \sin z + \delta z \cos z$.

Utilizando o triângulo infinitesimal EFG , podemos escrever $\tan z = r \delta \theta / \delta r$, onde δr é o segmento GF e r é o segmento CG . Assim obtemos,

$$\frac{\delta z + \delta \theta}{\tan z} - \frac{\delta n}{n} = 0. \quad (3.29)$$

Introduzimos novamente o ângulo de refração R , a diferença entre o ângulo zenital aparente ($90^\circ - h$) e verdadeiro (medido fora da atmosfera). O ângulo de refração entre duas camadas infinitesimais é $\delta R = \alpha' - \alpha$, de acordo com a Fig. 3.17. Mas a diferença $\alpha' - \alpha$ é igual a $\delta z + \delta \theta$ (vendo que $\alpha = \theta + z$, θ sendo o ângulo do zênite ao segmento CF). Obtemos, então:

$$\frac{\delta R}{\tan z} = \frac{\delta n}{n} \quad (3.30)$$

Finalmente, utilizando a Eq. (3.26) podemos reescrever z em função de z_0 ,

$$\sin z = \frac{R_T n_0}{r n} \sin z_0 \Rightarrow \tan z = \frac{R_T n_0 \sin z_0}{\sqrt{r^2 n^2 - R_T^2 n_0^2 \sin^2 z_0}}, \quad (3.31)$$

e a Eq. (3.30) pode ser escrita em termos das quantidades referentes ao observador. Assim reescrevemos o termo $\tan z$ e transformamos as diferenças infinitesimais em diferencial e obtemos:

$$R = R_T n_0 \sin z_0 \int_1^{n_0} \frac{dn}{n \sqrt{r^2 n^2 - R_T^2 n_0^2 \sin^2 z_0}}, \quad (3.32)$$

onde os limites de integração são 1 fora da atmosfera e n_0 na camada do observador. Esta equação pode ser integrada, resultando em:

$$R = \arctan \left[\frac{\sin z_0}{\sqrt{\left(\frac{r}{n_0 R_T}\right)^2 - \sin^2 z_0}} \right] - \arctan \left[\frac{\sin z_0}{\sqrt{\left(\frac{r}{R_T}\right)^2 - \sin^2 z_0}} \right]. \quad (3.33)$$

Ao integrarmos a Eq. (3.32), nós consideramos a variável r constante; rigorosamente nós deveríamos levar em conta a dependência do índice de refração com a altura. Isto, contudo, é praticamente impossível dado o caráter dinâmico da atmosfera.

Podemos simplificar o problema da seguinte forma. Escrevemos o raio r como $r/R_T = 1 + s$, onde s é um número pequeno (a 65 km de altura a atmosfera já é tão tênue que a refração se torna desprezível, o que corresponde a $s \sim 0,01$).

Além disto, introduzimos a quantidade α definida como $\alpha \equiv n_0 - 1$. Mesmo ao nível do mar, α é uma quantidade pequena, $\alpha \sim 3 \times 10^{-4}$.

Substituímos r e n_0 na expressão 3.33, para em seguida fazermos uma expansão de Taylor em s e em α , o que resulta em:

$$R = \frac{\alpha[1 - 2s + \cos(2z_0)] \sec^2 z_0 \tan z_0}{2}. \quad (3.34)$$

Com um pouco de trigonometria e álgebra podemos escrever esta expressão como:

$$R = \alpha(1 - s) \tan z_0 - \alpha s \tan^3 z_0. \quad (3.35)$$

Alguns autores conservam até termos contendo α^2 na expansão de Taylor da Eq. (3.33). Neste caso o ângulo de refração é dado por

$$R = \alpha(1 - s) \tan z_0 - \alpha \left(s - \frac{\alpha}{2}\right) \tan^3 z_0. \quad (3.36)$$

A fórmula acima é conhecida como *fórmula de Laplace* e, em geral é dada da seguinte forma:

$$R = \mathcal{A} \tan z_0 - \mathcal{B} \tan^3 z_0, \quad (3.37)$$

Para $z_0 \lesssim 75^\circ$, a fórmula de Laplace é razoavelmente precisa e os coeficientes são dados por $\mathcal{A} = 57''085$ e $\mathcal{B} = 0''067$, determinados empiricamente para condições normais de temperatura e pressão. Pode-se ver que, para pequeno z_0 , a fórmula (3.37) nos dá o resultado obtido na aproximação de planos paralelos (lembrando que $s \ll 1$).

Os coeficientes \mathcal{A} e \mathcal{B} dependem das condições atmosféricas pois o índice de refração depende da densidade (ou da pressão e temperatura) da atmosfera, assim como do comprimento de onda observado. Por esta razão, em geral o ângulo R é tabelado para um dado lugar em função da distância zenital. No horizonte ($z_0 = 90^\circ$) em geral é adotado um valor de $0^\circ 34'$ para o ângulo de refração.

Como α é proporcional à densidade da atmosfera, e s é proporcional à pressão atmosférica, costuma-se corrigir estas constantes da seguinte forma:

$$\alpha = \alpha_0 \frac{P}{101\,325} \frac{273,15}{T + 273,15} \quad \text{e} \quad s = s_0 \frac{T + 273,15}{273,15}, \quad (3.38)$$

onde s_0 e α_0 são os valores que correspondem às condições normais de temperatura e pressão. Na expressão acima P é a pressão em Pascals e T a temperatura em centígrados.

Para se levar em conta a variação do índice de refração com o comprimento de onda, utiliza-se a correção empírica seguinte:

$$R = R_0 \left(0,983 + \frac{0,00598}{\lambda^2} \right), \quad (3.39)$$

onde R_0 é o ângulo de refração em condições normais (isto é, $\lambda = 0,590\mu\text{m}$, que corresponde à cor amarela) e λ é o comprimento de onda em micrômetros. Entre a luz vermelha ($\lambda = 0,75\mu\text{m}$) e violeta ($\lambda = 0,4\mu\text{m}$), o ângulo de refração aumenta de cerca de 5%.

3.5 Nascer, pôr e crepúsculos

Devido à rotação diurna da Terra, os astros se levantam (ou nascem) no lado Leste do horizonte e se põe no lado Oeste (exceto é claro para os astros circumpolares). Se a declinação do astro for exatamente zero, então este astro se levanta na direção do Leste geográfico e se põe no Oeste. O mais notável destes eventos são o nascer e o pôr do Sol e da Lua.

Para os astros puntiformes (as estrelas e, em primeira aproximação, os planetas) o *nascer* e o *pôr* são definidos como o instante em que a altura h do astro é igual a zero. Para a Lua e o Sol, que têm um diâmetro aparente da ordem de meio grau, o nascer e o pôr são definidos em relação à parte superior do disco aparente. É importante notar que, para todos os astros, o nascer e o pôr são definidos levando-se em conta a refração atmosférica.

Assim, utilizando as equações de transformação entre coordenadas horárias e horizontais, vemos que um astro se levanta (ou se põe) para um observador na latitude φ quando

$$\cos H = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}, \quad (3.40)$$

onde $h = -R - d/2$, R sendo o ângulo de refração no horizonte (em geral tomamos igual a $0^\circ 34'$) e $d/2$ é o semi-diâmetro do astro (para a Lua e para o Sol tomamos igual a $0^\circ 16'$ em primeira aproximação e, para os demais astros, igual a zero). A declinação aqui é verdadeira (corrigida da precessão e nutação). Se quisermos desprezar a refração atmosférica, tomamos $R = 0^\circ$.

A Eq. (3.40) admite em geral duas soluções ($\pm H$) que correspondem ao nascer e pôr do astro. Eventualmente podemos não ter nenhuma solução, isto é, $|\cos H| > 1$. Isto significa que o astro não se levanta nem se põe. Ele pode ser circumpolar ou estar sempre abaixo da linha do horizonte na latitude em questão.

O azimute do astro ao nascer ou se pôr é:

$$\cos A \cos h = \sin h \tan \varphi - \frac{\sin \delta}{\cos \varphi} \quad (3.41)$$

onde h é o mesmo da Eq. (3.40). O valor do azimute estará entre 0° e 180° no poente e entre 180° e 360° no nascer.

Uma vez calculado o ângulo horário pela Eq. (3.40), podemos calcular o tempo sidereal de Greenwich para $\pm H$, que corresponde ao pôr e ao nascer do astro, simplesmente com:

$$T_s = \alpha \pm H - \lambda \quad (3.42)$$

onde α é a ascensão reta do astro e λ é a longitude do observador (negativa a Oeste de Greenwich, positiva a Leste). Devemos agora calcular o tempo sidereal de Greenwich às 0h UT, T_{s0} , com a fórmula (2.12). O intervalo de tempo, medido em tempo sidereal, entre as 0h UT e o momento que nos interessa (nascer ou poente) é a diferença $T_s - T_{s0}$. Esta diferença é transformada em tempo solar (universal) utilizando-se o fator de conversão entre o dia solar e o dia sidereal (cf. seção 2.4), igual a 1,0027379. Matematicamente temos:

$$\Delta T_{UT} = 0,99727 \times (T_s - T_{s0}). \quad (3.43)$$

O instante do fenômeno será então 0h UT mais ΔT_{UT} , ou simplesmente ΔT_{UT} . Deve-se então somar os fusos horários (e eventual “hora de verão”) para obter-se o tempo legal na posição do observador.

O horário de nascer e ocaso variam ao longo do ano e dependem da latitude do observador. A figura 3.18 ilustra este fenômeno para 4 latitudes diferentes.

Nesta figura, podemos notar a diferença na duração do dia (entre o nascer e pôr do Sol) tanto ao longo de um ano como de diferentes latitudes. No exemplo de latitude $70^\circ N$, vemos que o Sol é circumpolar (não se põe) aproximadamente entre 17/maio e 27/julho.

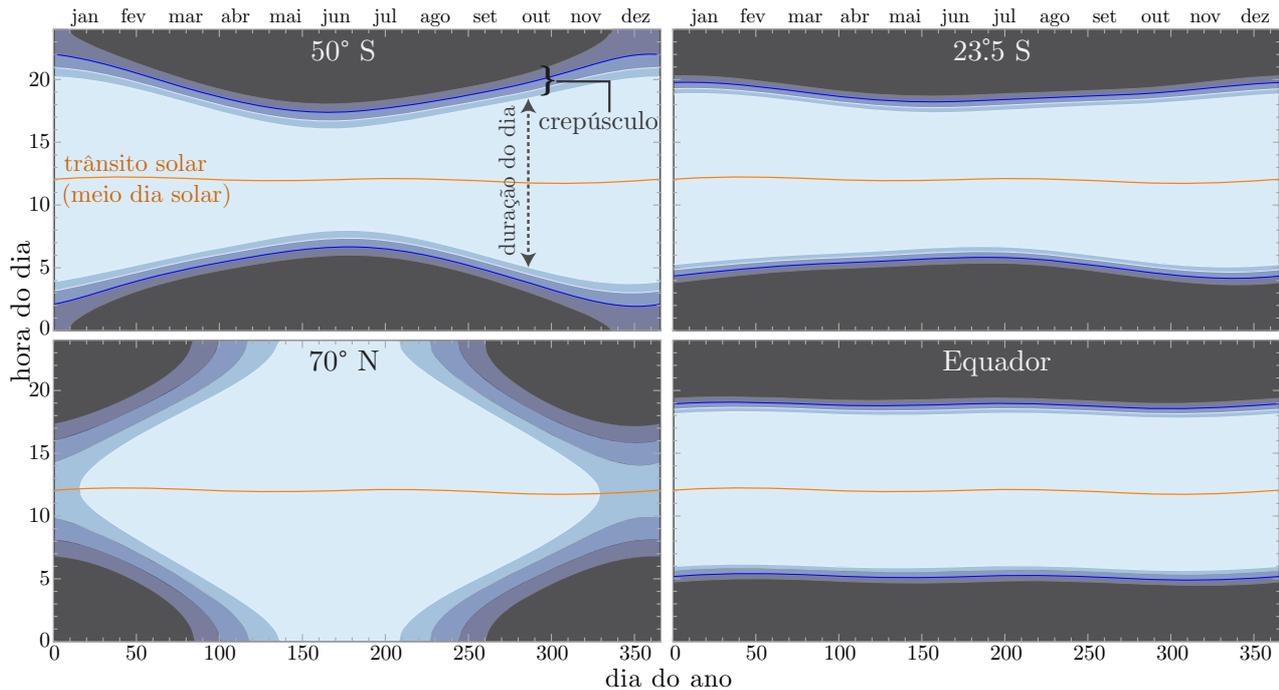


Figura 3.18: Variação do horário de nascer e pôr do Sol ao longo do ano para diversas latitudes. Também são mostradas as durações dos diferentes crepúsculos (descritos na próxima seção). A oscilação de alguns minutos visível no *trânsito* solar (passagem pelo meridiano principal, linha laranja) está relacionada à equação do tempo e aos analemas (Sec. 2.1.4) e às estações do ano (Sec. 1.6).

O tempo que o Sol leva entre o primeiro contato com o horizonte e o último, isto é, a duração do nascer ou do pôr do Sol, pode ser obtido utilizando a Eq. (3.40), usando a aproximação $\sin h \rightarrow h$ para $h \rightarrow 0$:

$$h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H; (|h| \approx 0).$$

Derivando em relação ao tempo a expressão acima, admitindo que δ não varie durante um intervalo de tempo pequeno em relação a um dia (a latitude do observador, ϕ , não varia) e ignorando possíveis efeitos atmosféricos, temos:

$$dh/dt = \cos \phi \cos \delta \sin H dH/dt.$$

A variação do ângulo horário, H , é aproximadamente $360^\circ/\text{dia}$ ou $15''/\text{segundo}$. A variação dh/dt é aproximadamente $d_\odot/\Delta t$, isto é, o diâmetro aparente do Sol dividido pelo intervalo de tempo que leva para passar pela linha do horizonte. Assim temos:

$$\Delta t = d_\odot \frac{1\text{s}}{15''} (\cos \phi \cos \delta \sin H)^{-1} = 128 \left(\cos \phi \cos \delta \sqrt{1 - \tan^2 \delta \tan^2 \phi} \right)^{-1} \text{s},$$

onde adotamos $d_\odot = 32'$ e usamos a Eq. (3.40) para eliminar o termo $\sin H$. Usando a identidade $\tan^a = 1/\cos^2 a - 1$, finalmente obtemos:

$$\Delta t = \frac{128}{\cos \phi} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \delta / \cos^2 \phi}} \text{s}. \quad (3.44)$$

A expressão acima vale tanto para o nascer como para o pôr do Sol. A princípio, esta expressão poderia ser usada para a Lua, utilizando seu diâmetro aparente (que varia mais do que o diâmetro aparente do Sol devido à órbita mais elíptica de nosso satélite).

A Eq. (3.44) nos diz que, no Equador, o Sol leva cerca de 128 s para atravessar a linha do horizonte e nos solstícios leva cerca de 139,6 s. Para um observador no Trópico de Capricórnio ou Câncer ($\phi \approx \pm 23,5^\circ$), no equinócio o intervalo de tempo é $\sim 139,6$ s e 155 s no solstício. Por fim, um observador em latitude $\phi = \pm 60^\circ$, $\Delta t = 256$ s no equinócio e 424 s no solstício.

A duração do nascer ou pôr do Sol é menor nos equinócios para qualquer latitude. Acima do círculo polar, dependendo da época do ano (ou seja, da declinação do Sol), podemos não ter nascer ou pôr do Sol e a Eq. (3.44) não pode ser utilizada.

Usando as Eqs. (3.40) e (3.41) podemos calcular a trajetória aparente do Sol para qualquer latitude e para qualquer dia do ano e traçar este caminho em um gráfico como na Fig. 3.19. Para isto, usamos a aproximação de que o movimento próprio do Sol é muito pequeno durante um dia (um pouco menos de 1°); neste caso, a declinação δ , é uma constante (durante um dia) nas Eqs. (3.40) e (3.41). Por exemplo, nos dias de equinócio, por volta de 20/03 e 23/09, a declinação do Sol é zero. Em seguida fixamos a latitude do observador, não é necessário usar a longitude. Desta forma, podemos calcular ao longo de um dia os valores de A e h solares em função do ângulo horário, H , onde H varia entre o nascer e o pôr do Sol.

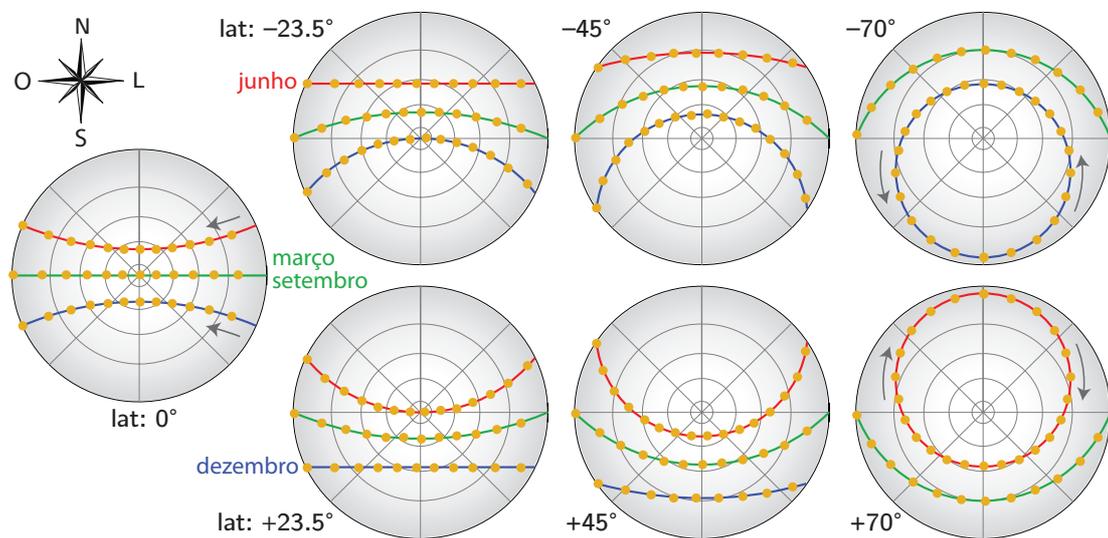


Figura 3.19: Trajetória do Sol na esfera celeste, usando o azimute e a altura com uma projeção estereográfica da esfera celeste com o zênite no centro. O círculo mais externo corresponde ao horizonte do observador e os círculos concêntricos menores são as alturas 20° , 40° , 60° e 80° . As linhas radiais correspondem aos azimutes, com o Norte para cima. As flechas indicam o sentido do movimento, de Leste a Oeste e circumpolar para altas latitudes. Os círculos amarelos correspondem às posições do Sol com intervalo de uma hora. A linha vermelha, que passa mais próxima do Norte, é a trajetória do Sol no dia do solstício de junho (inverno no Hemisfério Sul); a linha azul corresponde à trajetória do Sol no dia do solstício de dezembro; a linha intermediária verde corresponde ao caminho do Sol nos dias de equinócio (em março e setembro). Note que a linha verde sempre começa no Leste e termina no Oeste.

3.5.1 Crepúsculo

Para o Sol em particular, definem-se outros fenômenos ligados ao nascer e pôr. Logo antes do nascer ou após o pôr do Sol, o céu não está totalmente escuro. Este intervalo de tempo que antecede o nascer ou sucede o ocaso do Sol, quando a iluminação é devido à luz solar espalhada pela alta atmosfera, chama-se *crepúsculo*. O início ou fim do crepúsculo (se é de madrugada ou à noite) são definidos em termos da altura do Sol (novamente, levando-se em conta a refração atmosférica). Existem três definições distintas:

crepúsculo civil é definido pelo instante em que o *centro* do disco solar se encontra 6° abaixo do horizonte (ou, $h = -6^\circ$). Em geral, este é o limite em que a iluminação artificial começa a ser necessária para atividades como dirigir;

crepúsculo náutico é definido quando o centro do disco solar está a 12° abaixo do horizonte. Em geral, neste instante o horizonte aparente deixa de ser perceptível, isto é, confunde-se com o céu;

crepúsculo astronômico é o momento em que o disco solar se encontra a 18° abaixo da linha do horizonte. Normalmente, neste momento a alta atmosfera deixa de ser iluminada pela luz solar e as observações astronômicas podem ter início.

É interessante notar que nem sempre estes fenômenos (crepúsculo, nascer e pôr do Sol) ocorrem nas latitudes mais elevadas da Terra (Fig 3.18). Em latitudes elevadas, o crepúsculo é mais longo comparado a latitudes tropicais: por isto parece anoitecer mais rápido perto do equador do que em outros pontos na Terra.

3.6 Relação entre coordenadas geocêntricas e heliocêntricas

Em vários problemas de astronomia de posição é conveniente fazermos uma translação do sistema de coordenadas, passando do sistema geocêntrico ao heliocêntrico ou vice-versa. Isto é feito de maneira mais simples utilizando-se o sistema de coordenadas eclípticas (Fig. 3.20).

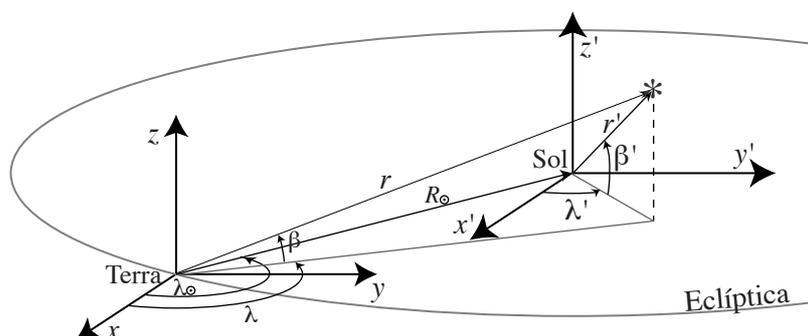


Figura 3.20: Translação de coordenadas geocêntricas e heliocêntricas. As direções x e x' apontam para o ponto vernal e z e z' para o polo da eclíptica.

Em forma matricial, a translação se faz como $r\mathbf{I}(\lambda, \beta) - R_{\odot}\mathbf{I}_{\odot} = r'\mathbf{I}(\lambda', \beta')$, onde \mathbf{I}_{\odot} é a posição geocêntrica do Sol e as coordenadas “primas” são heliocêntricas. Explicitando vem:

$$\begin{aligned} r \cos \beta \cos \lambda - R_{\odot} \cos \lambda_{\odot} &= r' \cos \beta' \cos \lambda' \\ r \cos \beta \sin \lambda - R_{\odot} \sin \lambda_{\odot} &= r' \cos \beta' \sin \lambda' \\ r \sin \beta - 0 &= r' \sin \beta' \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde utilizamos o fato de $\beta_{\odot} = 0$. Na realidade isto não é absolutamente verdadeiro pois, devido a perturbações planetárias, a latitude do Sol pode ser de alguns segundos de arco. Exceto por isso, a equação acima é geral e válida sempre. Note que aqui precisamos levar em conta a distância do astro (r em relação à Terra, r' em relação ao Sol). Isto é fundamental quando são corpos dentro do Sistema Solar, onde as distâncias são sempre comparáveis com a distância Terra–Sol (R_{\odot}).

As translações em coordenadas equatoriais podem ser feitas primeiro transformando-as em eclípticas, fazendo a translação e finalmente, transformando-as de volta em equatoriais.

3.7 Paralaxe

3.7.1 Paralaxe anual

Devido ao movimento anual da Terra em torno do Sol, a posição das estrelas mais próximas se desloca em relação às estrelas mais longínquas. Este efeito é chamado de *paralaxe* ou ainda *paralaxe anual* (Fig. 3.21). Comparando-se duas imagens da mesma região do céu com 6 meses de intervalo, o que é equivalente à metade do trajeto da Terra em torno do Sol, a posição das estrelas próximas se desloca em relação às estrelas mais distantes devido a um efeito geométrico de perspectiva (paralaxe).

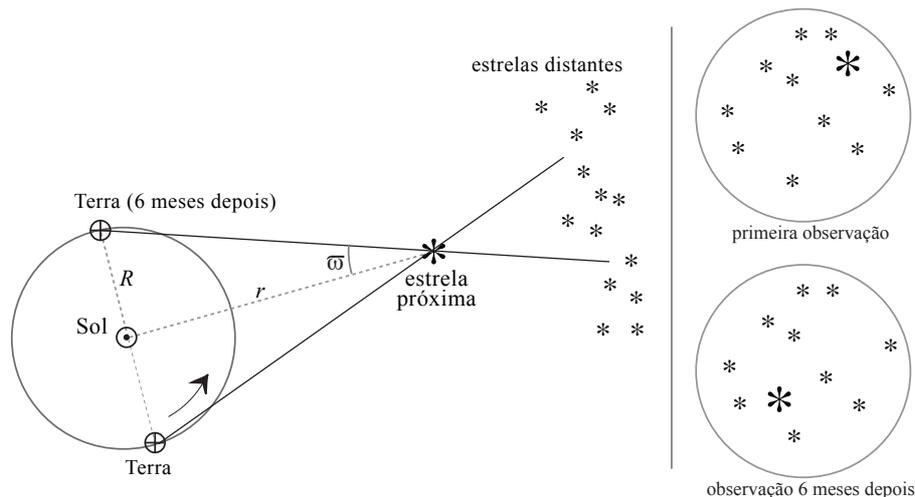


Figura 3.21: Efeito da paralaxe na posição das estrelas mais próximas. Observando-se uma estrela próxima com 6 meses de intervalo, a posição aparente desta se desloca em relação ao fundo de estrelas distantes. O ângulo ϖ é a paralaxe da estrela, r é a distância da estrela e R a distância Terra-Sol.

A paralaxe de uma estrela é definida como⁴:

$$\text{sen } \varpi = 1/r, \quad (3.46)$$

onde r é a distância da estrela medida em unidades astronômicas (AU, onde 1 AU é aproximadamente igual ao semi-eixo maior da órbita terrestre em torno do Sol, igual 149.597.870,7 km). Para as estrelas, o ângulo de paralaxe ϖ nunca é maior que $0''8$, razão pela qual a primeira medida de paralaxe anual foi feita somente em 1838 pelo astrônomo alemão Friedrich W. Bessel. Como $\varpi \ll 1$, podemos utilizar simplesmente $\varpi = 1/r$ (ϖ em radianos).

Se a paralaxe é dada em segundos de arco, então o seu inverso $1/\varpi$ tem unidades de *parsec* (do inglês PARalaxe SECond), isto é, por definição 1 pc é a distância que corresponde a uma paralaxe de $1''$. Um parsec é exatamente igual a $648.000/\pi$ AU ou aproximadamente 3,2616 anos-luz.

Pela equação (3.46) fica claro que medindo-se a paralaxe obtemos imediatamente a distância da estrela. É desta forma que a distância das estrelas mais próximas são determinadas na prática. Com telescópios terrestres, pôde-se chegar até medidas de cerca de $0''01$, isto é, até distâncias de ~ 300 anos-luz.

Com o satélite Hipparcos da ESA foi possível determinar a paralaxe até cerca de $0''001$, o que significa que podemos determinar diretamente a distância das estrelas até cerca de 3.300 anos-luz (ou seja, cerca de 12% da distância ao centro da nossa galáxia). Este alcance mudou no

⁴O ângulo de paralaxe às vezes é representado por p ou π . Para não confundir com o número $\pi = 3,14159\dots$, usamos o símbolo ϖ (\code{\varpi} em L^AT_EX).

final da segunda década do Séc. **XXI** com as observações realizadas pelo satélite Gaia da ESA, que pode medir com precisão paralaxes de 10^{-4} a 10^{-5} segundos de arco (dependendo do brilho da estrela).

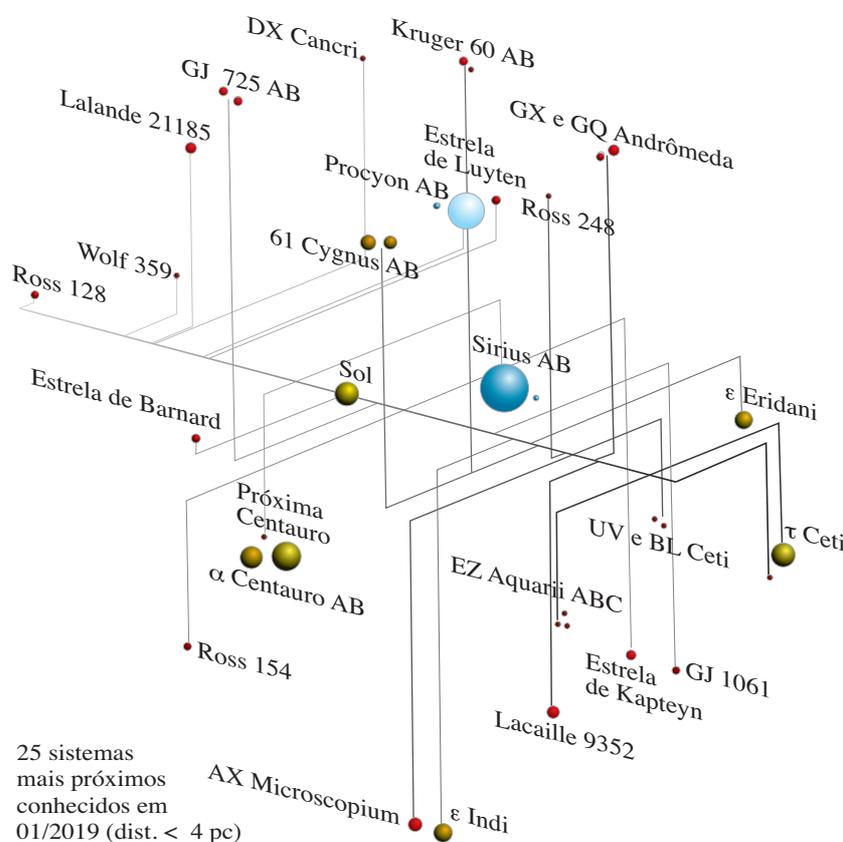


Figura 3.22: Distribuição dos sistemas estelares mais próximos. A cor e o tamanho das estrelas são proporcionais ao seu tipo espectral e diâmetro. Figura tirada de RECONS (*Research Consortium on Nearby Stars*)

Na tabela 3.1 está a lista das 23 estrelas mais próximas do Sol e a Fig. 3.22 mostra sua distribuição espacial. Estas estrelas estão contidas em um volume de raio $R = 4,1$ pc (para referência, a distância do Sol ao centro da Galáxia é $R \simeq 8,0$ kpc). A estrela mais próxima do Sol é Alfa Centauri C ou *Proxima Centauri* com paralaxe de $0,76807''$, isto é, $1,3020$ pc (ou $4,2465$ anos-luz) e magnitude $V = 11,09$ descoberta em 1915 pelo astrônomo Robert Innes, no Observatório de Johannesburg, África do Sul. Em 2016, foi descoberto um exoplaneta de tipo terrestre em órbita desta estrela.

Efeito da paralaxe anual nas coordenadas

O efeito da paralaxe nas coordenadas eclípticas pode ser calculado facilmente através da translação entre as coordenadas geocêntricas e heliocêntricas, lembrando que, observado do Sol, a posição de uma estrela não sofre o efeito da paralaxe (veja a Fig. 3.21). Para isto utilizamos as equações que fazem a translação das coordenadas eclípticas de geocêntrica a heliocêntrica, Eq. (3.45).

Como estamos interessados em corpos distantes do Sistema Solar podemos introduzir as seguintes transformações:

$$\begin{aligned}\lambda' &= \lambda - \Delta\lambda \\ \beta' &= \beta - \Delta\beta \\ r' &= r - \Delta r,\end{aligned}\tag{3.47}$$

onde os valores $\Delta\lambda$ e $\Delta\beta$ são ângulos muito pequenos e Δr é muito menor que r . Substituindo as equações (3.47) em (3.45), desenvolvendo os senos e cossenos das diferenças e ignorando os

Tabela 3.1: Paralaxe das estrelas mais próximas do Sol medidas pelo satélite *Hipparcos*. ‘ V_{mag} ’ e ‘ M_V ’ são as magnitudes aparente e absoluta, respectivamente, na banda V ; μ é o movimento próprio total da estrela. Fonte: <http://www.recons.org/>

N ^o	Asc. Reta J2000.0	Declinação J2000.0	μ (" /ano)	Paralaxe (")	Dist. (pc)	Tipo Espec.	V_{mag}	M_V	Massa M_{\odot}	Nome
1	14 29 43.0	-62° 40 46	3.853	0.76885	1.301	M5.0 V	11.05	15.48	0.11	Proxima Centauri
	14 39 36.5	-60° 50 02	3.710	0.74723	1.338	G2.0 V	0.01	4.38	1.14	alfa Centauri A
	14 39 35.1	-60° 50 14	3.724	0.74723	1.338	K0 V	1.34	5.71	0.92	alfa Centauri B
2	17 57 48.5	+04° 41 36	10.358	0.54551	1.833	M3.5 V	9.57	13.25	0.16	Estrela de Barnard
3	10 56 29.2	+07° 00 53	4.696	0.41910	2.386	M5.5 V	13.53	16.64	0.09	Wolf 359
4	11 03 20.2	+35° 58 12	4.802	0.39325	2.543	M2.0 V	7.47	10.44	0.46	Lalande 21185
5	06 45 08.9	-16° 42 58	1.339	0.38002	2.631	A1.0 V	-1.43	1.47	1.99	Sirius (alfa CMa)
	06 45 08.9	-16° 42 58	1.339	0.38002	2.631	DA2	8.44	11.34	1.00	Sirius B
6	01 39 01.3	-17° 57 01	3.368	0.37370	2.676	M5.5 V	12.61	15.47	0.11	BL Ceti
	01 39 01.3	-17° 57 01	3.368	0.37370	2.676	M6.0 V	13.06	15.93	0.10	UV Ceti
7	18 49 49.4	-23° 50 10	0.666	0.33722	2.965	M3.5 V	10.44	13.08	0.17	Ross 154
8	23 41 54.7	+44° 10 30	1.617	0.31637	3.161	M5.5 V	12.29	14.79	0.12	Ross 248
9	03 32 55.8	-09° 27 30	0.977	0.31122	3.213	K2.0 V	3.73	6.20	0.85	épsilon Eridani
10	23 05 52.0	-35° 51 11	6.896	0.30508	3.278	M1.0 V	7.34	9.76	0.53	Lacaille 9352
11	11 47 44.4	+00° 48 16	1.361	0.29814	3.354	M4.0 V	11.16	13.53	0.16	Ross 128
12	22 38 33.4	-15° 18 07	3.254	0.28950	3.454	M5.0 VJ	13.03	15.33	0.11	EZ Aquarii A
	22 38 33.4	-15° 18 07	3.254	0.28950	3.454	M V	13.27	15.58	0.11	EZ Aquarii B
	22 38 33.4	-15° 18 07	3.254	0.28950	3.454	M V	15.07	17.37	0.08	EZ Aquarii C
13	21 06 53.9	+38° 44 58	5.281	0.28608	3.496	K5.0 V	5.20	7.48	0.70	61 Cygni A
	21 06 55.3	+38° 44 31	5.172	0.28608	3.496	K7.0 V	6.03	8.31	0.63	61 Cygni B
14	07 39 18.1	+05° 13 30	1.259	0.28517	3.507	F5 IV-V	0.37	2.65	1.57	Procyon (alfa CMi)
	07 39 18.1	+05° 13 30	1.259	0.28517	3.507	DQZ	10.70	12.98	0.5	Procyon B
15	18 42 46.7	+59° 37 49	2.238	0.28383	3.523	M3.0 V	8.90	11.17	0.35	GJ 725 A
	18 42 46.9	+59° 37 37	2.313	0.28383	3.523	M3.5 V	9.69	11.96	0.26	GJ 725 B
16	00 18 22.9	+44° 01 23	2.918	0.27987	3.573	M1.5 V	8.08	10.31	0.49	GX Andromedae
	00 18 22.9	+44° 01 23	2.918	0.27987	3.573	M3.5 V	11.06	13.30	0.16	GQ Andromedae
17	22 03 21.7	-56° 47 10	4.704	0.27607	3.622	K4.0 V	4.68	6.89	0.77	épsilon Indi A
	22 04 10.5	-56° 46 58	4.823	0.27607	3.622	T1.0 V			0.03	épsilon Indi B
	22 04 10.5	-56° 46 58	4.823	0.27607	3.622	T6.0 V			0.03	épsilon Indi C
18	08 29 49.5	+26° 46 37	1.290	0.27580	3.626	M6.0 V	14.90	17.10	0.09	DX Cancri
19	01 44 04.1	-15° 56 15	1.922	0.27397	3.650	G8.5 V	3.49	5.68	0.92	tau Ceti
20	03 35 59.7	-44° 30 45	0.826	0.27201	3.676	M5.0 V	13.09	15.26	0.11	GJ 1061
21	01 12 30.6	-16° 59 56	1.372	0.26908	3.716	M4.0 V	12.10	14.25	0.13	YZ Ceti
22	07 27 24.5	+05° 13 33	3.738	0.26623	3.756	M3.5 V	9.85	11.98	0.26	Estrela de Luyten
23	18 45 05.3	-63° 57 48	2.664	0.25950	3.854	M8.5 V	17.40J	19.47	0.07	SCR 1845-6357 A
	18 45 02.6	-63° 57 52	2.664	0.25950	3.854	T6.0 V			0.03	SCR 1845-6357 B
24	02 53 00.9	+16° 52 53	5.106	0.25941	3.855	M6.5 V	15.14	17.21	0.08	SO 0253+1652
25	05 11 40.6	-45° 01 06	8.670	0.25567	3.911	M2.0 VI	8.85	10.89	0.39	Estrela de Kapteyn
26	21 17 15.3	-38° 52 03	3.455	0.25344	3.946	K9.0 V	6.67	8.69	0.60	AX Microscopii
27	10 48 14.7	-39° 56 06	1.530	0.24853	4.024	M8.5 V	17.39	19.37	0.07	DEN 1048-3956
28	22 27 59.5	+57° 41 45	0.990	0.24806	4.031	M3.0 V	9.79	11.76	0.28	Kruger 60 A
	22 27 59.5	+57° 41 45	0.990	0.24806	4.031	M4.0 V	11.41	13.38	0.16	Kruger 60 B

termos infinitesimais cruzados, obtemos:

$$\begin{aligned} R_{\odot} \cos \lambda_{\odot} &= \cos \beta \cos \lambda \Delta r - r \sin \beta \cos \lambda \Delta \beta - r \cos \beta \sin \lambda \Delta \lambda \\ R_{\odot} \sin \lambda_{\odot} &= \cos \beta \sin \lambda \Delta r - r \sin \beta \sin \lambda \Delta \beta + r \cos \beta \cos \lambda \Delta \lambda \\ 0 &= \sin \beta \Delta r + r \cos \beta \Delta \beta \end{aligned} \quad (3.48)$$

o que resulta após simplificação em:

$$\begin{aligned} \Delta \lambda \cos \beta &= -\varpi \sin(\lambda - \lambda_{\odot}), \\ \Delta \beta &= -\varpi \cos(\lambda - \lambda_{\odot}) \sin \beta, \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde utilizamos $\varpi = R_{\odot}/r$ (pois $R_{\odot} = 1$ AU).

As equações (3.49) representam uma elipse na esfera celeste de semi-eixos ϖ e $\varpi \sin \beta$ (Fig. 3.23) Esta elipse é chamada *elipse paraláctica* e representa o deslocamento aparente devido ao efeito de paralaxe ao longo de um ano. O semi-eixo maior é paralelo à eclíptica e o semi-eixo menor é perpendicular.

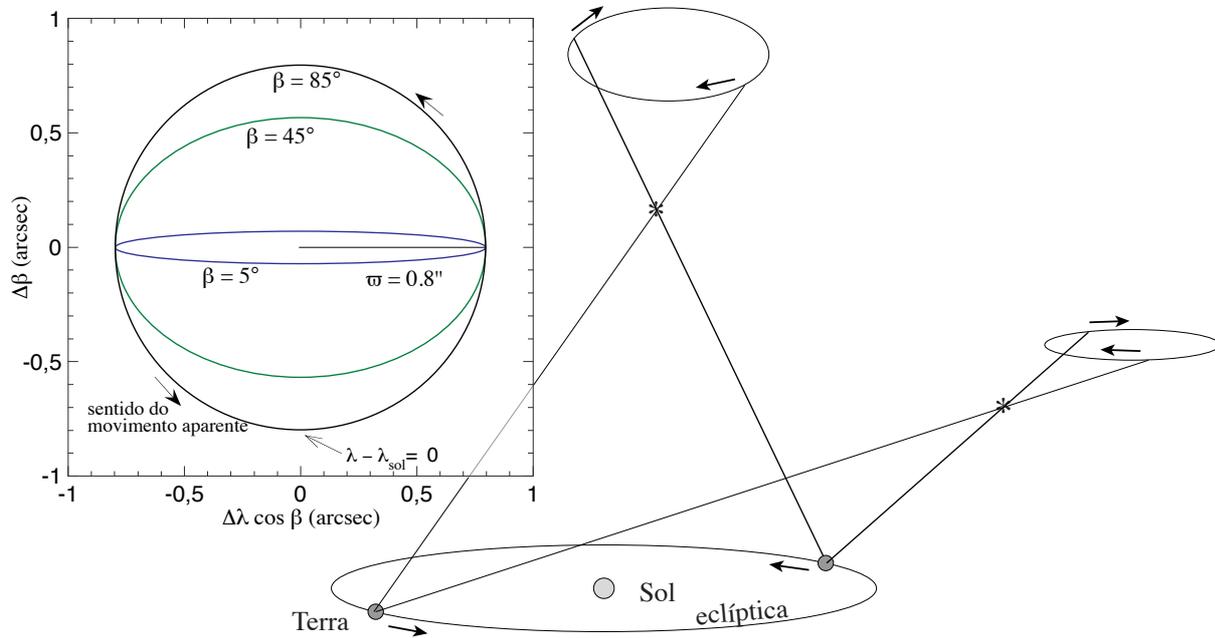


Figura 3.23: Elipse paraláctica. Trajetória aparente devido ao efeito de paralaxe anual. O gráfico a esquerda ilustra um exemplo com $\varpi = 0,8''$ e diferentes latitudes. Quando o astro se encontra no polo da eclíptica, sua trajetória aparente é praticamente um círculo; quando o astro está na eclíptica ($\beta = 0$) sua trajetória é um “vai-e-vem” linear.

Para coordenadas equatoriais podemos proceder da mesma forma, considerando a mesma situação da figura 3.20 (mas em coordenadas equatoriais). A variação das coordenadas α e δ devido à paralaxe anual é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta \alpha \cos \delta &= -\varpi(\sin \alpha \cos \lambda_{\odot} - \cos \varepsilon \cos \alpha \sin \lambda_{\odot}), \\ \Delta \delta &= -\varpi(\sin \delta \cos \alpha \cos \lambda_{\odot} + [\cos \varepsilon \sin \delta \sin \alpha - \sin \varepsilon \cos \delta] \sin \lambda_{\odot}), \end{aligned} \quad (3.50)$$

Em termos das coordenadas cartesianas geocêntricas do Sol, $X_{\odot} = \cos \lambda_{\odot}$ e $Y_{\odot} = \sin \lambda_{\odot} \cos \varepsilon$ (assumindo que $Z_{\odot} = 0$), a variação das coordenadas equatoriais se escreve como:

$$\begin{aligned} \Delta \alpha \cos \delta &= -\varpi(X_{\odot} \sin \alpha - Y_{\odot} \cos \alpha), \\ \Delta \delta &= -\varpi(X_{\odot} \cos \alpha + Y_{\odot} \sin \alpha) \sin \delta. \end{aligned} \quad (3.51)$$

3.7.2 Paralaxe diária e paralaxe horizontal

A *paralaxe diária* ou geocêntrica, p , ocorre devido ao fato de que um observador não se encontra no centro da Terra, mas na sua superfície. Em outras palavras, a paralaxe diária corresponde à translação que transforma um dado sistema de coordenadas de geocêntrico a topocêntrico (Fig. 3.24). A paralaxe diária só é relevante para a Lua ($p_{\text{Lua}} \approx 57'$), o Sol ($p_{\text{Sol}} \approx 8''8$) e, eventualmente, os planetas mais próximos.

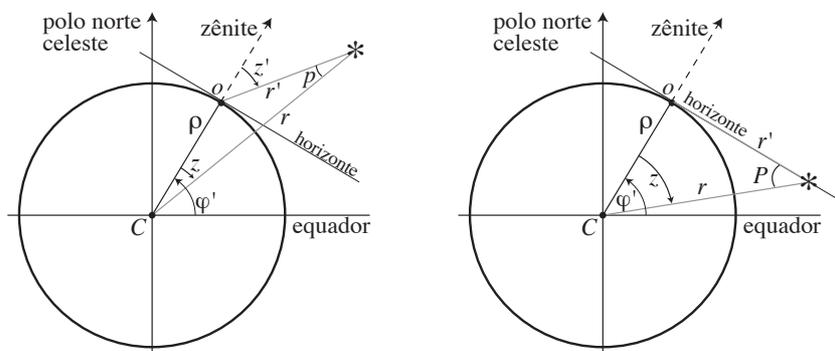


Figura 3.24: Paralaxe diária. A distância geocêntrica do observador ao centro da Terra é ρ , r é a distância geocêntrica do astro observado e r' a distância topocêntrica. A esquerda, o ângulo p é a paralaxe diária; a direita, o ângulo P é a paralaxe horizontal (o astro está no horizonte, $z' = 90^\circ$).

A paralaxe diária p é a diferença entre os ângulos com a vertical geocêntrica, z , e topocêntrica, z' , isto é, $p = z' - z$. Pela lei dos senos temos (veja a figura 3.24):

$$\text{sen } p = \frac{\rho}{r} \text{sen } z'. \quad (3.52)$$

Quando a altura do astro é 0° (ou $z' = 90^\circ$), chamamos o ângulo p de *paralaxe horizontal* e utilizamos a notação P . Assim temos simplesmente,

$$\text{sen } P = \frac{\rho}{r}. \quad (3.53)$$

Como $z' = p + z$, então $\text{sen } z' = \text{sen } p \cos z + \cos p \text{sen } z$ e podemos escrever a paralaxe diária em função de z e da paralaxe horizontal como:

$$\tan p = \frac{\text{sen } z \text{sen } P}{1 - \cos z \text{sen } P}. \quad (3.54)$$

É importante notarmos que, pelo fato de não estarmos no centro da Terra, haverá um efeito de paralaxe devido à rotação terrestre sobre o seu eixo, análogo ao caso da paralaxe anual (Fig. 3.25).

Efeito da paralaxe diária nas coordenadas

Da mesma forma que fizemos para a paralaxe anual, podemos calcular o efeito da paralaxe diária na posição de um astro utilizando uma translação do sistema de coordenadas geocêntrico para topocêntrico. Contudo, neste caso, é mais conveniente trabalharmos no sistema de coordenadas horizontais ou horárias (veja a Fig. 3.26 para o sistema de coordenadas horárias).

Assim, em notação vetorial, a translação de um sistema de coordenadas horizontais geocêntrico para topocêntrico se faz pela soma de vetores $r\mathbf{I}(A, h) = r'\mathbf{I}(A', h') + \vec{\rho}_{\text{horiz}}$, onde as grandezas 'primas' são topocêntricas. Isto corresponde ao sistema de equações:

$$\begin{aligned} r \cos A \cos h &= r' \cos A' \cos h' + \rho \text{sen}(\varphi - \varphi') \\ r \text{sen } A \cos h &= r' \text{sen } A' \cos h' + 0 \\ r \text{sen } h &= r' \text{sen } h' + \rho \cos(\varphi - \varphi'), \end{aligned} \quad (3.55)$$

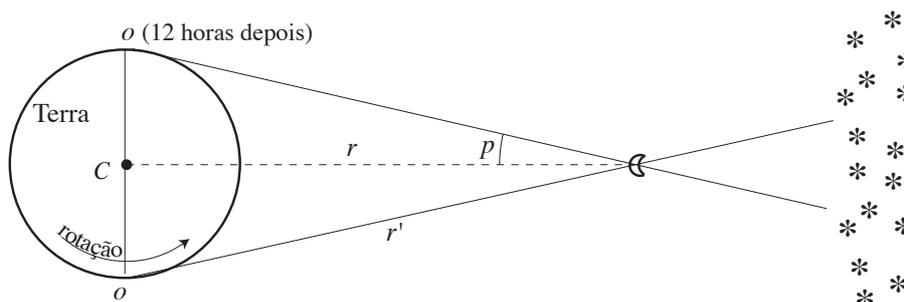


Figura 3.25: Efeito da paralaxe diária na posição de um astro próximo devido à rotação da Terra. Observando-se um astro próximo com 12 horas de intervalo, a posição aparente desta se desloca em relação ao fundo de estrelas distantes. O ângulo p é a paralaxe do astro, r é a distância geocêntrica e r' a distância topocêntrica.

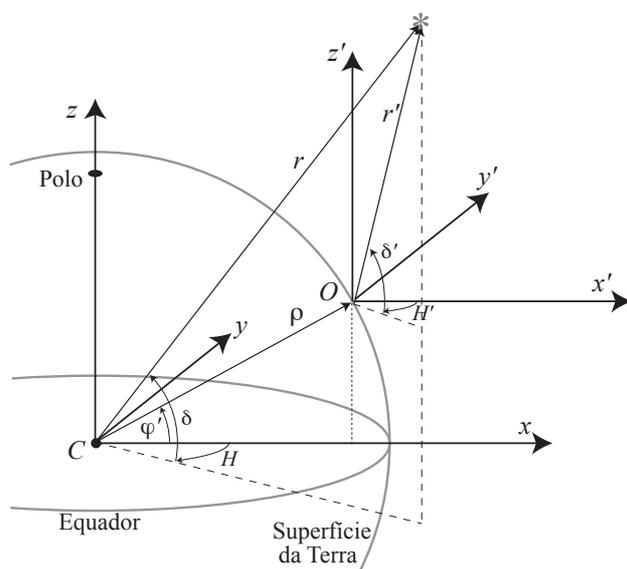


Figura 3.26: Translação de coordenadas horárias topocêntricas para geocêntricas. φ' é a latitude geocêntrica e ρ a distância do observador O ao centro da Terra, C .

onde $\vec{\rho}_{\text{horiz}}$ é a posição geocêntrica do observador no sistema de coordenadas horizontais, que é obtido por uma rotação de $90^\circ - \varphi$ (note que é a latitude geodética utilizada na rotação) da posição geocêntrica em coordenadas horárias ($\vec{\rho}_{\text{horário}}$):

$$\mathbf{R}_y(90^\circ - \varphi) \underbrace{\begin{pmatrix} \rho \cos \varphi' \\ 0 \\ \rho \sin \varphi' \end{pmatrix}}_{\rho_{\text{horário}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \rho \sin(\varphi - \varphi') \\ 0 \\ \rho \cos(\varphi - \varphi') \end{pmatrix}}_{\rho_{\text{horizontal}}}.$$

Em coordenadas horárias, utilizamos a mesma soma vetorial, mas neste caso temos $r\mathbf{I}(H, \delta) = r'\mathbf{I}(H', \delta') + \rho_{\text{horário}}$, lembrando que $H = T_s - \alpha$ e $H' = T_s - \alpha'$ (T_s sendo o tempo sideral local do observador, igual ao tempo sideral de Greenwich corrigido da longitude). Obtemos assim o sistema de equações:

$$\begin{aligned} r \cos H \cos \delta &= r' \cos H' \cos \delta' + \rho \cos \varphi' \\ r \sin H \cos \delta &= r' \sin H' \cos \delta' + 0 \\ r \sin \delta &= r' \sin \delta' + \rho \sin \varphi'. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Utilizando transformações análogas àquelas utilizadas na paralaxe anual, isto é:

$$H' = H - \Delta H$$

$$\begin{aligned}\delta' &= \delta - \Delta\delta \\ r' &= r - \Delta r,\end{aligned}\tag{3.57}$$

e tomando as diferenças como infinitesimais obtemos os resultados seguintes:

$$\begin{aligned}\Delta H \cos \delta &= -P \cos \varphi' \sin H, \\ \Delta \delta &= -P(\cos H \sin \delta \cos \varphi' - \cos \delta \sin \varphi'),\end{aligned}\tag{3.58}$$

onde utilizamos $P = \rho/r$.

No caso da Lua e de objetos muito próximos (satélites artificiais), não podemos supor que as diferenças nas equações (3.57) sejam infinitesimais. Neste caso é necessário utilizarmos o sistema de equações (3.56) sem fazermos aproximações.

3.7.3 Medida de paralaxe usando uma sonda espacial

Em 22 e 23 de abril de 2020, a sonda *New Horizons* obteve imagens de duas estrelas próximas do Sol, Proxima Centauri e Wolf 359 (veja a tabela 3.1 para mais informações destas estrelas). Quase que simultaneamente, aqui na Terra, também foram obtidas imagens destas estrelas. A Fig. 3.27 mostra as imagens de Proxima Centauri.

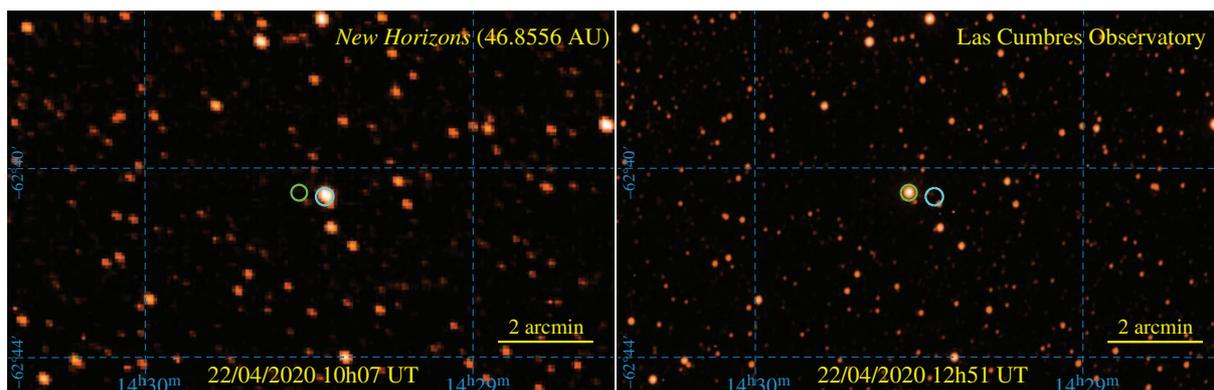


Figura 3.27: Esquerda: Imagem obtida pela sonda *New Horizons*. Direita: Imagem obtida por Edward Gomez no Las Cumbres Observatory, Siding Spring, Austrália. O efeito de paralaxe corresponde a uma mudança aparente de posição de cerca de $32''5$. Os círculos verdes em cada painel correspondem à posição de Proxima Centauri observada da Terra; os círculos cianos correspondem à posição observada pela sonda. Imagens obtidas em pluto.jhuapl.edu/Learn/Parallax/Parallax-Images.php.

Devido à distância da *New Horizons*, o efeito de paralaxe é significativo para Proxima Centauri e Wolf 359, da ordem de dezenas de segundos de arco. Conhecendo as posições na esfera celeste das estrelas e da posição da sonda (sua ascensão reta, declinação e sua distância à Terra), é possível determinar a distância das estrelas observadas. A geometria neste caso está ilustrada na Fig. 3.28.

Para obtermos a distância d da estrela, usamos a lei dos senos:

$$\frac{d}{\sin \varphi} = \frac{d_{\text{NH}}}{\sin p},\tag{3.59}$$

onde d_{NH} é a distância da sonda à Terra, no momento da observação. O ângulo φ é dado por:

$$\varphi = 180^\circ - p - \theta,$$

onde θ é a distância angular entre a sonda e a estrela, observados da Terra.

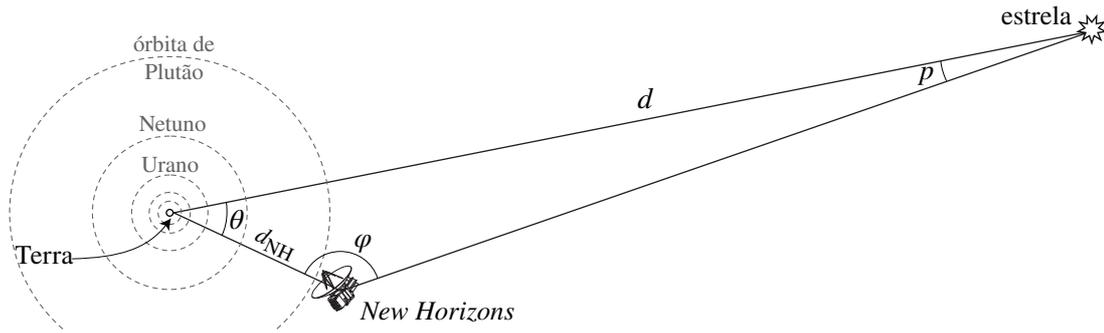


Figura 3.28: Geometria para determinar a distância, d , de uma estrela próxima pelo efeito de paralaxe. O ângulo p é a paralaxe medida (veja, por exemplo, a Fig. 3.27), θ é a distância angular entre a sonda e a estrela e d_{NH} é a distância entre a sonda e a Terra. O tamanho das órbitas e a distância da sonda estão aproximadamente em escala, mas a distância da estrela está completamente fora de escala. A órbita mais central é a da Terra.

Como a trajetória da sonda pelo Sistema Solar é bem conhecida, podemos obter com boa precisão suas coordenadas e distância na data de interesse, 22/04/2020 às 10h UT. Usando a ferramenta *Horizons*⁵ obtemos a posição da sonda (coordenadas equatoriais e distância:

	Asc. Reta (J2000)	Declinação (J2000)	distância
<i>New Horizons</i>	19 ^h 16 ^m 30 ^s ,04	−20°16′59″,4	46,8556 AU
Prox.Cen (Terra)	14 ^h 29 ^m 31 ^s ,84	−62°40′31″,4	—
Prox.Cen (<i>New Horiz.</i>)	14 ^h 29 ^m 27 ^s ,17	−62°40′36″,4	—

As posições de Proxima Centauri observada da Terra e da sonda é (medida nas imagens) também são dadas na tabela acima. Destas coordenadas obtemos p usando a lei dos cossenos, $p = 32''{,}5$, como indicado na Fig. 3.27.

Da mesma forma, usando a lei dos cossenos, calculamos a elongação (isto é, a separação angular) entre a sonda e a posição de Proxima Centauri observada da Terra: $\theta = 63{,}7128$. Conseqüentemente, o ângulo φ é 116{,}2782. Finalmente, podemos usar a Eq. (3.59) para obter a distância da estrela:

$$d = \frac{d_{NH}}{\sin p} \sin \varphi = 2,666 \times 10^5 \text{ AU} = 1,293 \text{ pc}.$$

O valor obtido é apenas cerca de 0,6% menor que o valor dado na tabela 3.1. A maior incerteza aqui vem da posição de Proxima Centauri medida pela *New Horizons*.

3.8 Movimento próprio de estrelas

Apesar do termo “estrelas fixas”, nenhum astro é realmente estacionário. Da mesma forma que os planetas orbitam o Sol, as estrelas também seguem suas órbitas nas suas galáxias. No caso da nossa galáxia, a Via Láctea, uma espiral gigante, a grande maioria das estrelas orbitam em torno do centro galáctico. Este movimento orbital pode ser decomposto em duas componentes principais: uma órbita aproximadamente circular em torno do centro galáctico e um movimento de direção aleatória. No caso das estrelas na vizinhança solar, o movimento em torno do centro galáctico tem magnitude da ordem de 200 km/s e o movimento aleatório cerca de 10–20 km/s.

Do ponto de vista de um observador no Sistema Solar, o *movimento próprio* das estrelas, μ , é uma composição entre os movimentos das estrelas e do Sol em relação a um referencial fixo, uma vez que é observado da Terra. É claro que as estrelas terão, em geral, um movimento

⁵ ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi

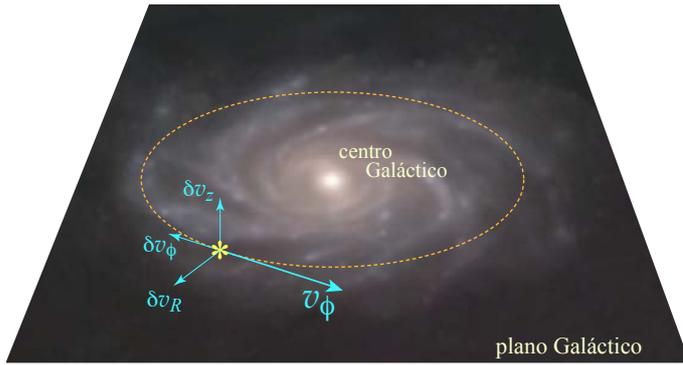


Figura 3.29: Órbita típica de uma estrela da vizinhança solar. O principal movimento é a órbita aproximadamente circular (traço pontilhado) com velocidade v_ϕ . Superposto a este movimento há uma componente de direção aleatória que pode ser decomposta em coordenadas cilíndricas com módulos δv_z , (direção “vertical”, perpendicular ao plano Galáctico) δv_R (direção radial) e δv_ϕ .

radial e transversal em relação ao Sol (e naturalmente à Terra), como mostra a figura 3.30. A componente radial não altera a posição de uma estrela na esfera celeste, apenas o movimento relativo transversal é que terá algum efeito na posição do astro (o movimento radial altera a distância da estrela a nós).

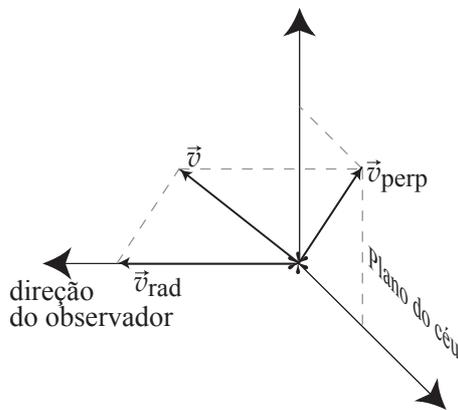


Figura 3.30: Decomposição do movimento próprio. \vec{v} é o vetor velocidade relativa da estrela em relação ao observador, \vec{v}_{rad} é a velocidade radial, na direção da linha de visada do observador, \vec{v}_{perp} é a componente perpendicular, contida no plano do céu. É esta componente que corresponde a μ e altera a posição do astro na esfera celeste.

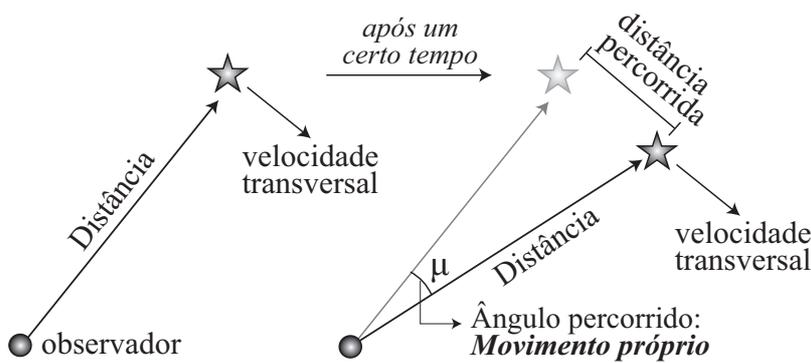


Figura 3.31: Relação entre o movimento próprio, μ , a distância ($1/\varpi$, o inverso do ângulo de paralaxe) e a velocidade transversal, v_{perp} .

A relação entre a velocidade transversal (perpendicular à linha de visada), a distância do astro e o movimento próprio (Fig. 3.31) é dada por:

$$v_{\text{perp}} = 977\,820 \times \frac{\pi}{180 \times 3600} \times \frac{\mu}{\varpi} \simeq 4,7406 \frac{\mu}{\varpi} \text{ km/s}, \tag{3.60}$$

onde μ é dado em segundos de arco por ano e ϖ em segundos de arco (lembrando que o inverso de ϖ é a distância em parsec). O primeiro termo numérico é a conversão $1 \text{ pc/ano} = 977\,820 \text{ km/s}$, e o segundo termo numérico corresponde à conversão entre segundos de arco e radianos. Aqui assumimos que μ é pequeno e podemos aproximar $\text{sen } \mu \approx \mu$ (em radianos).

O efeito do movimento próprio na posição aparente é pequeno devido à distância das estrelas. Uma estrela que tenha uma velocidade transversal de $\sim 50 \text{ km/s}$ e esteja a 5 pc (ou $\sim 16,3$

anos-luz) terá um movimento aparente de apenas $\sim 2,1''$ por ano. Isto nos dá uma ideia da dificuldade de medir este movimento.

Em 1717, E. Halley suspeitou da existência do movimento próprio das estrelas, comparando a posição de Betelgeuse, Aldebaran, Sirius e Arcturus medidas por Hiparco 20 séculos antes de suas próprias medidas. No entanto, as medidas de Halley não permitiam uma conclusão firme. Foi somente anos mais tarde que o astrônomo francês Jacques Cassini em 1738 consegue mostrar de forma mais robusta o movimento próprio de Arcturus. O valor medido atualmente para as 4 estrelas estudadas por Halley estão no fim da Tabela 3.2. Para Arcturus, seu movimento próprio corresponde a cerca de $1,3$ em 2000 anos).

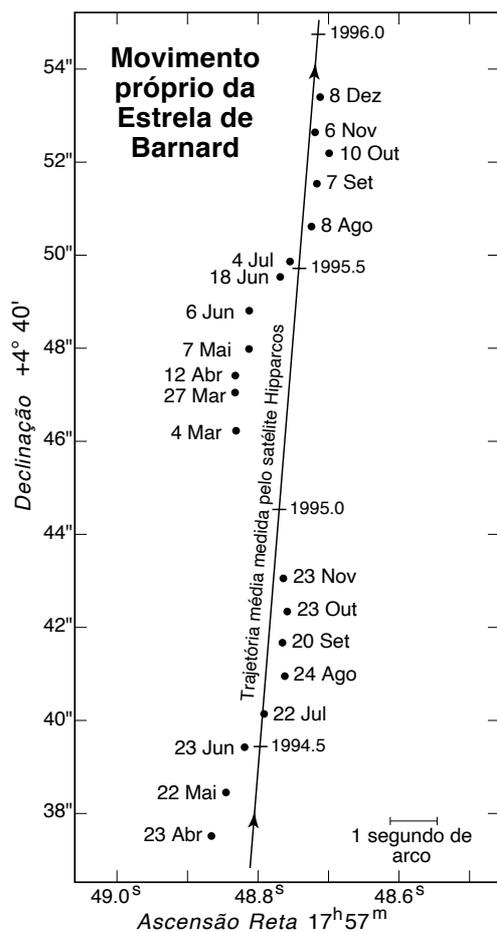


Figura 3.32: Movimento próprio e paralaxe da estrela de Barnard observado por Dennis di Cicco. O traço contínuo é o movimento próprio (medido pelo satélite Hipparcos), enquanto a oscilação em torno desta reta é devido à paralaxe (portanto um reflexo do movimento de translação da Terra em torno do Sol).

A tabela 3.2 lista as estrelas com maior movimento próprio. A estrela de maior movimento próprio é a Estrela de Barnard, com um movimento de $10,3''$ por ano (descoberto em 1916 por Edward Barnard; veja Fig. 3.32). Ela é uma anã vermelha invisível a olho nu (magnitude 9,54) que se encontra na constelação de Ophiuchus.

Conhecemos 23 estrelas com $V < 5$ mag e movimento próprio superior a $1''$ por ano. Destas, ϵ Ind (uma anã vermelha de $V = 4,7$ mag) tem o maior movimento próprio ($\mu = 4,7''/\text{ano}$). Até magnitude 12,5, cerca de 200 estrelas têm movimento próprio maior que $1''/\text{ano}$ e cerca de 11,3 mil tem $\mu > 0,1''/\text{ano}$.

Outro efeito devido ao movimento próprio das estrelas é que a forma das constelações se altera com o tempo. Este efeito é pequeno, mas para os primeiros habitantes da América do Sul, que chegaram talvez há cerca de 50.000 anos (sítio arqueológico de Pedra Furada, no Piauí), não havia o que hoje chamamos de constelação do Cruzeiro do Sul (Fig. 3.33).

Tabela 3.2: Estrelas com maior movimento próprio aparente. Dados obtidos no *Extended Hipparcos Compilation* (XHIP). As quatro últimas estrelas foram estudadas por Halley no início do séc. XVIII.

nome	Asc.Reta (J2000)	Decl. (J2000)	$\mu_\alpha \cos \delta$ [""/ano]	μ_δ [""/ano]	μ [""/ano]	Paralaxe [""]	mag (V)
Estrela de Barnard	17 57 48.5	+04 41 36	-0.799	10.277	10.308	0.548	9.54
Estrela de Kapteyn	05 11 40.6	-45 01 06	6.544	-5.774	8.727	0.256	8.86
Lalande 22369	11 52 58.8	+37 43 07	4.004	-5.814	7.059	0.110	6.42
Lacaille 9352	23 05 52.0	-35 51 11	6.768	1.328	6.897	0.305	7.35
Gliese 1	00 05 24.4	-37 21 27	5.636	-2.338	6.102	0.230	8.56
61 Cygni A	21 06 53.9	+38 44 58	4.155	3.259	5.281	0.287	5.20
61 Cygni B	21 06 55.3	+38 44 31	4.117	3.128	5.171	0.286	6.05
Gliese 411	11 03 20.2	+35 58 12	-0.577	-4.762	4.797	0.393	7.49
ε Indi	22 03 21.7	-56 47 10	3.961	-2.539	4.705	0.276	4.69
Lalande 21258	11 05 28.6	+43 31 36	-4.418	0.943	4.518	0.206	8.82
40 Eridani (Keid)	04 15 16.3	-07 39 10	-2.240	-3.420	4.089	0.201	4.43
Proxima Cen	14 29 42.9	-62 40 46	-3.776	0.768	3.853	0.772	11.01
μ Cas (Marfak)	01 08 16.4	+54 55 13	3.412	-1.600	3.769	0.132	5.17
Estrela de Luyten	07 27 24.5	+05 13 33	0.573	-3.693	3.737	0.263	9.84
α Cen B	14 39 35.1	-60 50 14	-3.600	0.952	3.724	0.742	1.35
α Cen A	14 39 36.5	-60 50 02	-3.678	0.482	3.709	0.742	-0.01
α Boo (Arcturus)	14 15 30.7	+19 10 57	-1.093	-2.000	2.279	0.089	-0.05
α CMa (Sirius)	06 45 08.9	-16 42 58	-0.546	-1.223	1.339	0.038	-1.44
α Tau (Aldebaran)	04 35 55.2	+16 30 34	0.063	-0.189	0.199	0.049	0.87
α Ori (Betelgeuse)	05 55 10.3	+07 24 25	0.028	0.011	0.030	0.007	0.45

3.8.1 Efeito do movimento próprio nas coordenadas

Em geral, o movimento próprio das estrelas é dado em relação à ascensão reta e à declinação, μ_α e μ_δ , em segundos de arco por ano. A variação temporal de μ em um dado referencial é desprezível (mas será possivelmente mensurável a partir das próximas observações espaciais). Se uma estrela tem coordenadas α_0 e δ_0 em uma época t_0 , suas coordenadas em uma outra época t será, em primeira aproximação:

$$\begin{aligned}\alpha &= \mu_\alpha(t - t_0) + \alpha_0, \\ \delta &= \mu_\delta(t - t_0) + \delta_0.\end{aligned}\quad (3.61)$$

Notemos que os velocidades μ_α e μ_δ são dadas no mesmo equinócio (época) que as coordenadas α_0 e δ_0 . Isto significa que as coordenadas α e δ correspondem à posição do astro no momento t mas

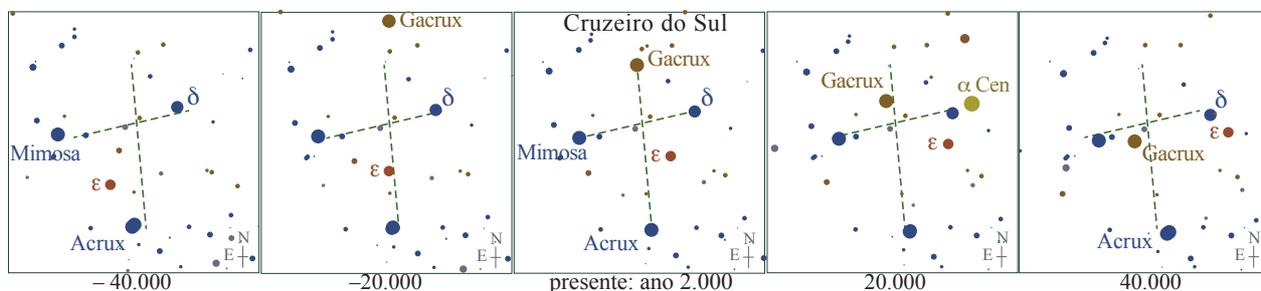


Figura 3.33: Movimento próprio das estrelas que compõem o Cruzeiro do Sul. Da esquerda para a direita vemos as configurações observadas há 40.000 anos no passado, no centro hoje (no ano 2.000) e a direita no futuro, daqui 40.000 anos. Note que daqui há 20 mil anos a estrela α Centauri estará muito próxima da posição ocupada atualmente pela estrela δ Cruxis (conhecida como *Pálida*). O campo mostrado tem cerca de $9,5^\circ$ de lado.

em relação ao equinócio t_0 : é necessária ainda a correção da precessão para que as coordenadas correspondam ao equinócio do momento t .

Em termos das componentes da velocidade própria, o *movimento próprio total*, μ , pode ser escrito como $\mu^2 = \mu_\alpha^2 \cos^2 \delta + \mu_\delta^2$.

Além das estrelas, os objetos extragalácticos (galáxias e quasares por exemplo) também se movimentam em relação a um referencial fixo e em relação a nós. Estima-se que o movimento próprio das galáxias mais longínquas deve ser inferior a 10^{-5} segundos de arco por ano. Contudo, para as galáxias próximas, sobretudo do grupo local, as primeiras medidas de movimento próprio começaram a produzirem resultados na segunda década do século **XXI**.

3.8.2 Movimento de estrelas próximas do Sistema Solar

A partir das coordenadas esféricas [por exemplo, ascensão reta e declinação, (α, δ)], paralaxe (ϖ), velocidade radial (v_r) e movimento próprio (μ_α, μ_δ), podemos determinar a posição em coordenadas cartesianas (x, y, z) e velocidade (v_x, v_y, v_z) de estrelas próximas e estimar seu movimento durante algumas dezenas de milênios. Tomando o Sol na origem, a relação é dada por:

$$\vec{r} = \begin{cases} x = r \cos \alpha \cos \delta; \\ y = r \sin \alpha \cos \delta; \\ z = r \sin \delta; \end{cases} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \begin{cases} v_x = v_r \cos \alpha \cos \delta - v_\alpha \sin \alpha - v_\delta \cos \alpha \sin \delta; \\ v_y = v_r \sin \alpha \cos \delta + v_\alpha \cos \alpha - v_\delta \sin \alpha \sin \delta; \\ v_z = v_r \sin \delta + v_\delta \cos \delta; \end{cases} \quad (3.62)$$

onde

$$v_\alpha = 4,7406 \mu_\alpha / \varpi \quad \text{e} \quad v_\delta = 4,7406 \mu_\delta / \varpi,$$

como na Eq. (3.60), para que todas as velocidades sejam dadas em km/s.

A distância da estrela é $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Se estivermos interessados no movimento das estrelas em um curto intervalo de tempo, menos de cerca de 1 milhão de anos, podemos ignorar a força que age na estrela devido ao resto da Galáxia. Neste caso, não há aceleração e o movimento das estrelas no espaço é retilíneo e uniforme. Assim, para descrever o movimento de estrelas próximas podemos escrever:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

onde \vec{r}_0 é a posição atual ($t = 0$) da estrela. Minimizando a equação acima, podemos determinar o momento em que a estrela passa pelo *periélio* (distância mais próxima do Sol):

$$t_{\min} = -\frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{v}}{v^2} = -977,82 \times 10^3 \frac{1}{\varpi} \frac{v_r}{v^2} \text{ anos}, \quad (3.63)$$

onde as velocidades são dadas em km/s e a paralaxe ϖ em segundos de arco. A distância mínima no periélio é:

$$d_{\min} = \frac{1}{\varpi} \frac{v_t}{v} \quad \text{onde} \quad v_{\text{perp}} = 4,7406 \frac{\sqrt{\mu_\alpha^2 + \mu_\delta^2}}{\varpi} \quad \text{e} \quad v = \sqrt{v_{\text{perp}}^2 + v_r^2},$$

lembrando que v_{perp} é a velocidade transversal da estrela e μ é dado em segundos de arco por ano.

A figura 3.34 mostra a evolução da distância de algumas estrelas que hoje estão próximas do Sol. Hoje, *Proxima Centauri* é a estrela com a menor distância, mas daqui a 36 mil anos Ross 248 será a estrela nesta situação e 9 mil anos depois, será a vez de Gliese 445.

Estrelas de massa comparável ou maior que a do Sol que passem nas vizinhanças da *Nuvem de Oort*⁶ podem perturbá-la e lançar cometas na direção central do Sistema Solar.

⁶A Nuvem de Oort é uma região ao redor do Sistema Solar onde postula-se a existência de corpos ricos em material volátil. Quando estes corpos são perturbados gravitacionalmente, suas trajetórias podem levá-los à região interna Sistema Solar, tornando-se, assim, cometas.

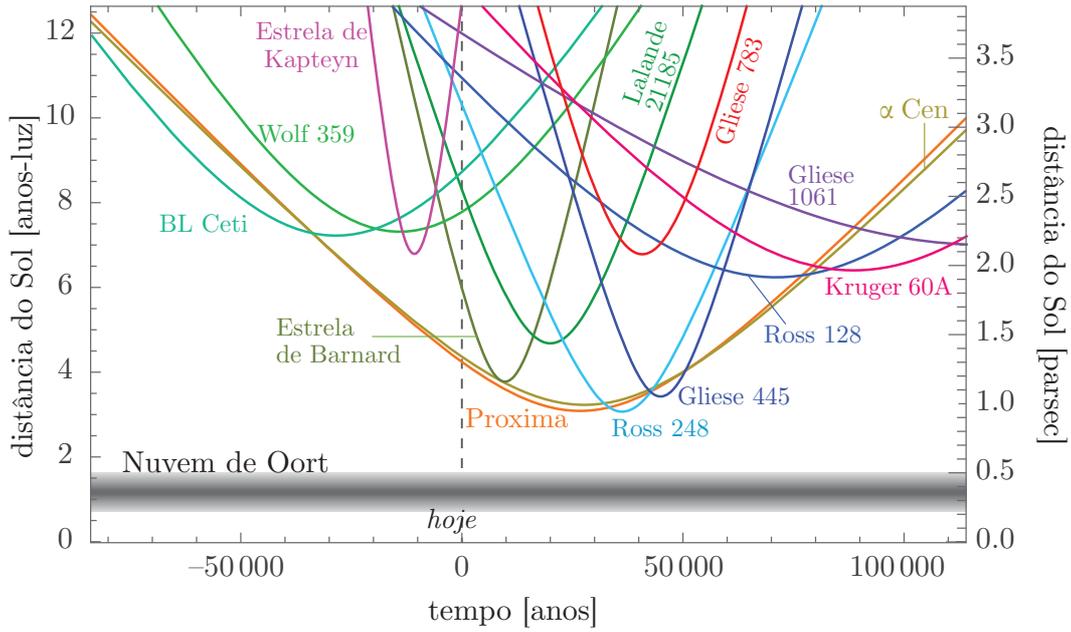


Figura 3.34: Distâncias relativas ao Sol de algumas estrelas próximas. A *Nuvem de Oort* está representada para dar uma referência de escala. Esta figura foi feita usando dados da compilação RECONS, www.recons.org.

3.9 Aberração da Luz

A aberração é um fenômeno que ocorre devido ao movimento relativo do observador ao astro observado e à velocidade finita de propagação da luz (mais precisamente, da radiação eletromagnética). Este efeito foi descoberto por James Bradley em 1728⁷ com observações da estrela Gama Draconis (Dragão). A figura 3.35 ilustra este efeito.

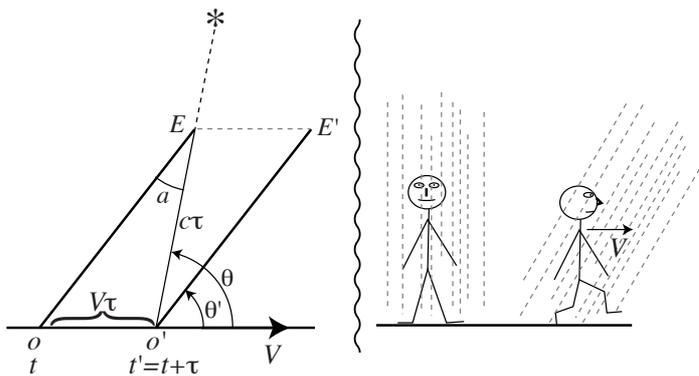


Figura 3.35: Esquerda: Aberração devida à velocidade V do observador. A diferença $\theta - \theta' = a$ é devida à aberração. Direita: Este efeito é análogo à mudança de direção aparente da chuva quando corremos ou ficamos parado.

Se a velocidade da luz fosse infinita ou se o observador estivesse imóvel em relação ao astro, este astro seria observado com um ângulo θ . Mas como o observador tem uma velocidade V , enquanto a luz do astro percorre o trecho EO' em um tempo τ , o observador se desloca de O a O' , percorrendo uma distância $V\tau$. Assim, o astro é observado em O' com um ângulo θ' .

A diferença entre os ângulos θ e θ' é o ângulo de aberração. Note que este ângulo não depende do comprimento EO' . Pela lei dos senos temos:

$$\text{sen}(\theta - \theta') = \frac{V}{c} \text{sen} \theta', \tag{3.64}$$

⁷Philosophical Transactions, 1727/1728, vol. 35, p. 637.

onde c é a velocidade da luz. Como $V \ll c$, ($V \sim 30$ km/s) a diferença $\theta - \theta'$ é pequena e o seno pode ser simplificado resultando em:

$$\theta - \theta' = \kappa \sin \theta'; \text{ com } \kappa = \frac{V}{c} \frac{1}{\sin 1''}, \quad (3.65)$$

onde κ é a *constante de aberração*. O termo $\sin 1''$ é utilizado para que κ tenha unidades de segundos de arco. Novamente, como θ e θ' são muito próximos, podemos empregar θ no lugar de θ' na expressão (3.65).

A observação do fenômeno de aberração (anual, discutido no próximo parágrafo) da luz é uma evidência direta do movimento da Terra ao redor do Sol. Logo, trata-se de uma evidência do sistema heliocêntrico defendido por Copérnico (Sec. 4.8.1), 185 anos antes da observação de Bradley.

3.9.1 Aberração anual

A aberração anual ou estelar é devido ao movimento da Terra em torno do Sol. Neste caso, o parâmetro de aberração tem o valor da velocidade média de translação da Terra:

$$\kappa = \frac{2\pi a}{Pc(1-e^2)^{1/2}} \frac{1}{\sin 1''} \quad (3.66)$$

onde a é o semi-eixo da órbita terrestre, P o período (ou seja, o ano sideral) e e é a excentricidade. O valor de κ é de $20'',49552$ para a época J2000.0 (a época deve ser dada porque tanto P , a e e têm variações seculares devido às perturbações planetárias).

O procedimento para se corrigir a aberração anual é muito semelhante à correção da paralaxe, isto é, trata-se de uma soma vetorial. Neste caso temos:

$$r'\mathbf{I}(\lambda', \beta') = r\mathbf{I}(\lambda, \beta) + r\frac{\mathbf{V}}{c}, \quad (3.67)$$

onde \mathbf{c} é a velocidade da luz no vácuo, $r'\mathbf{I}(\lambda', \beta')$ são as coordenadas *aparentes* (corrigida da aberração) e $r\mathbf{I}(\lambda, \beta)$ são as coordenadas verdadeiras. \mathbf{V} é a velocidade do observador em relação ao astro observado.

Vamos considerar agora o caso de um observador na Terra, portanto girando em torno do Sol. Neste caso, \mathbf{V} é a própria velocidade de translação da Terra em torno do Sol (supondo, inicialmente que a observação seja feita no sistema geocêntrico). Temos assim, em coordenadas eclípticas, o sistema de equações:

$$\begin{aligned} r' \cos \beta' \cos \lambda' &= r \frac{V_x}{c} + r \cos \beta \cos \lambda \\ r' \cos \beta' \sin \lambda' &= r \frac{V_y}{c} + r \cos \beta \sin \lambda \\ r' \sin \beta' &= 0 + r \sin \beta \end{aligned} \quad (3.68)$$

onde utilizamos o fato de V_z (a velocidade da Terra perpendicular à eclíptica) ser praticamente igual a zero. Utilizando novamente as transformações (3.47), nas equações (3.68) obtemos:

$$\begin{aligned} -\Delta r \cos \beta \cos \lambda + \Delta \beta r \cos \lambda \sin \beta + \Delta \lambda r \cos \beta \sin \lambda &= r \frac{V_x}{c} \\ -\Delta \lambda r \cos \beta \cos \lambda - \Delta r \cos \beta \sin \lambda + \Delta \beta r \sin \beta \sin \lambda &= r \frac{V_y}{c} \\ 0 - \Delta \beta r \cos \beta - \Delta r \sin \beta &= 0, \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde eliminamos os termos infinitesimais de ordem superior a um. A equação matricial acima corresponde a um sistema de três equações que pode ser resolvida facilmente, resultando em:

$$\begin{aligned} \Delta \lambda \cos \beta &= \frac{V_x}{c} \sin \lambda - \frac{V_y}{c} \cos \lambda \\ \Delta \beta &= \sin \beta \left(\frac{V_x}{c} \cos \lambda + \frac{V_y}{c} \sin \lambda \right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

A velocidade da Terra em torno do Sol é dada pela derivada temporal da posição do raio vetor R_{\odot} (que nos dá a posição heliocêntrica da Terra). Para uma trajetória elíptica temos:

$$\begin{aligned}\frac{V_x}{c} &= -\kappa(\sin \lambda_{\odot} + e \sin w) \\ \frac{V_y}{c} &= \kappa(\cos \lambda_{\odot} + e \cos w) \\ \frac{V_z}{c} &= 0\end{aligned}\tag{3.71}$$

onde λ_{\odot} , w e e são a longitude do Sol, a longitude do periélio e a excentricidade da órbita terrestre, respectivamente. Assim, podemos escrever finalmente:

$$\begin{aligned}\Delta \lambda \cos \beta &= -\kappa[\cos(\lambda_{\odot} - \lambda) + e \cos(w - \lambda)] \\ \Delta \beta &= -\kappa \sin \beta[\sin(\lambda_{\odot} - \lambda) + e \sin(w - \lambda)].\end{aligned}\tag{3.72}$$

O efeito da aberração anual é fazer com que as estrelas descrevam uma elipse na esfera celeste, de forma análoga à paralaxe anual. Se desprezarmos a elipticidade da órbita terrestre, a expressão acima se simplifica substituindo $e = 0$.

Em coordenadas equatoriais, o efeito da aberração anual é dado por:

$$\begin{aligned}\Delta \alpha \cos \delta &= -\kappa[(\sin \lambda_{\odot} + e \sin w) \sin \alpha + (\cos \lambda_{\odot} + e \cos w) \cos \varepsilon \cos \alpha] \\ \Delta \delta &= -\kappa[(\sin \lambda_{\odot} + e \sin w) \cos \alpha \sin \delta + (\cos \lambda_{\odot} + e \cos w) \\ &\quad (\sin \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \sin \alpha \sin \delta)].\end{aligned}\tag{3.73}$$

3.9.2 Aberração planetária

No caso da aberração anual, nós só levamos em consideração o movimento da Terra em torno do Sol, desprezando o movimento próprio das estrelas. No caso dos astros do Sistema Solar é necessário levarmos também em conta seus movimentos. Desta forma devemos reescrever a equação (3.67) da seguinte forma:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + r \frac{\mathbf{V}_{\text{Terra}} - \mathbf{V}_p}{c},\tag{3.74}$$

Por outro lado, para os corpos do Sistema Solar conhecemos com grande precisão a suas posições e, principalmente, seus movimentos. Por isso, ao invés de calcularmos a correção da aberração planetária utilizando a Eq. (3.74) e o método descrito acima para a aberração anual, o que se faz é calcularmos as posições tanto da Terra como do astro em questão a um instante δt anterior ao tempo que queremos. Este intervalo δt é dado por $c \times r$, onde c é a velocidade da luz e r a distância geocêntrica do astro. Em outras palavras, levamos em consideração a velocidade finita da luz calculando as posições da Terra e do astro em um instante anterior ao da observação. Isto só é possível e relevante no caso de astros com movimento e posições bem determinados, como os corpos do Sistema Solar.

3.9.3 Aberração secular

O Sol, como todas as estrelas da Via Láctea, tem um movimento próprio em relação ao centro da Galáxia. Um sistema de referência centrado na Galáxia seria uma melhor aproximação de um referencial inercial do que um sistema ligado ao Sol.

Isto significa que o movimento do Sol na Via Láctea (e, conseqüentemente, o movimento da Terra) produz um efeito de aberração que chamamos de *aberração secular*. Este efeito, contudo, não é levado em conta na prática.

3.9.4 Aberração diária

A aberração diária é devido ao movimento de rotação da Terra em torno de seu eixo. Como a velocidade de rotação da Terra ($\sim 0,46$ km/s) é menor que sua velocidade de translação, este efeito é proporcionalmente menor que a aberração anual.

Outra diferença é que o eixo da rotação não é o mesmo que o eixo de translação; portanto a correção da aberração diária é feita de forma mais simples em coordenadas horárias. O procedimento para deduzirmos a correção devido à aberração diária é exatamente como para a aberração anual (soma vetorial).

Devemos lembrar que a velocidade de rotação de um observador sobre a Terra depende de sua distância geocêntrica (que podemos considerar constante sobre toda a Terra) e sua latitude geográfica, φ . A velocidade do observador é, portanto, $V = 2\pi\rho \cos \varphi / 86.164$, onde 86.164 é o número aproximado de segundos SI em um dia sideral e ρ é a distância geocêntrica.

As equações que obtemos para a correção da aberração diária são:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha \cos \delta &= -\kappa' \cos \varphi \cos H \\ \Delta\delta &= -\kappa' \sin \delta \sin \varphi \sin H,\end{aligned}\tag{3.75}$$

onde φ é a latitude geográfica do observador, $H = T_s - \alpha$ (o tempo sideral T_s é local) e κ' é a constante de aberração do movimento diário, $\kappa' = 0''320$.

3.10 Desvio gravitacional da luz

Desde Newton, alguns físicos cogitaram que a trajetória da luz poderia ser afetada pela gravitação. Em 1911, Einstein faz uma previsão, baseada no que viria a ser alguns anos mais tarde a Teoria da Relatividade Geral, que os raios de luz de uma estrela distante sofreriam um desvio em sua trajetória devido à massa do Sol, alterando sua posição aparente na esfera celeste.

Em 1915, com a versão final da Teoria da Relatividade Geral, Einstein recalcula este efeito (corrigindo-o em relação ao cálculo 1911). O desvio gravitacional da luz foi confirmado experimentalmente durante um eclipse total, na manhã de 29 de maio de 1919 no Ceará, quando foi observado que as estrelas próximas (em distância angular) do Sol apresentavam um desvio em suas posições esperadas.

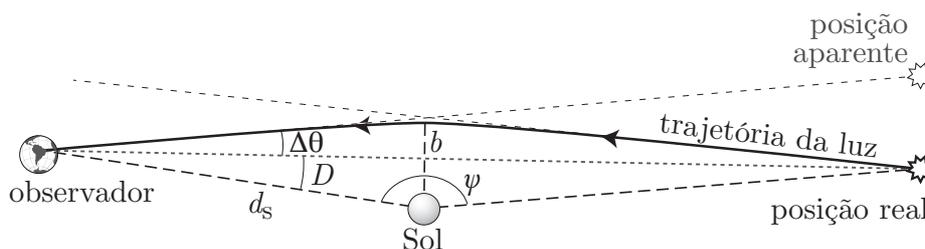


Figura 3.36: Desvio gravitacional da luz devido a presença de um corpo massivo (no caso, o Sol). Sem a presença do Sol, a luz da estrela seguiria a linha pontilhada horizontal. O astro é observado em uma posição aparente distante $\Delta\theta$ da posição verdadeira. O ângulo ψ é a elongação⁹ heliocêntrica do astro em relação à Terra, D é a elongação geocêntrica em relação ao Sol e d_s é a distância Terra-Sol (1 unidade astronômica). A menor distância entre a trajetória da luz e o Sol, b , é o parâmetro de impacto.

Este fenômeno ocorre sempre que um fóton (não necessariamente de luz visível, podendo ser raios-X, rádio, etc...) passa nas proximidades de um corpo massivo (Fig. 3.36). É este desvio gravitacional da luz que produz os chamados *arcos gravitacionais* que são imagens de galáxias longínquas deformadas devido ao campo gravitacional de algum objeto que se encontre entre nós e a galáxia (por exemplo, um aglomerado de galáxias que funciona como uma *lente gravitacional*).

No caso da astronomia de posição, estamos interessados na mudança da posição aparente de astros cujos raios luminosos são desviados pela massa do Sol. A teoria geral da relatividade prevê que o desvio gravitacional da luz será¹⁰:

$$\Delta\theta = \frac{2GM_{\odot}}{c^2 d_s} \frac{\sin\psi}{1 + \cos\psi}; \quad \left(\text{obs.: } \frac{\sin\psi}{1 + \cos\psi} \equiv \tan\frac{\psi}{2}\right), \quad (3.76)$$

onde ψ é o ângulo entre o astro e a Terra visto do Sol, M_{\odot} e d_s são a massa do Sol e sua distância da Terra; G e c são a constante da gravitação e a velocidade da luz no vácuo, respectivamente. A constante na Eq. (3.76) vale $0''00407$. O desvio tem um valor mínimo (e nulo) quando $\psi = 0$, o astro está exatamente entre o Sol e a Terra (o que ocorre com os planetas internos e a Lua).

Para os astros que estão a uma distância muito maior que a distância Terra–Sol (qualquer astro fora do Sistema Solar e, em primeira aproximação, os planetas mais distantes), podemos dizer que $D \approx 180^\circ - \psi$, onde D é a *elongação* geocêntrica do astro (a distância angular entre o Sol e o astro). Podemos dar, então, o desvio gravitacional da luz em função da elongação:

D	90°	45°	20°	5°	2°	1°	$0;5$	$0;2666$
$\Delta\theta$	$0''00407$	$0''0098$	$0''023$	$0''093$	$0''233$	$0''466$	$0''933$	$1''751$

Note que quando a elongação é menor do que $\approx 0;2666 = 16'$ o astro está oculto, atrás do Sol (este ângulo corresponde ao raio do Sol observado a 1 U.A.). A figura 3.37 ilustra o efeito de desvio gravitacional da luz na posição aparente das estrelas.

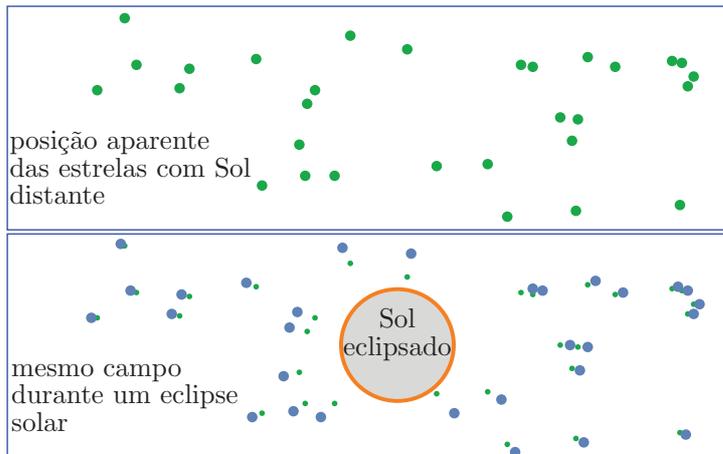


Figura 3.37: Acima: Posição aparente de algumas estrelas quando o Sol está distante (distância angular). Abaixo: O mesmo campo quando o Sol está presente (por exemplo, observável durante um eclipse total do Sol). Os pontos verdes representam a posição do painel acima, sem o efeito gravitacional do Sol. As estrelas tendem a se afastar do corpo massivo (a “lente gravitacional”). O efeito aqui está bem exagerado para efeito de ilustração.

Quando consideramos a trajetória da luz de um astro distante muito próxima da superfície do Sol, podemos expressar o desvio gravitacional pela expressão:

$$\Delta\theta = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 b},$$

onde b é chamado “parâmetro de impacto” (veja Fig. 3.76). Para uma trajetória rasante, $b = R_{\odot}$, onde R_{\odot} é raio do Sol. Assim, temos

$$\Delta\theta = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} = 1''751, \quad (\text{caso rasante ao Sol}),$$

que é equivalente ao valor da tabela acima para $D = 16'$, pois $R_{\odot}/d_s = D = 180^\circ - \psi$ e $\sin\psi/(1 + \cos\psi) \rightarrow 2/D$ para $D \ll 1$.

¹⁰Veja o *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*.

A princípio, a trajetória da luz de um astro também é afetada pelo campo gravitacional da Terra, onde se encontra o observador. Contudo este efeito é sempre inferior a $0'',0003$ e pode ser desprezado sem problemas.

Em coordenadas equatoriais, o desvio gravitacional é calculado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\cos D &= \sin \delta \sin \delta_{\odot} + \cos \delta \cos \delta_{\odot} \cos (\alpha - \alpha_{\odot}) ; \\ \Delta\alpha &= 0,000271 \frac{\cos \delta_{\odot} \sin(\alpha - \alpha_{\odot})}{(1 - \cos D) \cos \delta} \\ \Delta\delta &= 0'',00407 \frac{\sin \delta \cos \delta_{\odot} \cos(\alpha - \alpha_{\odot}) - \cos \delta \sin \delta_{\odot}}{(1 - \cos D)},\end{aligned}\tag{3.77}$$

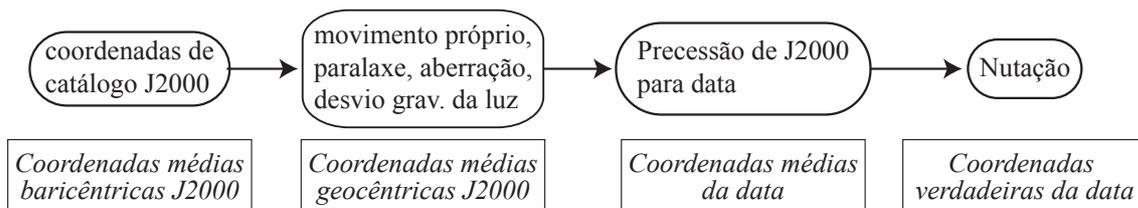
onde α_{\odot} e δ_{\odot} são as coordenadas geocêntricas do Sol.

No caso da Lua, que está bem mais próxima da Terra, mas tem uma massa muito menor do que o Sol, o desvio gravitacional é cerca de 68,7 mil vezes menor. O desvio da posição de uma estrela cuja trajetória da luz passa rasante à superfície da Lua é de apenas 25 microssegundos de arco.

3.11 Redução das coordenadas celestes: Redução ao dia

A transformação das coordenadas celestes de um astro entre dois sistemas de referências, em geral de uma posição catalogada para a posição aparente em uma data arbitrária, é chamada *redução ao dia*. A redução é um procedimento que envolve a precessão, nutação, aberração da luz, paralaxe, movimento próprio, e desvio gravitacional da luz.

Atualmente, as coordenadas das estrelas são geralmente dadas no chamado referencial J2000, por exemplo baseado no catálogo FK5 (*Fifth Fundamental Catalogue*) ou ICRS, ambos em relação ao equinócio médio de 01/01/2000, com origem no baricentro do Sistema Solar. O procedimento da redução das coordenadas está resumido abaixo:



A partir das coordenadas verdadeiras da data, podemos ainda obter as *coordenadas aparentes* topocêntricas, corrigindo as coordenadas pelo efeito da aberração diária, refração atmosférica e da paralaxe diária, se for necessário.

Para dar um exemplo, vamos calcular as coordenadas verdadeiras da Estrela de Barnard para o dia 13/11/2021 às 20 h UT. Iniciamos listando as coordenadas médias da estrela:

Coordenadas: asc. Ret.: $17^{\text{h}}57^{\text{m}}48,498$; decl.: $+04^{\circ}41'36'',21$ (J2000).

Movimento próprio: $\mu_{\alpha} = -0,7986$; $\mu_{\delta} = 10,3281$ ["/ano].

Paralaxe: $0.5483''$.

A dia juliana é $JD = 2.459.532,333$ (lembrando que JD começa ao meio-dia). Para este caso, nós temos as seguintes correções:

	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
Mov. Próprio	-17,4920	226,1896
Aberração	-16,5245	5,9612
Paralaxe	-0,3393	-0,2033
Desvio grav.	0,0083	0,0039
Nutação	-14,3499	-4,2829

(em segundos de arco)

Obtemos assim as coordenadas geocêntricas médias J2000:

$$\alpha = 17^{\text{h}}57^{\text{m}}46,^{\text{s}}209 ; \delta = +4^{\circ}45'28'',19 \text{ (J2000)}.$$

As coordenadas geocêntricas médias da data são obtidas aplicando a correção da precessão:

$$\alpha = 17^{\text{h}}58^{\text{m}}51,^{\text{s}}025 ; \delta = +4^{\circ}45'24'',96 \text{ (data)}.$$

E, finalmente, as coordenadas geocêntricas verdadeiras são obtidas aplicando a correção da nutação:

$$\alpha = 17^{\text{h}}58^{\text{m}}50,^{\text{s}}068 ; \delta = +4^{\circ}45'20'',68 \text{ (data)}.$$

A partir deste ponto poderíamos calcular as coordenadas aparentes topocêntricas para um observador na superfície da Terra, dada suas coordenadas geográficas.



4.1 Introdução

A astronomia é tão antiga quanto a História. Contudo, no início, a astronomia tratava apenas de observações e da previsão de alguns fenômenos celestes de forma puramente empírica. Não havia a preocupação em criar-se teorias que explicassem os fenômenos observados. Isto não impediu que civilizações na Babilônia, China, Egito, México, etc..., desenvolvessem um conhecimento sofisticado do movimento aparente do Sol, da Lua e dos planetas.

Foi somente a partir do século VIII A.C., na Grécia, que verdadeiras teorias cosmológicas começaram a serem criadas com o intuito de não apenas descrever as observações, mas explicá-las a partir de princípios básicos. É claro, não podemos esquecer que foram as observações acumuladas por séculos pelos povos da Mesopotâmia e do Egito que possibilitaram de maneira fundamental o desenvolvimento da astronomia como ciência na Grécia clássica.

É importante lembrar que a evolução das ideias astronômicas não avança de maneira linear, isto é, algumas ideias surgem para depois desaparecerem e apenas muito tempo depois voltarem; as vezes conceitos contraditórios surgem ao mesmo tempo para que um, nem sempre o fisicamente correto, prevaleça. A figura 4.1 nos dá uma linha do tempo dos principais filósofos e astrônomos gregos que contribuíram para a astronomia.

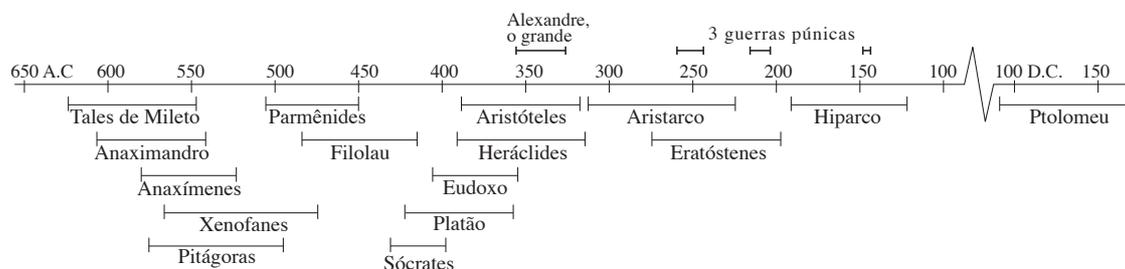


Figura 4.1: Linha do tempo do principais filósofos da Grécia clássica que tiveram destaque na astronomia.

4.2 Grécia clássica

4.2.1 Escola jônica

Grande parte do nosso conhecimento do pensamento e filosofia da Grécia pré-socrática (anterior a cerca de 400 A.C.) são de segunda mão: em muitos casos são traduções ou comentários feitos por autores mais recentes que chegaram a nós de maneira muito fragmentada.

No século VIII A.C., na Jônia, região atualmente na costa oeste da Turquia, uma importante escola filosófica começou a se desenvolver. Esta era uma região próspera devido à agricultura e comércio marítimo, ligando a Mesopotâmia, Egito e Grécia.

O que se sabe das ideias do filósofo jônico **Tales de Mileto** (~ 624–547 A.C.) vieram de relatos de terceiros. Ele acreditava que a Terra fosse um disco circular achatado flutuando como

uma madeira em um oceano cuja a água seria o princípio de tudo e limitado pela abóbada celeste. Chega a ser surpreendente que Tales tenha sido capaz de prever um eclipse do Sol (como se alega)¹ tendo a concepção de mundo que tinha. Se realmente ele pôde prever este eclipse, talvez isto tenha sido uma consequência do conhecimento adquirido em suas viagens pelo Egito.

Um contemporâneo de Tales, **Anaximandro** (~ 611–546 A.C.) é reputado por ter introduzido a utilização do *gnômon* (conhecer em grego; é uma vareta do relógio solar utilizada para se medir o azimute e a altura do Sol através de sua sombra) na Grécia. Anaximandro acreditava que a Terra deveria estar em equilíbrio no centro do Universo pois nesta posição a Terra não cairia em lugar algum. A Terra seria um cilindro e o céu seria esférico (e não um hemisfério), formado por várias camadas a distâncias diferentes, onde o Sol se encontraria na mais distante e as estrelas fixas na camada mais próxima. A Lua estaria numa camada intermediária. Isto mostra que Anaximandro desconhecia o fenômeno de ocultação das estrelas pela Lua (o que só é possível se a Lua estiver mais próxima que as estrelas), mas tem o mérito da introdução da ideia de distância dos astros à Terra.

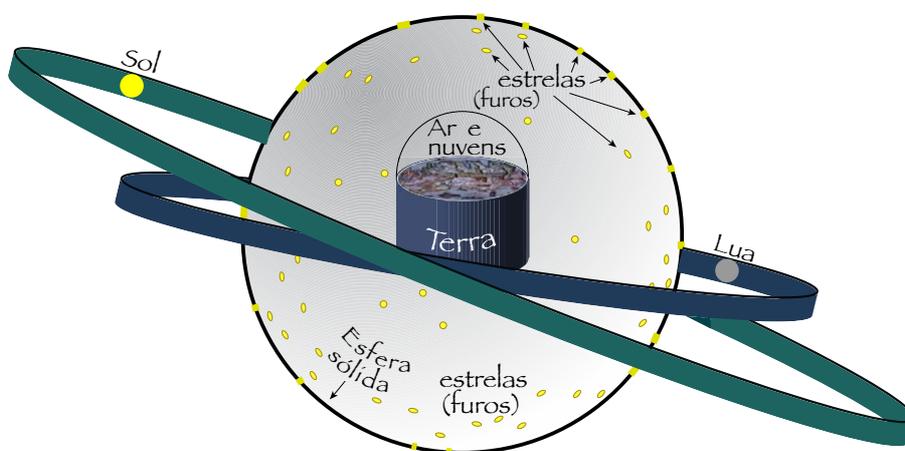


Figura 4.2: Universo de Anaximandro. A Terra fica no centro do Universo, as estrelas são furos em uma esfera sólida, por onde escapa a luz. Em seguida vem um anel com a Lua e um anel mais distante com o Sol.

Anaxímenes de Mileto (585–526 A.C.), também da escola jônica, acreditava que as estrelas estariam “pregadas” na esfera celeste, que seria um sólido cristalino, e a Terra seria um disco achatado flutuando no ar. Esta era a visão de **Leucipo de Mileto** (~ 480–420(?) A.C.), onde a Terra é o hemisfério de uma esfera e, acima, o ar preenche o hemisfério superior (Fig. 4.3). Neste caso, as estrelas preenchem a última esfera.

Assim, para a escola jônica, a Terra era um disco achatado que estaria flutuando no Universo ou no seu centro, as estrelas eram “pregadas” na abóbada celeste e os planetas eram mencionados apenas superficialmente. Todos os astros seriam derivados de substâncias primárias (como o ar, fogo e água).

4.2.2 Escola eleática

A escola eleática foi fundada por **Xenofanes de Colophon** (~570–478 A.C.) e desenvolvida por **Parmênides** (nascido em Elea 504–450 A.C.). Esta é a época em que Atenas foi o maior centro filosófico do mundo antigo.

Xenofanes acreditava em uma Terra plana e sem limites, ancorada no infinito, com o ar acima também infinito. O Sol, estrelas e cometas seriam “nuvens” condensadas nesta atmosfera.

¹Segundo o historiador grego Herodotus (~ 484–425 A.C.), Tales teria previsto o eclipse que ocorreu em 28 de Maio de 585 A.C., que passou pelo norte da Grécia, Macedônia e Turquia, no final da tarde.

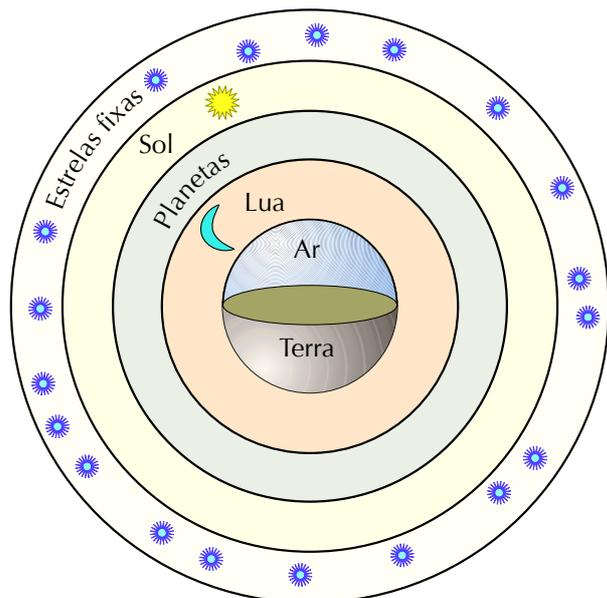


Figura 4.3: Modelo de Universo de Leucipo. A Terra é uma semi-esfera e os astros são fixados em esferas concêntricas transparentes.

A trajetória dos astros deveria ser retilínea sendo que, a aparência circular do movimento diário seria uma ilusão devida à distância que nos separa destes astros.

Apesar da influência de Xenofanes, Parmênides acreditava que a Terra era uma esfera o que foi sem dúvida um dos maiores passos no avanço da ciência. Ele foi provavelmente o primeiro a dividir a Terra em cinco zonas: uma tropical (ou tórrida), duas temperadas e duas glaciais. A noção de esfericidade provavelmente surgiu a partir dos relatos de viajantes que descreviam estrelas visíveis no Sul (Egito, por exemplo) mas invisíveis na Grécia como a brilhante Canopus (declinação $\approx -52^\circ 42'$, J2000) ou estrelas que se tornam circumpolar quando viajamos para o norte. Também eram relatadas mudanças na duração do dia; no verão, os dias eram mais “longos” nas regiões mais ao norte. Parmênides também considerava o Universo como uma série de camadas esféricas concêntricas, com a Terra no centro. Ele também sabia que as “estrelas” vespertina e matutina (ou estrela d’alva) eram o mesmo objeto (que hoje bem sabemos, é Vênus) e que a Lua brilhava graças à luz do Sol. Finalmente, ele acreditava que o Sol e a Lua seriam formados por matéria que havia se desprendido da Via Láctea (o Sol feito por matéria quente e a Lua, fria). Curiosamente, como Anaximandro, Parmênides acreditava que as estrelas estariam mais próximas da Terra que o Sol e a Lua.

Notemos apenas que, nesta mesma época (século V A.C.), surgiram as teorias da matéria composta por átomos (minúsculas partículas indivisíveis, a chamada *teoria atomista*) defendidas por Leucipo (já citado acima), Empédocles e Demócrito (que foi aluno de Leucipo).

Nascido na ilha de Chios (Quios em português) **Oenópides** (~ 420 – 490 A.C.) viveu em Atenas durante o século V A.C. A ele é atribuído a primeira determinação quantitativa da obliquidade da eclíptica (inclinação do eixo de rotação terrestre) por volta de 450 A.C. Sua medida era expressa como “a distância de um lado do pentadodecágono” (polígono de 15 lados iguais), isto é, $360^\circ/15 = 24^\circ$ (nesta época, a obliquidade média da eclíptica era por volta de $23^\circ 75'$). Esta forma de expressar um ângulo a partir de figuras geométricas é provavelmente de uma influência pitagórica.

A medida da obliquidade da eclíptica em relação ao equador celeste pode ser feita medindo-se o comprimento da sombra de um gnômon ao meio-dia nos dias de solstício (Fig. 4.4). A altura do Sol, h_\odot , é dada por:

$$\tan h_\odot = \frac{\text{tamanho do gnômon}}{\text{sombra do gnômon}}.$$

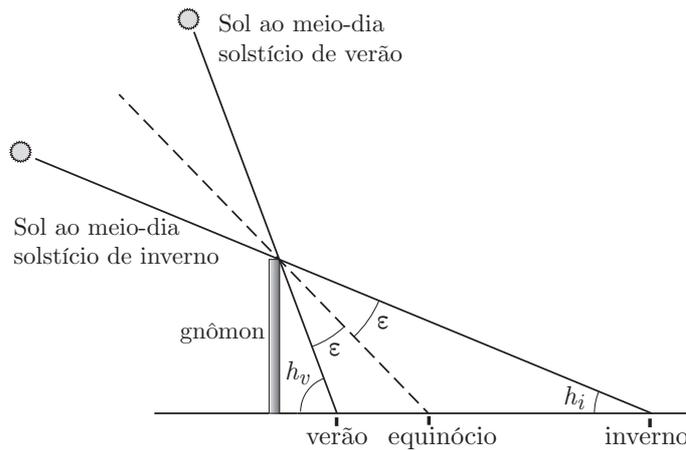


Figura 4.4: Medida da obliquidade da eclíptica (ε , inclinação do eixo de rotação da Terra) com medidas da sombra de um gnômon nos solstícios. Provavelmente, assim foram feitas as primeiras medidas na Grécia. Esta figura vale para latitudes maiores (em módulo) que ε .

Medindo esta altura nos solstícios temos h_v e h_i no verão e inverno, respectivamente. Observando os triângulos na figura temos:

$$2\varepsilon + (180^\circ - h_v) + h_i = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{h_v - h_i}{2}.$$

A fórmula acima é adequada para latitudes maiores que ε , isto é, fora da zona tropical. Nos trópicos temos:

$$2\varepsilon + h_v + h_i = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 90^\circ - \frac{h_v + h_i}{2}.$$

Nesta mesma época, **Hipócrates de Quios** (que também viveu em Atenas) especulava sobre a natureza dos cometas e da Via Láctea. Sua ideia era que existia apenas um cometa que sempre voltava para a Terra.

4.2.3 Escola pitagórica

A escola pitagórica foi fundada por **Pitágoras** (nascido em 580 A.C. em Samos e morto em Metaponto por volta do ano 497 A.C.) no sul da Itália mais ou menos na mesma época do florescimento da escola eleática. Da mesma forma que a maioria de seus contemporâneos, nada do que foi feito por Pitágoras chegou a nós diretamente. A escola pitagórica teve grande influência no pensamento do mundo antigo não apenas pela sua longevidade (cerca de dois séculos como escola propriamente dita e até o século II D.C. havia seguidores da escola pitagórica) como também pelo fato de seus membros terem uma participação política importante.

A principal ideia da filosofia de Pitágoras era de que o Universo era governado pela matemática. A regularidade dos movimentos celestes e os intervalos regulares das harmonias musicais levou os pitagóricos à conclusão de que cada um dos planetas, assim como as estrelas, estaria em esferas cujo movimento produziriam uma nota musical. Esta música celestial seria, é claro, impossível de ser escutada pelos seres humanos.

Segundo Pitágoras, o Universo seria formado de quatro elementos (terra, água, ar e fogo), tendo uma forma esférica assim como a Terra, também esférica e localizada no centro. É possível que tenha sido Pitágoras o primeiro a utilizar a palavra “cosmo” (em grego, *κόσμος*) para designar o firmamento. Pitágoras também reconheceu que as “estrelas” matutina e vespertina eram o mesmo corpo celeste (Vênus), que a Lua brilhava refletindo a luz solar e que os planetas tinham uma trajetória inclinada em relação ao equador celeste (o que hoje em dia explicamos pelo fato dos planetas do sistema solar estarem praticamente confinados a um plano, o plano da eclíptica).

Foi provavelmente na escola pitagórica que o movimento de Oeste para Leste dos planetas foi descoberto (para a escola jônica, acreditava-se que os planetas se moviam de Leste para Oeste, mas as vezes mais lentamente que as estrelas fixas).

Filolau (ou Philolaus, nascido no sul da Itália por volta de 480 A.C.), discípulo de Pitágoras, foi provavelmente o primeiro filósofo grego a sugerir que a Terra não se encontra no centro do Universo. Segundo Filolau, no centro do Universo existiria um fogo central chamado Héstitia (*Ἑστία*). A Terra (esférica) giraria diariamente em torno deste fogo central, mostrando sempre a mesma face, o lado não habitável; a Europa e o mundo conhecido dos gregos ficaria do lado oposto ao fogo central. É interessante notar que, apesar da teoria de Filolau implicar na rotação da Terra em torno de seu eixo, ele não reconheceu este fato explicitamente. A Lua, o Sol e os planetas também girariam em torno de Héstitia, além da órbita terrestre. A partir do fogo central nós teríamos a Terra, a Lua, o Sol, Vênus, Mercúrio, Marte, Júpiter e Saturno.

Filolau também supôs a existência de uma “anti-Terra”, um mundo que eventualmente se localizaria entre a Terra e o fogo central (portanto invisível da Europa). A conjectura desta anti-Terra foi motivada em parte pelo fato do número dez ser considerado perfeito pelos pitagóricos. Deveria haver, portanto, dez corpos no Universo – a Terra, a Lua, o Sol, os cinco planetas conhecidos e a esfera das estrelas fixas somavam apenas nove.

Meton viveu em Atenas no século possivelmente entre \sim 465 e 385 A.C. (as datas são muito incertas). Por volta de 432 A.C. Meton descobriu o ciclo que leva seu nome, em que 235 lunações (cerca de 6939 dias e 16,5 horas) correspondem a 19 anos (veja Sec. 2.1.6). Nenhum trabalho de Meton chegou diretamente até nós.

4.2.4 Sistema de Eudoxo

O matemático e filósofo **Eudoxo** nasceu em Cnidus, na Ásia Menor por volta do ano 408 A.C. e morreu em 355 A.C. Eudoxo viajou muito, estudando vários meses com Platão (Atenas 427–347 A.C.), passando mais de um ano no Egito e na volta construiu um observatório próprio. Ele foi o primeiro a propor um ciclo solar de 4 anos, com três anos de 365 dias e um ano de 366, ciclo este que somente foi posto em prática pela primeira vez por Júlio César (o calendário Juliano) cerca de 3 séculos mais tarde. Ele também contribuiu para as primeiras descrições sistemáticas das constelações.

Mas a maior contribuição de Eudoxo foi o seu sistema de *esferas homocêntricas* (de mesmo centro), que daria uma explicação teórica aos movimentos irregulares dos astros. De acordo com os paradigmas da época, Eudoxo acreditava que cada planeta, o Sol e a Lua estavam fixados em esferas, com a Terra no centro. Além disto, o único movimento permissível seriam circulares e regulares (as esferas de cada astro girariam uniformemente).

A inovação de Eudoxo foi supor que cada planeta estaria ligado a várias esferas homocêntricas, e não apenas uma. Cada uma destas esferas giraria de forma uniforme, mas a composição de seus movimentos (que seriam independentes) produziria o movimento irregular observado. Se Eudoxo acreditava ou não na existência física destas esferas, não sabemos.

Para os planetas, Eudoxo imaginou quatro esferas: a primeira que gira em um dia tendo um eixo polar (isto reproduz o movimento diário de Leste para Oeste); uma segunda esfera cujo eixo seria perpendicular à eclíptica com rotação oposta à primeira (responsável pelo fato dos planetas percorrerem a eclíptica de Oeste para Leste, e não o equador celeste). Uma terceira esfera é necessária para produzir o movimento retrógrado dos planetas e a quarta esfera, ligada à terceira, seria responsável pela pequena inclinação dos planetas em relação à eclíptica. Para o Sol e a Lua, apenas três esferas homocêntricas eram necessárias (figura 4.5).

Apesar de sofisticada, a teoria de Eudoxo era capaz apenas de explicar o movimento dos planetas de modo aproximado; no caso de Marte a teoria das esferas homocêntricas apresentava grandes divergências. Contudo, esta teoria podia explicar relativamente bem as diferenças de duração das estações do ano. Dado o estado das observações da época, esta teoria foi sem dúvida um marco na astronomia de posição.

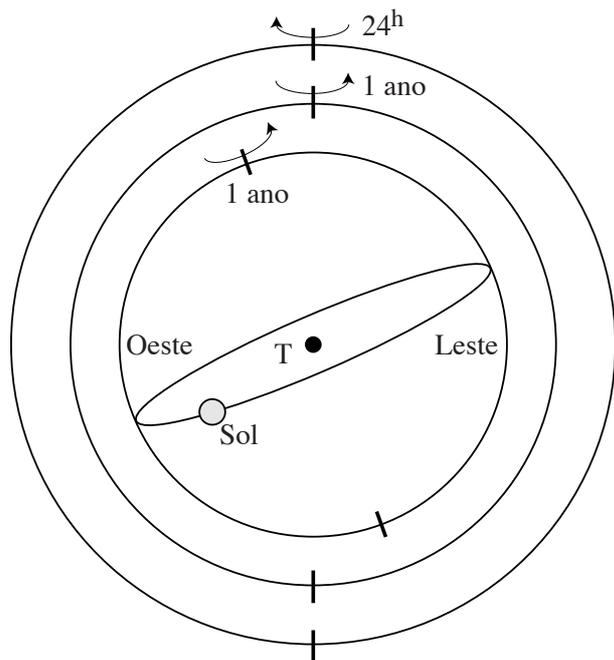


Figura 4.5: Movimento do Sol segundo a teoria das esferas homocêntricas de Eudoxo. As esferas têm mesmo raio e foram desenhadas desta forma para maior clareza. A primeira esfera (mais externa no desenho), é responsável pelo movimento aparente diário; as duas outras esferas reproduzem o movimento aparente anual do Sol. A inclinação da terceira esfera (mais central) é igual à obliquidade da eclíptica. A Terra fica imóvel no centro.

4.2.5 Sistema de Aristóteles

Aristóteles (Stagira, Macedônia 384–322 A.C.), foi discípulo de Platão (e tutor de Alexandre Magno da Macedônia), mas no fim da vida desenvolveu seu trabalho em direções menos espirituais que as de seu mestre (o qual dizia que as ideias e os espíritos são o mundo real, e os fenômenos visíveis uma simples representação grosseira do mundo espiritual). É graças a Aristóteles que nós conhecemos muito da Grécia pré-socrática.

Aristóteles acreditava que o Universo era esférico e finito, composto por quatro elementos básicos: água, terra, fogo e ar. A Terra, esférica, ocupava a posição central e era imóvel. Aristóteles também acreditava que os planetas estivessem fixados em esferas e adotou o sistema de esferas homocêntricas de Eudoxo. Contudo, Aristóteles acreditava que estas esferas eram reais, feitas por cristais transparentes. Aristóteles ainda desenvolveu o sistema de Eudoxo acrescentando mais esferas a alguns planetas (em particular Marte), melhorando assim o acordo entre observação e teoria. O modelo de Universo de Aristóteles (Fig. 4.6) conheceu um tal sucesso que, ainda hoje, quando fazemos referência ao modelo onde a Terra está imóvel no centro do Universo, dizemos *modelo aristotélico*.

Além disto, Aristóteles compreendia que as fases da Lua dependiam de quanto a Lua é iluminada pelo Sol, em relação a um observador na Terra. Também explicou que os eclipses do Sol ocorrem devido à ocultação deste pela Lua. Da mesma forma, um eclipse da Lua ocorreria quando esta passa pela sombra da Terra. Observando que a sombra da Terra projetada na Lua era esférica, Aristóteles dava outro argumento para a esfericidade da Terra. Como Parmênides, Aristóteles também argumenta sobre a esfericidade terrestre notando que algumas estrelas visíveis do Egito, não o são da Grécia. Aristóteles chega mesmo a citar o trabalho de matemáticos (infelizmente sem citar os nomes) que estimam em 400.000 *stadia* (~ 63.000 km) a circunferência da Terra.

4.3 Sistema híbrido de Heráclides

Heráclides Ponticus (de Pontus) viveu entre c. 388–315 A.C., sendo, portanto, contemporâneo de Aristóteles. Apesar de nascido em Heráclea, logo imigrou para Atenas, onde talvez tenha tido

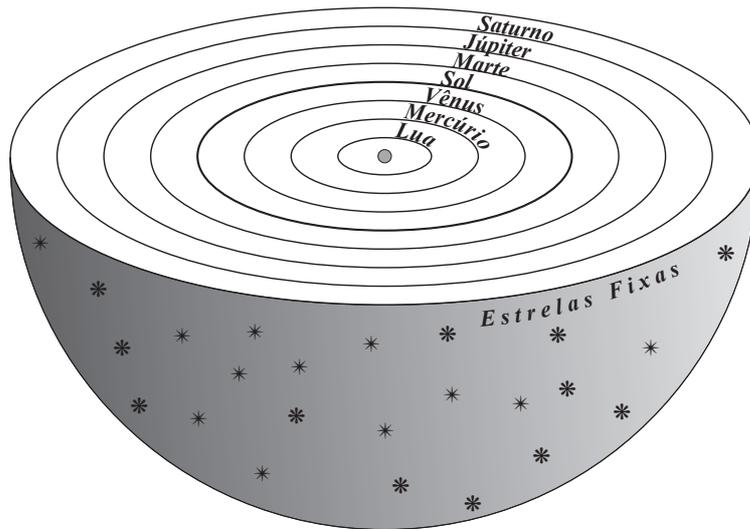


Figura 4.6: Universo aristotélico. A Terra fica imóvel no centro e os astros celestes estão colados em esferas concêntricas.

contato com Platão. Provavelmente ele também foi influenciado pelos pitagóricos.

Contrariamente aos seus contemporâneos, com um brilhante raciocínio anti-intuitivo, Heráclides explicava o movimento diário dos astros (incluindo o movimento aparente diário do Sol) dizendo que a Terra girava em torno dela mesma em torno de um eixo que passava pelos polos celestes. Infelizmente, foi a visão de Aristóteles, isto é, de uma Terra imóvel, que prevaleceu nos séculos que vieram.

Mas a maior contribuição de Heráclides diz respeito às órbitas dos planetas. Sempre houve muita controvérsia sobre as posições de Mercúrio e Vênus: alguns autores colocavam-nos acima do Sol; outros os colocavam entre a Lua e o Sol. Um meio termo foi encontrado por Heráclides colocando estes dois planetas não em órbita em torno da Terra, mas em torno do Sol. Estes planetas girariam em círculos em torno do Sol que, por sua vez, giraria em torno da Terra (como os demais planetas e a Lua). Isto explicava entre outras coisas a presença destes dois planetas sempre próximos do Sol.

4.3.1 Euclides

Euclides de Alexandria (c. 325–270 A.C.) é conhecido como o fundador da geometria. Sua obra, *Os Elementos*, que consiste de 13 livros, dão a base da matemática e geometria e serviram de livro-texto em cursos até o final do século XIX. Os conceitos geométricos foram amplamente aplicados à astronomia e teve grande influência nos trabalhos de Kepler, Galileu e Newton.

4.3.2 Aristarco

O matemático **Aristarco**, nascido em Samos (c. 310–230 A.C.), foi influenciado pelas ideias de Heráclides e foi sem dúvida o primeiro a defender claramente a ideia de que o Sol estava no centro do Universo. A Terra e os demais planetas girariam em círculos em torno do Sol. Como Heráclides, o movimento diário dos astros era explicado por Aristarco devido à rotação da Terra em torno de seu eixo.

Tanto o modelo geocêntrico de Aristóteles como o heliocêntrico de Aristarco davam conta das observações disponíveis nesta época. A preferência pelo modelo geocêntrico foi mais motivada por razões místicas, religiosas e ideológica do que argumentos científicos.

Aristarco também contribuiu para o estudo das distâncias e tamanho da Lua e do Sol. Apesar dos resultados errôneos – por exemplo, ele dava a distância do Sol igual a cerca de 20 vezes a distância da Lua à Terra – seus métodos estavam teoricamente corretos.

4.3.3 Eratóstenes

Eratóstenes de Cirena (276–194 A.C., contemporâneo de Arquimedes) foi um dos primeiros diretores da Biblioteca de Alexandria. Eratóstenes foi o primeiro a medir precisamente o diâmetro da Terra por volta de 240 A.C. Antes desta medida, já havia aquela dada por Aristóteles e uma outra citada por Arquimedes (isto é, não foi ele o autor da medida) dando o valor de 300.000 *stadia*²

Eratóstenes sabia que na cidade de Siena (atualmente Assuã, próximo à primeira catarata do Nilo, no Egito), um gnômon não produzia sombra ao meio-dia (verdadeiro) do dia do solstício de verão (em outras palavras, Siena se encontra praticamente no trópico de Câncer). Por outro lado, também no solstício de verão, o Sol não se encontra exatamente na vertical em Alexandria, mas a cerca de 7;2 do zênite (ou 1/50 de circunferência). Eratóstenes concluiu que Alexandria deveria estar a 1/50 da circunferência da Terra ao norte de Siena, ou seja, a diferença em latitudes das duas cidades seria 7;2. Por outro lado, Eratóstenes conhecia a distância entre estas duas cidades, cerca de 5000 *stadia* e sabia que elas se encontravam praticamente no mesmo meridiano (na realidade há uma diferença de $\sim 2;5$ em longitude, isto implica em um erro de $\sim 4\%$ na medida da circunferência da Terra). Por uma simples regra de três, Eratóstenes concluiu que a circunferência total da Terra seria $50 \times 5000 = 250.000$ *stadia* (Fig. 4.37, página 159). Este valor foi posteriormente mudado para 252.000 *stadia*.

A questão é, quanto valia exatamente um *stadium*, já que esta unidade tinha valores diferentes em diferentes momentos da História e para diferentes povos. Se o valor de um *stadium* é 158 metros (possível valor usado no Egito, na época de Eratóstenes), então a circunferência da Terra teria ~ 39.700 km, valor muito próximo da circunferência polar medida hoje em dia, 39.940,6 km.

Eratóstenes também determinou mais precisamente o valor da inclinação do eixo terrestre, a obliquidade da eclíptica, $\varepsilon = 23^\circ 51'$ (o valor na época era $\varepsilon = 23^\circ 43' 30''$).

4.3.4 Aglaonice de Tessália

Aglaonice ou Aglaonike (final do século II A.C.?) é citada por Plutarco como uma astrônoma que sabia prever com acurácia os eclipses lunares. Este conhecimento de Aglaonice sugere que ela conhecia o ciclo de saros. Ela é provavelmente a primeira astrônoma que se tem registro histórico.

4.4 Hiparco

Hiparco de Nicea, que viveu entre cerca de 190 a 126 A.C., na maior parte do tempo na ilha de Rodas, é considerado o mais importante astrônomo da Grécia antiga. Ele fez observações durante 33 anos em seu observatório, onde realizou medidas muito mais precisas que até então eram disponíveis e foi responsável por importantes inovações teóricas na astronomia.

Hiparco descobriu a precessão dos equinócios, mostrando que as coordenadas das estrelas variavam sistematicamente quando eram dadas em relação ao ponto vernal. Pelo mesmo raciocínio, ele explicou que a duração do ano não dependia do retorno das estrelas à mesma posição (ano sideral), mas sim da recorrência das estações, isto é, a recorrência de um dado solstício ou equinócio (ano trópico). Ele chegou a dar a duração do ano trópico como 365 dias e um quarto, diminuído de $\frac{1}{300}$ de dia, valor muito próximo do valor real. Ele interpretou corretamente este fato como devido ao movimento retrógrado, regular e contínuo, do ponto vernal.

²O *stadium* (pl. *stadia*) é uma unidade de comprimento usada na Antiguidade. Devido a uma falta de padronização, a conversão entre stadium e metro é incerta, podendo ser equivalente desde ~ 150 até ~ 210 metros.

Hiparco também confirmou o valor da obliquidade da eclíptica obtido por Eratóstenes, concebeu novos métodos para se medir a distância da Lua à Terra utilizando os eclipses do Sol e da Lua e produziu o primeiro catálogo de estrelas com 850 objetos, listando a latitude e a longitude em coordenadas eclípticas. As estrelas eram divididas segundo seu brilho em 6 ‘magnitudes’, sendo a 1^a magnitude as estrelas mais brilhantes e a 6^a, correspondendo às estrelas mais fracas. O sistema atual de magnitudes é muito semelhante ao sistema de Hiparco.

4.4.1 Gêmino de Rodas

Após Hiparco, a astronomia grega entra em um período de decadência, quando as inovações e pensamentos originais diminuem. Temos, contudo, astrônomos que compilam o conhecimento da época de forma didática e cuja obra tem um alcance considerável. Este é o caso de **Gêmino de Rodas** (~ 130 A.C. – 60 A.C. ou ~ 10 A.C. – 60 D.C. segundo a fonte); pouco se sabe sobre este grego (apesar do nome latino) que viveu na ilha de Rodas e publicou “Introdução aos Fenômenos”. Este livro cita desde os dados colhidos na Babilônia até autores como Eudoxo e Eratóstenes. Gêmino descreve o céu e chama a atenção para o fato de que as estrelas fixas não estão situadas na superfície da esfera celeste, mas estão a distâncias diferentes. Ele conclui que nossa visão não pode distinguir estas distâncias e por isto a diferença entre estas distâncias é imperceptível.

4.4.2 Posidônio de Apameia

Provavelmente contemporâneo de Gêmino, Posidônio nasceu em Apameia (hoje na Síria) e viveu entre cerca de 135 A.C. e 51 A.C.. Seguidor do Estoicismo, Posidônio viajou muito pelo mundo Greco-Romano e se estabeleceu em Rodas como professor. Ele se interessava pelas dimensões do Sistema Solar (o Universo conhecido da época) e estimou as distâncias da Lua e do Sol. Uma das contribuições mais importantes foi a estimativa da circunferência da Terra a partir da observação da estrela Canopus (Fig. 4.7).

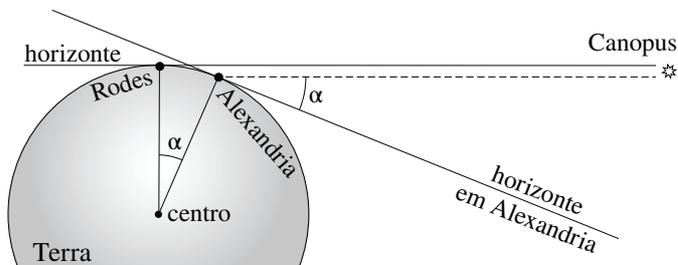


Figura 4.7: Método de Posidônio para determinar a circunferência da Terra. A estrela Canopus é observada na altura do horizonte em Rodas, mas atinge uma altura α acima do horizonte de Alexandria. Este ângulo α corresponde à diferença em latitude das duas cidades.

Em Rodas, Posidônio notou que a estrela Canopus (a segunda estrela mais brilhante no céu, com declinação $-52^{\circ}40'$ naquela época) era observada na linha do horizonte, nunca atingindo uma altura maior. Por outro lado, em Alexandria, esta estrela era observada com uma altura de $7^{\circ},5$ acima do horizonte no momento da passagem pelo meridiano local. Posidônio interpretou corretamente esta diferença como sendo devido à diferença de latitude entre Rodas e Alexandria. Assumindo que as cidades estejam alinhadas na direção Norte-Sul e conhecendo sua distância (cerca de 5000 stadia), Posidônio pôde estimar o valor da circunferência terrestre usando uma regra de três, como fez Eratóstenes.

Na verdade, o ângulo medido está superestimado e a diferença em latitude das duas cidades é apenas de cerca de 5 graus e as cidades não estão alinhada na direção Norte-Sul. Os erros cometidos, ainda que não muito grandes, acabaram sendo adotados posteriormente até o final da Idade Média. Acredita-se que Cristóvão Colombo tenha usado este valor subestimado da circunferência da Terra para planejar sua primeira viagem (e achar que tinha chegado na Índia ao desembarcar em Cuba).

4.5 Sistema de epiciclos: Ptolomeu

A teoria dos epiciclos surgiu gradualmente, talvez começando com a ideia de composição de movimentos de Eudoxo, a partir do final do século III A.C. A motivação observacional desta teoria estava no movimento aparente dos planetas, ora direto, ora retrógrado, e estacionário quando passa de direto para retrógrado (chamado “estações” do planeta). **Apolônio** de Perga (~ 262–190 A.C.) foi o primeiro a dar uma forma rigorosa à teoria dos epiciclos por volta de 230 A.C. (Fig. 4.8, à esquerda). Apolônio discorreu sobre as seções cônicas (veja na seção 5.3.1) e propôs um sistema de mundo onde os planetas giravam ao redor do Sol e o Sol ao redor da Terra.

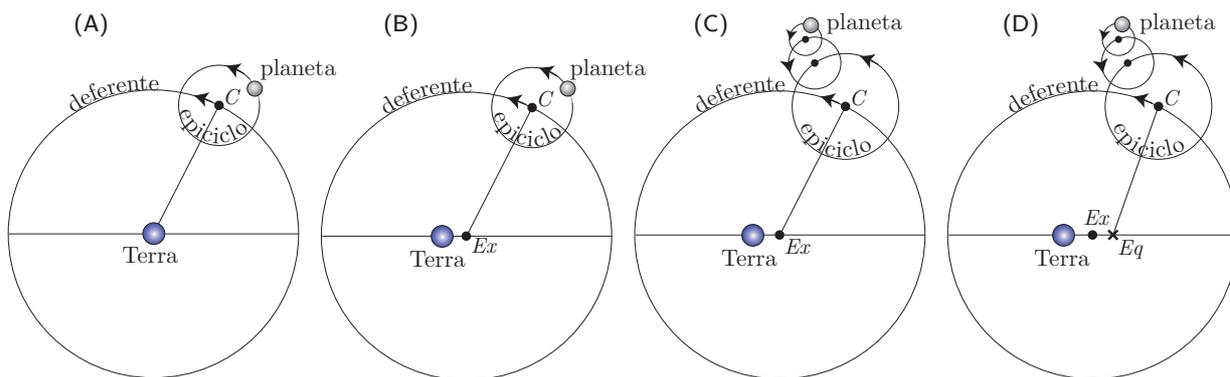


Figura 4.8: Sistema de epiciclos. (A): a Terra se encontra no centro do círculo (deferente) onde o epiciclo orbita. O planeta por sua vez gira em torno do ponto C , centro do epiciclo. (B): Hiparco notou que, para levar em conta a velocidade variável no movimento anual do Sol, a Terra deveria ser deslocada do centro do deferente (Ex). Isto é, existe uma *excentricidade* na posição da Terra (ainda hoje se emprega este termo quando nos referimos a elipses, cujo centro não coincide com o foco). (C): Para poder explicar precisamente todas as irregularidades das órbitas dos planetas, Hiparco introduziu epiciclos que giram em torno de epiciclos. (D) Ptolomeu introduziu o *equante* (Eq , indicado por um “X”); para um observador hipotético no equante, o centro do epiciclo se move com velocidade constante ao longo do deferente.

Na verdade, a semente do pensamento que levou ao sistema de epiciclos já aparecia no sistema híbrido de Heráclides, onde os planetas inferiores giravam em torno do Sol que, por sua vez, girava em torno da Terra. No sistema de epiciclos, contudo, os planetas não giravam em torno de um corpo ou ponto material: não havia nada no centro dos epiciclos.

Hiparco foi o responsável pelo desenvolvimento e aprimoração da teoria proposta por Apolônio, com a introdução do conceito de excentricidade, isto é, a Terra não estava no centro do deferente (Fig. 4.8, (B)). Hiparco também notou que, para que o epiciclo seja sempre menor que o deferente (um requisito da teoria), era necessário introduzir epiciclos suplementares para cada planeta (Fig. 4.8, (C)).

4.6 Sistema geocêntrico de Ptolomeu

Cláudio Ptolomeu, o último dos grandes astrônomos gregos da Antiguidade, viveu entre cerca de 85 a 165 D.C., na maior parte do tempo em Alexandria. Entre outras coisas, Ptolomeu estendeu o catálogo de Hiparco, acrescentando cerca de 130 estrelas e aumentando a precisão das medidas das coordenadas. O catálogo original foi perdido, mas traduções sobreviveram até nós graças aos astrônomos árabes. Por isto o catálogo de Ptolomeu é conhecido como *Almagesto*, do árabe *Al-majisti*, uma corruptela do grego *μεγίστη* (“magiste”, magistral).

Foi Ptolomeu quem deu a forma definitiva para o sistema geocêntrico do Universo, baseado na teoria dos epiciclos, e foi com esta forma que este sistema de Mundo sobreviveu até o século XV.

Graças às suas novas observações e habilidade com a geometria, ele melhorou consideravelmente a precisão da teoria dos epiciclos. Uma das novidades de Ptolomeu foi a introdução do equante³ (Fig. 4.8, (D)). O equante se encontra diametralmente oposto à Terra e, observado a partir do equante, o centro do epiciclo se move uniformemente ao longo do deferente.

O sucesso do sistema de Ptolomeu vem da precisão e relativa facilidade em se prever a posição dos planetas, Sol e Lua. No entanto, com o passar do tempo, a qualidade das observações foram aumentando e para que esta teoria continuasse a funcionar era necessário muitas vezes acrescentar alguns epiciclos a mais para um dado planeta.

Uma versão simplificada do sistema de Ptolomeu (Fig. 4.9) pode ser descrita da seguinte maneira: o raio dos epiciclos dos planetas internos, Mercúrio e Vênus são definidos pela *elongação máxima* (as configurações planetárias será visto na seção 4.9) que estes planetas podem ter (cerca de 28° para Mercúrio e 47° para Vênus). O centro do epiciclo destes planetas estão sempre alinhados com o Sol. Já para os planetas externos, o período de translação do planeta ao longo do círculo do epiciclo é igual ao período de translação do Sol ao redor da Terra, um ano. Isto ocorre para que as laçadas dos planetas externos (veja Fig. 1.14 na seção 1.3) ocorram com a frequência e na posição corretas. Como consequência, o raio que liga o centro do epiciclo ao planeta externo é sempre paralelo à direção Terra–Sol.

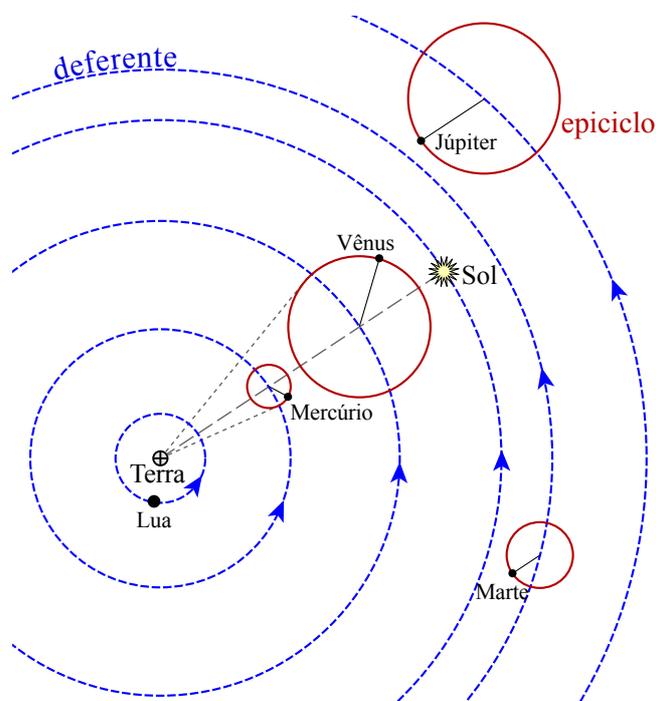


Figura 4.9: Sistema de Ptolomeu mostrando a relação entre as posições dos epiciclos de Mercúrio e Vênus alinhado com a direção Terra–Sol, assim como os raios dos epiciclos dos planetas externos paralelos à direção Terra–Sol.

É interessante notar que, do ponto de vista matemático, não há nenhum problema intrínseco com a teoria de epiciclos. Na verdade, esta teoria nada mais é do que uma representação em série de funções circulares (senos e cossenos) da posição dos planetas. Na mecânica celeste atual, é desta maneira que representamos as posições dos planetas, Lua e Sol, com a diferença de que a série de funções circulares é obtida com a teoria da gravitação universal e não de forma puramente empírica.

O movimento aparente dos planetas no céu é uma composição do movimento orbital do planeta com o nosso próprio movimento, a translação da Terra em torno do Sol. Para os planetas externos, o deferente corresponde à órbita do planeta e o epiciclo corresponde à órbita da Terra. Para Mercúrio e Vênus, o deferente corresponde à translação terrestre e o epiciclo à órbita do planeta ao redor do Sol. Como as órbitas não são circulares, é necessário a introdução de outros

³Equante vem do latim, *punctum aequans*, isto é, ponto de igualdade.

elementos (mais epiciclos, a excentricidade e o equante) para ajustar o modelo às observações – lembrando que o modelo exige movimentos circulares uniformes.

O problema da teoria de Ptolomeu estava na interpretação física. O fato dos planetas girarem em séries de epiciclos em torno de nada não tem sentido fisicamente em um referencial inercial. Fenômenos como a aberração e a paralaxe (desconhecidos na época) também são incompatíveis com o Universo geocêntrico.

Por outro lado, havia o problema de que, seguindo os princípios gregos (e sustentados ferozmente pela toda poderosa igreja católica medieval) o círculo era a única forma geométrica perfeita e os epiciclos só poderiam ser compostos de círculos (e não elipses, por exemplo) e o movimento em cada epiciclo deveria ser uniforme. Além disto, a Terra, como obra divina, só poderia estar no centro do Universo, e não perambulando por aí. Foram estes vínculos que, durante séculos, obrigavam Ptolomeu e seus seguidores a complicar a teoria dos epiciclos a cada novo avanço das observações para poder explicá-las.

4.7 Entre Ptolomeu e Copérnico

A ciência Helênica, que já estava perdendo seu vigor desde a época de Hiparco, deixa de ter um papel importante acompanhando a queda do império Romano na Europa ocidental (século V D.C.). **Téon de Alexandria** (ou Theon, 335–405?) foi um dos últimos estudiosos da Grécia Clássica a reeditar e comentar os trabalhos de Euclides e Ptolomeu. Sua filha, **Hipátia** (ou Hipácia, 355?–415) está entre as primeiras mulheres de destaque na Astronomia, chegando a ser diretora da escola neoplatônica em Alexandria. Ela foi tristemente assassinada por uma multidão de cristãos fanáticos durante uma disputa entre o bispo e o prefeito romano de Alexandria.

O último trabalho de destaque antes da queda de Roma em 476 foi a enciclopédia de **Marciano Capella** (~ 400–450?) publicada por volta de 420, alguns anos após o saque de Roma pelos Visigodos liderados por Alarico I. Nesta enciclopédia o destaque é o modelo geocêntrico com a exceção de Mercúrio e Vênus que estariam em órbita ao redor do Sol (como o modelo híbrido de Heráclides). A enciclopédia de Capella foi importante e discutida durante o período de Carlos Magno, quatro séculos mais tarde.

Dois séculos após a queda do Império Romano do Ocidente, **Beda** (ou Bēda 672?–735), um monge Beneditino inglês publicou um tratado sobre o *Computus* da Páscoa, isto é, como calcular a data do domingo de Páscoa (veja Sec. 2.5) pelo determinação dos movimentos da Lua e Sol, além de discutir a Terra esférica e as variações da duração do dia durante as estações do ano. Seu trabalho, *De temporum ratione* foi uma referência importante até o século IX. Beda foi um dos primeiros a utilizar a contagem dos anos a partir do nascimento da Cristo (o *anno domini*).

4.7.1 Astronomia fora da Europa

A Matemática e a Astronomia tiveram um desenvolvimento importante no Índia, aproximadamente entre os anos 400 e 1200 D.C., o chamado período clássico. Neste período conceitos como número zero, números negativos, álgebra, notação decimal e trigonometria foram criados ou desenvolvidos.

Aryabhata (ou Ariabata, 476–550), nascido no norte da Índia, desenvolveu ideias em matemática e astronomia que influenciaram a ciência no mundo árabe alguns séculos mais tarde. Aryabhata defendia que o movimento da esfera celeste era aparente, devido à rotação da Terra. Também argumentava que a Lua e os Planetas brilhavam pelo reflexo da luz solar e que eclipses eram causados por sombras.

Nascido na região noroeste da Índia, próximo da atual fronteira com Paquistão, **Brahmagupta** (598?–668?) foi um matemático e astrônomo de renome. Uma de suas contribuições mais

conhecida foi descrever a gravitação de forma heurística, quase um milênio antes de Newton. No campo da astronomia, discutiu as órbitas do Sol e da Lua (com uma visão geocêntrica) e a origem das fases lunares. Seus trabalhos tiveram grande alcance no mundo árabe.

Cerca de 2 séculos depois do início da expansão islâmica em 632 D.C., a Astronomia se desenvolve com vigor no mundo árabe. Em um primeiro momento, até meados do séc. IX D.C. a cultura islâmica absorve e traduz tratados gregos e indianos versando sobre astronomia, matemática e geometria. Em particular é feita a tradução árabe da obra de Ptolomeu, *Almagesto* (e, por isto, é conhecida por nós pelo seu nome árabe). Em 830, **Muhammad al-Khwarizmi** (~ 780–850?) de cultura Persa, publica a primeira obra de impacto da astronomia islâmica, o *Zij al-Sindh* (*Zij* significa um manual de astronomia). Neste livro, estão resumidos conceitos matemáticos e astronômicos indianos e gregos.

A astronomia de posição está intimamente ligada à religião islâmica pois, em suas orações, o muçulmano deve se posicionar na direção de Meca. Esta direção, um ângulo azimutal medido a partir do norte, é chamado *Qibla* e é determinado com métodos astronômicos. O *Qibla* aponta para a direção mais curta, isto é, para o segmento de grande círculo que liga a Meca ao local da prece (veja Seção 1.9).

Ahmad al-Fargani (~ 800?–861), nascido no atual Uzbequistão escreveu “Elementos de Astronomia sobre movimentos celestes” em Bagdá onde, além de resumir o trabalho de Ptolomeu, atualiza algumas das constantes astronômicas e posições de estrelas. Seus livros chegaram à Europa onde foram traduzidos em latim.

Por volta do ano 900, **Muhammad al-Battani** (853–929, na Europa conhecido como Albatentius) determina com precisão de segundos a duração do ano trópico e descobre o movimento do periélio da órbita terrestre, isto é, a precessão da órbita terrestre (não confunda com a precessão do eixo da Terra).

Abd al-Rahman (903–986, dito **al-Sufi**, isto é, o Sábio) publica em 964 um extenso e preciso catálogo de estrelas com desenhos de constelações onde figura pela primeira vez a galáxia de Andrômeda. *al-Sufi* também menciona o que pode ser a Grande Nuvem de Magalhães, galáxia irregular vizinha da Via Láctea visível a partir do Sul do Península Arábica (ao sul do paralelo 15° N).

Ibn al-Haytham (965–1040) conhecido como Alhazém, nascido na Pérsia (atual Iraque), escreveu no Egito o *Kitab al-Manazir*, o Livro de Óptica, um precursor da óptica física, de grande influência na Idade Média e no Renascentismo. Discutiu o fenômeno de refração e seu efeito no nascer e pôr do Sol.

O iraniano **Abu al-Biruni** (973–1048) se especializou em instrumentação astronômica, escrevendo tratados sobre a esfera armilar, o astrolábio e o planisfério. Para *al-Biruni*, além da Terra esférica e em rotação ser um modelo natural de Universo, ele imaginava que todos os corpos tenderiam a cair para o centro da Terra. *Al-Biruni* foi um dos pioneiros a distinguir entre Astrologia e Astronomia, considerando o primeiro uma pseudo-ciência.

Abu Ishaq Ibrahim ibn Yahya al-Zarqali (1029–1087), conhecido como **al-Zarkali** ou **Arzachel** nasceu e viveu a maior parte do tempo em Toledo. Após a conquista da cidade pelo rei de Castilha, Alfonso VI em 1085, *al-Zarkali* vai para Córdoba. Colaborou de forma importante na produção das *Tábuas de Toledo*, com previsões das posições dos planetas, Lua e Sol. Também determinou com precisão o movimento (precessão) do apogeu solar (a posição em que a Terra se encontra mais distante do Sol). Seus trabalhos foram traduzidos e citados, entre outros, por Geraldo de Cremona, Regiomontanus e Copérnico.

Ibn Rochd de Córdoba (conhecido como **Averróis** ou Alverroes, 1126–1198) nascido na Andaluzia (Al-Aldalus) teve uma grande influência na Europa Medieval com seus textos e traduções de obras gregas clássicas, com ênfase em lógica, medicina e astronomia. Defendia um modelo de Universo estritamente concêntrico. *Averróis* desenvolveu uma versão primitiva do

conceito de inércia dos corpos em movimento. Acusado de heresia no final da vida, morre no exílio no Marrocos.

Nascido no Marrocos, **Nur ad-Din al-Bitruji** (meados do século **XII**–1204, era conhecido na Europa com o nome latinizado **Alpetragius**) viveu na Andaluzia onde apresentou o primeiro modelo planetário geocêntrico da Idade Média como uma alternativa ao sistema de Ptolomeu. A originalidade do seu trabalho vem da procura de uma razão física para o movimento dos astros.

Em 1270, **Nasir al-Din al-Tusi** (1201–1274), argumenta sobre a rotação da Terra utilizando a observação da paralaxe de cometas. No livro *Zij-i Ilkhani*, publica o mais sofisticado modelo de movimento dos planetas até então. Nasir al-Tusi foi diretor do importante observatório de Maragheh (hoje no Irã), construído por ordem do neto de Genghis Khan.

Ibn al-Shatir (1304?–1375) nasceu em Damasco, Síria e estudou no Cairo e em Alexandria. al-Shakir contribuiu na teoria de contagem da passagem do tempo (com o uso de horas de igual intervalo) e na construção de instrumentos astronômicos. Teve uma grande contribuição na teoria planetária, desenvolvendo e aprimorando o modelo de Ptolomeu.

Muhammad Taragi ibn Shah-Rukh ibn-Timur, mais conhecido como **Ulugh Beg** (ou Bek, ~ 1394–1449), neto de Tamerlão, construiu o maior observatório até então em Samarcanda (hoje no Uzbequistão) no final da década de 1420, baseado no observatório de Maragheh. Lá foram catalogadas cerca de 1000 estrelas, com várias correções em relação a catálogos mais antigos.

Ali Ibn Mohammad Ibn Hussain Birjandi, conhecido como **al-Birjandi** foi um astrônomo persa nascido no atual Irã (meados do século **XV**–1528?) e estudou no observatório de Samarcanda. al-Birjandi produziu vários livros, incluindo comentários sobre as obras de al-Tusi, tratados sobre instrumentação astronômica e modelos de universo, em particular discutindo a possibilidade da Terra se mover pelo espaço (e rejeitando esta ideia).

Taqi ad-Din ou Taqi al-Din (1526–1585) nasceu em Damasco, Síria e fez seus estudos no Cairo. Em 1571, a convite do Sultão Murad III, se instala em Istanbul e se torna o principal astrônomo do sultanato Otomano. Além de uma importante contribuição na construção de relógios astronômicos, Taqi ad-Din faz observações de grande precisão, rivalizando as observações de seu contemporâneo europeu, Tycho Brahe.

A partir do século **XVI** a astronomia islâmica começa a perder o protagonismo frente à ciência que está renascendo na Europa.

4.7.2 Precusores da revolução copernicana na Europa

Aos poucos, principalmente a partir do século **X**, o conhecimento astronômico do mundo islâmico penetra na Europa por Constantinopla (Istambul, Turquia) e, principalmente, através da Espanha, após a conquista de Toledo em 1085 pelo reino de Castela.

Gerbert d'Aurillac (946?–1003) nascido no centro-sul da França foi um filósofo e matemático religioso, que em 999 foi consagrado Papa Silvestre II. Gerbert foi educado em Barcelona, na fronteira com Al-Andalus e estudou em Sevilha e Córdoba, e teve um papel fundamental na reintrodução do ábaco e da esfera armilar na Europa, além da península Ibérica. Também é tido como um dos principais responsáveis pela introdução e difusão dos algarismos arábicos na Europa.

Guilherme de Conches (1090?–1154) (Gulielmus de Conchis em Latin ou Guillaume de Conches em Francês) foi um filósofo franco-normando que estudou e lecionou na universidade de Chartres, França. Publicou um trabalho enciclopédico, *De Philosophia Mundi* entre outros. Guilherme de Conches defende o modelo geocêntrico e discute o movimento do Sol, Lua e planetas. Por outro lado, defende a teoria atomista da natureza.

Gerardo de Cremona (1114?–1187), nascido no norte da Itália, traduz pela primeira vez o *Almagesto* diretamente do árabe para o latim, além de outros trabalhos sobre ciências desenvolvidas no Islã disponíveis em Toledo, Espanha (na época, Reino de Castela).

Robert Grosseteste (1175?–1253) bispo inglês, produziu vários tratados científicos. Por volta de 1225, Grosseteste publica o livro “*De Luce*” (sobre a luz) onde argumenta sobre a origem das esferas celestes (onde se encontram os astros) devido a uma possível interação entre luz e matéria. Em seu cenário cosmológico, o Universo começa com uma explosão, seguido de uma condensação da matéria

Michael Scot (1175?–1232?) filósofo e médico nascido no sul da Escócia, iniciou seus estudos em Durham, Inglaterra e passou pelas Universidades de Oxford e de Paris antes de se estabelecer em Toledo, Espanha (naquela época próximo da fronteira da Espanha islâmica). Sua maior contribuição foi a tradução e crítica de textos árabes, de Alpetragius e Averróis, principalmente relacionados aos trabalhos de Aristóteles.

João de Sacrobosco (1195?–1256?) nascido possivelmente na Inglaterra, foi o autor de uma das obras de astronomia mais populares da Idade Média, o *Tratado da Esfera* (1230), o primeiro livro de Astronomia a ser impresso (em 1472). Este livro, didático e bem ilustrado, explicava fenômenos como os eclipses, o sistema de Ptolomeu e argumentava sobre a esfericidade da Terra e da esfera celeste, e foi utilizado e reproduzido com frequência até o século **XVIII**.

Roger Bacon (1219?–1292) foi um filósofo e frade franciscano inglês, aluno de Robert Grosseteste. Produziu um estudo importante sobre óptica e astronomia, baseado em grande parte em trabalhos árabes. Discutiu o tamanho e posições de vários corpos celestes e propôs uma reforma do calendário Juliano (que não foi adotada).

Campano de Novara (1220–1296), matemático italiano, escreveu a primeira obra europeia sobre planetários (movimento dos planetas) e se interessou pela descrição geométrica do movimento retrógrado dos planetas.

Guilherme de São Clodoaldo (Guillaume de Saint-Cloud, fim do séc. **XIII**), astrônomo francês publicou em 1292 sua *Tabule Almanach Planetarium* com efemérides do Sol, da Lua e dos planetas. Também descreve o eclipse do Sol (parcial na França) de 04/06/1285.

Nicolas de Oresme (1323–1382), nascido na França, foi um filósofo influente e bispo de Lisieux (Normandia, França) que estudou diversas disciplinas, entre elas física e astronomia. Ele discutiu criticamente as ideias de Aristóteles, discordando do conceito de uma Terra estática. Para Nicolas, a rotação da Terra em torno de um eixo poderia explicar o movimento diurno dos astros.

Nicolau de Cusa (1401–1464, em latim: Nicolaus Cusanus), filósofo, matemático e cardeal alemão, sugeriu que a Terra fosse esférica (o que já era conhecido na Grécia clássica) e que orbitava o Sol. Também sugeriu que as estrelas eram “sois” distantes e discute a infinitude do Universo. Foi um dos intelectuais mais influentes do século **XV**.

Georg von Peurbach (1423–1461), também escrito Peurbach, foi um astrônomo austríaco autor de um dos primeiros livros impressos, “*Theoricae novae planetarum*”, baseado em autores árabes como al-Battani e al-Fargani. Seu livro é citado por Copérnico e Kepler e é reeditado até o século **XVII**.

Johannes Müller de Königsberg conhecido como *Regiomontanus* ou *Monte Regio* (1436–1476), escreveu vários tratados de Astronomia utilizando várias fontes árabes, em particular o Almagesto. A partir de 1454, utiliza a então recém inventada imprensa para publicar seus livros e de outros autores, por exemplo, o livro de von Peurbach citado no parágrafo acima. Em 1456, observa o cometa que seria reconhecido mais tarde como cometa de Halley.

Em 1475, Regiomontanus foi convocado a Roma pelo Papa Sisto **IV** para estudar uma possível reforma do calendário Juliano, que apresentava uma divergência notável com o início das estações do ano. Contudo ele morre antes de completar este trabalho. A reforma do calendário só seria feita cerca de um século mais tarde (veja Sec. 2.2.6).

4.8 Sistema heliocêntrico de Copérnico

4.8.1 Copérnico

Nicolau Copérnico (Niklas Koppernigk) nasceu em 19/02/1473 em Torun, na Polônia. Em 1491 ele foi estudar na universidade de Cracóvia. Em 1496 ele foi para a Itália estudar direito e em 1501 voltou novamente à Itália para estudar medicina e, em 1504, se torna cônego da Igreja Católica. Durante seus estudos, Copérnico teve contato com a renascença italiana e foi muito influenciado pelo pensamento grego clássico. A ideia de uma Terra que gira em torno de si mesma e que não está no centro do Universo, não era desconhecida de Copérnico.

Sua grande obra, *De revolutionibus orbium caelestium* (“Sobre as revoluções das órbitas celestes”) foi publicada no ano de sua morte, em 1543. Esta publicação foi possível graças à insistência e apoio de seu único aluno, Georg Joachim de Porris (conhecido como Rheticus, 1514–1574).

Neste trabalho, Copérnico refuta os argumentos de Ptolomeu de que a Terra não poderia se mover e estava no centro do Universo. Ptolomeu dizia (com razão) que, se a Terra se movesse, haveria mudança na aparência das constelações (o que chamamos hoje de paralaxe). Mas Copérnico argumentou (também corretamente) que as estrelas deveriam estar muito afastadas, com distâncias muito maiores que o diâmetro da órbita terrestre (ou seja, a paralaxe não é perceptível em observações a olho nu).

O que provavelmente levou Copérnico a adotar o sistema heliocêntrico, onde o Sol estaria imóvel no centro do Universo, foi a complexidade em que se encontrava o sistema de epiciclos na sua época. Devido ao avanço das observações, era necessário um sistema extremamente complexo para poder explicar precisamente o movimento dos planetas. Uma vez que Copérnico se convenceu de que não havia nenhuma contradição com a hipótese de uma Terra em movimento, ele pôde enfim conceber um sistema de mundo muito mais simples que o sistema geocêntrico, capaz de explicar o movimento observado dos planetas, baseado nas ideias gregas da antiguidade (Filolau, Heráclides e, principalmente, Aristarco de Samos).

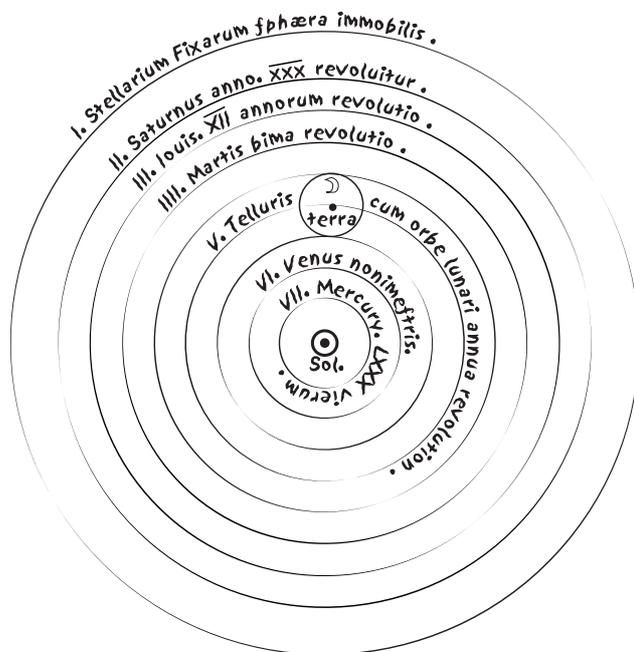


Figura 4.10: O Sistema Solar segundo Copérnico (versão simplificada e fora de escala). Os planetas se movem em órbitas circulares, com movimento uniforme, em torno do Sol. Para poder prever corretamente a posição dos planetas, Copérnico também precisou introduzir epiciclos em seu sistema heliocêntrico.

Em seu sistema, apesar de ser chamado heliocêntrico, os planetas e a Terra giram em torno de um ponto próximo do Sol, mas não coincidente, em círculos perfeitos e apenas a Lua gira em torno da Terra (Figura 4.10). Além disto, todos os planetas girariam de maneira uniforme e no

mesmo sentido. O movimento diário da esfera celeste era explicado simplesmente pela rotação da Terra em torno de seu eixo.

Contudo, as órbitas planetárias são realmente elipses, como Kepler descobriu cerca de 6 décadas depois. Para conciliar seu modelo heliocêntrico com as observações, Copérnico foi obrigado a utilizar epiciclos como no modelo de Hiparco e Ptolomeu. Seu modelo heliocêntrico era tão complicado quanto o do *Almagesto*.

O grande feito de Copérnico não foi apenas recuperar ideias da Grécia antiga e aplicá-las com êxito na descrição do Sistema Solar, mas também ir de encontro a mais de 15 séculos de preconceito contra um Universo onde a Terra poderia mover-se.

4.8.2 Giordano Bruno

Nascido em Nola, Reino da Sicília em janeiro de 1548 e morto em fevereiro de 1600 em Roma, Giordano Bruno foi um frade franciscano, filósofo e matemático. Baseado nos trabalhos de Nicalau de Cusa e Copérnico, Giordano Bruno desenvolve a teoria heliocêntrica e defende a noção de um Universo infinito que, por definição, não teria um centro. Ele especula mesmo sobre “inúmeros astro” e mundos idênticos ao nosso.

Giordano Bruno também discute a relatividade dos movimentos, dizendo, por exemplo, que tudo que se encontra na Terra se move com ela (composição de movimentos). Desta forma, ele questionava o princípio aristotélico de que a Terra deveria estar imóvel no centro do Universo, contrariando o dogma religioso da época.

Por causa de várias de suas posições filosóficas, G. Bruno é acusado formalmente em 1592 pela inquisição e finalmente é queimado em 1600. Este precedente será importante para Galileu Galilei mais tarde.

4.8.3 Galileu Galilei

Quase uma década após a morte de Giordano Bruno, a partir de 1609, **Galileu Galilei** (1564–1642) fez descobertas que enterrariam de vez o sistema geocêntrico.

Galileu nasceu em Pisa em 1564, onde estudou e se tornou professor de matemática em 1589. Com a utilização da primeira luneta, Galileu descobriu os quatro maiores *satélites de Júpiter* (que claramente não orbitavam a Terra) e as *fases de Vênus* (veja na Fig. 4.11 as diferentes previsões de como seriam as fases dos planetas internos). Em 1639, o astrônomo e jesuíta italiano Giovanni Battista Zupi (1589–1667) descobre que Mercúrio também apresenta fases como Vênus e, portanto, está em órbita do Sol.

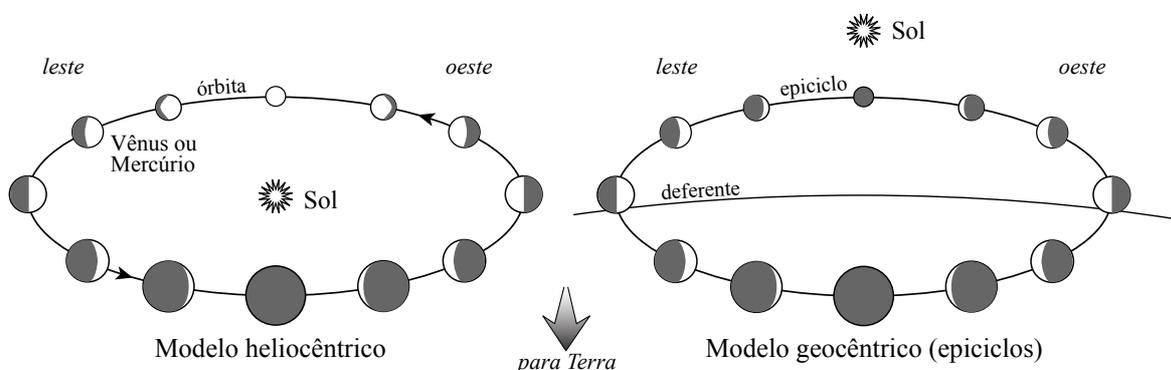


Figura 4.11: Esquerda: Fases de um planeta interno (Mercúrio ou Vênus) visto da Terra no modelo heliocêntrico. Direita: Fases de um planeta interno observadas da Terra no modelo geocêntrico. Antes do uso da luneta por Galileu, não era possível distinguir as fases destes planetas.

Mesmo antes das descobertas de Galileu, durante a segunda metade do século **xvi**, começou a ficar claro que mesmo o sistema heliocêntrico de Copérnico, com órbitas circulares, não podia explicar em todos os detalhes o movimento dos planetas, em particular de Marte e da Lua. Também era necessária a introdução de epiciclos no sistema heliocêntrico, o que foi feito pelo próprio Copérnico em seu modelo planetário.

O impacto das observações de Galileu, com auxílio de uma luneta, foi imenso no pensamento científico. Além das observações citadas acima, podemos acrescentar a observação das manchas solares (o que permitiu verificar que o Sol gira em torno de si mesmo em aproximadamente um mês), a descoberta que a Via Láctea é composta por inúmeras estrelas, os anéis de Saturno (apesar de Galileu não poder interpretar suas observações como Christiaan Huygens o fez anos mais tarde, veja Sec. 5.1.1) e observou Netuno (mas não o reconhece como um planeta).

Galileu foi julgado e condenado pela Igreja Católica em 1633 por heresia. Galileu morreu em Arcetri, Itália, em 1642

4.8.4 Quebra do paradigma de órbitas circulares – Brahe e Kepler

Tycho Brahe

Nesta mesma época, dados de altíssima qualidade foram obtidos pelo astrônomo dinamarquês **Tycho Brahe** (1546–1601). Tycho Brahe, de família nobre luterana, estudou nas universidades de Copenhague/Dinamarca, Leipzig, Rostock/Alemanha e Basileia/Suíça.

Tycho fez as medidas mais precisas até então da posição de muitas estrelas e, principalmente, dos planetas, que acompanhou por cerca de duas décadas. Inicialmente, Tycho fez suas observações a partir do observatório de *Uraniborg* (em uma ilha dinamarquesa, hoje parte da Suécia), onde ele se instalou em 1575. Em 1597, Tycho foi forçado a deixar a Dinamarca e emigrou para Praga (na época parte da Bohemia, Alemanha) onde continuou seu trabalho até morrer.

Uma importante observação de Brahe foi de uma *supernova*⁴ em novembro de 1572 na constelação de Cassiopéia. Esta “estrela nova” desaparece em 1574. Esta observação convence Brahe de que o céu não é imutável como prescreve a doutrina aristotélica, adotada pela igreja.

Em 1577, Brahe observou a passagem do chamado “Grande Cometa de 1577”. Suas observações meticulosas permitiram mostrar que o cometa se encontrava a uma distância superior a pelo menos 6 vezes a distância da Lua à Terra. Isto também abalou sua crença em um céu perfeito e órbitas sólidas.

Além de observações precisas, Brahe propôs, em um primeiro tempo, um sistema misto geocêntrico, mas heliocêntrico para os planetas Mercúrio e Vênus (Fig. 4.12, painel a esquerda), semelhante ao modelo de Heráclides Ponticus do séc. **iv** A.C. (Sec. 4.3).

Mais tarde, em 1583, Tycho altera seu modelo, imaginando algo a meio caminho entre Aristóteles e Copérnico. É ainda um sistema geocêntrico, porém os planetas giram em órbitas circulares ao redor do Sol, assim como a Lua (Fig. 4.12, painel a direita).

Johannes Kepler

Tycho Brahe teve um brilhante assistente em Praga, o alemão **Johannes Kepler** (1571–1630). De família protestante, Kepler aprendeu o sistema de Copérnico na universidade de Tübingen, Alemanha, com Michael Maestlin (1550–1631) e tornou-se um adepto do heliocentrismo. Maestlin foi um dos primeiros adeptos do heliocentrismo copernicano ainda no século **xvi**.

Após mudar-se para a universidade de Graz, Áustria, Kepler publicou o livro “*Mysterium Cosmographicum*” onde apresenta seu modelo de Universo heliocêntrico baseado nos *sólidos platônicos* (Fig. 4.13). Estes objetos geométricos são poliedros regulares e convexos (onde todos os

⁴A supernova de Tycho, como é conhecida, foi o resultado da explosão de uma anã branca, isto é, uma supernova de tipo Ia

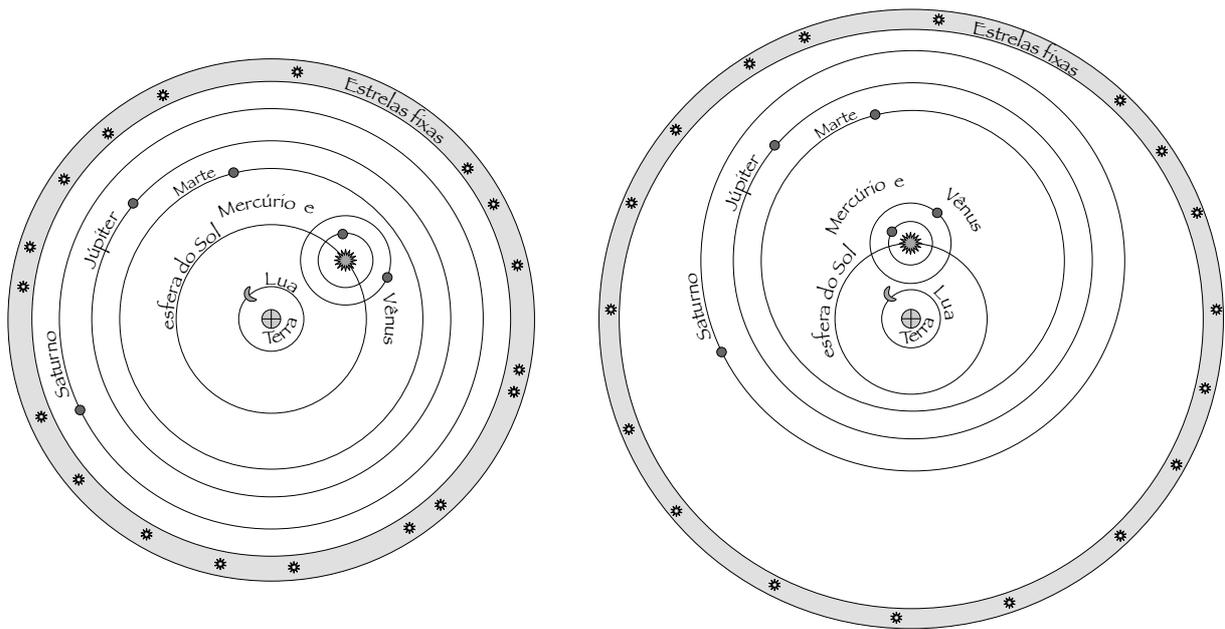


Figura 4.12: Esquerda: Modelo do Universo inicial de Tycho Brahe, com a Terra no centro mas com Mercúrio e Vênus orbitando o Sol. Direita: Segundo modelo de Brahe, com todos os planetas orbitando o Sol, exceto a Terra que está fixa no centro com o Sol e a Lua em sua órbita. Nos dois casos, a esfera das estrelas fixas estão centradas na Terra.

lados são iguais e regulares) e existem apenas 5 no espaço tridimensional: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Estudados e descritos por Euclides e Platão, eram considerados sólidos geométricos perfeitos.

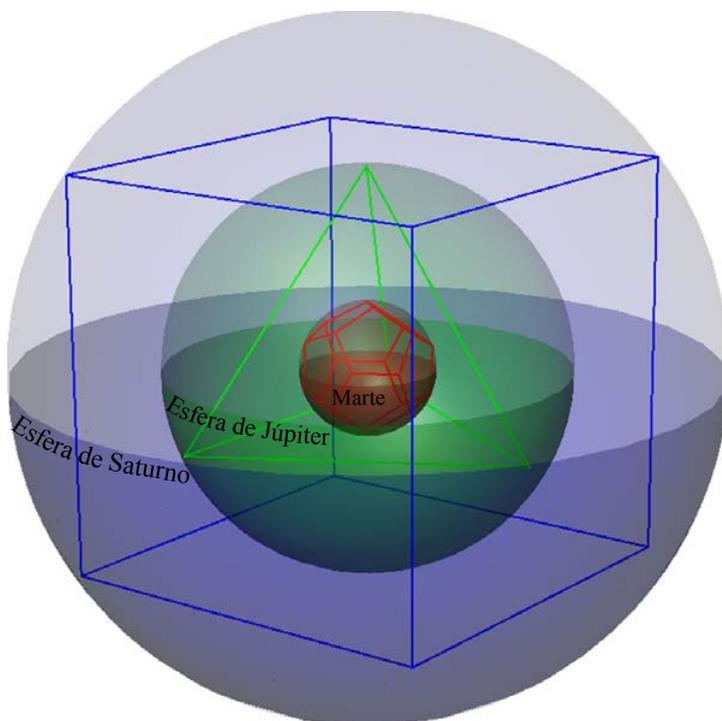


Figura 4.13: Primeiro modelo de Kepler, onde os planetas conhecidos orbitavam em esferas concêntricas. Os raios das esferas são definidos pelas razões entre os sólidos platônicos.

O Sistema Solar de Kepler era construído colocando uma esfera central que continha a órbita de Mercúrio. Ao redor desta esfera coloca-se um octaedro e, ao redor do octaedro vem a esfera de Vênus. Em seguida vem um icosaedro inserido em mais uma esfera, a da Terra. Depois temos

um dodecaedro e a esfera de Marte, um tetraedro e a esfera de Júpiter e, por fim, um cubo e a esfera de Saturno. Com este arranjo, as órbitas dos planetas têm as seguintes dimensões: 0,4588, 0,7947, 1, 1,2584, 3,7752, e 6,5389 (tomando o raio da órbita da Terra igual a um). Kepler tinha um conhecimento suficientemente bom das distâncias no Sistema Solar para verificar que estas distâncias não correspondiam às observadas, especialmente para os planetas externos. Assim, este modelo dos sólidos platônicos foi logo abandonado.

Mais tarde, nos primeiros anos do século **XVII**, Kepler, após estudar minuciosamente os dados de Tycho Brahe, chegou à conclusão de que os planetas não se moviam uniformemente em círculos (e eventualmente em epiciclos) em torno do Sol, mas simplesmente se moviam em elipses, com o Sol em um dos focos (veremos isto mais abaixo, Seção 5.3).

Finalmente havia-se chegado a um modelo de Universo simples, elegante e extremamente preciso para a época e, como foi visto posteriormente, fisicamente aceitável, como demonstrou a teoria da gravitação universal de **Isaac Newton** (1643–1727), publicada em 1687 no “*Philosophiae naturalis Principia Mathematica*” (voltaremos a isto na seção 5.3).

4.9 Configurações planetárias

Chamamos de *configurações planetárias* as posições relativas da Terra, do Sol e de um dos planetas. Na figura 4.14 estão ilustradas as principais configurações planetárias.

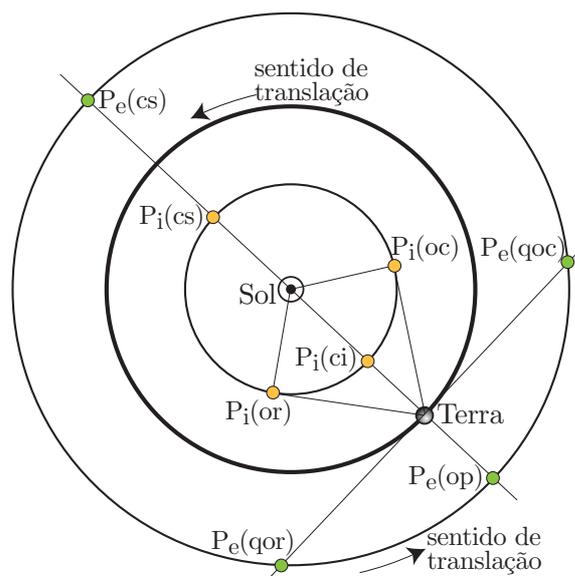


Figura 4.14: Configurações planetárias mais importantes. P_e e P_i se referem aos planetas exteriores e interiores, respectivamente. Em parênteses, as seguintes configurações: oposição (op), conjunção superior (cs), conjunção inferior (ci), máxima elongação ocidental (oc), máxima elongação oriental (or), quadratura ocidental (qoc) e quadratura oriental (qor).

No caso dos *planetas interiores*, isto é, planetas mais próximos do Sol do que a Terra (Mercúrio e Vênus), chamamos de *conjunção inferior* quando o planeta se encontra alinhado entre o Sol e a Terra. Note que não podemos observar o planeta neste momento, exceto nas raras ocasiões em que este alinhamento é perfeito e podemos ver a silhueta do planeta atravessando o disco solar; neste caso temos um *trânsito*. Quando o planeta interior se encontra alinhado com a Terra e o Sol, mas do lado oposto – o Sol se encontra entre o planeta e a Terra – chamamos esta configuração de *conjunção superior*.

A distância angular aparente entre um planeta e o Sol é chamado *elongação*. Este ângulo, para um planeta interno, oscila entre 0° nas conjunções superior e inferior até um certo valor máximo. Estes valores extremos definem as máximas elongações ocidental (a Oeste do Sol) e oriental (a Leste do Sol), veja a figura 4.15. O momento em que planeta interno está na sua máxima elongação é o momento mais propício para sua observação. Na elongação ocidental, o planeta é visto no fim da madrugada antes do nascer do Sol; na oriental, ele é visto no início da noite, logo após o pôr do Sol.

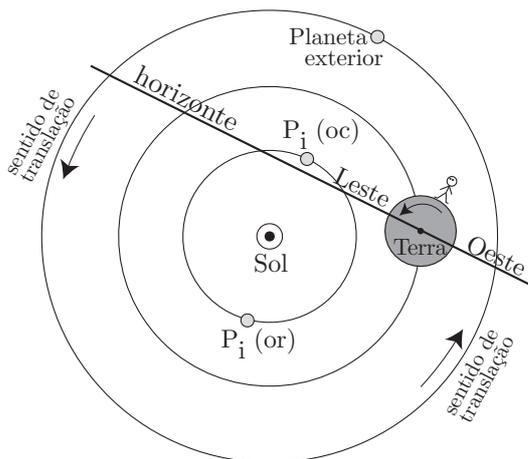


Figura 4.15: Detalhe das configurações planetárias mais importantes. Um planeta interior (P_i) é visível no Leste, pouco antes do nascer do Sol (ou seja, o planeta está a Oeste do Sol – **elongação ocidental**, [oc]), ou visível no Oeste pouco depois do pôr do Sol (ou seja, o planeta está a Leste do Sol – **elongação oriental**, [or]). Nesta figura, o planeta P_i está sendo observado pouco antes do nascer do Sol, portanto, na elongação ocidental; a rotação da Terra fará com que o Sol se levante no horizonte um pouco depois.

Para ilustrar, a Fig. 4.16 mostra a variação da elongação de Mercúrio e Vênus. A elongação máxima de Mercúrio varia aproximadamente entre 18° e 28° enquanto que, para Vênus, a elongação máxima varia entre cerca de 45° e 47° . A razão da grande variabilidade de Mercúrio é sua órbita inclinada em relação á eclíptica e sua excentricidade relativamente elevada. Uma tabela com as datas das elongações máximas de Mercúrio e Vênus se encontra na página 205.

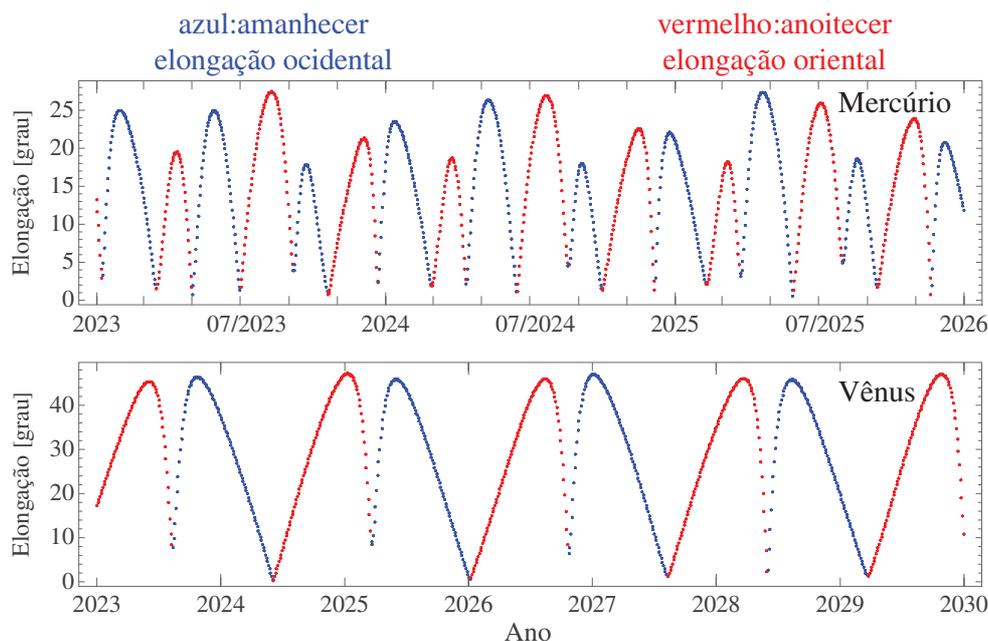


Figura 4.16: Variação da elongação dos planetas inferiores, Mercúrio e Vênus. A cor azul é quando o planeta é observado antes do Sol nascer e a cor vermelha indica quando o planeta é observado logo após o pôr do Sol. Note que a amplitude da elongação de Vênus é quase o dobro da de Mercúrio. Para Mercúrio, os pontos estão espaçados em intervalo de um dia; para Vênus de 3 dias. Note que a elongação muitas vezes não atinge 0° , devido à inclinação relativa das órbitas com a eclíptica. Os dados foram obtidos com o *Horizons System* do JPL/NASA.

Os *planetas exteriores*, aqueles além da órbita terrestre (Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno) e os planetas anões (Ceres, Plutão, Eris, Makemake e Haumea), nunca estão em conjunção inferior (pois eles não podem estar entre a Terra e o Sol) e sua elongação varia entre 0° e 360° (elongação maior do que 180° também pode ser dada -180° e 0°). Quando temos o alinhamento Terra–Sol–planeta exterior, chamamos esta configuração de *conjunção superior* (elongação igual a 180°), tal qual para os planetas interiores. Nesta configuração, o planeta se

encontra na posição mais distante da Terra. Quando o alinhamento é Sol–Terra–planeta exterior, o planeta exterior está em *oposição*. Este é o momento mais propício para observação de um planeta exterior. Na página 204 temos uma lista com as datas de oposições de Marte, Júpiter e Saturno.

No caso de um alinhamento de 3 corpos, em particular entre o Sol, a Lua e a Terra, chamamos esta configuração de *sizígia* (do grego antigo, significa reunir). Este termo é usado na expressão *maré de sizígia*, quando o Sol, Lua e Terra estão alinhados (“reunidos”) e a maré é mais forte. Sizígia também pode se aplicar a outros corpos e geralmente esta configuração está ligada a fenômenos de trânsito, ocultação e eclipse (veremos isto a seguir).

Finalmente, quando o ângulo entre o planeta e o Sol é de 90° , chamamos esta configuração de *quadratura*. Esta pode ser oriental ou ocidental, dependendo da posição relativa do planeta ao Sol, a Leste ou a Oeste, respectivamente.

O intervalo de tempo médio entre duas configurações planetárias idênticas consecutivas (por exemplo, duas oposições de Marte ou duas elongações ocidentais máximas de Vênus) define o *período sinódico* do planeta.

O período sinódico de um planeta está relacionado aos períodos de translação da Terra e do planeta em torno do Sol:

$$\frac{1}{P_{\text{sinód}}} = \pm \left(\frac{1}{P_{\text{Terra}}} - \frac{1}{P_{\text{planeta}}} \right), \quad (4.1)$$

onde o sinal é ‘+’ se o planeta for externo e ‘−’ se o planeta for interno. Veja a Tabela 4.1 com os valores referentes aos planetas do Sistema Solar.

Tabela 4.1: Movimento médio dos planetas e períodos siderais e sinódicos em relação à Terra e semi-eixo maior orbital. Quanto mais elíptica for a órbita, maior será a variação do movimento em relação ao valor médio. Valores baseados em Simon et al. (1994), A&A 282, 663.

Planeta	Movimento médio	Per. Sideral [dia (ano)]	Per. Sinódico [dia]	semi-eixo maior [AU]
Mercúrio	4,092 °/dia	87,9693 (0,24084)	115,877	0,387
Vênus	1,602 °/dia	224,701 (0,61519)	583,921	0,723
Terra	0,9856 °/dia	365,256 (1,0000)	—	1,000
Marte	0,5240 °/dia	686,980 (1,8808)	779,936	1,524
Júpiter	4,985 ′/dia	4332,59 (11,862)	398,884	5,203
Saturno	2,008 ′/dia	10759,2 (29,457)	378,092	9,537
Urano	0,7038 ′/dia	30688,5 (84,019)	369,656	19,189
Netuno	0,3589 ′/dia	60182,3 (164,77)	367,487	30.482

4.9.1 Movimento retrógrado dos planetas

Na seção 1.3.1 nós vimos exemplos do movimento direto e retrógrado dos planetas e este fenômeno foi discutido no contexto do sistema geocêntrico (sec. 4.2.4 e 4.5). Aqui, veremos como podemos estimar a amplitude do movimento retrógrado e quanto tempo o planeta passa neste movimento.

Por simplicidade e para podermos fazer uma análise analítica, vamos supor que as órbitas dos planetas sejam circulares e coplanares. No painel (A) da Fig. 4.17 vemos a geometria que nos interessa para o caso de um planeta (ou asteroide) externo.

A velocidade orbital do planeta externo e da Terra são v_P e v_T quando as componentes destas velocidades projetadas no plano do céu são iguais, então o planeta parece estacionário quando visto da Terra. Esta condição é dada por:

$$v_P \cos \alpha = v_T \cos \beta,$$

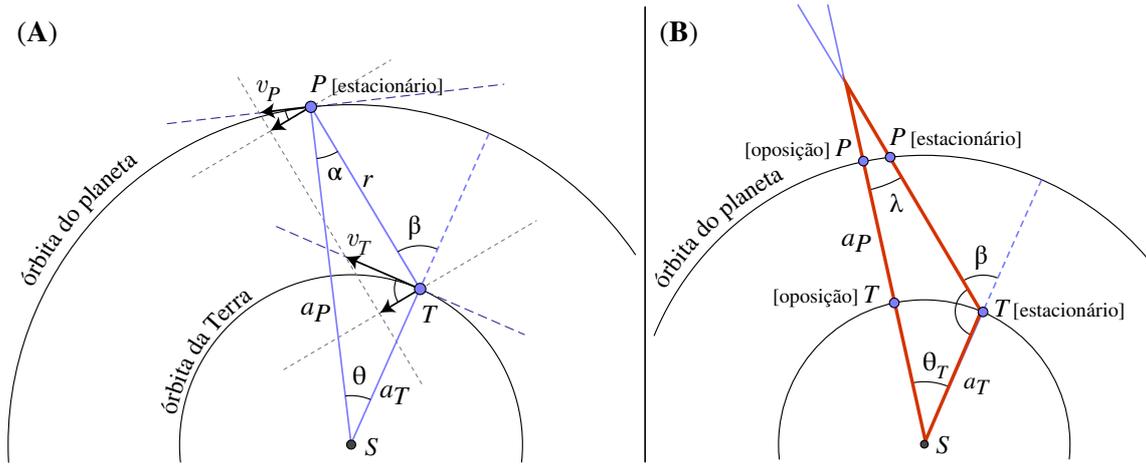


Figura 4.17: (A): Configuração planetária para determinarmos o momento em que um planeta externo (P) aparenta estar estacionário quando observado da Terra (T). v_T e v_P são as velocidades orbitais da Terra e do planeta, respectivamente, assumindo órbitas circulares de raios a_T e a_P . Suas projeções perpendiculares a linha \overline{PT} são iguais no ponto estacionário. (B): Configuração mostrando dois instantes, estacionário e em oposição, para o cálculo do arco que o planeta executa em movimento aparente retrógrado.

onde os ângulos α e β são dados em relação à linha de visada do planeta (\overline{PT} na Fig. 4.17).

As velocidades circulares estão relacionadas pela lei de Kepler (discutido na Sec. 5.3):

$$\left(\frac{P_P}{P_T}\right)^2 = \left(\frac{a_P}{a_T}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{2\pi a_P/v_P}{2\pi a_T/v_T}\right)^2 = \left(\frac{a_P}{a_T}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{v_T}{v_P}\right)^2 = \left(\frac{a_P}{a_T}\right),$$

onde P_P e P_T são os períodos siderais de translação do planeta e da Terra, respectivamente. A condição para o planeta parecer estacionário se torna:

$$v_T \sqrt{\frac{a_T}{a_P}} \cos \alpha = v_T \cos \beta.$$

Por outro lado, usando a lei dos senos no triângulo $\triangle SPT$ também temos:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a_T} = \frac{\text{sen } \beta}{a_P},$$

onde usamos $\text{sen}(180^\circ - \beta) = \text{sen } \beta$. Podemos eliminar α usando as expressões acima e obtemos:

$$\tan \beta = \frac{a_P/a_T}{\sqrt{1 + a_P/a_T}}.$$

O ângulo β é a distância angular do ponto onde o planeta estaria em oposição.

O ângulo θ no painel (A) da Fig. 4.17 corresponde ao movimento retrógrado aparente entre o ponto estacionário e a oposição. Por simetria, no caso de órbitas circulares, este é metade do movimento retrógrado total. Pela geometria do triângulo $\triangle SPT$, temos $\theta = \beta - \alpha$.

O tempo que o planeta leva para percorrer o ângulo 2θ , isto é, a duração do movimento retrógrado, τ_{retr} , pode ser obtido por uma regra de 3, lembrando que estamos no referencial em que a Terra não se move e o período de translação do planeta é o sinódico [Eq. (4.1)] neste caso:

$$\tau_{\text{retr}} = \frac{2\theta}{360^\circ} P_P^{\text{sinód}}, \quad (4.2)$$

com θ dado em graus.

Para calcularmos o comprimento da trajetória retrógrada aparente na esfera celeste, usamos a geometria descrita no painel (B) da Fig. 4.17. Neste painel, marcamos as posições da Terra e do planeta externo em dois momentos, do ponto estacionário e da oposição, em um referencial inercial (aqui a Terra se move em sua órbita). A distância entre os dois pontos estacionários, observadas da Terra, é o ângulo λ . Usando o triângulo destacado no painel (B) da Fig. 4.17 (diferente do triângulo $\triangle SPT$) temos:

$$\lambda + \theta_T + (180^\circ - \beta) = 180^\circ \Rightarrow \lambda = \beta - \theta_T,$$

onde θ_T corresponde ao deslocamento da Terra durante o intervalo de tempo $\tau/2$, isto é,

$$\theta_T = \frac{2\pi a_T}{P_T^{\text{sider}}} \frac{\tau_{\text{retr}}}{2} \Rightarrow \lambda = \beta - \frac{\pi a_T \tau_{\text{retr}}}{P_T^{\text{sider}}}.$$

Note que θ do painel (A) e θ_T do painel (B) da Fig. 4.17 são ângulos diferentes.

Para os planetas internos, o procedimento é semelhante e resultam nas mesmas fórmulas, exceto que $\theta = \alpha - \beta$ (veja Fig. 4.18).

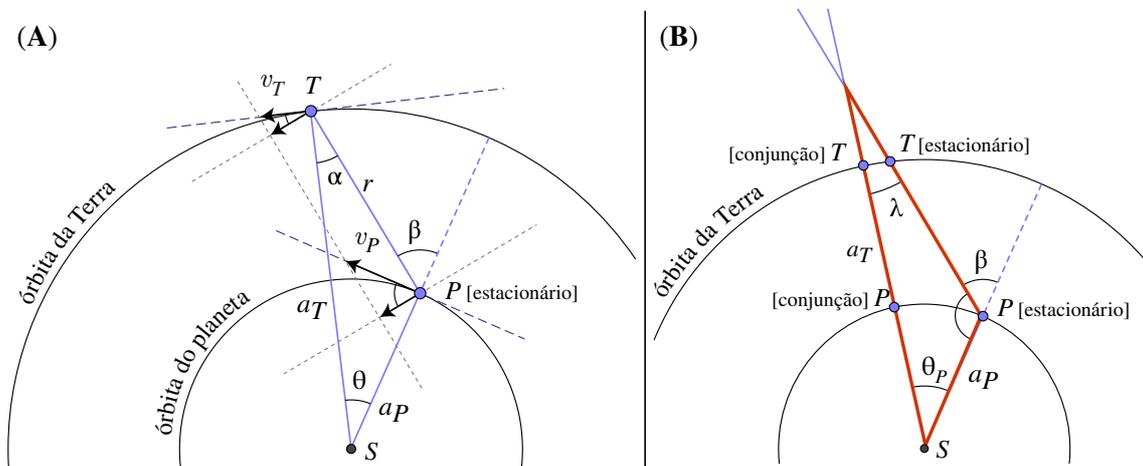


Figura 4.18: (A): Configuração planetária para determinarmos o momento em que um planeta interno (P) aparenta estar estacionário quando observado da Terra (T). v_T e v_P são as velocidades orbitais da Terra e do planeta, respectivamente, assumindo órbitas circulares de raios a_T e a_P . Suas projeções perpendiculares a linha \overline{PT} são iguais no ponto estacionário. (B): Configuração mostrando dois instantes, estacionário e em conjunção, para o cálculo do arco que o planeta executa em movimento aparente retrógrado.

Pela configuração geométrica do movimento retrógrado de planetas internos, podemos ver que os pontos estacionários não correspondem às elongações máximas.

Os valores de τ_{retr} e λ calculados como descrito acima estão na tabela seguinte:

planeta	Mercúrio	Vênus	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno
τ_{retr} (dias)	$22,9 \pm 4,3$	$42,2 \pm 0,9$	$72,7 \pm 15,8$	$120,6 \pm 2,4$	$137,7 \pm 1,8$	$151,8 \pm 0,9$	$158,7 \pm 0,2$
λ	$13^\circ 8' \pm 10^\circ 2'$	$16^\circ 1' \pm 1^\circ 1'$	$15^\circ 9' \pm 11^\circ 8'$	$9^\circ 9' \pm 1^\circ 1'$	$6^\circ 7' \pm 0^\circ 7'$	$4^\circ 0' \pm 0^\circ 3'$	$2^\circ 7' \pm 0^\circ 1'$

Na tabela acima, foi considerado de forma aproximada o efeito da excentricidade das órbitas planetárias, usando os valores correspondentes do periélio e afélio no lugar do semi-eixo maior.

4.9.2 Trânsitos e ocultações

Devido às diferentes distâncias dos corpos e aos seus movimentos, eventualmente um corpo acaba passando na frente de outro do ponto de vista de algum observador. Nestes casos, temos os fenômenos chamados **trânsito** e **ocultação**.

Trânsito é quando o tamanho aparente do corpo que passa na frente (o corpo mais próximo do observador) é bem menor que o outro, mais distante. Por exemplo, quando Mercúrio (com diâmetro aparente de $13''$ na conjunção inferior) ou Vênus (diâmetro de $66''$, também na conjunção inferior) passam na frente do Sol (diâmetro $\sim 1935''$).

Os trânsitos de Mercúrio e de Vênus podem ser observados quando a Terra está alinhada com o planeta, o Sol e o nodo ascendente ou descendente da órbita do planeta em questão.

Tabela 4.2: Trânsitos de Mercúrio no século **XXI** e de Vênus (entre 1600 e 2400) pelo Sol. A data e hora em UTC correspondem ao centro do trânsito, quando a separação entre os centros do Sol e do planeta é mínima (dado na coluna “sep”, em segundos de arco). Ref.: eclipse.gsfc.nasa.gov/transit/transit.html.

Mercúrio			Vênus		
data	hora	sep ^["]	data	hora	sep ^["]
07/05/2003	07:52	708.3	07/12/1631	05:19	939.3
08/11/2006	21:41	422.9	04/12/1639	18:25	523.6
09/05/2016	14:57	318.5	06/06/1761	05:19	570.4
11/11/2019	15:20	75.9	03/06/1769	22:25	609.3
13/11/2032	08:54	572.1	09/12/1874	04:07	829.9
07/11/2039	08:46	822.3	06/12/1882	17:06	637.3
07/05/2049	14:24	511.8	08/06/2004	08:20	626.9
09/11/2052	02:29	318.7	06/06/2012	01:29	554.4
10/05/2062	21:36	520.5	11/12/2117	02:48	723.6
11/11/2065	20:06	180.7	08/12/2125	16:01	736.4
14/11/2078	13:41	674.3	11/06/2247	11:33	691.3
07/11/2085	13:34	718.5	09/06/2255	04:38	491.9
08/05/2095	21:05	309.8	13/12/2360	01:44	625.7
10/11/2098	07:16	214.7	10/12/2368	14:45	836.4

Os trânsitos de Mercúrio são observados em maio ou novembro, quando a Terra está alinhada com o Sol e o nodo descendente ou ascendente da órbita de Mercúrio. Em média ocorrem 13 ou 14 trânsitos de Mercúrio por século. A Fig. 4.19 mostra alguns dos trânsitos da tabela 4.2 (além dos trânsitos de 09/05/1970 e 15/11/1999).

A primeira observação de um trânsito de Mercúrio pelo Sol foi feita por Pierre Gassendi (01/1592–10/1655) em novembro/1631, graças à previsão feita por Kepler em 1629 baseada em suas *Tabelas Rudolfinas* (infelizmente, Kepler morreu antes da ocorrência trânsito).

Os trânsitos de Vênus sobre o Sol são bem mais raros, pois sua órbita é maior do que a de Mercúrio e leva mais tempo para Terra e Vênus se alinharem sobre um dos nodos. Os trânsitos ocorrem geralmente em pares no mesmo mês (mesmo nodo da órbita de Vênus) separados por 8 anos e um intervalo de um pouco mais de um século até outro par de trânsitos. Os trânsitos de junho correspondem ao nodo descendente e os de dezembro ao nodo ascendente.

Com o passar do tempo, devido à precessão das órbitas de Mercúrio e de Vênus, as datas de passagem da Terra pelos nodos das órbitas de destes planetas vão se alterando.

Por coincidência, Kepler também previu o trânsito de Vênus de dezembro/1631, mas não há nenhum registro de observação deste fenômeno. Devido a imperfeições nas Tabelas Rudolfinas, Kepler não previu o trânsito de Vênus de dezembro/1639. Porém, o astrônomo inglês Jeremiah Horrocks (1618?–01/1641), tendo trabalhado e aperfeiçoado o trabalho de Kepler, previu este trânsito um mês antes de sua ocorrência e foi o primeiro a observar tal fenômeno.

Observadores hipotéticos nos planetas externos podem observar o trânsito da Terra (e da Lua) pelo Sol. Por exemplo, observadores em Marte poderiam ver a passagem da Terra pelo disco solar nas seguintes datas: 08/05/1905, 11/05/1984, 10/11/2084, e 15/11/2163.

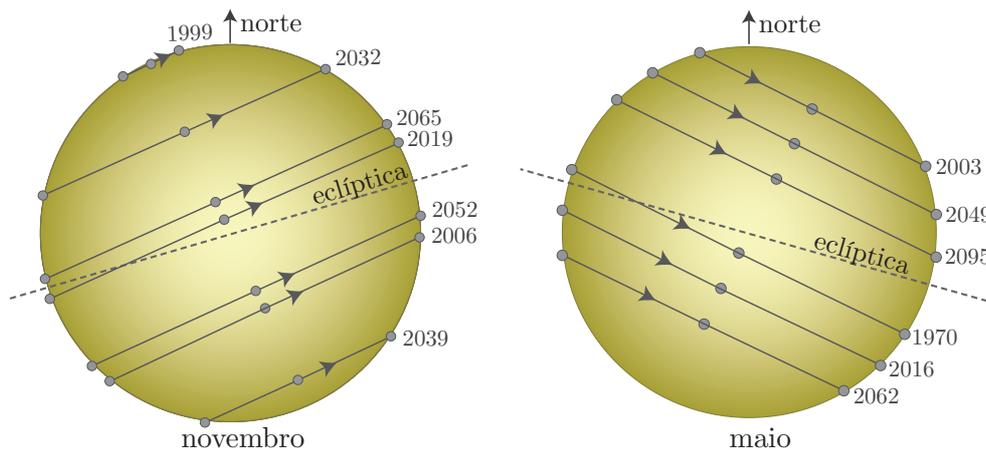


Figura 4.19: Trânsitos de Mercúrio vistos da Terra no nodo ascendente (novembro) e no nodo descendente (maio). Note a simetria dos trânsitos, alternando entre o norte e sul em relação à eclíptica. O trânsito de novembro/1999 foi de raspão.

Ocultação é quando o corpo mais próximo do observador tem um diâmetro aparente aproximadamente igual ou é maior que o corpo mais distante. Por exemplo, quando Vênus passa na frente de Saturno, ou quando Júpiter passa na frente de Netuno, ou ainda quando algum planeta ou asteroide do Sistema Solar passa na frente de uma estrela.

No caso do sistema Terra–Lua–Sol ocorrem ocultações, porém discutiremos este caso em detalhes mais a frente pois aqui tratam-se de *eclipses*.

A Lua por sua proximidade e grande diâmetro angular, comparável ao Sol, frequentemente oculta planetas, estrelas e mesmo galáxias. Devido à paralaxe da Lua, estas ocultações não são visíveis por qualquer observador na Terra, mas apenas em alguma região (supondo ainda que a ocultação não ocorra onde é dia, com o Sol acima do horizonte).

Já ocultações mútuas entre planetas são bem mais raras. Além dos respectivos diâmetros angulares serem pequenos (menores que $\sim 1'$), as órbitas planetárias não são exatamente coplanares.

No século **XX** não houve nenhuma ocultação mútua entre planetas; no século **XXI**, teremos apenas 5 eventos destes: Vênus ocultando Júpiter em 22/11/2065 (rigorosamente, é um trânsito, pois Vênus não vai ocultar Júpiter), Mercúrio e Netuno em 15/07/2067, Mercúrio e Marte em 11/08/2079 e duas vezes Mercúrio ocultando Júpiter em 27/10/2088 e 07/04/2094. No século **XIX**, foram duas ocultações mútuas entre planetas, Mercúrio e Saturno em 09/12/1808 e Vênus e Júpiter em 03/01/1818 (ambos sem registros observacionais).

Registros de observações de ocultações mútuas de planetas são extremamente raros. O primeiro registro histórico é da passagem de Marte na frente de Júpiter, observado por Gervásio da Cantuária (Gervase of Canterbury, ~ 1141 –1210) na Inglaterra e por astrônomos chineses em 12/09/1170.

A primeira observação feita por telescópio foi da ocultação de Mercúrio por Vênus em 28/05/1737 pelo astrônomo inglês John Bevis (11/1695–11/1771) no Observatório de Greenwich. Galileu Galilei (cf. Sec. 4.8.3) quase observou a ocultação de Netuno por Júpiter que ocorreu em 04/01/1613. Galileu efetivamente observou Netuno em 28/12/1612 e 27/01/1613, mas achou que se tratava de uma estrela.

Também há as ocultações de estrelas por planetas. Como os planetas estão todos muito próximos da eclíptica, apenas as estrelas da faixa do Zodíaco podem ser ocultadas por planetas.

Um caso interessante, é a passagem (ou trânsito) recorrente de Vênus na frente das Plêiades. A cada 8 anos, quase que exatamente, Vênus é observado na mesma região do céu. Assim, a

cada 8 anos, Vênus passa próximo das Plêiades, podendo ocultar algumas de suas estrelas. A Fig. 4.20 mostra esquematicamente o trânsito de Vênus pelas Plêiades ao longo do século XXI.

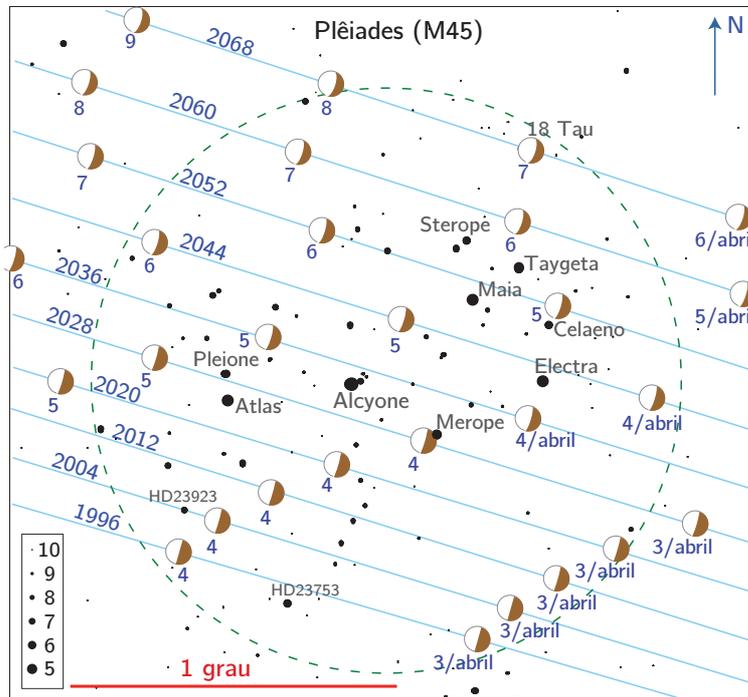


Figura 4.20: Trânsito de Vênus pelas Plêiades, que ocorrem aproximadamente a cada 8 anos e duras alguns dias. As linhas diagonais em azul indicam a trajetória de Vênus visto da Terra com o ano indicado. Os números próximos da primeira imagem de Vênus de cada linha correspondem ao dia em abril às 0h UT. O círculo tracejado representa aproximadamente a região onde se encontram as Plêiades. Embaixo, a esquerda, está a escala de magnitude das estrelas.

A distinção entre ocultação, eclipse e trânsito fica clara na observação de Júpiter e seus satélites. A figura 4.21 mostra (fora de escala) a geometria do sistema joviano visto da Terra e a partir do Sol. Neste caso,

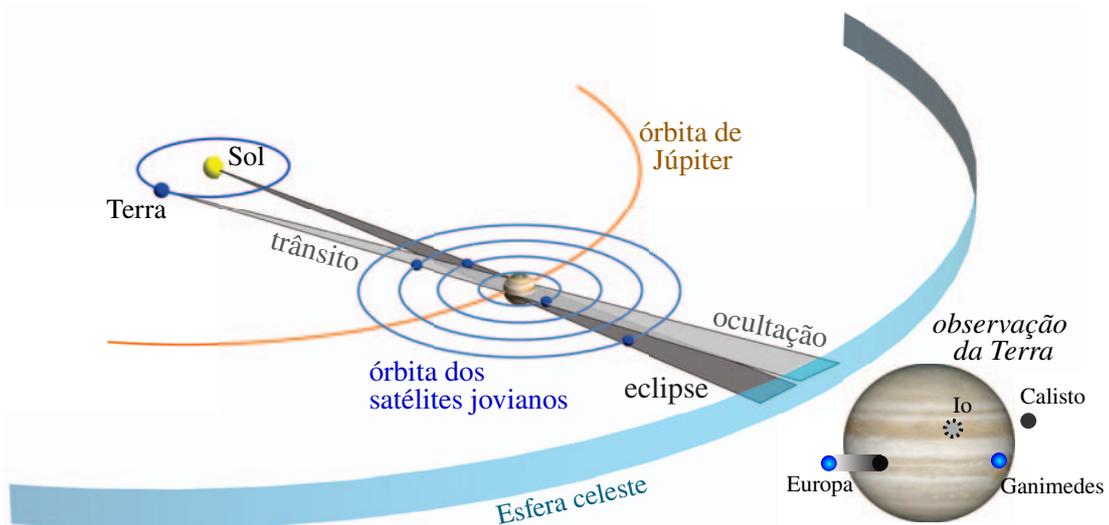


Figura 4.21: Ocultação e eclipse no sistema Joviano. A região além de Júpiter, em cinza claro, indica onde há ocultação dos satélites. Em cinza escuro, onde há eclipse. Na região em cinza claro entre a Terra e Júpiter há o fenômeno de trânsito. No exemplo desta figura, o satélite galileiano mais interior, Io, está oculto por Júpiter (invisível da Terra); Europa está projetando uma sombra; Ganímedes está em trânsito; Calisto está eclipsado pela sombra de Júpiter (também invisível da Terra, mas não oculto). No canto inferior à direita o que seria observado da Terra.

4.10 Eclipses

Todos os corpos no Sistema Solar projetam uma sombra na direção oposta do Sol. Para os corpos aproximadamente esféricos (os planetas, os maiores satélites e vários planetas-anões e asteroides), esta sombra tem a forma de um cone no espaço. Um eclipse ocorre quando um corpo deixa de ser visto devido a uma sombra. No caso do *eclipse do Sol*, este deixa de ser visto porque a Lua está entre o observador (na Terra) e o Sol, isto é, a sombra da Lua passa pelo observador. No caso do *eclipse da Lua*, esta deixa de ser vista porque entra na sombra da Terra⁵.

Quando a fonte luminosa e o corpo iluminado não são puntiformes existem duas regiões de sombra: a *umbra*, região que não recebe luz nenhuma da fonte luminosa, e a *penumbra*, região que recebe luz apenas de alguma parte da fonte. Isto é precisamente o que ocorre no sistema Sol–Terra–Lua (todos os corpos são extensos). Além disto, também temos a *antumbra*, a região onde a fonte luminosa pode ser observada ao redor do corpo que produz a umbra e a penumbra.

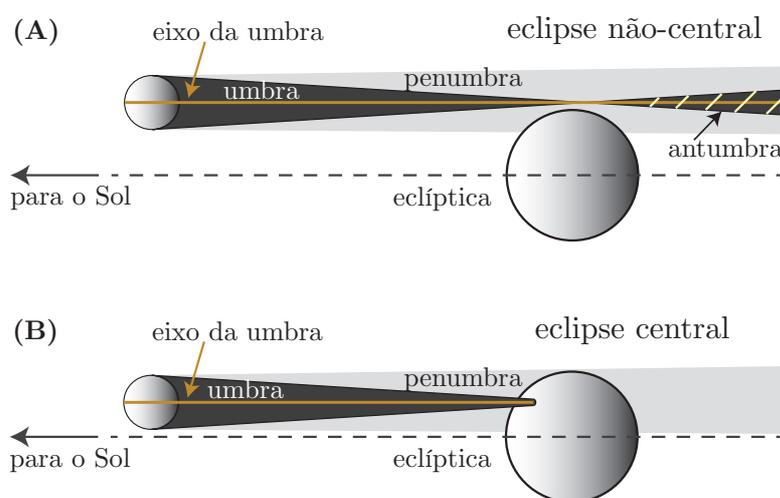


Figura 4.22: Configuração geométrica de um eclipse não-central (Painel (A), acima), quando o eixo da umbra não toca na Terra e configuração de um eclipse central (Painel (B), abaixo). A linha tracejada indica o plano orbital da Terra ao redor do Sol, a eclíptica. O Sol está à esquerda, distante, indicado pela flecha.

Quando o eixo da umbra passa pela superfície da Terra, chamamos de **eclipse central** (painel (A) da Fig. 4.22). Podemos ter um eclipse total ou anular, como veremos a seguir. No caso do eixo da umbra não interceptar a Terra, então podemos ter um **eclipse não-central** (painel (B) da Fig. 4.22), que será, na grande maioria das vezes, um eclipse parcial e, raramente, um eclipse total.

4.10.1 Eclipse do Sol

A geometria dos possíveis eclipses do Sol, total, anular e parcial, está ilustrada na figura 4.23.

No caso de um *eclipse total*, a umbra da Lua atinge a superfície da Terra, todo o disco solar é ocultado pela Lua. Como as distâncias entre a Lua e a Terra e entre o Sol e a Terra não são constantes, nem sempre os eclipses são totais. Dependendo da distância, o diâmetro aparente da Lua varia entre $29'22''$ e $33'20''$; o do Sol varia entre $32'00''$ e $32'31''$ (Fig. 4.24). Assim, quando o diâmetro aparente da Lua é menor que o do Sol, temos um *eclipse anular* (veja a Fig. 4.25) – neste caso a umbra da Lua não chega na superfície da Terra.

Os eclipses de tipo anular são um pouco mais frequentes (33% do total de eclipses) que os eclipses totais (27%). A maioria dos eclipses, contudo, são *parciais* (35%), quando a umbra da Lua não atinge a Terra e o eclipse não é anular⁶.

Em alguns casos relativamente raros, um eclipse pode começar como anular e, a medida que a sombra avança pela Terra o eclipse se torna total. No final do eclipse este se torna anular

⁵Na realidade, a Lua não deixa de ser vista, pois ainda é iluminada pela luz do Sol que é espalhada pela atmosfera terrestre, dando-lhe uma cor avermelhada.

⁶As estatísticas são de Fred Espenak, disponíveis no site www.EclipseWise.com.

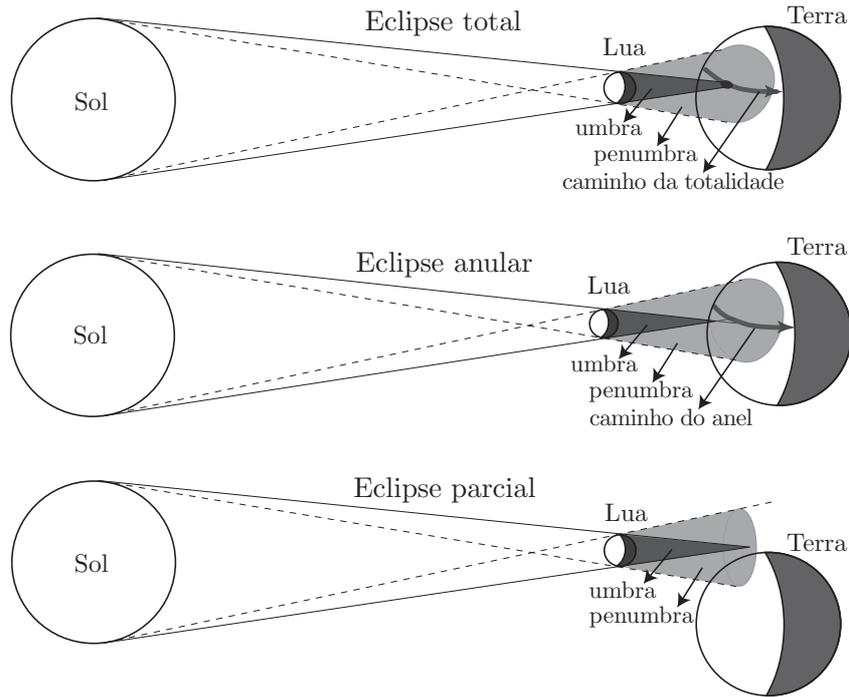


Figura 4.23: Representação dos eclipses total, anular e parcial do Sol. Para observadores que se encontram na umbra, o disco solar está completamente oculto pela Lua. Para os observadores que se encontram na penumbra, o disco solar está apenas parcialmente oculto (para este observador é um eclipse parcial). Caso a Terra estivesse mais próxima do Sol ou a Lua mais distante da Terra, o eclipse seria anular (o disco aparente da Lua seria menor que o disco solar). No caso do alinhamento Sol–Lua não ter intersecção com o disco da Terra, temos um eclipse não-central que será observado apenas como parcial (a não ser em casos muito raros, onde o eclipse não-central é total ou anular). A flecha indica o movimento da sombra na superfície da Terra (de Oeste para Leste).

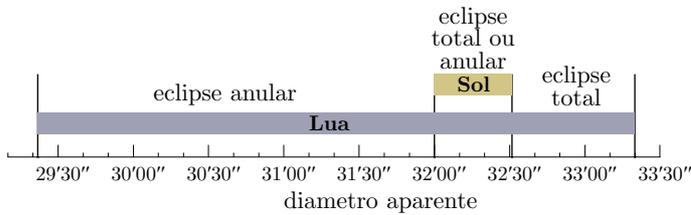


Figura 4.24: Comparação dos diâmetros aparentes do Sol e da Lua. A variação ocorre devido à elipticidade (achatamento) das órbitas da Terra e da Lua. Como a órbita lunar é mais excêntrica, a variação do tamanho aparente é maior.

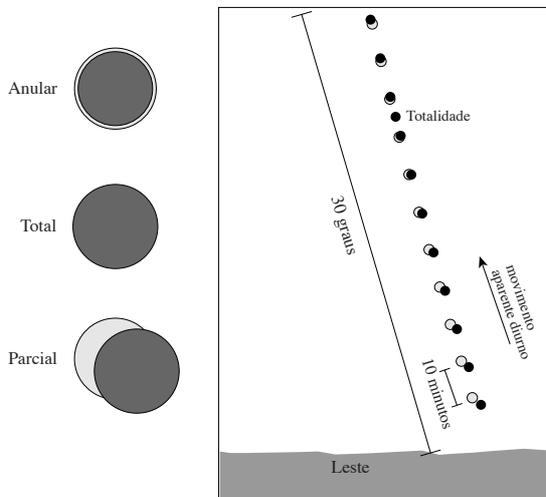


Figura 4.25: A esquerda, os três tipos de eclipse do Sol. No caso do eclipse anular, a Lua se encontra próxima do apogeu e seu diâmetro aparente é menor do que o do Sol; no eclipse total, a Lua se encontra próxima do perigeu. A direita, representação da observação de um eclipse do Sol.

novamente. A principal razão disto é a curvatura terrestre que faz com que a distância relativa entre a Lua e os observadores dependa da posição na Terra. Em alguns casos, o eclipse pode começar total e terminar anular ou vice-versa. Chamamos estes eclipses de *híbrido* ou *anular-total* do Sol. Por exemplo, os eclipses de 08/04/2008, 03/11/2013 e 20/04/2023 são de tipo híbrido.

Observamos também que a sombra da Lua percorre apenas uma pequena fração da superfície da Terra. Para observadores que não se encontram no caminho da totalidade, mas próximo dele (isto é, na penumbra), o eclipse será parcial (apenas uma parte do disco solar será ocultado pela Lua). Observadores ainda mais distantes, não observarão o eclipse. Isto é simplesmente um efeito da paralaxe diária na posição aparente da Lua.

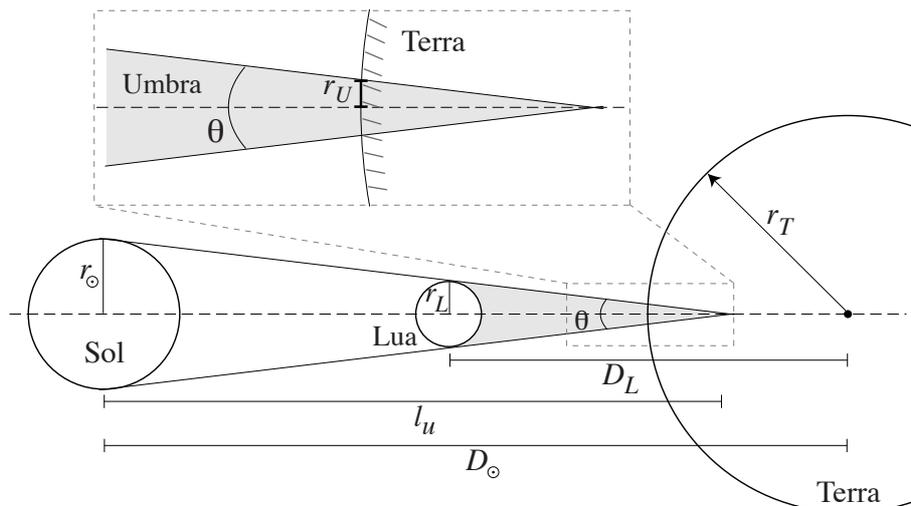


Figura 4.26: Geometria de um eclipse do Sol para estimarmos o tamanho da umbra na superfície terrestre.

O tamanho da umbra na superfície da Terra pode ser estimado utilizando as seguintes relações (veja Fig. 4.26):

$$\sin(\theta/2) = \frac{r_{\odot}}{l_U} = \frac{r_L}{l_U - (D_{\odot} - D_L)} = \frac{r_U}{l_U - (D_{\odot} - r_T)}; \quad (4.3)$$

onde D_{\odot} e D_L são as distâncias geocêntricas do Sol e da Lua, r_{\odot} , r_L e r_T são os raios do Sol, Lua e Terra, respectivamente. O raio da umbra na superfície terrestre é r_U (supondo que a projeção da umbra seja circular). Com um pouco de álgebra, mostramos que

$$l_U = \frac{D_{\odot} - D_L}{1 - r_L/r_{\odot}} \approx D_{\odot} \left(1 + \frac{r_L}{r_{\odot}}\right), \quad (4.4)$$

e teremos um eclipse total se $l_U \geq (D_{\odot} - r_T)$, isto é, a umbra atinge a superfície da Terra. Esta relação é equivalente a $d_L \geq d_{\odot}$, o *diâmetro aparente* da Lua é maior do que o da Sol.

O tamanho da umbra na superfície da Terra é dado por:

$$r_U = \frac{r_L(D_{\odot} - r_T) - r_{\odot}(D_L - r_T)}{D_{\odot} - D_L} \approx r_L - r_{\odot} \frac{D_L - r_T}{D_{\odot}}, \quad (4.5)$$

onde assumimos que a projeção da umbra lunar na Terra é circular. Usando a Eq. 4.5 quando a Lua está no perigeu e a Terra no afélio obtemos $r_U \approx 96$ km. Isto não é rigorosamente preciso: devido à curvatura da Terra este é um valor mínimo. O tamanho real da umbra pode ser até o dobro do estimado pela fórmula acima próximo dos polos.

A umbra lunar tem no máximo 270 km de largura e tipicamente varia de algumas dezenas a ~ 100 km. Um cálculo feito por Jean Meeus (Sky & Telescope, 1999) sugere que uma dada localidade na Terra observa, em média, um eclipse solar a cada 375 anos devido à largura do caminho do eclipse solar na superfície terrestre. A variância deste intervalo de tempo, contudo, é muito grande: em algumas ocasiões na mesma localidade poderíamos observar eclipses totais do Sol com um intervalo de poucos anos; outros lugares podem ficar sem ver um eclipse total por milênios.

A umbra se move na superfície da Terra com velocidade entre 1700 a 3400 km/h, no sentido Oeste para Leste (esta velocidade é pelo menos o dobro da velocidade dos aviões comerciais). O movimento da umbra na superfície terrestre é o resultado da composição de 3 movimentos: translação da Lua ao redor da Terra, translação da Terra em torno do Sol e a rotação terrestre. A principal componente é a translação da Lua e a velocidade da umbra na direção do Leste reflete a velocidade da Lua em órbita da Terra.

A fase de totalidade para um dado observador dura, aproximadamente, o tamanho do diâmetro da umbra dividido pela velocidade com que a umbra percorre o caminho da totalidade: a duração é tipicamente $\sim 150 \text{ km}/(2000 \text{ km/s}) \sim 4,5$ minutos. Observamos que a fase de totalidade pode durar *no máximo* cerca de 7 minutos e meio (entre 3000 A.C. e 5000 D.C., o mais longo eclipse será em 16/jul/2186 com 7m29s de duração). Os eclipses anulares podem ser mais longos, chegando a durar até cerca 12 minutos e meio.

Pela geometria do eclipse, é claro que um eclipse do Sol só pode ocorrer na Lua Nova.

4.10.2 Eclipse da Lua

O eclipse da Lua se produz quando esta entra no cone de sombra da Terra como mostra a Fig. 4.27. Pela figura, vemos que os eclipses lunares só podem ocorrer na Lua Cheia.

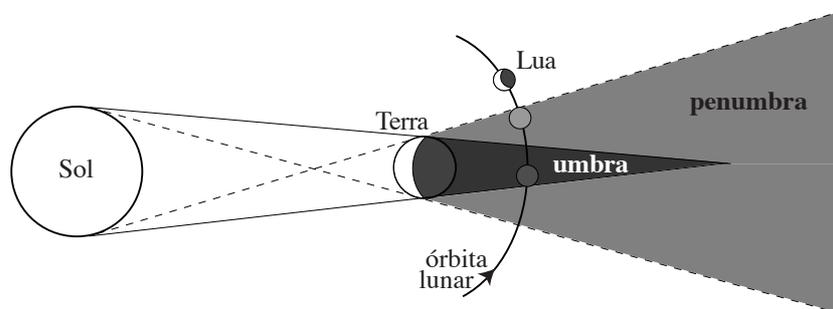


Figura 4.27: Representação de um eclipse da Lua ao passar pela sombra da Terra.

Chamamos de fase de totalidade o intervalo de tempo em que a Lua percorre a umbra terrestre (Fig. 4.28). A fórmula (4.4) também vale para a umbra da Terra, bastando trocar r_L por r_T e fazendo $D_L \rightarrow 0$. A umbra da Terra é apenas 0,00925 vezes a distância Terra–Sol, mas isto significa que a umbra se prolonga cerca de 1,4 milhões de km além da Terra, mais de 3,5 vezes o raio da órbita da Lua. Um observador na Lua nunca verá um eclipse anular do Sol. Se apenas uma parte da Lua passar pela umbra, então dizemos que é um *eclipse parcial*.

A Lua não passa sempre pela umbra da Terra. Em alguns casos só ocorre a passagem da Lua pela penumbra (não necessariamente de toda a Lua). Neste caso, onde não há contato com a umbra, chamamos de *eclipse penumbral* da Lua, Fig. 4.28 (por exemplo, como os eclipses de 28/12/2012, 10/02/2017 e 10/01/2020).

Em contraste com os eclipses solares, que só podem ser vistos em uma pequena região sobre a Terra, os eclipses lunares são vistos por todo o hemisfério onde é noite. Em outras palavras, basta que a Lua esteja acima do horizonte (levando-se em conta a refração e a paralaxe) para

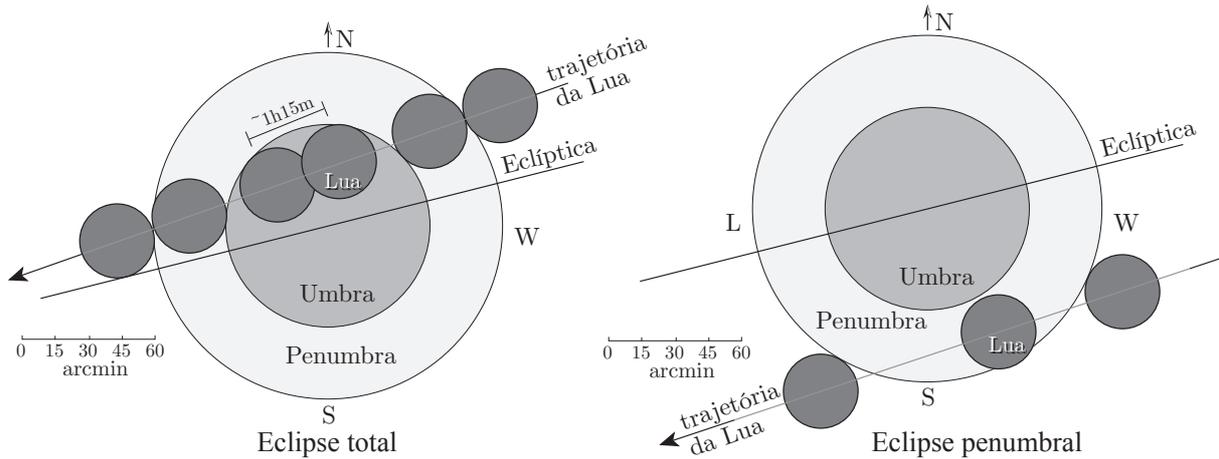


Figura 4.28: Esquerda: Exemplo de um eclipse da Lua visto da Terra (a umbra e a penumbra não são realmente visíveis). Neste exemplo a totalidade (intervalo de tempo em que a lua permanece na umbra terrestre) dura cerca de 1 hora e 15 minutos. Direita: Exemplo de um eclipse da Lua penumbral, quando a Lua não passa pela umbra da Terra.

que o fenômeno seja observável. Na página 209 temos uma lista dos eclipses totais da Lua entre 2000 e 2060.

No período entre 1301 e 2400, cerca de 36% dos eclipses da Lua são penumbrais, 34% são parciais e 30% são totais, de um total de 2646 eclipses. Na maioria dos anos temos 2 eclipses lunares, mas em casos raros podemos ter até 5 eclipses lunares em um ano (a última vez que isto ocorreu foi em 1879 e a próxima será em 2132).

A duração máxima de um eclipse da Lua é de cerca de 3^h50^m e a duração da fase total não pode superar cerca de 1^h45^m .

Mesmo durante um eclipse total, a Lua continua visível pois uma parte da luz solar é desviada pela atmosfera terrestre (tecnicamente, dizemos que a luz é espalhada) e acaba iluminando-a. Como o fenômeno de espalhamento da luz depende do comprimento de onda, ondas mais curtas são mais espalhadas, isto significa que a cor da luz que atinge a Lua durante um eclipse total é avermelhada (a luz azul, de comprimento de onda menor, foi mais espalhada pela atmosfera terrestre). Isto dá a coloração que tipicamente observamos de uma Lua avermelhada durante a fase de totalidade do eclipse.

4.10.3 Ocorrência de eclipses

Como foi dito, os eclipses solares e lunares só podem ocorrer nas luas Novas e Cheias, respectivamente. Então por que não observamos dois eclipses por mês? Os eclipses não ocorrem com esta frequência porque os planos orbitais da Lua em torno da Terra, e da Terra em torno do Sol não são coplares (veja Figs. 4.29 e 4.30).

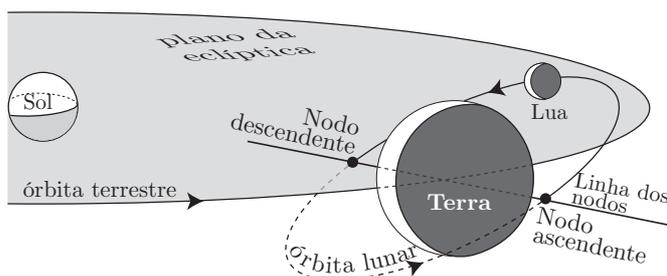


Figura 4.29: Geometria da órbita da Lua em relação à eclíptica. As órbitas não são coplares e a reta da intersecção é chamada linha dos nodos onde se encontram os nodos ascendente e descendente. A inclinação da órbita da Lua em relação à eclíptica é de cerca de $5^{\circ}1'$.

Como a órbita da Lua é inclinada de cerca de $5^{\circ}14'$ em relação à eclíptica, na Lua Nova nem sempre ela estará exatamente alinhada com o Sol e a Terra. Assim um eclipse só pode ocorrer quando o Sol e a Lua estiverem próximos à linha dos nodos da órbita lunar. Pode-se mostrar que a Lua não deve estar a mais de $4^{\circ}6'$ do nodo para que o eclipse lunar seja total, e não mais que $10^{\circ}3'$ para o eclipse total do Sol.

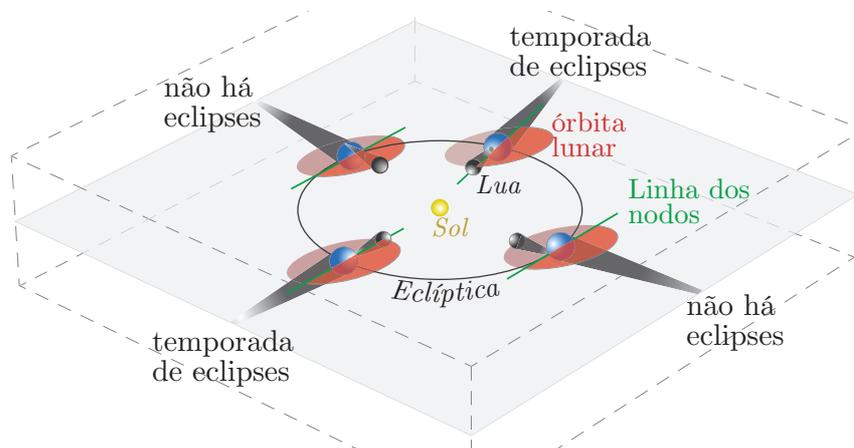


Figura 4.30: Duas vezes por ano (excepcionalmente até 3 vezes) a Lua, Terra e Sol estão alinhados próximos da linha dos nodos: nestes casos temos as temporadas de eclipses. Quando a conjunção não está alinhada com a linha dos nodos, a sombra da Lua não atinge a Terra e nem a Lua passa pela sombra da Terra.

A Lua, a Terra e o Sol estão alinhados próximos à linha dos nodos geralmente 2 vezes por ano e, com menos frequência, 3 vezes por ano. Isto ocorre porque a linha dos nodos tem um movimento retrógrado e o período com que a Terra passa pelo nodo é um pouco inferior ao ano Trópico. Nesta configuração temos a **temporada de eclipses** (Fig. 4.30). Inicialmente, com o alinhamento temos um eclipse (digamos do Sol); 2 semanas depois teremos um eclipse da Lua e, às vezes, com mais 2 semanas voltaremos a ter um eclipse do Sol. Esta temporada volta com o próximo alinhamento, um pouco menos de 6 meses depois.

Em um ano pode ocorrer no mínimo 2 eclipses solares (não necessariamente totais) e no máximo 5, o que é muito raro, em média uma vez a cada 180 anos (a última vez foi em 1935 e a próxima será em 2206).

Incluindo os eclipses lunares, podem ocorrer no mínimo 4 eclipses (neste caso 2 são solares) e no máximo 7 (2 lunares e 5 solares ou 3 lunares e 4 solares – a última vez que isto ocorreu foi em 1982, a próxima será em 2038). O mais frequente, em cerca de 71% dos anos, é que ocorram 4 eclipses por ano.

Série de Saros

O plano orbital da Lua não é invariante, ele possui um movimento de precessão devido às perturbações do Sol, dos planetas e da não esfericidade da Terra. Podemos definir um período entre duas passagens consecutivas do Sol pelo nodo ascendente da órbita lunar; este é o **ano draconiano**. Este ano, como já foi visto, tem cerca de 346,62 dias. Dezenove anos draconianos correspondem quase exatamente a 223 meses sinódicos (um **mês sinódico** ou luação tem em média cerca 29,53 dias), isto é o período de recorrência das fases da Lua. Por último, existe uma outra coincidência, 223 meses sinódicos correspondem quase que exatamente a 239 meses anomalísticos (o **mês anomalístico** é o período de uma órbita lunar em relação ao perigeu). Resumindo, temos:

19 anos draconianos:	6585 dias	18 horas	44 minutos	= 18 anos	11,28 dias
223 meses sinódicos:	6585 dias	7 horas	43 minutos	= 18 anos	10,82 dias
239 meses anomalísticos:	6585 dias	12 horas	53 minutos	= 18 anos	11,04 dias

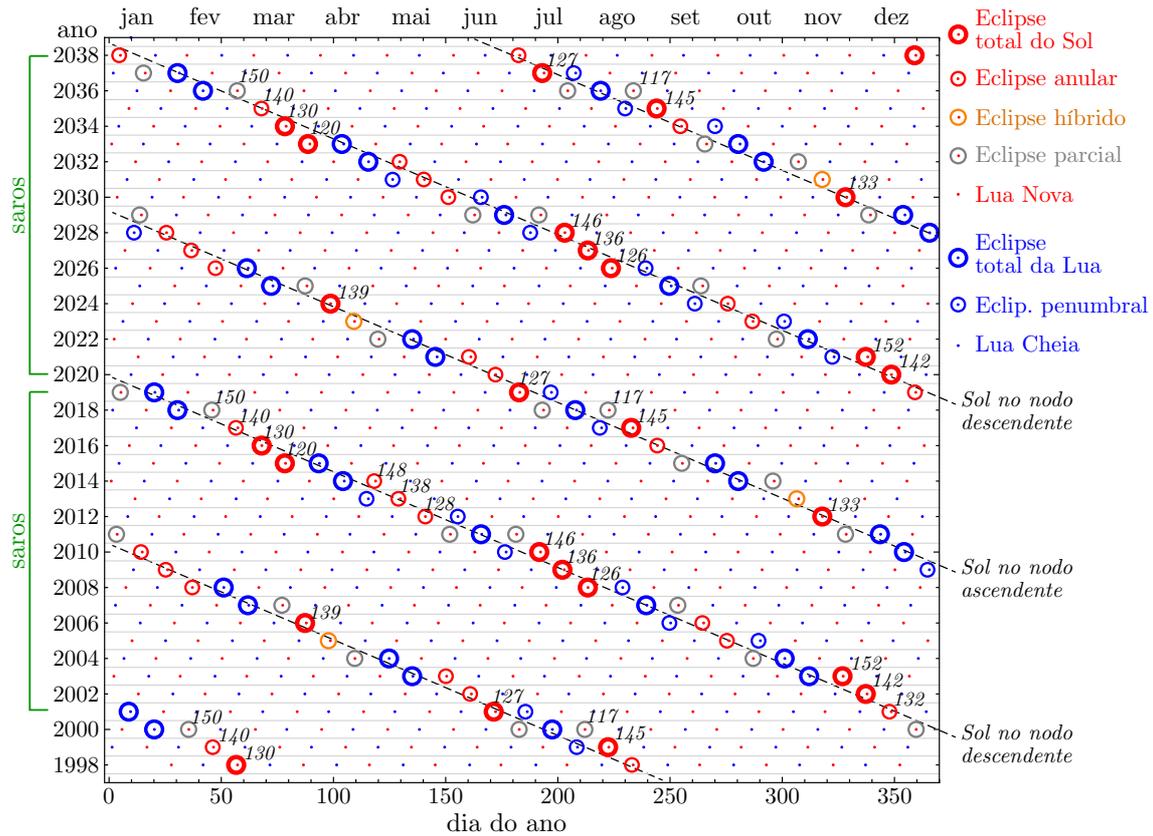


Figura 4.31: Frequência dos eclipses solares e lunares. Os eclipses se agrupam em diagonais correspondendo aos eclipses que ocorrem no nodo ascendente ou descendente da órbita lunar. Os grupos de 2 ou 3 eclipses que ocorrem no intervalo de cerca de 34 dias correspondem às “temporadas de eclipses”. O período de saros (ou simplesmente saros) tem um pouco mais de 18 anos e a figura ilustra 2 exemplos. Alguns eclipses têm o número de sua série de saros destacadas.

Em outras palavras, as configurações espaciais Terra–Sol–Lua se repetem quase que exatamente com um período de cerca de 18 anos trópicos e 11,3 dias. Portanto, a sequência de eclipses também se repete com este período. Esta recorrência dos eclipses já era conhecida dos Caldeus (cultura que existiu entre os séculos **IX** e **VI** A.C. na Mesopotâmia, eventualmente integrada à Babilônia) e é chamado *período de saros*. O termo **saros** foi utilizado pela primeira vez por Edmund Halley para designar o período de 223 meses sinódicos. A palavra saros vem do Caldeu e significa “3600”, sem relação com o período de recorrência dos eclipses; aparentemente Halley cometeu um erro ao usar a palavra “saros”. Contudo, o termo acabou sendo adotado de tal forma que alguns autores dizem que a palavra saros significa “repetição” em grego.

Ocorrem vários eclipses por ano o que significa que existem várias séries de saros ocorrendo simultaneamente. Os saros são numerados seguindo a convenção de que eclipses de séries com números pares ocorrem próximo do nodo descendente enquanto eclipses que ocorrem próximos do nodo ascendente tem número ímpar.

Uma série de saros tem duração limitada. A série começa com eclipses solares parciais próximos de um dos polos. À medida que a serie avança os eclipses se deslocam para o equador e, eventualmente se tornam anulares e/ou totais. Em seguida, os eclipses vão se deslocando para o outro polo, se tornam parciais e finalmente a serie termina. Uma serie de saros dura geralmente entre 1244 (com 70 eclipses solares) a 1316 anos (com 74 eclipses solares). A maior frequência é para a duração de 1280 anos, que corresponde a 72 eclipses solares. Nos casos extremos, pode haver até 87 eclipses solares em uma serie que dura 1551 anos.



Figura 4.32: Exemplo da semelhança da geometria de eclipses da mesma série de saros (aqui, series 139 [vermelho], 142 [azul] e 145 [verde]). A cada 18 anos, 11 dias e 8 horas, os eclipses se repetem a 120° para o Oeste (o que corresponde a 8h) de forma muito semelhante. A cada 3 saros, alguns eclipses praticamente ocorrem da mesma forma e no mesmo local (por exemplo, na serie de saros 139 de 1988 e 2042).

A serie de saros de número zero ocorreu entre maio/2996 A.C. e junho/1675 A.C. Hoje em dia as series ativas estão entre a 117 (de jun/792 a ago/2054) e a 156 (de jul/2011 a jul/3237).

Como os eclipses separados por um período de saros têm aproximadamente a mesma configuração espacial, os eclipses são muito semelhantes. A figura 4.32 ilustra esta semelhança entre os eclipses consecutivos de duas séries de saros.

A figura 4.33 mostra os eclipses do Sol, anular e total, entre 1990 e 2040 no mundo. Na página 208, podemos ver todos os eclipses que passam pelo Brasil entre 1900 e 2120. O próximo eclipse total visível no Brasil será em 12/08/2045, quando a totalidade será observada em Belém, São Luís e Recife. O eclipse anular de 14/10/2023 teve uma trajetória (caminho por onde o anel do eclipse pode ser observado) passando inicialmente pela Amazônia (próximo de Manaus), norte de Tocantins, interior do Piauí, Juazeiro do Norte/CE e terminando em Natal/RN e João Pessoa/PB. Em 06/02/2027, um eclipse parcial será observado no extremo sul do Brasil, em Chuí e passará a cerca de 10 km de Arraial do Cabo em Cabo Frio/RJ pelo mar.

4.11 Libração da Lua

A órbita da Lua é complexa devido à excentricidade média de sua órbita ao redor da Terra ($\sim 0,0549$, isto é, mais do que o triplo da excentricidade da órbita da Terra em torno do Sol), a ação perturbadora do Sol e, em menor escala, dos planetas do Sistema Solar. Em 1693, o astrônomo Ítalo-Francês Giovanni Domenico Cassini (1625–1712), enuncia 3 características (ou leis) do movimento da Lua, descobertas empiricamente (veja também a Fig. 4.34):

- 1) A Lua gira em torno de si mesmo de maneira uniforme e igual ao seu período médio de translação ao redor da Terra. Em outras palavras, a Lua sempre apresenta a mesma face para a Terra.
- 2) O eixo polar da Lua (perpendicular ao equador lunar) tem uma inclinação constante em relação ao eixo polar da eclíptica, $\iota = 1^\circ 54' 2''$.
- 3) O eixo de rotação da Lua (eixo polar), o eixo da eclíptica e o eixo perpendicular à órbita lunar estão sempre no mesmo plano. Além disto, eles estão sempre nesta ordem, isto é, o eixo da eclíptica está sempre entre os eixos de rotação e perpendicular de sua órbita. Isto

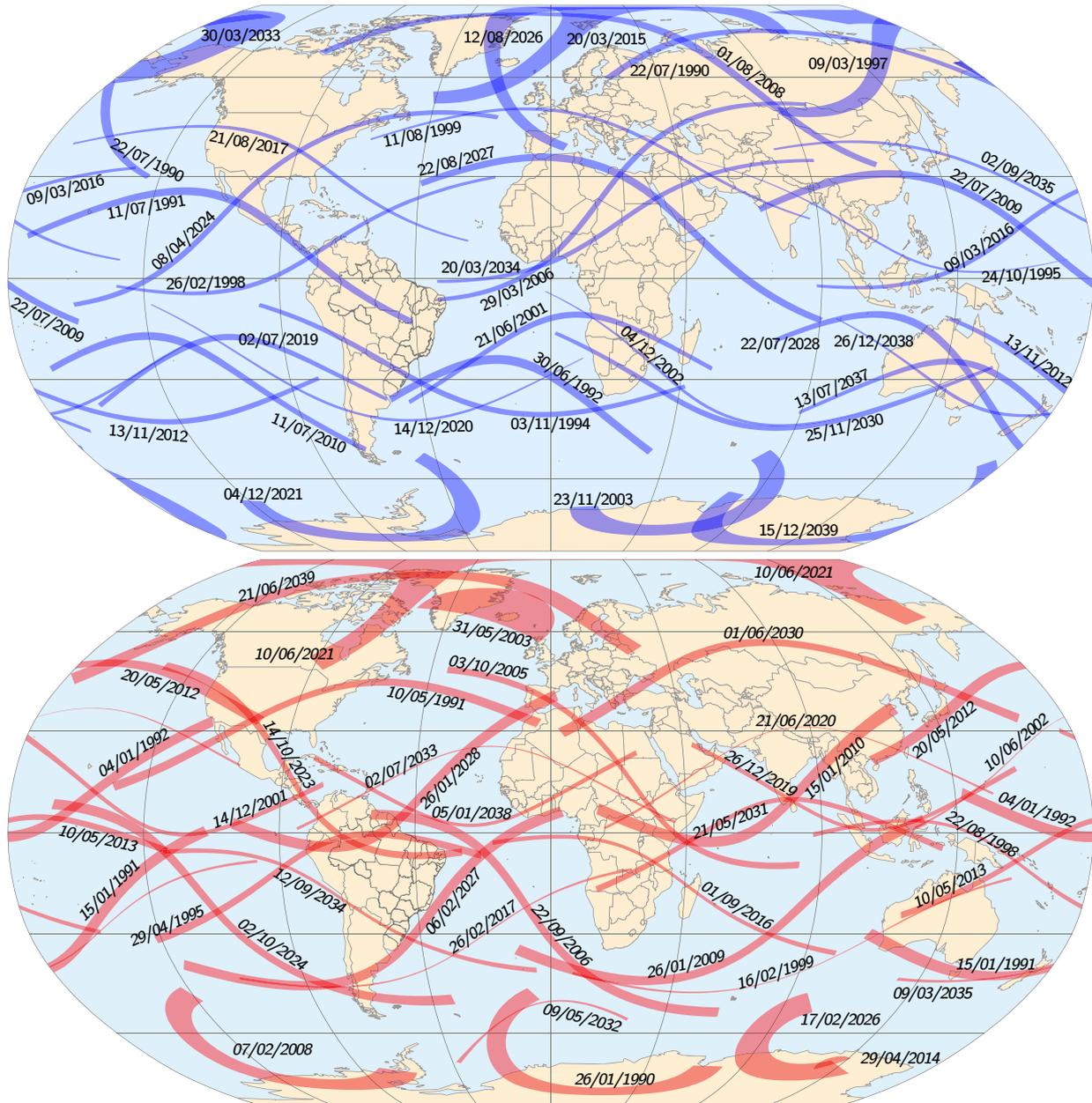


Figura 4.33: Eclipses do Sol (acima em azul os totais e abaixo em vermelho os anulares) entre 1990 e 2040. A trajetória da sombra da Lua na superfície da Terra se movimenta de Leste a Oeste. Os cálculos das trajetórias dos eclipses foram feitos por Fred Espenak, NASA/Goddard Space Flight Center. A projeção usada aqui é de Robinson. Para mais informações, veja o *site*: <http://eclipsewise.com/>.

também significa que o nodo descendente do equador da Lua coincide com o nodo ascendente da órbita lunar.

O plano orbital da Lua tem uma inclinação média $I \approx 5^\circ,14$ em relação à eclíptica, oscilando com uma amplitude $\pm 0^\circ,15$. Como I e ι estão no mesmo plano (3^a lei de Cassini, Fig. 4.34), então a inclinação do eixo de rotação da Lua em relação ao seu próprio plano orbital é $5^\circ,14 + 1^\circ,542 = 6^\circ,682$. Esta é a obliquidade da Lua, assim como na Terra, onde a obliquidade (inclinação do eixo de rotação em relação à eclíptica) é $\varepsilon \approx 23^\circ,439$.

Na figura 4.34 também podemos notar que, com o plano orbital da Lua é inclinado em relação à eclíptica, um observador na Terra vera a Lua sob diferentes perspectivas em função da posição

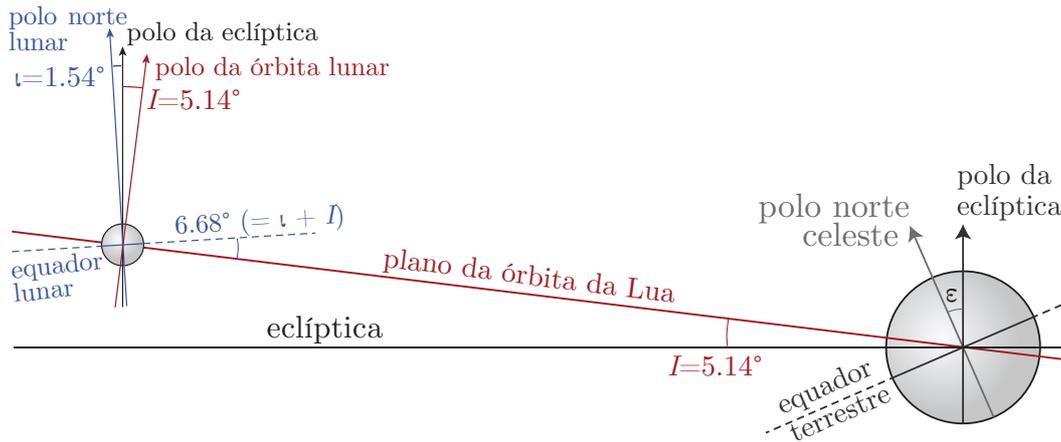


Figura 4.34: Configuração da Lua em sua órbita ao redor da Terra. O tamanho da Terra e da Lua estão em escala, mas as distâncias não estão. O ângulo de inclinação do equador lunar em relação à eclíptica (obliquidade da Lua) está fora de escala para facilitar a representação gráfica. A obliquidade da Terra é $\epsilon \simeq 23,439$. Em relação ao equador terrestre, a órbita lunar tem uma inclinação de $28,58$.

da Lua ao longo de sua órbita. Este efeito de perspectiva é chamado **libração em latitude**, ou mais precisamente *libração óptica*. Esta diferença de perspectiva nos permite observar os polos lunares (veja os painéis da esquerda e central da Fig. 4.35) alternativamente durante cada mês. O nome “libração” vem de libra (balança) que em latim significa também equilibrar.

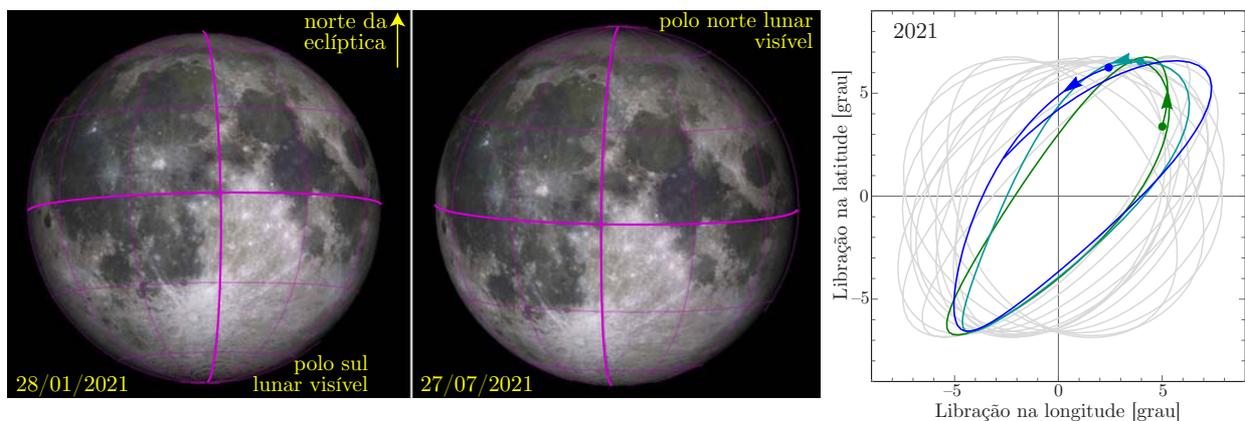


Figura 4.35: Esquerda e centro: Exemplo da libração da lua, tanto em longitude como em latitude com imagens da Lua. Note a mudança das posições das crateras e “mares” próximos da borda da Lua. Os traços em magenta representam as *coordenadas selenográficas*. Direita: movimento relativo da coordenada selenográfica $(0^\circ, 0^\circ)$ mostrando a libração. O traço verde corresponde a janeiro/2021, o ciano a fevereiro e o azul a março. Em cinza claro, o restante do ano de 2021. Os círculos representam o início de cada mês e a flecha indica a direção do movimento de libração.

Um outro efeito de perspectiva ocorre devido à excentricidade da órbita lunar. Enquanto que a Lua gira uniformemente em torno de si (há uma perturbação que veremos um pouco mais abaixo), sua velocidade orbital varia segundo a 2ª lei de Kepler: quando a lua está mais próxima do perigeu, sua velocidade orbital está acima da sua velocidade média; no apogeu, sua velocidade está abaixo da média. Esta variação provoca a chamada **libração em longitude**, Fig. 4.36.

O último efeito de perspectiva ocorre para observadores na superfície da Terra, a **libração diurna** ou topocêntrica. Dependendo da sua posição na Terra, a perspectiva do disco lunar muda. Este efeito pode chegar até cerca de 1° .

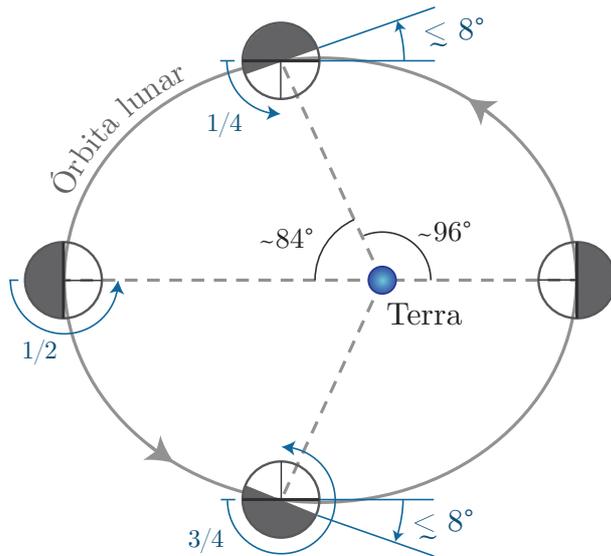


Figura 4.36: Libração geométrica (óptica) em longitude. O observador hipotético está no polo Norte da órbita lunar. A Lua é mostrada em intervalos de tempo iguais, de um quarto de rotação. A trajetória percorrida na órbita é diferente, de acordo com a 2ª lei de Kepler. O semi-disco cinza escuro representa a face oculta da Lua (não tem nada a ver com face iluminada). O ângulo de libração em longitude representado aqui é um valor máximo, quando se leva em conta a perturbação do Sol na órbita da Lua.

Os efeitos discutidos acima são geométricos, onde a aparência da Lua muda por uma questão de perspectiva. A ação gravitacional do Sol e dos planetas do Sistema Solar (Vênus e Júpiter principalmente) exercem um torque na Lua, perturbando sua rotação e forçando uma oscilação. Esta é a **libração física**. Este efeito é bem menor que a libração óptica, chegando no máximo a cerca de $2,4'$ ($\approx 0,04^\circ$).

O efeito combinado da libração óptica e física está ilustrado no painel de direita da Fig. 4.35, onde vemos a trajetória ao longo de um ano do centro do disco lunar, coordenadas selenográficas ($0^\circ, 0^\circ$). A trajetória é diferente para cada ano pois combina os movimentos da Lua: rotação, translação, precessão da órbita e precessão do periastro lunar.

4.12 Determinação clássica de distâncias no Sistema Solar

4.12.1 Diâmetro da Terra

Como foi visto na seção 4.3.3, Eratóstenes foi o primeiro a dar uma medida precisa da circunferência da Terra. Seu método, como já foi descrito, baseava-se na comparação do ângulo zenital, z , do Sol nas cidades de Alexandria e Siena (hoje, Assuã no Egito), esquematizado na Fig. 4.37.

O ângulo zenital medido em Alexandria, z , corresponde à fração de circunferência entre as duas cidades. Assim, ignorando o efeito de refração, z está para a distância entre as cidades, d , assim como 360° está para a circunferência total da Terra. Seja C a circunferência da Terra, temos:

$$C = d \frac{360^\circ}{z^\circ}, \quad (4.6)$$

onde z° é a distância zenital medida em graus. Consequentemente temos:

$$R = \frac{d}{z} \quad (4.7)$$

onde R é o raio (polar) da Terra e z é medido em radianos.

4.12.2 Distância Terra – Lua

Método de Hiparco

Hiparco de Nicea descobriu uma maneira para determinar a distância da Lua à Terra utilizando os eclipses da Lua e do Sol. A geometria do método (fora de escala) baseado nos eclipses da Lua

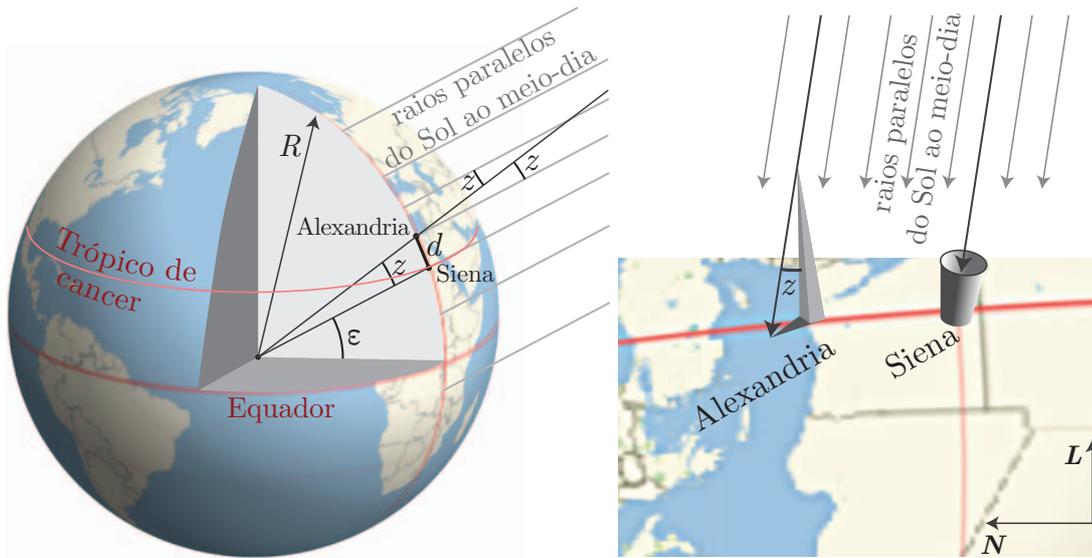


Figura 4.37: Ao meio-dia do solstício de Verão no Hemisfério Norte, o Sol tem um ângulo zenital z em Alexandria e zero em Siena (hoje, Assuã). A distância entre as duas cidades é d , R é o raio da Terra e ε é a obliquidade da eclíptica na época de Eratóstenes. Note que o ângulo zenital z é igual à diferença entre as latitudes de Alexandria e Assuã.

está ilustrada na Fig. 4.38. A Fig. 4.39 mostra em escala realista os tamanhos da Terra e Lua comparados com a distância entre estes astros.

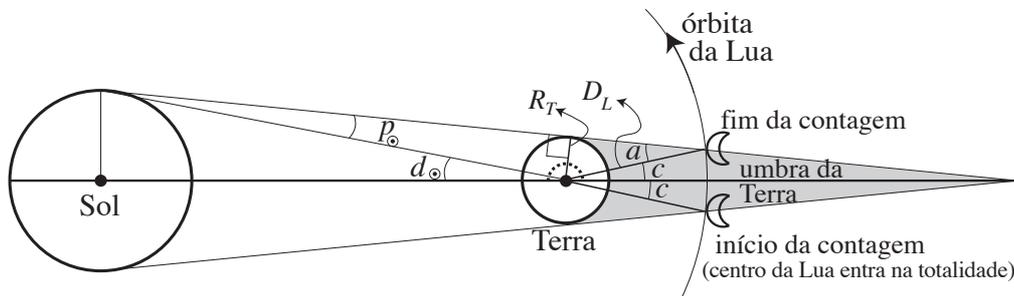


Figura 4.38: Método de Hiparco para determinar a distância D_L da Lua utilizando um eclipse lunar. Os ângulos p_\odot e d_\odot são a paralaxe diária e o semi-diâmetro angular aparente do Sol. O ângulo a é a paralaxe diária da Lua e c é o semi-diâmetro da sombra da Terra na órbita lunar, a uma distância D_L da Terra. R_T é o raio da Terra. O ângulo representado pela linha pontilhada tem 180° . As escalas estão exageradas para maior clareza.

Este método é baseado no tamanho da umbra terrestre atravessada pela Lua durante um eclipse. Hiparco mediu o intervalo de tempo entre o início do eclipse umbral (quando a Lua entra no cone da umbra da Terra) e o fim do eclipse, t_{eclipse} . Como ele conhecia o período sinódico da Lua ($t_{\text{sinódico}}$, o intervalo de tempo entre duas luas cheias), ele tinha:

$$\frac{2c}{t_{\text{eclipse}}} = \frac{360^\circ}{t_{\text{sinódico}}} = \text{movimento médio da Lua} \tag{4.8}$$

e, portanto, ele tinha o valor do ângulo c . O semi-diâmetro do Sol é facilmente medido ($d_\odot \approx 16'$), e era conhecido também por Hiparco.

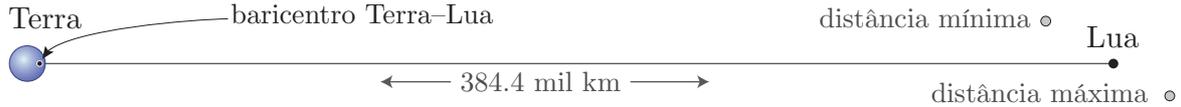


Figura 4.39: O sistema Terra–Lua em escala real, tanto os tamanhos quanto a distância. O baricentro do sistema Terra–Lua fica aproximadamente a 4670 km do centro da Terra, na direção da Lua.

Observando a geometria do problema (Fig. 4.38) podemos escrever o ângulo representado pelo traço pontilhado da seguinte forma:

$$d_{\odot} + \underbrace{(180^{\circ} - 90^{\circ} - p_{\odot})}_{\text{triângulo retângulo com } p_{\odot}} + \underbrace{(180^{\circ} - 90^{\circ} - a)}_{\text{triângulo retângulo com } a} + c = 180^{\circ}$$

$$\Rightarrow p_{\odot} + a = d_{\odot} + c. \quad (4.9)$$

Há uma dificuldade, contudo, pois a paralaxe diária do Sol não era conhecida na época de Hiparco. Mas o ângulo p_{\odot} é muito menor que os outros ângulos que aparecem na Eq. (4.9), $p_{\odot} \approx 8''8$. Desprezando a paralaxe diária do Sol vem:

$$a = d_{\odot} + 180^{\circ} \frac{t_{\text{eclipse}}}{t_{\text{sinódico}}}, \quad (4.10)$$

ou seja, a paralaxe diária da Lua é obtida. Pela definição da paralaxe e pela Fig. 4.38, temos $\text{sen } a = R_T/D_L$ e, portanto, a distância Terra–Lua é achada em função do raio da Terra (que pode ser determinado pelo método de Eratóstenes, por exemplo).

Medida da paralaxe por dois observadores - Método 1

Vamos supor dois observadores, O_1 e O_2 , no mesmo meridiano, com latitudes geocêntricas φ_1 e φ_2 , que observam a Lua simultaneamente (veja Fig. 4.40 e o exemplo da Fig. 4.41).

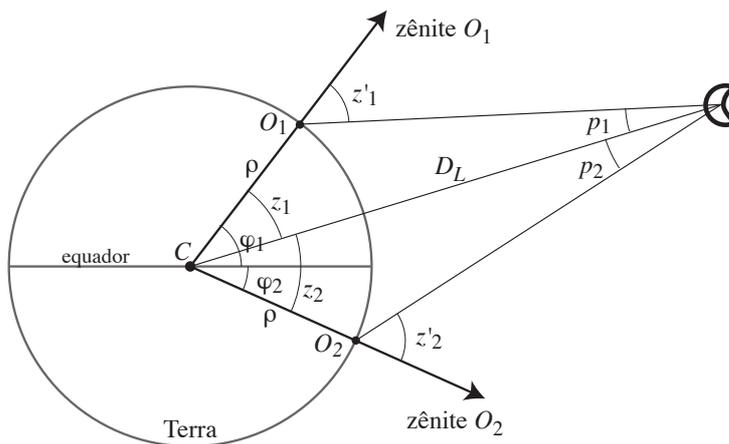


Figura 4.40: Medidas simultâneas da paralaxe diária da Lua por dois observadores, O_1 e O_2 , no mesmo meridiano. O raio da Terra é ρ e D_L é a distância geocêntrica da Lua.

Desprezando a refração atmosférica, cada observador pode medir diretamente uma distância zenital topocêntrica da Lua, z'_1 e z'_2 .

Do ângulo formado por O_1 , C e O_2 temos:

$$z_1 + z_2 = |\varphi_1 - \varphi_2|, \quad (4.11)$$

onde z_1 e z_2 são as distâncias zenitais geocêntricas da Lua. Note que se o observador O_2 estiver no Hemisfério Sul, $\varphi_2 < 0$, e a Eq. (4.11) pode ser reescrita como $z_1 + z_2 = \varphi_1 + |\varphi_2|$.

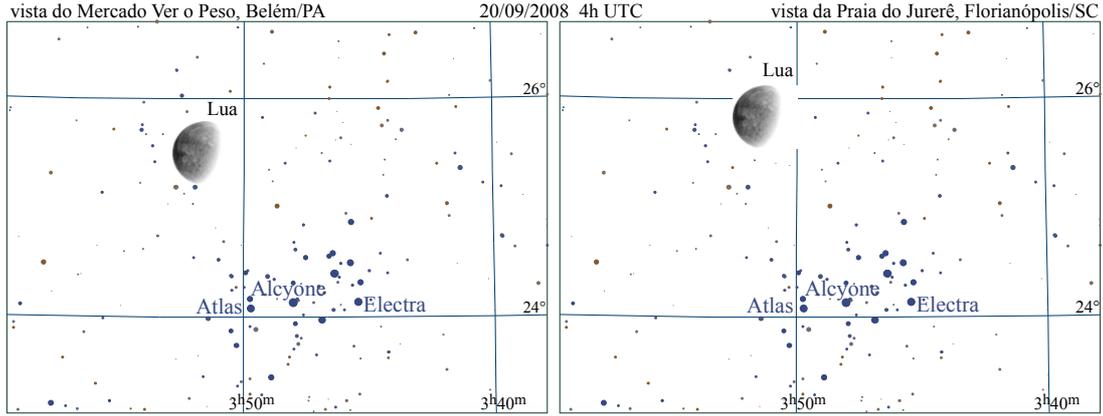


Figura 4.41: Paralaxe da Lua. A Lua e as Plêiades observadas simultaneamente em dois lugares com a mesma longitude, mas latitudes diferentes. Note a diferença da posição da Lua. A diferença em latitude é de cerca de 26 graus (ou 2872 km).

Utilizando a definição de paralaxe diária, $z' = z + p$, temos para cada observador:

$$z_1 = z'_1 - p_1 \quad \text{e} \quad z_2 = z'_2 - p_2, \quad (4.12)$$

o que implica na relação:

$$p_1 + p_2 = z'_1 + z'_2 - |\varphi_1 - \varphi_2|. \quad (4.13)$$

ou seja, a soma das paralaxes pode ser determinada diretamente pelas observações (uma vez que conhecemos as latitudes dos observadores).

Vamos definir o ângulo θ como $\theta \equiv p_1 + p_2$, que é um ângulo obtido diretamente a partir das observações de O_1 e O_2 . A definição de paralaxe diária nos fornece as seguintes equações:

$$\text{sen } p_1 = \frac{\rho}{D_L} \text{sen } z'_1 \quad \text{e} \quad \text{sen } p_2 = \frac{\rho}{D_L} \text{sen } z'_2, \quad (4.14)$$

onde ρ é o raio da Terra (que supomos o mesmo para os dois observadores, isto é, desprezamos a achatamento terrestre) e D_L é a distância geocêntrica da Lua. Substituindo $p_1 = \theta - p_2$ e desenvolvendo $\text{sen}(\theta - p_2)$ obtemos:

$$\cos p_2 \text{sen } \theta - \cos \theta \text{sen } p_2 = \frac{\rho}{D_L} \text{sen } z'_1. \quad (4.15)$$

Dividindo a equação acima por $\text{sen } p_2$ (basta que O_2 não observe a Lua no zênite) resulta em:

$$\frac{\text{sen } \theta}{\tan p_2} = \cos \theta + \frac{\rho \text{sen } z'_1}{D_L \text{sen } p_2}, \quad (4.16)$$

e substituindo $\text{sen } p_2$ [da Eq. (4.14)] podemos eliminar ρ e D_L :

$$\tan p_2 = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta + \frac{\text{sen } z'_1}{\text{sen } z'_2}}. \quad (4.17)$$

A equação (4.17) nos dá a paralaxe diária p_2 a partir das latitudes geocêntricas e das distâncias zenitais topocêntricas medidas por cada um dos observadores. Uma vez que conhecemos p_2 , a distância da Lua é obtida através da própria definição de paralaxe:

$$D_L = \rho \frac{\text{sen } z'_2}{\text{sen } p_2} \quad \text{ou} \quad \text{sen } P = \frac{\text{sen } p_2}{\text{sen } z'_2}, \quad (4.18)$$

onde P é a paralaxe horizontal da Lua. Com um pouco de álgebra temos ainda:

$$\text{sen } P = \frac{\text{sen } \theta}{\sqrt{\text{sen}^2 z'_1 + \text{sen}^2 z'_2 + 2 \cos \theta \text{sen } z'_1 \text{sen } z'_2}}. \quad (4.19)$$

Este método foi empregado pela primeira vez com observações entre maio de 1751 e fevereiro de 1752 pelos astrônomos franceses Jérôme Lefrançois de Lalande (1732–1807) e Nicolas-Louis de Lacaille (1713–1762). Lalande observou a Lua a partir do observatório de Berlin, enquanto Lacaille observou do Cabo da Boa Esperança; estes dois pontos de observação estão quase no mesmo meridiano a cerca de 9,6 mil km de distância entre eles. Lalande obteve um resultado com uma diferença de apenas 10% do valor medido atualmente para a distância da Lua.

Medida da distância por dois observadores - Método 2

Vamos imaginar a situação descrita na Fig. 4.42, onde dois observadores separados por um ângulo θ sobre a Terra (uma esfera de raio r) medem simultaneamente a altura do objeto P .

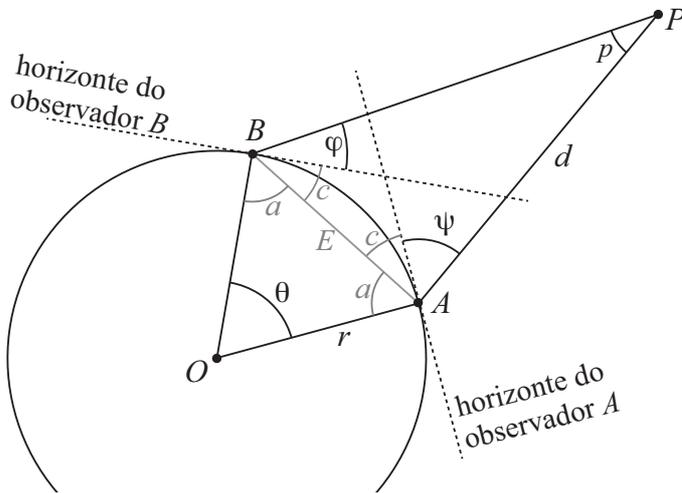


Figura 4.42: Geometria para determinação da distância topocêntrica d entre o observador A e o objeto P , com auxílio da observação de B .

Neste problema temos três relações simples que podem ser identificadas imediatamente:

$$p + (\varphi + c) + (\psi + c) = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad 2c + p + \varphi + \psi = 180^\circ;$$

$$a + c = 90^\circ \quad \text{e} \quad \theta + 2a = 180^\circ.$$

De onde concluímos que: $2c = \theta$ e $\theta + p + \varphi + \psi = 180^\circ$.

Por outro lado, aplicando a lei dos senos nos triângulos \widehat{AOB} e \widehat{ABP} (com o lado em comum E) temos:

$$\frac{\text{sen } \theta}{E} = \frac{\text{sen } a}{r} \quad \text{e} \quad \frac{\text{sen } p}{E} = \frac{\text{sen}(\varphi + c)}{d}.$$

Das relações acima, podemos eliminar a distância E . Em seguida, eliminamos os ângulos p , c e a com as relações obtidas previamente e concluímos que a distância entre os pontos A e P é:

$$\frac{d}{r} = \frac{\cos \varphi - \cos(\varphi + \theta)}{\text{sen}(\psi + \varphi + \theta)}. \quad (4.20)$$

Se tivermos dois observadores em latitudes diferentes cada um vai medir uma altura diferente da Lua no momento do trânsito (isto é, passagem pelo meridiano principal de cada observador). Tomando, por exemplo, um observador na latitude $-23^\circ,5$ e outro em $-2^\circ,5$ (mais ou menos como

se um estivesse em São Paulo/SP e outro em São Luis/MA). O de SP mede a altura da lua no trânsito $50^{\circ},7$ e o de São Luis mede 72° . Usando a Fig. 4.42 identificamos os seguintes ângulos:

$$\theta = |-23,5 - (-2^{\circ},5)| = +21^{\circ} ; \quad \varphi = 360^{\circ} - 72^{\circ} ; \quad \psi = 50^{\circ},7.$$

(note que os ângulos são medidos no mesmo sentido, por isto o fator 360° foi usado acima). Substituindo estes ângulos na Eq. (4.20) acima obtemos:

$$d = r \times 61,17.$$

Tomando $r = 6370$ km, obtemos para a distância da Lua 389.714 km.

4.12.3 Distância Terra – Sol

Aristarco de Samos concebeu um método para medir a distância da Terra ao Sol em função da distância Terra–Lua (veja Fig. 4.43).

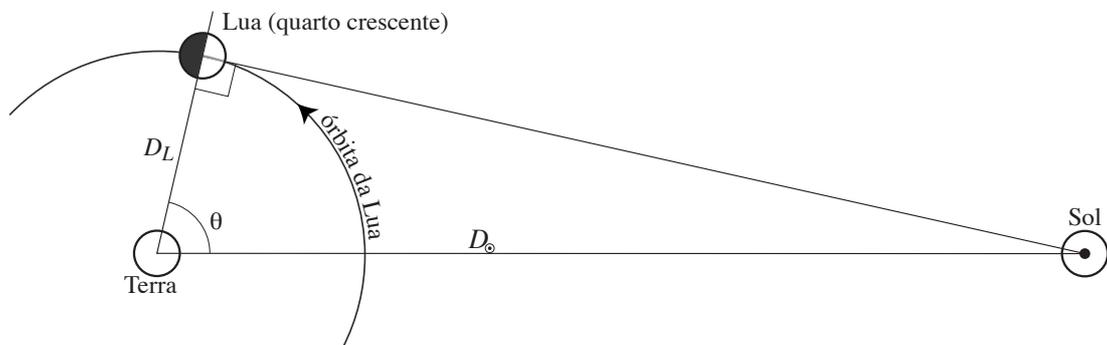


Figura 4.43: Método de Aristarco. D_L é a distância da Terra à Lua, D_{\odot} é a distância Terra–Sol. O ângulo θ corresponde ao momento em que metade do disco lunar (visto da Terra) está iluminado (quarto crescente como na figura ou quarto minguante).

Aristarco supôs corretamente que, no momento do quarto crescente ou quarto minguante, a Terra, a Lua e o Sol formariam um triângulo retângulo como mostra a figura 4.43. Se o ângulo θ , a distância angular entre a Lua e o Sol, for medido temos imediatamente a distância Terra–Sol:

$$D_{\odot} = \frac{D_L}{\cos \theta}. \quad (4.21)$$

O problema deste método está na dificuldade em determinar exatamente o momento do quarto crescente (ou minguante) e em se medir precisamente a distância angular entre a Lua e o Sol neste momento. O valor medido por Aristarco foi de cerca de 87° (na linguagem da época, “um quadrante diminuído de um treze avos de quadrante”), enquanto o valor correto é $\theta \approx 89^{\circ}51'$, variando durante o ano devido à órbita elíptica da Terra. Em outras palavras, devido a um erro que não chega a 3° (menos de 4% de erro), Aristarco subestimou a razão entre as distâncias D_L e D_{\odot} por um fator ~ 20 .

Nos séculos seguintes a Aristarco, uma outra possibilidade imaginada de medir a distância Terra–Sol seria através da observação da paralaxe diária (seção 3.7.2) do Sol. No entanto, este método esbarra em dificuldades: o tamanho aparente e o forte brilho impedem uma medida precisa da posição do centro do disco solar. Além disto, a paralaxe do Sol é muito pequena, $\varpi_{\odot} = \text{raio}_{\text{Terra}}/D_{\odot} \approx 8''8$, inferior aos erros observacionais. A consequência disto é que o valor incorreto de Aristarco foi usado até o início do século XVII.

4.12.4 Distância Planetas – Sol

Os métodos descritos abaixo para determinarmos as distâncias dos planetas ao Sol foram propostos por Copérnico. Em ambos os casos, supomos que as órbitas dos planetas são circulares e que a velocidade angular dos planetas é constante (veja a Fig. 4.44).

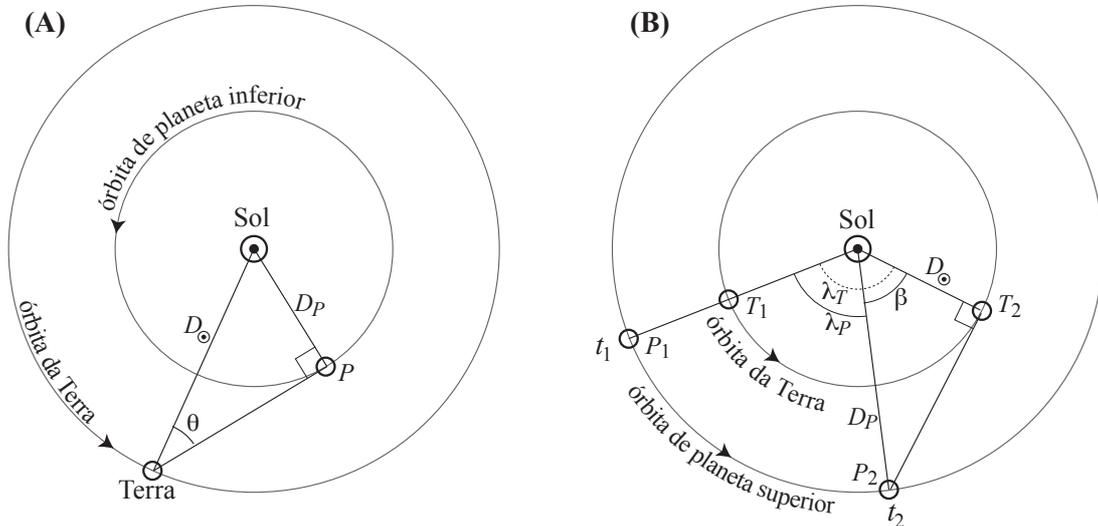


Figura 4.44: Método de Copérnico para determinação da distância dos planetas ao Sol. (A) Geometria para os planetas inferiores (ou interiores); (B) geometria para os planetas superiores (ou exteriores). Para os planetas superiores são necessárias duas medidas em dois momentos distintos, t_1 e t_2 .

Planetas Interiores

Para se determinar a distância dos planetas interiores (Mercúrio e Vênus) basta medir a distância angular entre o Sol e o planeta no momento em que este está em máxima elongação (isto é, sua distância angular em relação ao Sol é máxima). Isto pode ser feito medindo-se sistematicamente a distância angular do planeta ao Sol e daí determinar o valor máximo.

Por outro lado, a distância do planeta ao Sol também é obtida resolvendo o triângulo retângulo formado pela Terra, Sol e o planeta (Fig. 4.44, a esquerda):

$$D_P = D_{\odot} \operatorname{sen} \theta. \quad (4.22)$$

onde θ é a elongação do planeta.

Temos então a distância do planeta ao Sol em função da distância Terra–Sol, que pode ser obtida, por exemplo, pelo método de Aristarco.

Planetas Exteriores

Para determinarmos a distância dos planetas superiores ao Sol devemos resolver o triângulo retângulo formado pelo Sol, T_2 (a Terra no momento t_2) e P_2 (o planeta neste mesmo momento, Fig. 4.44, a direita).

O problema está em medirmos o ângulo β . Isto pode ser feito observando o planeta superior em dois instantes, t_1 , quando o planeta está em oposição (isto é, ele está alinhado com a Terra e o Sol), e t_2 , quando o planeta está em quadratura (isto é, visto da Terra, o planeta e o Sol estão a 90° um do outro). Estes dois momentos podiam ser facilmente determinados por Copérnico.

Bastava então determinar quanto a Terra e o Planeta haviam percorrido em suas órbitas respectivas entre este dois momentos, t_1 e t_2 . Conhecendo-se os períodos siderais da Terra e dos

planetas superiores é fácil determinar λ_P e λ_T :

$$\lambda_T = 360^\circ \frac{t_2 - t_1}{T_{\text{sid Terra}}} \quad \text{e} \quad \lambda_P = 360^\circ \frac{t_2 - t_1}{T_{\text{sid Plan}}}, \quad (4.23)$$

onde $T_{\text{sid Terra}}$ é o ano sideral terrestre ($\sim 365,25$ dias) e $T_{\text{sid Plan}}$ é o ano sideral do planeta superior. Desta forma temos:

$$\beta = 360^\circ (t_2 - t_1) \left(\frac{1}{T_{\text{sid Terra}}} - \frac{1}{T_{\text{sid Plan}}} \right). \quad (4.24)$$

A distância do planeta ao Sol será finalmente dada por:

$$D_P = \frac{D_\odot}{\cos \beta}. \quad (4.25)$$

4.12.5 Paralaxe de Marte e a Unidade Astronômica

Como foi dito acima, a medida da distância Terra–Sol é muito difícil de se fazer a partir da medida de paralaxe diária do Sol (apenas $8''8$). A partir das observações de Tycho Brahe, Kepler estudou o movimento orbital de Marte e concluiu que a paralaxe do Sol deveria ser menor do que um segundo de arco, ou seja, teria uma distância de pelo menos 3 vezes mais do que era adotado até então.

Por volta de 1630, o astrônomo belga Godefroy Wendelin (1580–1667) estimou a distância do Sol usando o método de Aristarco, mas com o uso de uma luneta. O ângulo θ medido entre a Lua e o Sol (veja a Fig. 4.43) foi de $89^\circ 45'$ o que corresponde a uma distância do Sol 229 vezes maior que a distância Terra–Lua, valor inferior, mas bem mais próximo da distância medida hoje em dia.

No início de outubro de 1672, Giovanni Cassini *Cassini, G.* e Jean Richer (1630–1696) observam simultaneamente Marte no Observatório de Paris e em Cayenne (Guiana Francesa), respectivamente. Neste momento, Marte estava em oposição, próximo da Terra a cerca de $1/3$ da distância do Sol. Por volta das 21h45 UT, em Cayenne, Marte ocultou a estrela ψ_2 Aqr (uma estrela tipo Be de magnitude 4,4 no visível). Em Paris, Marte passou a cerca de $24''$ da estrela (Fig. 4.45, painéis da esquerda mostram o início e fim da ocultação). Usando 3 medidas, Cassini obteve uma paralaxe de aproximadamente $15''$ para Marte.

Além disto, Richer passou o ano anterior medindo cuidadosamente a latitude e longitude de seu observatório em Cayenne. Assim, conhecendo a distância entre Paris e Cayenne (Fig. 4.45, painel da direita) a linha de base para a paralaxe, d , é:

$$d = 2R_{\text{Terra}} \text{sen}(\theta/2), \quad \text{onde} \quad \theta = d_c/R_{\text{Terra}},$$

d_c é a distância sobre a superfície da Terra (7072 km, neste caso). Com as medidas de paralaxe, a órbita de Marte pôde ser obtida com precisão e sua distância ao Sol, $D_M = d/\varpi \simeq 69$ milhões de km.

Usando as leis de Kepler, usamos o período orbital de Marte (P_M , relativamente bem conhecido no séc. XVII para obter a distância Terra–Sol (D_\odot):

$$\left(\frac{D_M}{D_\odot} \right)^3 = \left(\frac{P_M}{P_T} \right)^2 \Rightarrow D_\odot = 1 \text{ UA} = D_M \left(\frac{P_M}{1 \text{ ano}} \right)^{-2/3}, \quad (4.26)$$

onde D_M é obtido pela paralaxe diária. Uma vez estabelecido o valor em quilômetros da unidade astronômica, todas as distâncias dos planetas (conhecidos) do Sistema Solar puderam ser determinadas precisamente usando a 2ª lei de Kepler.

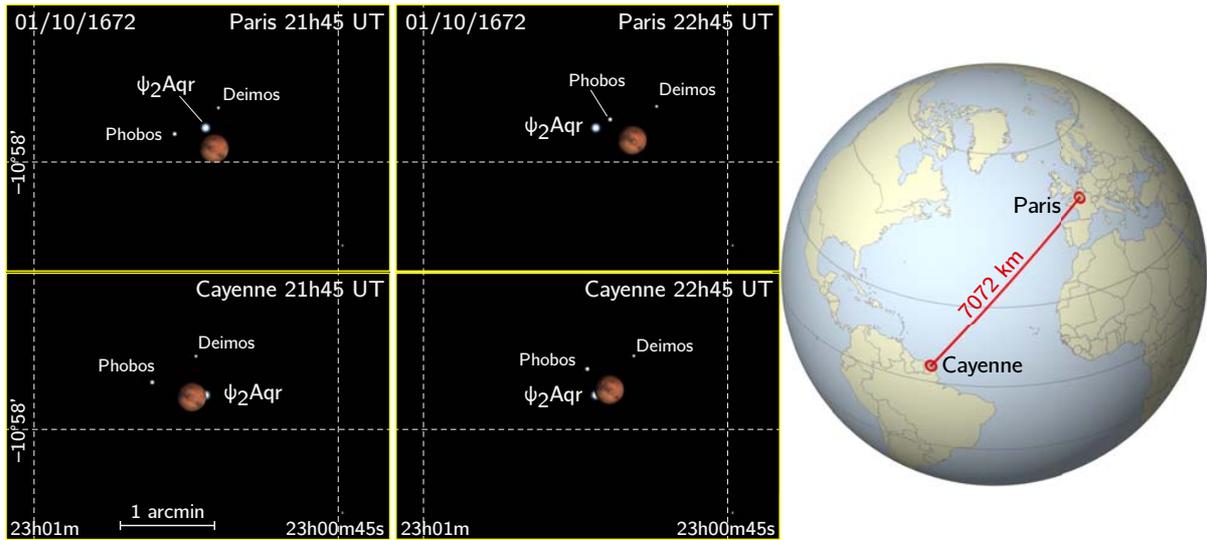


Figura 4.45: Esquerda: Simulação da observação do início e fim da ocultação de ψ_2 Aqr por Marte. A paralaxe de Marte foi obtida com as medidas de Giovanni Cassini em Paris e Jean Richer na Guiana Francesa. Em Cayenne, foi observada a ocultação da estrela ψ_2 Aqr por Marte, enquanto que, em Paris, Marte passa a alguns segundos de arco da estrela. Apesar de Phobos e Deimos estarem representados nesta figura, eles só foram descobertos em agosto/1877 por Asaph Hall. Direita: Ilustração da distância entre Cayenne e Paris que serviu de base para a medida da paralaxe diária de Marte.

4.12.6 Trânsito de Vênus e a Unidade Astronômica

Em 1663, o escocês James Gregory [11/1638–10/1675] sugeriu pela primeira vez o uso do trânsito de Vênus ou Mercúrio pelo disco solar para a determinação da distância do Sol (ou, equivalentemente, a paralaxe do Sol) em sua obra *Optica Promota* (“Progresso da Óptica”, o mesmo livro onde é descrito o telescópio refletor que chamamos hoje de tipo gregoriano).

Entre 1677 e 1716, Edmund Halley escreveu uma série de artigos descrevendo em mais detalhes o uso do trânsito de Vênus para determinar a paralaxe solar. Halley fez um chamado aos futuros astrônomos para aproveitarem os trânsitos de Vênus previstos para 1761 e 1769, fazendo observações a partir de várias localidades.

A ideia por trás deste método é o fato de que observadores distantes na Terra observam o trânsito de Vênus (assim como de Mercúrio) em posições ligeiramente diferentes devido ao efeito de paralaxe. Esta situação está ilustrada na Fig. 4.46. Cada observador, P_1 e P_2 , vão observar o disco de Vênus (V , representando o centro do disco) nas posições V_1 e V_2 sobre o Sol, respectivamente. Ao longo do tempo, o disco de Vênus segue um caminho atravessando o disco solar.

A princípio, os triângulos $\triangle P_1 C_S P_2$ e $\triangle P_1 V P_2$ não estão no mesmo plano, porém, em primeira aproximação, podemos considerá-los coplanares. Isto equivale a dizer que os pontos V_1 , V_2 e C_S estão alinhados. Neste caso, podemos somar os ângulos internos de cada triângulo, obtendo:

$$p_V + (\alpha_1 + \theta_1) + (\alpha_2 - \theta_2) = 180^\circ = p_S + \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\Rightarrow p_V + (\theta_1 - \theta_2) = p_S, \text{ portanto, } p_V - p_S = \Delta\theta \text{ ou } \Delta p = \Delta\theta.$$

As paralaxes correspondentes aos observadores P_1 e P_2 de Vênus e do Sol são:

$$\tan(p_S/2) = \frac{d_{12}/2}{d_S} \Rightarrow p_S \simeq \frac{d_{12}}{d_S};$$

$$\tan(p_V/2) = \frac{d_{12}/2}{(d_S - d_V)} \Rightarrow p_V \simeq \frac{d_{12}}{(d_S - d_V)},$$

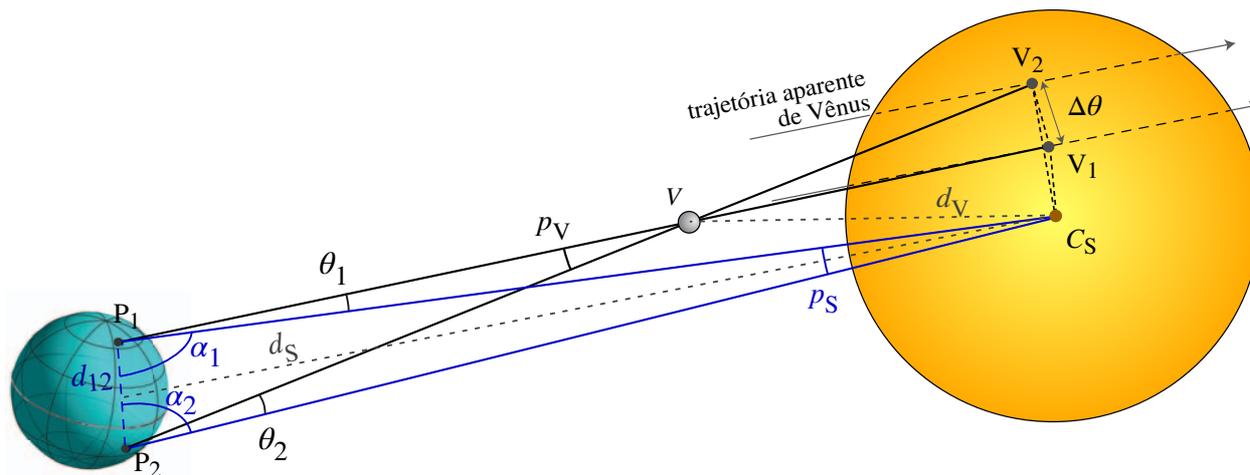


Figura 4.46: Observação do trânsito de Vênus (V) pelos observadores P_1 e P_2 (em latitudes diferentes e não necessariamente na mesma longitude). O disco de Vênus observado por P_1 e P_2 está representado por V_1 e V_2 , respectivamente. A distância entre as trajetórias aparentes é $\Delta\theta$ (note que é uma distância angular observada). Os ângulos p_V e p_S são as paralaxes de Vênus e do Sol, respectivamente. C_S é o centro do Sol. A distância d_{12} entre os observadores é uma reta que passa pelo interior da Terra.

onde d_S e d_V são as distâncias heliocêntricas da Terra e de Vênus, respectivamente (note que não são exatamente as distâncias geocêntricas, mas o erro é menor que o raio da Terra) e $(d_S - d_V)$ é a distância geocêntrica de Vênus (lembrando que a Terra, Vênus e o Sol estão alinhados neste momento). Eliminando d_{12} das expressões acima, obtemos:

$$p_V = p_S \frac{d_S}{d_S - d_V}.$$

Subtraindo a paralaxe do Sol de ambos os lados da equação acima, resulta em:

$$\Delta p \equiv p_V - p_S = p_S \frac{d_S}{d_S - d_V} - p_S \Rightarrow p_S = \Delta p \left(\frac{d_S}{d_V} - 1 \right).$$

Mas, como vimos, $\Delta p = \Delta\theta$. Logo,

$$p_S = \Delta\theta \left(\frac{d_S}{d_V} - 1 \right). \quad (4.27)$$

A razão d_S/d_V pode ser obtida através da 3ª lei de Kepler, conhecendo o período orbital (sideral) de Vênus, isto é, $(d_S/d_V)^3 = 1/T_V^2$, onde o período orbital de Vênus T_V é dado em anos. O valor de T_V já era conhecido desde o início do séc. XVIII, $T_V \simeq 0,6152$ anos. Logo, $d_S/d_V \simeq 1,3825$. Assim, a distância da Terra ao Sol será:

$$d_S = \frac{d_{12}}{p_S} = 2,614 \frac{d_{12}}{\Delta\theta}. \quad (4.28)$$

Resta agora determinar $\Delta\theta$. Hoje em dia, isto pode ser feito acompanhando o trânsito de Vênus e traçando a sua trajetória sobre o disco solar. Contudo, quando este método foi proposto no final do séc. XVI e descrito por Halley em 1716, isto não era possível (pelo menos de forma precisa, sem fotografias que só seriam inventadas mais de 100 anos depois).

Halley, então, propõe um método baseado na observação dos instantes de início e fim do trânsito. A ideia é que observadores em latitudes diferentes vão observar trânsitos com durações diferentes pois o caminho aparente sobre o disco solar é diferente. Na Fig. 4.47 vemos como definimos os instantes de contato usando o trânsito de 2012 como exemplo. Note que, mesmo

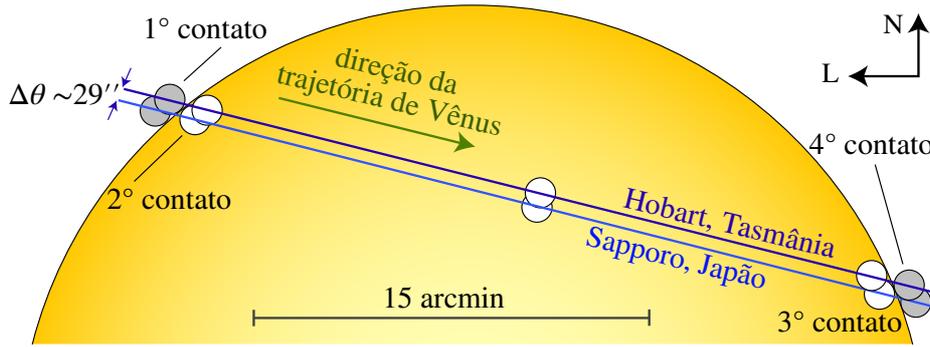


Figura 4.47: Trânsito de Vênus de 05/06/2012 observado de Sapporo, Japão e Hobart, Tasmânia. Os tamanhos dos discos de Vênus e do Sol estão em escala, assim como as trajetórias. No Japão, o trânsito de Vênus foi mais longo e de maior duração comparado ao trânsito observado na Tasmânia.

distantes de cerca de 86° em latitude, as trajetórias aparentes de Vênus estão separadas por apenas $\sim 29''$, menos que o diâmetro aparente do planeta.

Definimos o 1º contato quando o disco do planeta (pode ser Mercúrio também) toca no disco do Sol; o 2º contato é quando o disco do planeta está inteiramente sobre o disco solar, tocando a borda. No 3º contato é quando o disco do planeta está para deixar o disco solar e no 4º contato, o disco do planeta toca pela última vez o disco do Sol. A Fig. 4.48 mostra o 2º e 3º contatos de dois observadores (P_1 e P_2 da figura 4.46).

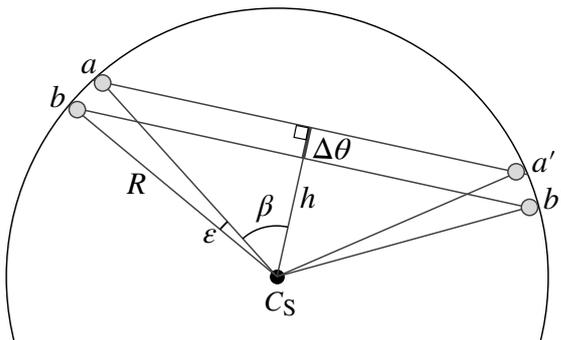


Figura 4.48: Geometria dos trajetos aparentes de Vênus (fora de escala) sobre o disco solar, observado em duas latitudes diferentes (linha $\overline{aa'}$ e $\overline{bb'}$). C_s é o centro do disco solar.

A hipótese que fazemos é que a duração do trânsito seja proporcional à distância percorrida pelo disco de Vênus sobre o disco do Sol. Em outras palavras,

$$\overline{aa'} = \omega T_a \quad \text{e} \quad \overline{bb'} = \omega T_b,$$

onde ω é a constante de proporcionalidade, igual para as duas trajetórias $\overline{aa'}$ e $\overline{bb'}$, e T_a e T_b são as durações dos trânsitos de cada observador.

Considerando os triângulos da Fig. 4.48, temos:

$$\begin{aligned} \overline{aa'} &= 2R \operatorname{sen} \beta; & h &= R \cos(\beta + \epsilon); \\ \overline{bb'} &= 2R \operatorname{sen}(\epsilon + \beta); & h + \Delta\theta &= R \cos \beta, \end{aligned}$$

onde $R = R_\odot - R_V$ (raio solar aparente menos o raio de Vênus). Como o ângulo ϵ é pequeno, podemos reescrever as expressões acima usando as aproximações $\operatorname{sen}(\epsilon + \beta) \simeq \operatorname{sen} \beta + \epsilon \cos \beta$ e $\cos(\epsilon + \beta) \simeq \cos \beta - \epsilon \operatorname{sen} \beta$:

$$\begin{aligned} \overline{aa'} &= 2R \operatorname{sen} \beta; & h &= R(\cos \beta - \epsilon \operatorname{sen} \beta); \\ \overline{bb'} &= 2R(\operatorname{sen} \beta + \epsilon \cos \beta); & h + \Delta\theta &= R \cos \beta, \end{aligned}$$

A diferença de comprimento das trajetórias é:

$$\overline{bb'} - \overline{aa'} = 2R \operatorname{sen} \beta + 2R\epsilon \cos \beta - 2R \operatorname{sen} \beta = 2R\epsilon \cos \beta.$$

Assim, podemos escrever:

$$\frac{\overline{bb'} - \overline{aa'}}{\overline{aa'}} = \frac{2R\varepsilon \cos \beta}{2R \sin \beta} \Rightarrow \frac{\overline{bb'}}{\overline{aa'}} - 1 = \varepsilon \frac{\cos \beta}{\sin \beta}.$$

Também podemos eliminar h e obtemos:

$$\Delta\theta = R\varepsilon \sin \beta.$$

Eliminando agora o ângulo ε temos:

$$\frac{\overline{bb'}}{\overline{aa'}} - 1 = \frac{\Delta\theta \cos \beta}{R \sin^2 \beta}.$$

Finalmente, obtemos com um pouco de álgebra:

$$\Delta\theta = R \left(\frac{\overline{bb'}}{\overline{aa'}} - 1 \right) \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} \Rightarrow \Delta\theta = R \left(\frac{T_b}{T_a} - 1 \right) \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta}, \quad (4.29)$$

onde usamos a proporcionalidade do comprimento do trânsito com a sua duração.

O método proposto por Halley baseia-se nas Eqs. (4.28) e (4.29). Os observáveis são a distância entre os dois observadores, d_{12} , as durações do trânsito para cada observador e o ângulo β definido na Fig. 4.48.

Usando o exemplo da Fig. 4.47, as latitudes dos observadores são $\varphi_1 = +43^\circ,045278$ (Japão) e $\varphi_2 = -42^\circ,8475$ (Tasmânia). A distância d_{12} é dada por (assumindo que a Terra seja um elipsoide com raio polar $R_T = 6357$ km):

$$d_{12} = R_T (\sin \varphi_1 + |\sin \varphi_2|) \simeq 8662 \text{ km}.$$

O ângulo β , neste exemplo, vale $54^\circ,29$. Por fim, a duração dos trânsitos em 2012 foram 21135 s (5h52m15s na Tasmânia) e 21735 s (6h02m15s no Japão), com uma diferença de 10 minutos. Pela Eq. (4.29) temos $\Delta\theta = 29'',4$ (tomando $R_\odot = 15'.76$ e $R_V = 0'.49$ no dia do trânsito). Este valor de $\Delta\theta$ é muito pequeno para ser medido diretamente (até o século XIX), por isto o interesse do método de Halley.

Enfim, a distância do Sol à Terra [Eq. (4.28)] é $d_S = 152,1 \times 10^6$ km. No dia 05/06/2012 a distância geocêntrica do Sol era de $151,8 \times 10^6$ km (em junho, o sol se encontra perto do afélio), uma diferença de 4,7%.



Tópicos de Astronomia de Posição

5.1 Estações do ano em outros planetas

Geralmente, o eixo de rotação de um corpo no Sistema Solar não é exatamente perpendicular ao plano orbital do mesmo. Dizemos que o eixo de rotação é inclinado em relação ao plano orbital. Por razões práticas, esta inclinação pode também ser medida em relação ao plano da Eclíptica. A medida da inclinação do eixo de um corpo é feita como ilustrada na figura 5.1 para três exemplos.

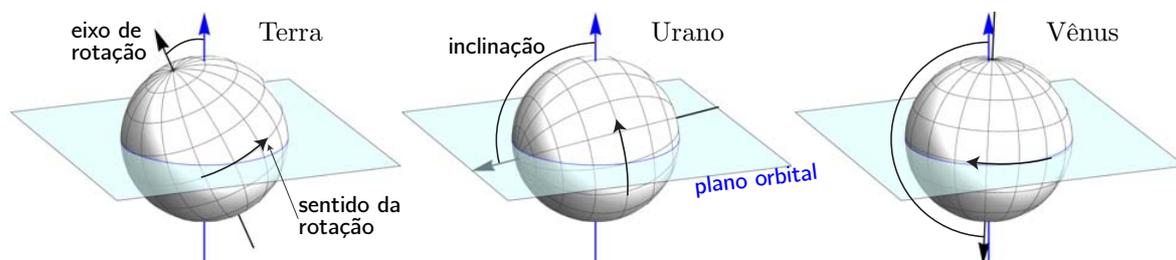


Figura 5.1: Exemplos de medida da inclinação de 3 planetas. A linha vertical azul representa a perpendicular ao plano de referência (o plano orbital ou a Eclíptica). A inclinação é medida a partir da perpendicular ao plano de referência até o eixo de rotação do corpo. A flecha na ponta do eixo de rotação indica a direção do Norte. A linha curva no equador corresponde ao sentido de rotação do corpo.

Qualquer planeta que tenha o eixo de rotação inclinado em relação ao seu plano orbital em torno do Sol apresentará o fenômeno das *estações do ano*, assim como a Terra (veja Tabela 5.1). Os planetas Marte, Saturno e Netuno têm estações do ano semelhantes às da Terra (descrito na seção 1.6).

Tabela 5.1: Inclinação em graus dos eixos de rotação dos planetas (obliquidade), Plutão e Lua em relação aos seus respectivos planos orbitais. Inclinação do eixo de rotação do Sol em relação à eclíptica. Estes valores são válidos atualmente, mas variam lentamente com o tempo.

Fonte: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/>

Mercurio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno	Plutão	Sol	Lua
0,03°	177,36°	23,44°	25,19°	3,12°	26,73°	97,77°	28,32°	122,53°	7,25°	6,68°

Como Marte, Saturno e Netuno têm o eixo de rotação inclinado em relação aos seus respectivos planos orbitais, estes planetas têm estações do ano como a Terra: Verão e Inverno, Outono e Primavera. A diferença, é claro, é que estas estações são muito mais longas.

Marte tem uma órbita mais excêntrica que a Terra e, portanto, as durações das estações do ano são mais desiguais. Em termos de dias marcianos (24h 39m 35,2s) temos aproximadamente: 194, 178, 142 e 154 dias para Primavera, Verão, Outono e Inverno (no Hemisfério Norte marciano), respectivamente. Temos uma diferença de mais de 50 dias marcianos entre a Primavera e o Outono.

Por outro lado, Mercúrio e Júpiter giram quase que perpendicularmente ao plano orbital; estes planetas estão praticamente sempre na meia-estação (Primavera ou Outono). Vênus também tem o eixo de rotação quase na perpendicular ao plano orbital, mas sua órbita é retrógrada (isto é, o eixo de rotação tem direção invertida em relação ao eixo de rotação da Terra). Por fim temos Urano, com seu eixo de rotação praticamente “deitado” sobre seu plano orbital.

O planeta anão Plutão também tem seu eixo de rotação quase que paralelo a eclíptica. O equinócio de Outono foi em dezembro/1987 e o solstício de Inverno (Hemisfério Norte) será em julho/2029. Nos anos próximos dos equinócios, temos a estação de eclipses do Sol mútuos de Caronte passando pela sombra de Plutão e vice-versa. O próximo equinócio em Plutão será em outubro/2108 (veja Fig. 5.2).

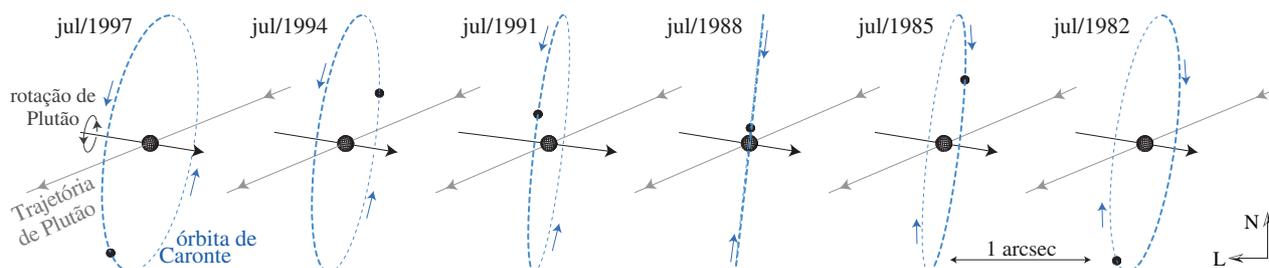


Figura 5.2: Sistema Plutão-Caronte observado da Terra. Cada painel corresponde ao dia primeiro de julho do ano indicado na figura. Note como a órbita de Caronte muda com o tempo, devido ao efeito de perspectiva do observador na Terra. A escala indicada de 1 arcsec é aproximada para quando Plutão se encontra próximo do seu periélio.

Para determinarmos o início das estações do ano nos planetas do Sistema Solar, definimos os equinócios como $\delta_{\odot} = 0$, onde δ_{\odot} é a declinação do Sol observada do planeta (planetocêntrica). Quando δ_{\odot} é um extremo, máximo ou mínimo, obtemos os solstícios.

Usando coordenadas as cartesianas do astro, (x, y, z) , assumindo o Sol na origem (o que não é exato, mas é suficiente o grau de precisão que buscamos) e conhecendo as coordenadas equatoriais do Polo Norte celeste do astro, (α_p, δ_p) temos:

$$\begin{cases} X = \cos \alpha_p \cos \delta_p ; \\ Y = \sin \alpha_p \cos \delta_p ; \\ Z = \sin \delta_p , \end{cases} \Rightarrow \quad \sin \delta_{\odot} = -\frac{Xx + Yy + Zz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} .$$

Por exemplo, próximo do ano 2000, as coordenadas do Polo Norte de Marte são $\alpha = 317^{\circ}6814$ e $\delta = 52^{\circ}8865$ (J2000). No dia 31/05/2000, às 19h, suas coordenadas cartesianas heliocêntricas são $x = 0,134268$, $y = 1,412066$ e $z = 0,644036$ U.A. Logo, usando a expressão acima obtemos $\delta_{\odot} = 0^{\circ}0055$ ($\approx 20''$), isto é, o Sol está no equador marciano (no caso, marcando o início da primavera no hemisfério Norte).

5.1.1 Visibilidade dos anéis de Saturno

Apesar de todos os planetas gigantes gasosos do Sistema Solar possuírem anéis compostos de pequenas rochas e gelo em órbita equatorial, o sistema de anéis de Saturno é sem dúvida o mais espetacular, geralmente visíveis com a ajuda de um pequeno telescópio. Galileu foi o primeiro a observar os anéis em 1610, mas não os reconheceu como tal. O holandês Christiaan Huygens foi o primeiro a reconhecer os anéis como um disco fino ao redor de Saturno em 1655, na mesma época em que descobriu o maior satélite, Titan (publicado em 1659, *Systema Saturnium*).

Tabela 5.2: Início das estações do ano em **Marte**. O “*ano marciano*” número 1 é, por convenção arbitrária, o ano que inicia no equinócio de Marte de 11/abril/1955 (Piqueux et al., 2015). O primeiro equinócio corresponde à longitude heliocêntrica L igual a zero, quando a declinação do Sol (visto de Marte) passa do Hemisfério Sul para o Norte (início da primavera marciana no Hemisfério Norte).

Ano Marte	Equinócio Primavera	Solstício Verão	Equinócio Outono	Solstício Inverno
22	09/out/1994	26/abr/1995	26/out/1995	21/mar/1996
23	26/ago/1996	13/mar/1997	12/set/1997	06/fev/1998
24	14/jul/1998	29/jan/1999	31 jul/1999	25/dez/1999
25	31/mai/2000	16/dez/2000	17 jun/2001	11/nov/2001
26	18/abr/2002	03/nov/2002	05 mai/2003	29/set/2003
27	05/mar/2004	20/set/2004	22 mar/2005	16/ago/2005
28	21/jan/2006	08/ago/2006	07 fev/2007	04/jul/2007
29	09/dez/2007	25/jun/2008	25 dez/2008	21/mai/2009
30	26/out/2009	13/mai/2010	12 nov/2010	08/abr/2011
31	13/set/2011	30/mar/2012	29 set/2012	23/fev/2013
32	31/jul/2013	15/fev/2014	17 ago/2014	11/jan/2015
33	18/jun/2015	03/jan/2016	04 jul/2016	28/nov/2016
34	05/mai/2017	20/nov/2017	22 mai/2018	16/out/2018
35	23/mar/2019	08/out/2019	08 abr/2020	02/set/2020
36	07/fev/2021	25/ago/2021	24 fev/2022	21/jul/2022
37	26/dez/2022	12/jul/2023	12 jan/2024	07/jun/2024
38	12/nov/2024	29/mai/2025	29 nov/2025	25/abr/2026
39	30/set/2026	16/abr/2027	17 out/2027	12/mar/2028
40	17/ago/2028	03/mar/2029	03 set/2029	28/jan/2030
41	05/jul/2030	19/jan/2031	22 jul/2031	16/dez/2031
42	22/mai/2032	06/dez/2032	08 jun/2033	02/nov/2033
43	09/abr/2034	24/out/2034	26 abr/2035	20/set/2035
44	25/fev/2036	10/set/2036	13 mar/2037	07/ago/2037
45	12/jan/2038	29/jul/2038	29/jan/2039	25/jun/2039
46	30/nov/2039	15/jun/2040	16/dez/2040	12/mai/2041
47	17/out/2041	03/mai/2042	03/nov/2042	29/mar/2043
48	04/set/2043	20/mar/2044	20/set/2044	13/fev/2045
49	22/jul/2045	05/fev/2046	08/ago/2046	01/jan/2047

A visibilidade dos anéis de Saturno depende de sua orientação relativa em relação à Terra. Como os anéis principais são extremamente finos, por volta de 50 metros de espessura¹, não é possível observá-los quando Saturno está próximo do seu equinócio. A fig. 5.3 ilustra como os anéis são observados da Terra.

Se observássemos Saturno a partir do Sol, veríamos o ângulo de abertura dos anéis variar com um período de aproximadamente 29,5 anos (período sideral de Saturno) e uma amplitude de cerca de 27° (inclinação de Saturno em relação à sua órbita), como mostra a Fig. 5.4.

Observado da Terra, há uma oscilação do ângulo de abertura dos anéis superposta à oscilação observada do Sol (Fig. 5.4). Isto se dá porque as órbitas, terrestre e de Saturno, não são coplanares; a órbita de Saturno tem uma inclinação de cerca de 2,49° em relação à eclíptica fazendo com que o nosso ponto de vista varie ao longo de um ano.

¹Estruturas verticais maiores, como picos, são observadas na borda externa do anel B, chegando até a 2,5 km de altura. Estas estruturas são provavelmente efêmeras, causadas pela interação com corpos de até alguns quilômetros de diâmetro que orbitam nesta região.

Tabela 5.3: Data dos inícios das estações do ano de **Júpiter**. As estações se referem ao Hemisfério Norte; para o Hemisfério Sul basta trocar verão por inverno e primavera por outono. Datas estimadas com a teoria VSOP2000.

Equinócio Primavera	Solstício Verão	Equinócio Outono	Solstício Inverno
07/jan/1962	26/set/1964	24/ago/1967	13/nov/1970
17/nov/1973	07/ago/1976	04/jul/1979	23/set/1982
30/set/1985	20/jun/1988	15/mai/1991	04/ago/1994
11/ago/1997	30/abr/2000	26/mar/2003	17/jun/2006
22/jun/2009	10/mar/2012	04/abr/2015	27/abr/2018
02/mai/2021	20/jan/2024	16/dez/2026	08/mar/2030
12/mar/2033	01/dez/2035	27/out/3038	16/jan/2042
23/jan/2045	14/out/2047	07/set/2050	27/nov/2053
04/dez/2056	25/ago/2059	20/jul/2062	10/out/2065
15/out/2068	04/jul/2071	30/mai/2071	20/ago/2077
25/ago/2080	15/mai/2083	10/abr/2086	01/jul/2089
05/jul/2092	26/mar/2095	19/fev/2098	12/mai/2101
18/mai/2104	06/fev/2107	01/jan/2110	23/mar/2113

Tabela 5.4: Data dos inícios das estações do ano de **Saturno**. As estações se referem ao Hemisfério Norte; para o Hemisfério Sul basta trocar verão por inverno e primavera por outono. A duração das estações é diferente devido à excentricidade da órbita ao redor do Sol. Quando Saturno está próximo de seu equinócio, os anéis se tornam praticamente invisíveis da Terra. Datas estimadas com a teoria VSOP2000.

Equinócio Primavera	Solstício Verão	Equinócio Outono	Solstício Inverno
11/abr/1921	17/jan/1929	29/dez/1936	07/dez/1943
21/set/1950	04/jul/1958	16/jun/1966	23/mai/1973
03/mar/1980	10/dez/1987	19/nov/1995	26/out/2002
11/ago/2009	25/mai/2017	06/mai/2025	11/abr/2032
22/jan/2039	01/nov/2046	10/out/2054	14/set/2061
29/jun/2068	14/abr/2076	27/mar/2084	03/mar/2091
13/dez/2097	23/set/2105	02/set/2113	06/ago/2120

Tabela 5.5: Data dos inícios das estações do ano de **Urano**. As estações se referem ao Hemisfério Norte; para o Hemisfério Sul basta trocar verão por inverno e primavera por outono. No verão, diferente da Terra, o polo onde é verão está praticamente na direção do Sol, isto é, o Sol passa próximo do zênite no verão em Urano.

Equinócio Primavera	Solstício Verão	Equinócio Outono	Solstício Inverno
22/nov/1755	13/mar/1778	03/jan/1798	14/set/1817
29/nov/1839	27/mar/1862	17/jan/1882	21/set/1901
03/dez/1923	03/abr/1946	27/jan/1966	28/set/1985
07/dez/2007	11/abr/2030	01/fev/2050	01/out/2069
07/dez/2091	12/abr/2114	31/jan/2134	01/out/2153

Tabela 5.6: Data dos inícios das estações do ano de **Netuno**. As estações se referem ao Hemisfério Norte; para o Hemisfério Sul basta trocar verão por inverno e primavera por outono.

Equinócio Primavera	Solstício Verão	Equinócio Outono	Solstício Inverno
07/ago/1716	24/mar/1757	31/ago/1798	02/mai/1840
18/dez/1880	08/nov/1921	09/jul/1963	16/mai/2005
03/abr/2046	25/fev/2087	08/jan/2129	04/set/2170

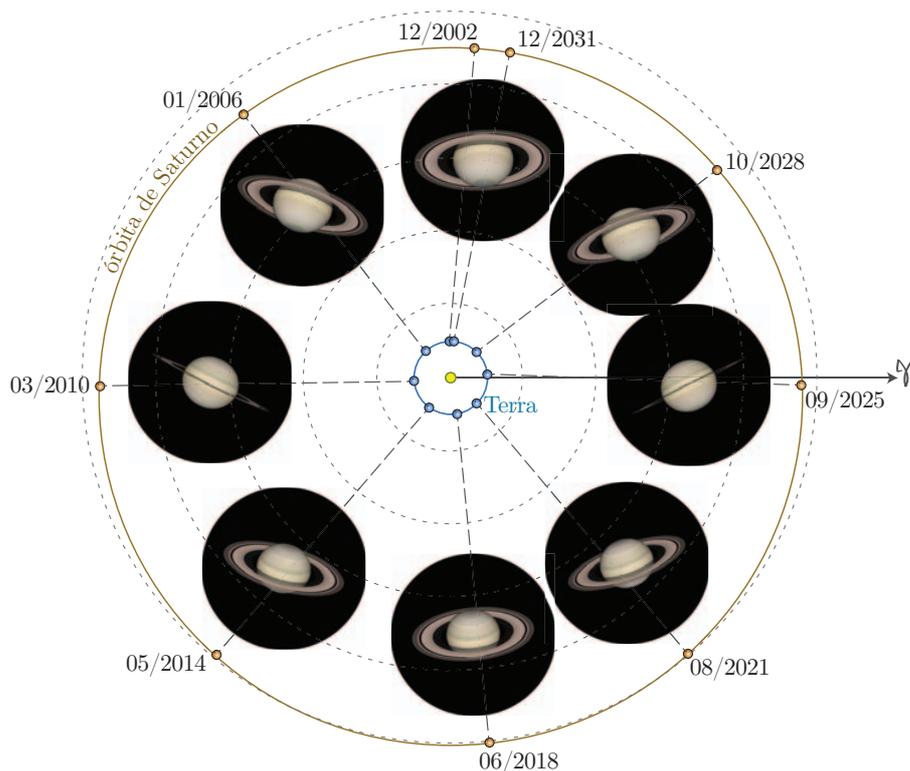


Figura 5.3: Aparência dos anéis de Saturno ao longo de sua órbita quando observados da Terra. Nesta figura, as imagens correspondem aos momentos de oposição, quando o planeta está mais próximo da Terra, e não ao início preciso das estações do ano de Saturno.

5.2 Medida da velocidade da luz por Römer

Em dezembro de 1676 foi publicada no *Journal de Sçavans*, na França, a primeira medida da velocidade da luz, proposta pelo astrônomo dinamarquês Ole Römer (ou Olaus Roemer, 1644–1710). Até esta época, havia um debate na comunidade científica discutindo se a luz se propagava instantaneamente ou se sua propagação tinha uma velocidade finita.

O método de Römer baseia-se na observação do início (imersão) ou fim (emersão) do eclipse do satélite de Júpiter, Io. O momento do início ou fim do eclipse é praticamente instantâneo, uma vez que Io é pequeno (3640 km de diâmetro) e tem um movimento rápido (translação em torno de Júpiter leva 1 dia e 18,46 horas, aproximadamente). O eclipse na situação **A** da figura 5.5 acontecia antes do previsto, enquanto o eclipse na situação **B** ocorria após o previsto.

Römer deduziu que a razão disto era a diferença das distâncias que a luz deveria percorrer. Cronometrando o avanço e o atraso, Römer concluiu que havia uma diferença de 22 minutos caso Júpiter esteja em conjunção ou oposição. A diferença entre os percursos é de 2 U.A. (o diâmetro da órbita terrestre) e, portanto, a velocidade da luz seria $\sim 300 \times 10^6 / (22 \times 60)$ km/s, isto é, 227 mil km/s.

A medida de Römer era imprecisa, na realidade a diferença é de 16,7 minutos, mas o resultado confirmou de vez que a luz se propaga com velocidade finita, e não instantânea.

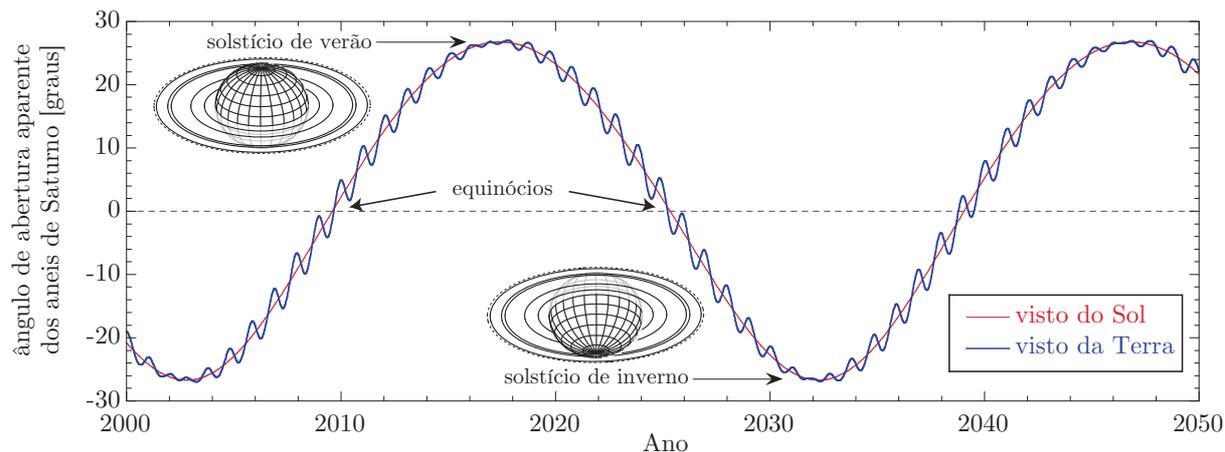


Figura 5.4: Variação do ângulo em que os anéis são observados da Terra (azul) e do Sol (vermelho). O Norte é para cima na ilustração de Saturno. A principal componente é a inclinação do eixo de Saturno em relação à Eclíptica (curva vermelha). Uma outra componente aparece quando levamos em conta a inclinação do plano orbital de Saturno em relação à eclíptica (linha azul). Nos equinócios (2009, 2025 e 2039, por exemplo) os anéis de Saturno são praticamente invisíveis quando observados da Terra.

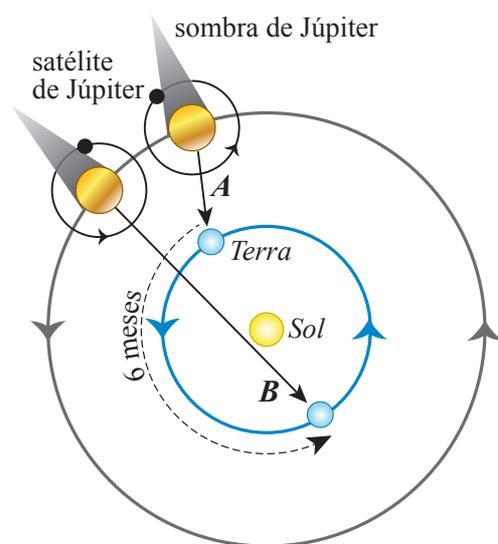


Figura 5.5: Método de Römer para medir a *velocidade da luz*, observando o início (ou fim) do eclipse de Io pela sombra de Júpiter. Na situação **A** o eclipse parecia ocorrer antes do previsto; na situação **B**, o eclipse parecia ocorrer com atraso. O desenho está fora de escala.

5.3 Leis de Kepler

Johannes Kepler nasceu em 1571 na cidade alemã de Weil der Stadt, próxima de Stuttgart, e ingressou na universidade de Tübing em 1589. Em 1594 Kepler se tornou professor de matemática em Graz, Áustria. Em 1600, foi convidado por Tycho Brahe para trabalhar em Praga. Após a morte de Brahe em 1601, Kepler foi nomeado “Matemático Imperial”, título que teve até 1612. Neste ano, Kepler se mudou para Linz onde ficou até 1626. Kepler morreu em 1630, na cidade de Regensburg.

Com os dados de excelente qualidade de Tycho Brahe – em particular em relação às posições de Marte –, Kepler descobriu as três **leis de movimento planetário** que levam o seu nome (aqui enunciadas com uma linguagem contemporânea):

1ª lei (1609) As órbitas dos planetas são elipses, com o Sol localizado em um dos focos.

2ª lei (1609) A linha ligando o Sol ao planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

(A 1ª e 2ª leis foram publicadas na obra “*Astronomia nova*”).

3ª lei (1619) O quadrado da razão dos períodos de translação (P) de 2 planetas é proporcional ao cubo da razão de seus semi-eixos maiores (a), isto é,

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3.$$

(A 3ª lei foi publicada no livro “*Harmonice Mundi*”).

As leis de Kepler, originalmente descobertas empiricamente, podem ser deduzidas a partir da teoria da *gravitação universal* de Isaac Newton (*Principia Mathematica*, publicado em 1687). Veremos a seguir estas leis em detalhes.

5.3.1 Primeira lei de Kepler

Rigorosamente, em um sistema de dois corpos puntiformes que interagem apenas pela gravitação, cada corpo descreve uma seção cônica (círculo, elipse, parábola ou hipérbole, veja Fig. 5.6), com o centro de massa da dupla em um dos focos. Se os corpos estão ligados gravitacionalmente, como no caso dos planetas com o Sol, por exemplo, então as órbitas são esféricas ou elípticas, dadas por:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}, \quad (5.1)$$

onde $e \equiv \sqrt{1 - (b/a)^2}$ é a excentricidade da elipse (se $e = 0$ temos um círculo).

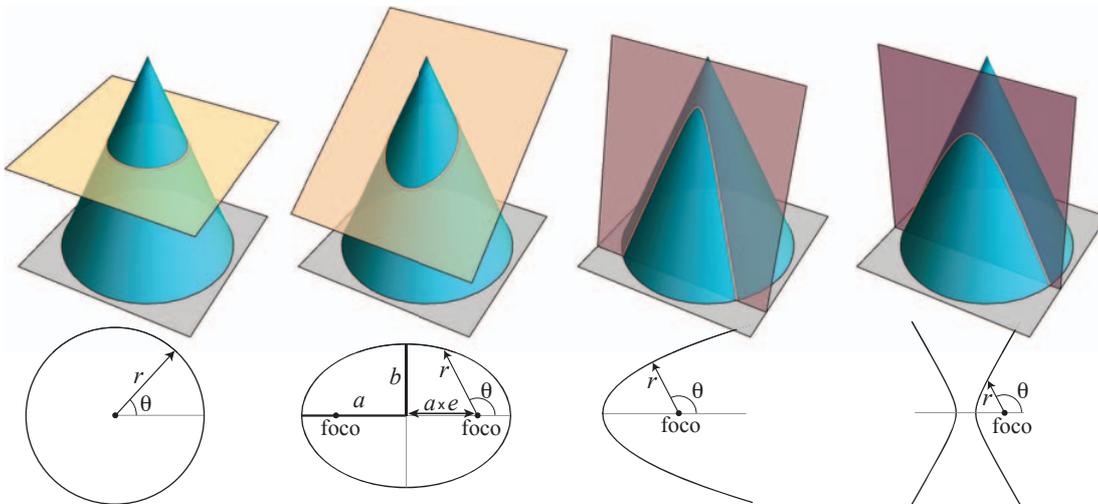


Figura 5.6: Seções cônicas, círculo, elipse, parábola e hipérbole. Acima: representação geométrica, intersecção de um cone por um plano. Abaixo: curvas planas das seções cônicas.

No caso em que a massa de um dos corpos é muito maior que do outro (p.ex., Sol–planeta, planeta–satélite) o centro de massa coincide, com grande precisão, com o corpo mais maciço. No caso do sistema Terra–Sol, o centro de massa se encontra a ≈ 450 km do centro do Sol (que tem um raio de 696 mil km).

A Fig. 5.7 mostra para comparação algumas elipses com diferentes elipticidades, inclusive uma elipse que corresponde à órbita terrestre.

5.3.2 Segunda lei de Kepler

A segunda lei de Kepler, ilustrada na Fig. 5.8, é uma consequência da conservação do *momento angular*. Assumindo que tratamos de um sistema de 2 corpos onde a massa de um dos corpos é

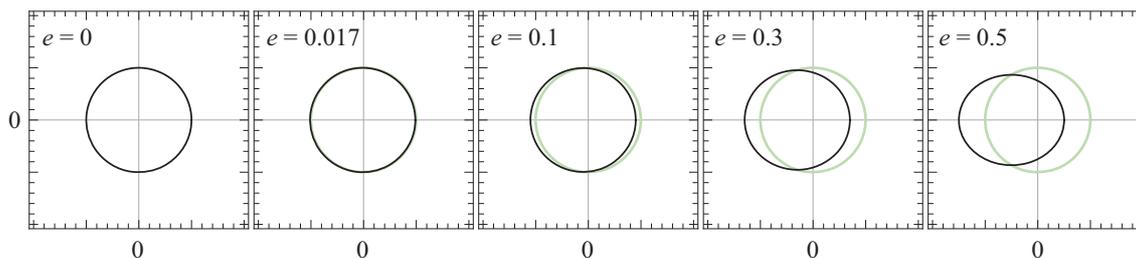


Figura 5.7: Elipses (e um círculo a esquerda, $e = 0$) para comparação. A excentricidade $e = 0,017$ corresponde à órbita da Terra, dificilmente distinguível a olho de um círculo. A elipse mais a direita corresponde a uma razão entre o semi-eixo menor e maior igual a $1/2$. O foco das elipses e o centro do círculo estão na origem, $(0, 0)$.

muito maior que o outro, temos

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v}, \quad (5.2)$$

onde \vec{L} é o momento (quantidade de movimento) angular, \vec{p} é a quantidade de movimento linear e \vec{r} e \vec{v} são o raio vetor e a velocidade do corpo mais leve de massa m .

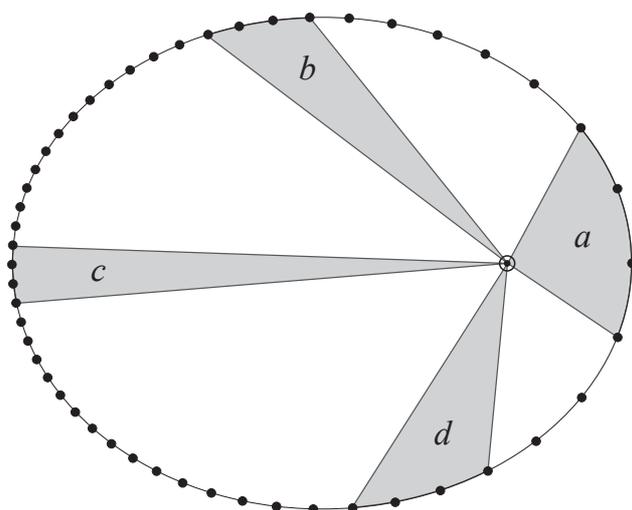


Figura 5.8: Ilustração geométrica da segunda lei de Kepler: em intervalos de tempo iguais, o raio vetor varre áreas iguais. Aqui, as áreas a , b , c e d são iguais.

A área varrida pelo raio vetor que liga o corpo maciço (o Sol, p.ex.) ao corpo mais leve (um planeta, p.ex.) é dada por (veja Fig. 5.9):

$$\text{área varrida} \equiv \delta A = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \delta \vec{r}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} \delta t| = \frac{1}{2} \frac{|L|}{m} \delta t, \quad (5.3)$$

onde δ significa uma variação muito pequena, como ilustrado na Fig. 5.8.

Mas como o momento angular se conserva, $|L|/m = \text{constante}$ e, portanto, $\delta A \propto \delta t$. Ou seja, para um mesmo intervalo δt , a área varrida δA é a mesma.

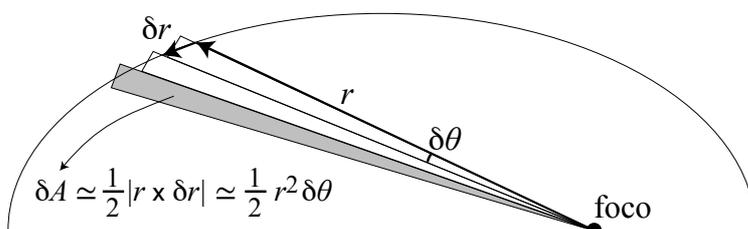


Figura 5.9: Área varrida pelo raio vetor r que percorre uma elipse. O ângulo $\delta\theta$ subtende o segmento δr .

Uma outra forma de obter a 2^a lei de Kepler é usando $\delta r = r\delta\theta$, onde $\delta\theta$ é o ângulo que subentende o deslocamento δr . Agora, podemos escrever:

$$\delta A = \frac{1}{2}r^2\delta\theta, \quad \text{ou, usando a forma diferencial,} \quad \frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \frac{|L|}{m}, \quad (5.4)$$

isto é, a taxa de variação da área é constante (L e m não variam).

Uma consequência da segunda lei de Kepler é que os corpos se deslocam com maior velocidade quando estão no periastro e com menor velocidade quando estão no apoastro.

Outra propriedade importante é que, se houver apenas dois corpos, não há torque externo e o momento angular deve se conservar. Consequentemente, a órbita fica restrita a um plano bem definido, perpendicular ao vetor \vec{L} . A variação do plano orbital dos planetas é consequência de haver mais de 2 corpos no Sistema Solar.

A 2^a lei de Kepler vale para qualquer sistema de *força central*. Forças centrais são aquelas que o vetor \vec{F} passa por um centro fixo, o “centro de força”. O módulo da força depende unicamente do raio \vec{r} : $\vec{F}(\vec{r}) = |F(\vec{r})|\hat{r}$. Este é o caso de forças gravitacionais clássicas, mas também de muitas outras forças, por exemplo, força eletrostática, corpo preso a uma mola, etc.

5.3.3 Terceira lei de Kepler

A terceira lei de Kepler está relacionada com a conservação de energia. Para o caso de uma órbita circular podemos deduzir a 3^a lei de Kepler igualando a força centrípeta com a força gravitacional:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r}, \quad (5.5)$$

onde M é a massa do corpo mais maciço e vemos que, neste caso, não há dependência da massa do corpo menos maciço, m . Lembrando que o período orbital é $P = 2\pi r/v$, então vem:

$$\frac{(2\pi)^2 r^2}{P^2} = \frac{GM}{r} \Rightarrow \frac{r^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}. \quad (5.6)$$

No Sistema Solar, em relação às órbitas dos planetas, M é sempre a mesma (a massa do Sol). Logo, para qualquer planeta, $r^3 \propto P^2$, onde r é o raio da órbita (assumindo órbita circular); genericamente, temos $a^3 \propto P^2$, onde a é semi-eixo maior da órbita elíptica. Em outros sistemas estelares ou planetários a terceira Lei de Kepler também é válida (Fig. 5.10).

Para o caso geral, a expressão acima tem uma pequena dependência com a massa do corpo mais leve:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2}, \quad (5.7)$$

onde o raio r foi substituído pelo semi-eixo maior da elipse, a . Com a terceira lei de Kepler é possível deduzir o tamanho do semi-eixo maior das órbitas planetárias conhecendo o período de translação. Em outros casos, se podemos medir o semi-eixo maior e o período, então podemos deduzir a massa do sistema.

Historicamente, Kepler enunciou sua 3^a lei em termos da “distância média” (ou raio médio) do planeta ao Sol. Apenas décadas mais tarde, após Newton publicar sua obra *Principia Mathematica* foi possível deduzir a 3^a lei e mostrar que o termo correto é de fato o semi-eixo maior da órbita (como veremos mais adiante).

5.4 Problema de 2 corpos

O chamado *problema de 2 corpos* é um dos mais importantes da astronomia e primeiro passo fundamental da *mecânica celeste*. Este problema trata de 2 corpos puntiformes de massas m_1 e

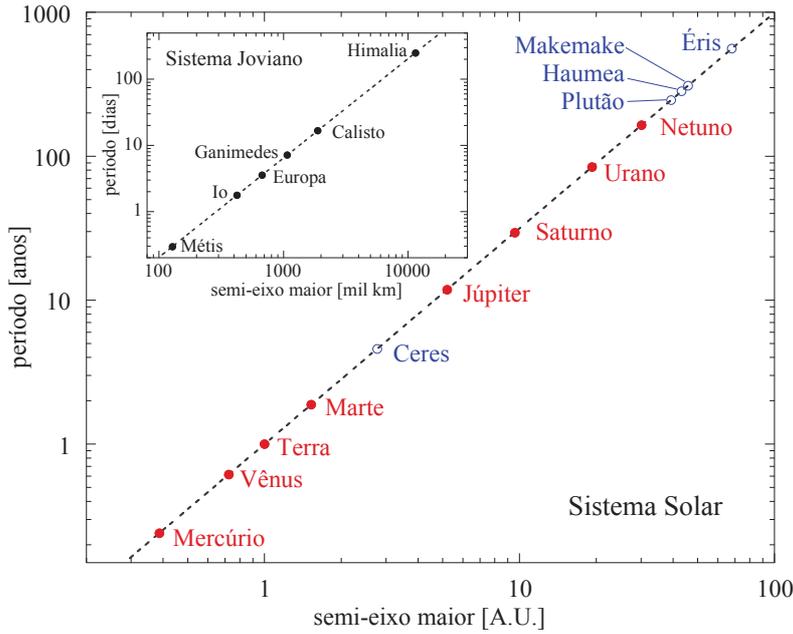


Figura 5.10: A terceira Lei de Kepler se traduz em uma relação dita em lei de potência, $P \propto a^{3/2}$. Aqui observamos esta lei para os planetas (círculos vermelhos) e planetas-anões (círculos azuis) do Sistema Solar, assim como para os satélites de Júpiter (destaque no alto a esquerda).

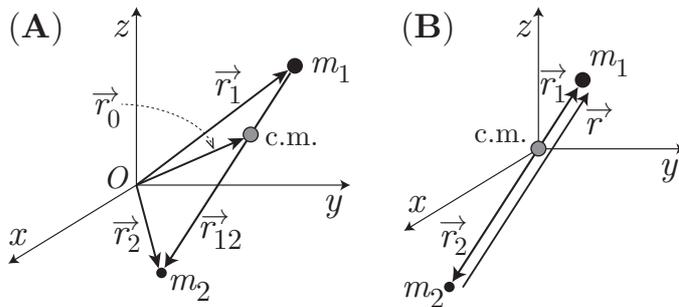


Figura 5.11: (A) Dois corpos de massas m_1 e m_2 com centro de massa na posição intermediária “c.m.” com os vetores de posição indicados em um referencial inercial. (B) Mesma configuração, mas com centro de massa na origem.

m_2 , isolados do resto do Universo, que interagem apenas pela atração gravitacional [Fig. 5.11, painel (A)].

As equações que descrevem este sistema são dadas pela lei da *gravitação universal* de Newton:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r_{12}^3}; \\ \vec{F}_2 &= m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r_{12}^3},\end{aligned}\quad (5.8)$$

onde usamos a notação $\ddot{\vec{r}} \equiv d^2\vec{r}/dt^2$. O vetor \vec{r}_0 na Fig. 5.11 é a posição do centro de massa ou *baricentro*:

$$\vec{r}_0 = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M},$$

onde M é a massa total. Se somarmos as duas expressões da Eq. (5.8), lembrando que $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$, temos:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \vec{v}_0 \quad \Rightarrow \quad m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = M \vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0,$$

isto é, o centro de massa está em repouso (se $v_0 = 0$) ou em movimento retilíneo uniforme. Sem perda de generalidade, podemos adotar um sistema de referência onde o centro coincide com o centro de massa, pois continua sendo um referencial inercial. Neste novo referencial [Fig. 5.11,

painel (B)], $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$, portanto,

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r_{12}^3}; \\ \ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r_{12}^3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = -GM \frac{\vec{r}_1}{r_{12}^3}; \\ \ddot{\vec{r}}_2 = -GM \frac{\vec{r}_2}{r_{12}^3}, \end{cases} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -GM \frac{\vec{r}}{r^3}; \quad (\vec{r}_{12} = \vec{r}) \quad (5.9)$$

O problema de 2 corpos fica reduzido a uma única equação vetorial. Como o vetor \vec{r} tem três componentes, então temos de fato 3 equações diferenciais de 2^a ordem, que necessitam de 6 constantes de integração, por exemplo, as coordenadas e as velocidades (com três componentes) iniciais.

Multiplicando vetorialmente a equação (5.9) pelo vetor \vec{r}_{12} obtemos:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = -GM \frac{\vec{r} \times \vec{r}}{r^3} = 0, \text{ pois } \vec{r} \times \vec{r} \equiv 0.$$

Logo, se $\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$ então, integrando no tempo obtemos:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{v} = \vec{h},$$

onde \vec{h} é uma constante do movimento que reconhecemos como o momento angular por unidade de massa, $\vec{h} \equiv \vec{L}/M$. Este resultado mostra que o momento angular se conserva e, portanto, o movimento de 2 corpos se dá em um plano perpendicular a \vec{L} . Esta é a base da 2^a Lei de Kepler. Esta é uma propriedade de qualquer sistema de forças centrais, como o caso de forças gravitacionais e eletrostáticas.

5.4.1 Órbitas keplerianas

Para determinarmos a órbita de um sistema de 2 corpos, fazemos o produto vetorial de \vec{h} com a equação (5.9):

$$\vec{h} \times \ddot{\vec{r}} = -GM \frac{\vec{h} \times \vec{r}}{r^3} = -\frac{GM}{r^3} \underbrace{(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}_{\vec{h}} \times \vec{r}.$$

O produto vetorial triplo pode ser reescrito segundo a identidade:

$$(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r} \equiv r^2 \dot{\vec{r}} - (r \dot{r}) \vec{r},$$

portanto,

$$\vec{h} \times \ddot{\vec{r}} = -GM \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r} \vec{r}}{r^2} \right) = -GM \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{r} = -GM \frac{d\hat{r}}{dt},$$

onde a notação \hat{r} significa vetor unitário ou *versor*. Integrando a expressão acima obtemos:

$$\vec{h} \times \dot{\vec{r}} = -GM \hat{r} - \vec{P}, \quad (5.10)$$

onde \vec{P} é uma constante de integração. Fazendo o produto escalar pelo vetor \vec{h} vem:

$$\vec{h} \cdot (\vec{h} \times \dot{\vec{r}}) = -GM \hat{r} \cdot \vec{h} - \vec{P} \cdot \vec{h} \Rightarrow \vec{P} \cdot \vec{h} = 0,$$

pois os vetores \vec{r} e \vec{h} são perpendiculares. Portanto, pelo resultado obtido, deduzimos que os vetores \vec{P} e \vec{h} também são perpendiculares.

Multiplicando a Eq. (5.10) pelo vetor \vec{r} resulta em:

$$\vec{r} \cdot (\vec{h} \times \dot{\vec{r}}) = -GM \vec{r} \cdot \hat{r} - \vec{r} \cdot \vec{P} \Rightarrow h^2 = GM r + \vec{r} \cdot \vec{P},$$

onde usamos a identidade $\vec{r} \cdot (\vec{h} \times \dot{\vec{r}}) \equiv -\vec{h} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = -\vec{h} \cdot \vec{h}$. O produto escalar entre dois vetores pode ser escrito em termos do ângulo entre as direções destes vetores, por exemplo, $\vec{r} \cdot \vec{P} = rP \cos \nu$. Portanto,

$$\frac{h^2}{GMr} = 1 + \frac{P \cos \nu}{GM}, \quad (5.11)$$

que a **equação de movimento** para um corpo sob ação da força da gravidade gerada por uma massa M . Esta equação é geralmente escrita na forma:

$$r(\nu) = \frac{q}{1 + e \cos \nu}; \text{ onde } e \equiv \frac{P}{GM} \text{ e } q = \frac{h^2}{GM} = \begin{cases} a(1 - e^2) & \text{se } e < 1; \text{ (elipse)} \\ a(e^2 - 1) & \text{se } e > 1; \text{ (hipérbole)} \end{cases} \quad (5.12)$$

A equação de movimento descreve uma **cônica** cuja forma depende de e , sua **excentricidade**, como vimos na seção 5.3.1. Demonstramos assim a 1ª Lei de Kepler. O ângulo ν é chamado **anomalia verdadeira**, termo introduzido pelo próprio Kepler.² A Fig. 5.12 ilustra geometricamente o caso de órbita elípticas os vários ângulos e distâncias envolvidos.

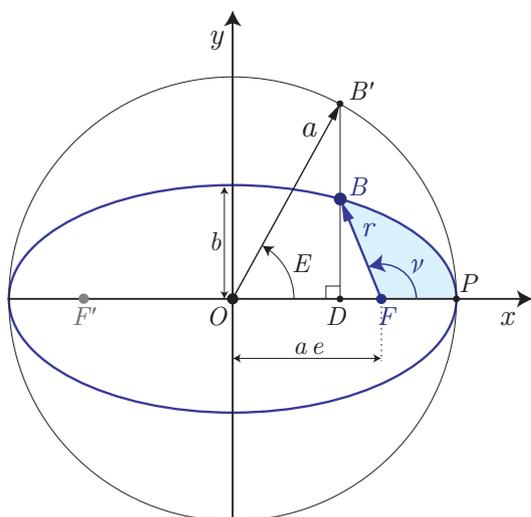


Figura 5.12: Definições dos ângulos das anomalias verdadeira (ν) e excêntrica (E). O ponto B representa o corpo que nos interessa, em órbita elíptica com focos em F e F' . B' é a projeção vertical da posição do corpo B no círculo de raio a (círculo apsidal). P é o periastro da órbita e e é a excentricidade. Veja também a Fig. 5.6.

Vemos ainda na expressão acima que a constante a é o semi-eixo maior no caso de uma elipse e $a(1 - e)$ e $a(1 + e)$ são os **apsides**, as distâncias mais próxima (periastro) e mais distante (apoastro) do foco da elipse (periélio e afélio, no caso de órbitas planetárias). O vetor \vec{P} que aparece na Eq. (5.10) é a direção do periastro. A anomalia verdadeira é medida a partir do periastro em sentido anti-horário.

A equação do movimento, Eq. (5.12), dá a forma da órbita, mas não descreve o movimento em função do tempo. Para tanto, Kepler introduziu a **anomalia excêntrica**, E , que é o ângulo a partir do centro da elipse (e não do foco) até a o ponto B' no círculo de raio a como ilustrado na Fig. 5.12 (o *círculo apsidal* de raio a).

No círculo temos $y_{\text{cir}} = \sqrt{a^2 - x^2}$ (para $y > 0$) e na elipse, $y_{\text{eli}} = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$ ou seja, $y_{\text{eli}} = \sqrt{1 - e^2}y_{\text{cir}}$, já que $a/b = \sqrt{1 - e^2}$. Logo, na Fig. 5.12, temos $\overline{DB} = \sqrt{1 - e^2} \overline{DB'}$.

Por outro lado, também temos $\overline{DB'} = a \sin E$ e $\overline{DB} = r \sin \nu$, portanto,

$$r \sin \nu = a \sqrt{1 - e^2} \sin E \quad \text{e} \quad r \cos \nu = a(\cos E - e)$$

Elevando ao quadrado cada uma das expressões acima e somando, obtemos a relação o raio r e a anomalia excêntrica:

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (5.13)$$

²O termo *anomalia* vem do fato do ângulo variar de forma não uniforme, isto é anômala

Finalmente, usando as equações (5.12) e (5.13) temos:

$$(1 - e \cos E) = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \nu} \Rightarrow \tan\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right), \quad (5.14)$$

que relaciona as anomalias excêntrica e verdadeira.

Para obtermos a variação temporal das anomalias, no caso de órbitas elípticas ou circulares, usamos a 2ª Lei de Kepler para calcular a área colorida na Fig. 5.12, dada pelos pontos \widehat{BFP} que corresponde à área varrido pelo vetor posição do corpo B :

$$\text{área de } \widehat{BFP} = \pi ab \frac{t - \tau}{T}, \quad (5.15)$$

onde τ é o momento em que o corpo passa pelo periastro P , t é o momento em que o corpo chega em B e T é o período de uma órbita. Podemos definir a **anomalia média**, M como o ângulo medido a partir do centro que aumenta de forma uniforme com o tempo:

$$M = 2\pi \frac{t - \tau}{T} \Rightarrow \text{área de } \widehat{BFP} = \frac{ab}{2} M. \quad (5.16)$$

A área de uma elipse de semi-eixo maior a está relacionada à área de um círculo de raio a por uma transformação simples, dada pelo produto da área do círculo pela razão de eixos, b/a , da elipse. Assim:

$$\text{área de } \widehat{BFP} = \frac{b}{a} [\text{área de } \widehat{B'FP}].$$

Por outro lado, temos que a área de $\widehat{B'FP} = \widehat{B'OP} - \widehat{B'OF}$. Estas duas áreas são dadas por:

$$\text{área de } \widehat{B'OP} = \frac{1}{2} a^2 E \quad \text{e} \quad \text{área de } \widehat{B'OF} = \frac{1}{2} \underbrace{(ae)}_{\text{base}} \times \underbrace{(a \sin E)}_{\text{altura}}.$$

Logo,
$$\text{área de } \widehat{BFP} = \left(\frac{b}{a}\right) \frac{a^2}{2} (E - e \sin E).$$

Usando a Eq. (5.16) obtemos finalmente:

$$\frac{ab}{2} (E - e \sin E) = \frac{ab}{2} M \Rightarrow E - e \sin E = M, \quad (5.17)$$

conhecida como **equação de Kepler**. Com as Eqs. (5.14) e (5.17), Kepler podia, a partir da anomalia média obter a anomalia verdadeira de um planeta e descrever seu movimento na órbita elíptica.

A equação de Kepler é transcendental, sem solução analítica, tendo que ser resolvida numericamente ou usando aproximações analíticas. A figura 5.13 ilustra a solução $E(M)$ graficamente para várias excentricidades.

Para excentricidade baixa ($e \lesssim 0,5$), podemos usar o método proposto pelo próprio Kepler de aproximações sucessivas:

$$\begin{aligned} \text{Faça: } E_0 &= M, \text{ e calcule: } E_1 = M + e \sin E_0. \\ \text{Em seguida calcule: } E_2 &= M + e \sin E_1; \quad E_3 = M + e \sin E_2; \dots \end{aligned}$$

Esta série converge em algumas iterações com um erro inferior à poucos segundos de arco.

A diferença entre as anomalias verdadeira e média, $(\nu - M)$, é chamada **equação do centro**. Para órbitas de baixa excentricidade, $e \lesssim 0,3$, a equação do centro pode ser bem aproximada por:

$$\begin{aligned} \nu - M \equiv C &= \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5\right) \sin M + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6\right) \sin 2M \\ &+ \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5\right) \sin 3M + \left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6\right) \sin 4M + \left(\frac{1097}{960}e^5\right) \sin 5M. \end{aligned} \quad (5.18)$$

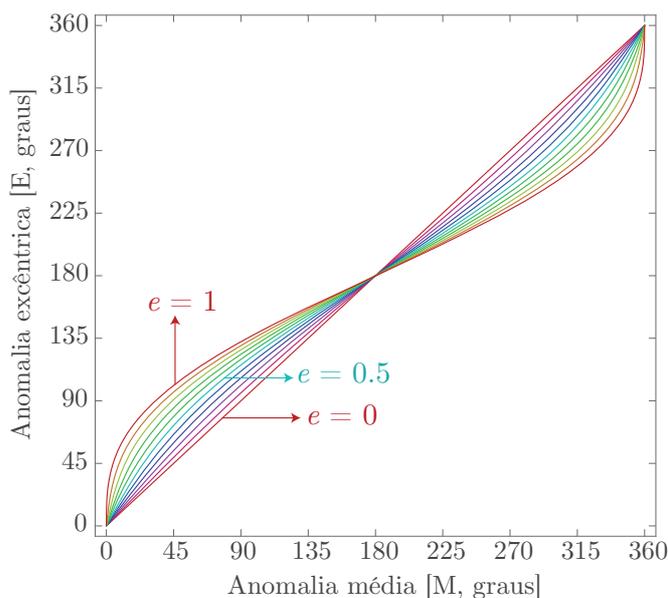


Figura 5.13: Relação entre as anomalias médias, M , e excêntrica, E , para excentricidades de zero a um (em passos de $\Delta e = 0,1$) obtidas pela solução numérica da equação de Kepler.

5.4.2 Movimento anual aparente do Sol

Do ponto de vista de um observador na Terra (mais precisamente, no baricentro do sistema Terra–Lua) o Sol descreve percorre uma órbita elíptica que se projeta como a eclíptica na esfera terrestre. O movimento médio do Sol é $2\pi/\text{ano}$, portanto $n \simeq 3548'',1928/\text{dia}$. A anomalia média do Sol é $M = nt$, onde t é medido em dias.

A longitude do Sol, λ_{\odot} , em coordenadas eclípticas é medida a partir do ponto vernal, Υ , é dada por:

$$\lambda_{\odot} = L_0 + \nu \Rightarrow \lambda_{\odot} = L_0 + nt + C,$$

onde L_0 é a longitude do Sol em $t = 0$, $L_0 \simeq 280^{\circ},466$. Assim, a posição do Sol pode ser obtida de forma aproximada como:

$$\lambda_{\odot} = 280^{\circ},466 + n \text{JD}_{2000} + 2e \text{sen}(n \text{JD}_{2000}) + \frac{5}{4}e^2 \text{sen}(2n \text{JD}_{2000}),$$

onde $e \simeq 0,01671$ é a excentricidade da órbita da Terra (e só usamos a expansão da equação do centro até 2^a ordem) e JD_{2000} é o número de dias julianos desde a época J2000 ($\text{JD}_0 = 2451545$, veja sec. 2.3).

Por exemplo, se quisermos calcular a longitude do Sol no dia 14/12/2020 (dia de um eclipse solar total visível no Chile e Argentina, e parcialmente visto do Sul do Brasil), temos $\text{JD}_{2000} = 2459198 - 2451545 = 7653$ dias. Portanto,

$$M = n\text{JD}_{2000} = +0^{\circ},98561 \times 7653 = 7542^{\circ},8666 = 342^{\circ},867,$$

onde reduzimos o ângulo M para o intervalo 0° – 360° . Assim,

$$\lambda_{\odot} = 280^{\circ},466 + 342^{\circ},867 + 1^{\circ},91482 \text{sen } 342^{\circ},867 + 0^{\circ},019998 \text{sen}(2 \times 342^{\circ},867) = 262^{\circ},757.$$

O valor obtido através de um cálculo rigoroso, levando em conta as perturbações planetárias e da Lua resulta em $\lambda_{\odot} = 262^{\circ},955$, uma diferença de apenas $12'$. Com este método super simplificado, é possível obter a posição do Sol com uma precisão típica inferior a meio grau. Para datas muito distantes de J2000 é necessário levar em conta a precessão dos equinócios.

5.4.3 Raio médio de uma elipse e a terceira lei de Kepler

Kepler enuncia sua 3ª lei se referindo ao raio médio do planeta em sua órbita em torno do Sol. Mas, quanto vale este raio médio?

Uma forma de definirmos o raio médio, $\langle r \rangle$, é considerando a equação (5.1) levando em conta uma volta completa, isto é, $0 \leq \theta < 2\pi$:

$$\langle r \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} d\theta = a\sqrt{1-e^2} = b.$$

Neste caso, o raio médio é igual ao semi-eixo menor b da elipse e não depende do semi-eixo maior, a . Note que o ângulo θ é a anomalia verdadeira (o ângulo ν na Eq. (5.12)).

Uma outra opção seria usar a anomalia excêntrica, E e a equação (5.13), lembrando que ângulo é medido a partir do centro da elipse, e não do foco. Temos assim:

$$\langle r \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(1-e \cos E) dE = a.$$

Agora, o raio médio é exatamente igual ao semi-eixo maior da elipse.

Por outro lado, podemos considerar o raio médio considerando o período de translação, isto é, o raio em função do tempo e não do ângulo (ou anomalia). Neste caso, calculamos o raio médio da seguinte forma:

$$\langle r \rangle = \frac{1}{P} \int_0^P r(t) dt, \quad (5.19)$$

onde P é o período de translação. Infelizmente, $r(t)$ não é uma função analítica. Para resolver esta equação, nós podemos usar a segunda lei de Kepler, Eq. (5.4), que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt},$$

onde dA é a área varrida pelo raio r ao percorrer o ângulo θ . Integrando esta expressão temos:

$$\int_0^P \frac{dA}{dt} dt = \int_0^P \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} dt \Rightarrow A = \pi ab = \frac{1}{2} \int_0^P r^2 \frac{d\theta}{dt} dt.$$

Por outro lado, já vimos que a quantidade $r^2 \dot{\theta} = h$ é o momento angular, uma constante do movimento. Portanto,

$$\pi ab = \frac{1}{2} \int_0^P h dt = \frac{Ph}{2}.$$

Para calcular o raio médio, reescrevemos a equação (5.19) da seguinte forma:

$$\frac{1}{P} \int_0^P r(t) dt = \frac{1}{P} \int_0^{2\pi} r(t) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^{-1} d\theta = \frac{1}{P} \int_0^{2\pi} r(\theta) \left(\frac{h}{r^2(\theta)} \right)^{-1} d\theta,$$

onde usamos, $d\theta/dt = h/r^2$. Resumindo, temos agora:

$$\langle r \rangle = \frac{1}{Ph} \int_0^{2\pi} r^3(\theta) d\theta \Rightarrow \langle r \rangle = \frac{1}{2\pi ab} \int_0^{2\pi} r^3(\theta) d\theta.$$

Finalmente, obtemos resolvendo a integral:

$$\langle r \rangle = a \left(1 + \frac{e^2}{2} \right).$$

Nós calculamos o raio médio de um corpo em órbita elíptica e obtivemos três resultados diferentes. É possível que quando Kepler se referiu ao raio médio para sua terceira lei ele simplesmente usou:

$$\langle r \rangle = \frac{\text{apoastro} + \text{periastro}}{2} = \frac{a(1+e) + a(1-e)}{2} = a,$$

isto é, a média entre a maior e menor distância ao foco da elipse é o semi-eixo maior. Assim, reconciliamos o enunciado original de Kepler e a dedução a partir das leis de Newton.

5.4.4 A equação *vis viva*

O termo *vis viva* ou “força viva” surgiu no final do século **XVII** quando se discutia a “força” de um corpo em movimento. Gottfried Leibnitz defendia a ideia de que o termo mv^2 era esta força, chamando-a de *vis viva*. Algumas décadas depois, ficou claro que este termo é o dobro da energia cinética de um corpo em movimento, e não a força ($m\dot{v}$).

A expressão *vis viva*, contudo, sobreviveu e passou a ser usada de forma diferente. Vamos imaginar um corpo de massa m em órbita elíptica (ou circular) ao redor de um corpo bem mais maciço de massa M . A energia total, \mathcal{E} , se conserva e podemos escrever:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}, \quad (5.20)$$

isto é, a energia total é a soma das energias cinética e potencial gravitacional. Para determinarmos o valor da energia total, podemos calcular seu valor no periastro e apoastro:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GMm}{r_p} = \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GMm}{r_a}$$

onde v_p e v_a são as velocidades no periastro e apoastro, respectivamente.

Nestas posições, periastro e apoastro, não há movimento radial, logo a velocidade é:

$$v_p = r_p\dot{\nu} \quad \text{e} \quad v_a = r_a\dot{\nu},$$

onde ν é a coordenada angular medida a partir do periastro (a anomalia verdadeira). Por outro lado, sabemos que o momento angular, h , se conserva neste sistema de 2 corpos e $h = r^2\dot{\nu}$. Assim, podemos escrever a energia como:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r_p^2} - \frac{GMm}{r_p} = \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r_a^2} - \frac{GMm}{r_a}.$$

A equação acima pode ser resolvida para r_a e r_p em termos de \mathcal{E} resultando em:

$$r_p = -\frac{GMm}{2\mathcal{E}} \left(1 - \sqrt{\frac{2\mathcal{E}h^2}{G^2M^2m} + 1} \right) \quad \text{e} \quad r_a = -\frac{GMm}{2\mathcal{E}} \left(1 + \sqrt{\frac{2\mathcal{E}h^2}{G^2M^2m} + 1} \right).$$

Pela figura 5.12, constatamos que $2a = r_a + r_p$ (a é o semi-eixo maior da elipse). Assim, podemos eliminar r_a e r_p e obtemos finalmente:

$$\mathcal{E} = -\frac{GMm}{2a}. \quad (5.21)$$

A equação acima nos diz que a energia orbital no sistema de 2-corpos depende apenas das massas e do semi-eixo maior, mas não depende da excentricidade.

Usando as Eqs. (5.20) e (5.21), temos:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a} \Rightarrow v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (5.22)$$

que é conhecida como equação *vis viva*. Caso as massas M e m sejam comparáveis, a expressão da *vis viva* é:

$$v^2 = G(M + m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

. Podemos ver que a velocidade orbital não depende explicitamente da excentricidade da órbita.

5.5 Órbita da Lua

Nós já vimos em outras seções (2.1.6 e 4.10) alguns aspectos da órbita da Lua. Usando os valores conhecidos das massas da Lua, Terra e Sol (M_L , M_T e M_S), assim como suas respectivas distâncias relativas (d_{TL} e d_{SL}), podemos calcular a força gravitacional que age na Lua:

$$F_{TL} = G \frac{M_T M_L}{d_{TL}^2} \simeq 1,98 \times 10^{20} \text{ N} \quad \text{e} \quad F_{SL} = G \frac{M_S M_L}{d_{SL}^2} \simeq 4,36 \times 10^{20} \text{ N}. \quad (5.23)$$

O resultado acima implica que a força que o Sol exerce sobre a Lua (F_{SL}) é cerca de 2,2 vezes maior que a força que a Terra exerce sobre a Lua (F_{TL}).

Este resultado aparentemente significa que a Lua deveria orbitar o Sol, aproximadamente em uma órbita elíptica, como vimos anteriormente. Na verdade, a órbita da Lua e da Terra são de fato aproximadamente elipses ao redor do Sol, veja a Fig. 5.14. Como a resultante da soma das forças da Terra e do Sol apontam sempre aproximadamente para o Sol (pois a força do Sol é maior do que a da Terra), a forma da órbita da Lua (e da Terra) devem ser convexas, mesmo se não são exatamente elipses.

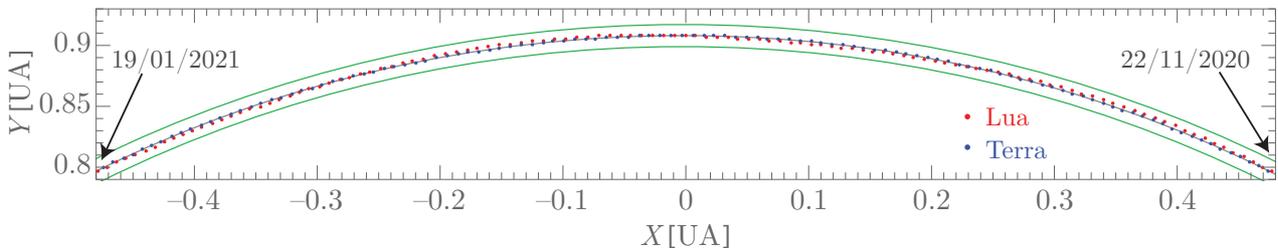


Figura 5.14: Trecho das trajetórias da Terra e da Lua ao redor do Sol entre novembro/2020 e janeiro/2021, observados de uma distância muito grande, perpendicular ao plano orbital (eclíptica) representados pelos eixos cartesianos X e Y em Unidades Astronômicas (UA). O baricentro do sistema Terra–Lua descreve uma elipse (linha cinza) ao redor do Sol [ou, mais precisamente, do centro de massa do Sistema Solar nas coordenadas $(X, Y) = (0, 0)$] enquanto a Terra e a Lua oscilam em torno desta elipse. As linhas verdes representam a região de influência gravitacional da Terra (ver mais abaixo no texto). Olhando com atenção (e um bom *zoom*), podemos ver as duas curvas no gráfico acima.

Podemos dizer que a Lua não está em órbita da Terra, mas sim do Sol? Não exatamente, pois a Lua também orbita a Terra e este período orbital em relação ao Sol (o período sinódico, seção 2.1.6) é de aproximadamente 29,53 dias.

Imagine que a Lua estivesse mais distante da Terra. Neste caso, o período orbital seria maior, de acordo com a 3ª lei de Kepler. Aumentando a distância gradualmente, finalmente chegaríamos a um momento em que o período orbital sinódico seria infinito, quando a Lua estaria sempre em oposição ao Sol (ou seja, seria Lua Cheia sempre). Isto define uma distância a partir da qual a Lua efetivamente gira apenas ao redor do Sol, e não mais da Terra.

Podemos definir uma distância crítica onde a Lua e a Terra teriam a mesma velocidade angular ω em relação ao Sol. Teríamos então as seguintes relações de equilíbrio entre a Terra e a Lua, igualando a aceleração centrípeta com a aceleração gravitacional:

$$\text{Terra: } d_{\text{TS}} \omega_{\text{T}}^2 = G \frac{M_{\text{S}}}{d_{\text{TS}}^2}; \quad \text{Lua: } (d_{\text{TL}} + d_{\text{TS}}) \omega_{\text{L}}^2 = G \frac{M_{\text{S}}}{(d_{\text{TL}} + d_{\text{TS}})^2} + G \frac{M_{\text{T}}}{d_{\text{TL}}^2}, \quad (5.24)$$

onde d_{TS} é a distância entre a Terra e o Sol. Por simplicidade assumimos órbitas circulares. Quando $\omega_{\text{T}} = \omega_{\text{L}}$ a distância d_{TL} será igual à distância crítica, r_{H} , a maior distância possível em que um corpo estaria orbitando a Terra. Igualando ω nas equações (5.24) obtemos:

$$\frac{M_{\text{S}}}{d_{\text{TS}}^3} = \frac{M_{\text{S}}}{(r_{\text{H}} + d_{\text{TS}})^3} + \frac{M_{\text{T}}}{r_{\text{H}}^2 (r_{\text{H}} + d_{\text{TS}})} \Rightarrow \frac{1}{d_{\text{TS}}^3} - \frac{1}{(r_{\text{H}} + d_{\text{TS}})^3} = \frac{M_{\text{T}}/M_{\text{S}}}{r_{\text{H}}^2 (r_{\text{H}} + d_{\text{TS}})}.$$

Usando $x = r_{\text{H}}/d_{\text{TS}}$ a equação acima se simplifica em:

$$\frac{x^3(3 + 3x + x^2)}{(1 + x)^2} = \frac{M_{\text{T}}}{M_{\text{S}}}. \quad (5.25)$$

Como $x \ll 1$, podemos expandir o lado esquerdo da Eq. (5.25) em série:

$$\frac{x^3(3 + 3x + x^2)}{(1 + x)^2} \simeq 3x^3 - 3x^4 + 4x^5 - 5x^6 + \dots$$

Mantendo apenas o primeiro termo da expansão, adequado se $x \lesssim 0,1$, reescrevemos a Eq. (5.25):

$$3x^3 \simeq \frac{M_{\text{T}}}{M_{\text{S}}} \Rightarrow r_{\text{H}} \simeq d_{\text{TS}} \left(\frac{M_{\text{T}}}{3M_{\text{S}}} \right)^{1/3}. \quad (5.26)$$

A distância r_{H} como definida na Eq. (5.26) é chamado de raio da **esfera de Hill**, estudado por George William Hill e Édouard Roche na segunda metade do século XIX. A esfera de Hill define o raio de influência gravitacional de um corpo em um sistema binário.

Numericamente, no caso Terra-Sol, $r_{\text{H}} = 0,01$ U.A. ou $1,5 \times 10^6$ km. A distância da Lua à Terra é de aproximadamente $0,38 \times 10^6$ km, cerca de $r_{\text{H}}/4$. Em outras palavras, a Lua está confortavelmente dentro da esfera de influência gravitacional da Terra. Na Fig. 5.14, a esfera de influência da Terra está representada pelos traços verdes.

5.6 Variações seculares dos movimentos da Terra

A órbita da Terra ao redor do Sol não é fixa, assim como a orientação da Terra, a inclinação do eixo de rotação em relação à eclíptica, (obliquidade) também não é, como vimos na Sec. 3.2.2.

A órbita da Terra é descrita por *parâmetros orbitais* que definem a trajetória da Terra no espaço. Devido às perturbações gravitacionais planetárias, não esfericidade do Sol e da Terra, e efeitos relativísticos, a órbita da Terra não é uma elipse fixa no espaço. A figura 5.15 ilustra a variação de alguns parâmetros orbitais em um intervalo de 2 milhões de anos.

Além de alterar a posição da Terra, e conseqüentemente, dos astros na esfera celeste, estas alterações podem ter um impacto no clima terrestre. Variações da excentricidade, longitude do periélio e da obliquidade afetam a insolação da atmosfera (veja Sec. 2.6). A variação do semi-eixo maior da órbita da Terra (mais precisamente, do sistema Terra-Lua) é inferior a 0,003% em um intervalo de tempo de 500 milhões de anos centrado em J2000, o que significa que a variação do semi-eixo teria, no máximo, um efeito secundário nas mudanças climáticas.

A interação entre os parâmetros orbitais da Terra e mudanças climáticas foi sugerido em 1842 pelo matemático francês Joseph-Alphonse Adhémard, após a descoberta dos ciclos de glaciação e aquecimento, em seu livro “*Révolutions de la mer, déluges périodiques*”.

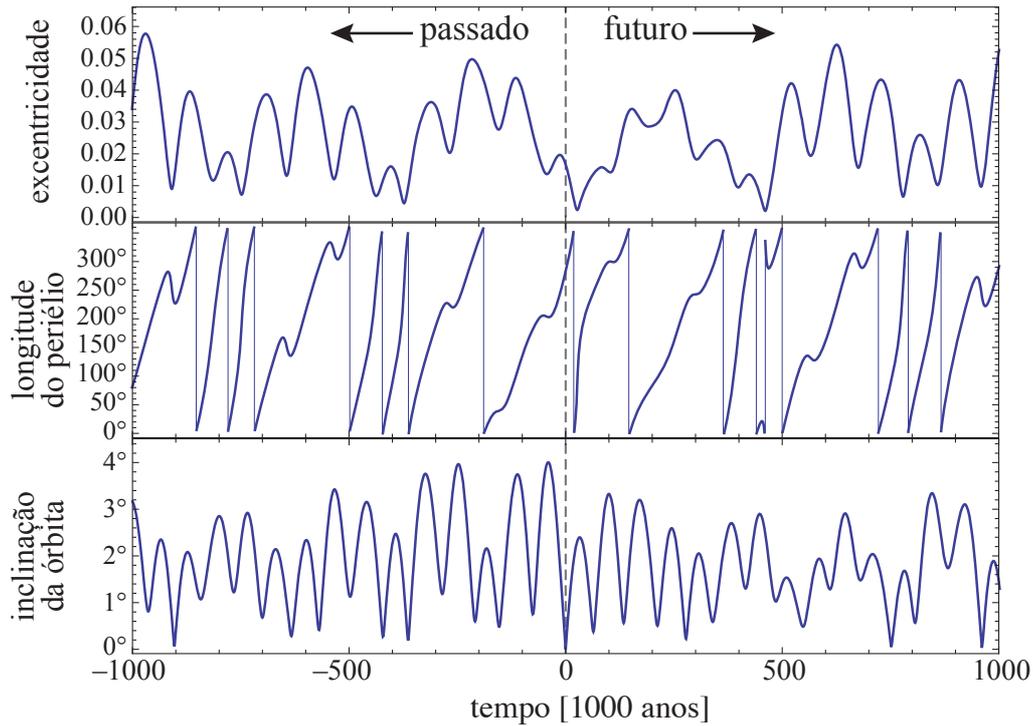


Figura 5.15: Variação secular de alguns parâmetros orbitais terrestre no intervalo de tempo de 2 milhões de anos centrado em J2000. Figura baseada nos resultados de simulação numérica de J. Laskar e colaboradores (1993, A&A 270, 522)

Esta ideia foi levada adiante de forma mais quantitativa pelo pesquisador sérvio Milutin Milankovitch (ou Milanković) em 1920, estendendo a relação entre órbita e clima, inclusive para outros planetas do Sistema Solar. Esta relação entre a variação secular dos parâmetros orbitais e o clima em escalas de tempo de 10^4 a 10^6 anos é conhecida como *ciclos de Milankovitch*.

A duração das estações do ano, definida pelas passagens do Sol pelos equinócios e solstícios (Sec. 1.6) também são afetadas pelas variações seculares do movimento da Terra e pela precessão dos equinócios. Calculando a duração de cada estação em função do tempo obtemos a Fig. 5.16. Durante o século **XIII**, a duração do Outono (Hemisfério Sul) era virtualmente igual à duração do Inverno (93 dias e 7 horas), enquanto que a Primavera e o Verão tinham a mesma duração de 89 dias e 8 horas cada.

Devido à não simetria da distribuição de massas continentais e oceanos, a variação da duração das estações do ano podem levar a variações climáticas. As variações do movimento da Terra podem levar a mudanças climáticas em escalas de tempo de dezenas ou centenas de milhares de anos, mas não podem explicar alterações no clima em escalas de alguns séculos (por exemplo, a mudança climática observada nos últimos 200 anos).

5.7 Baricentro do Sistema Solar e o movimento do Sol

O *centro de massa* ou **baricentro**, \vec{r}_{cm} , de um sistema de N corpos é dado por:

$$\vec{r}_{\text{cm}} = (x_{\text{cm}}, y_{\text{cm}}, z_{\text{cm}}) = \frac{\sum_i^N \vec{r}_i \times m_i}{\sum_i^N m_i}, \quad (5.27)$$

onde $(x_{\text{cm}}, y_{\text{cm}}, z_{\text{cm}})$ são as coordenadas cartesianas do centro de massa e \vec{r}_i e m_i são as posições e massas individuais de cada corpo i do sistema (inclusive o Sol). Aqui, por simplicidade,

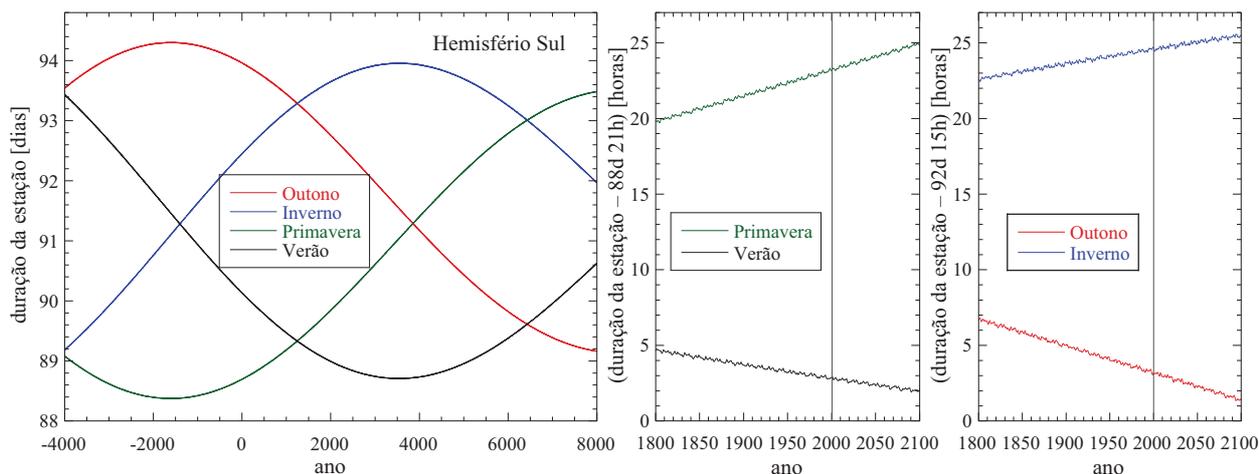


Figura 5.16: Esquerda: Duração em dias das estações do ano para o Hemisfério Sul (para o Hemisfério Norte basta trocar Primavera por Outono e Verão por Inverno). O ano zero corresponde a 1 A.C.. Nos painéis central e a direita, detalhe mostrando a duração das estações em épocas próximas da atual. Para Primavera e Verão a duração é de 88 dias e 21 horas mais o número de horas indicado no gráfico. Para Outono e Inverno, as horas são somadas a 92 dias e 15 horas.

assumimos que cada corpo se comporta como um ponto, e não um objeto extenso. Apenas para corpos não esféricos esta aproximação não é necessariamente boa.

Em um sistema gravitacional de 2 corpos, o baricentro se encontra em um dos focos das elipses, que correspondem aos movimentos orbitais. Por exemplo, no sistema Terra–Lua, ambos os corpos orbitam ao redor do baricentro. Como a Terra tem massa muito superior à da Lua, o baricentro encontra-se no interior da Terra. Por isto, muitas vezes ignoramos isto e assumimos que a Lua orbita a Terra, e não o baricentro do sistema Terra–Lua. Outro exemplo é o sistema Plutão–Caronte (veja Fig. 5.2) onde o centro de massa se encontra entre os dois corpos, a cerca de 940 km acima da superfície de Plutão.

No caso do Sistema Solar, o corpo mais importante, por causa de sua massa, é de longe o Sol. O centro de massa do Sistema Solar sempre está próximo do Sol, muitas vezes no seu interior. O Sol se move em relação ao baricentro devido às órbitas dos planetas, principalmente Júpiter e os outros gigantes gasosos. O produto do semi-eixo maior da órbita com a massa do planeta dividido pela massa do Sistema Solar nos diz o quanto um planeta pode perturbar o Sol e movê-lo do baricentro.

Júpiter	Saturno	Netuno	Urano	Terra	Venus	Éris	Marte	Plutão	Mercúrio
1,0672	0,5858	0,3326	0,1799	0,00065	0,00038	0,00012	0,00011	0,00006	0,00001

Deslocamento do Sol em relação ao baricentro do Sistema Solar em unidades de raio solar (≈ 696 mil km). Para corpos com órbitas muito elípticas, estes valores variam significativamente. Note que Júpiter sozinho é responsável por quase metade do deslocamento do Sol e que a contribuição dos planetas telúricos é praticamente insignificante.

A Fig. 5.17 ilustra a posição do baricentro em relação ao Sol entre 1980 e 2060 e a distância radial, $|\vec{r}_{\text{cm}}|$, entre 1850 e 2250. Os mínimos ocorrem quando Júpiter e Saturno estão alinhados em lados opostos em relação ao Sol.

Além do deslocamento no plano eclíptica, o Sol também se move na direção perpendicular a este plano. Este movimento é devido às órbitas planetárias não serem rigorosamente coplanares. O Sol pode oscilar até cerca de 43 mil km ($0,062 R_{\odot}$) acima ou abaixo do plano da eclíptica.

Note que esta trajetória do Sol em relação ao baricentro do Sistema Solar é calculada a partir do conhecimento que temos dos corpos, planetas principalmente, no Sistema Solar. Se por acaso descobrirmos um corpo de alta massa (um hipotético “planeta X” além de Netuno, isto poderia

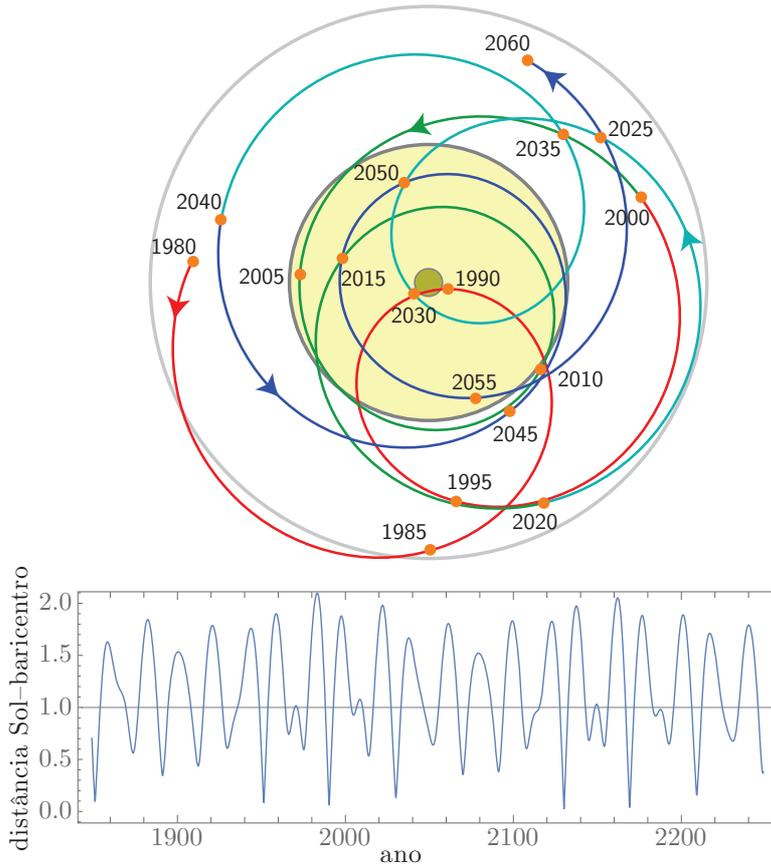


Figura 5.17: Em cima: Trajetória do baricentro do Sistema Solar em relação ao Sol (na realidade, é o Sol que se move em relação ao baricentro) observado do Polo Norte da eclíptica. O círculo amarelo representa o Sol e tem um raio, R_{\odot} , que corresponde a 695,7 mil km. O círculo central tem 10% do raio solar e o círculo externo cinza claro tem o dobro do raio do Sol. Em baixo: Variação da distância do Sol ao baricentro (em unidades do raio solar) em função do tempo.

Tabela 5.7: Datas de distâncias mínimas (menor que $R_{\odot}/4$) entre o Sol e o baricentro do Sistema Solar. Distância em unidades de raios solares. Intervalo de tempo considerado 1700–2500.

data	$r_{cm}[R_{\odot}]$	data	$r_{cm}[R_{\odot}]$	data	$r_{cm}[R_{\odot}]$	data	$r_{cm}[R_{\odot}]$
31/07/1772	0,16606	18/05/1951	0,08592	09/03/2130	0,02248	30/12/2308	0,03315
06/06/1811	0,06230	23/04/1990	0,06391	04/04/2169	0,03566	02/04/2348	0,00934
17/11/1850	0,09873	25/01/2030	0,13422	05/04/2209	0,15895	19/04/2388	0,17607

impactar o cálculo da posição e trajetória do baricentro do Sistema Solar.

5.8 Plano invariante do Sistema Solar

Em um sistema isolado, o momento angular, \vec{L} , é uma grandeza que se conserva. O plano perpendicular a este vetor, que passa pelo baricentro do sistema, é fixo no espaço e é chamado *plano invariante* ou plano invariante de Laplace em referência a Pierre Simon Laplace (1749–1827) que fez sua descrição em seu livro *Mécanique Céleste* em 1805.

O plano invariante pode servir como um plano de referência para o estudo dinâmico do Sistema Solar. Da mesma forma que para o baricentro, o plano invariante é determinado a partir

Tabela 5.8: Datas de distâncias máximas (maior que $2R_{\odot}$) entre o Sol e o baricentro do Sistema Solar. Distância em unidades de raios solares. Intervalo de tempo considerado 1700–2500.

data	$r_{cm}[R_{\odot}]$	data	$r_{cm}[R_{\odot}]$	data	$r_{cm}[R_{\odot}]$
06/04/1804	2,10741	28/03/1983	2,09765	20/06/2316	2,03043
03/04/1843	2,06979	08/02/2162	2,05238	16/06/2495	2,06250

do movimento dos corpos do Sistema Solar ao longo de, pelo menos, vários séculos.

Como o módulo do momento angular devido à órbita circular de um corpo é $|\vec{L}| = mrv$, (r é a distância ao baricentro e v a velocidade orbital do corpo de massa m) podemos intuir que os planetas gasosos externos contribuem de forma mais importante a $|\vec{L}|$ e, portanto, à orientação do plano invariante. A contribuição dos principais corpos do Sistema Solar para o momento angular total é dada na tabela 5.9. A contribuição dos 4 planetas gasosos soma 99,77% do momento angular total, apesar do Sol conter 99,87% da massa do Sistema Solar.

Tabela 5.9: Principais contribuições para o momento angular total do Sistema Solar em porcentagem e inclinação da órbita em relação ao plano invariante (J2000). Dados de Souami & Souchay, 2012.

obj.	Júpiter	Saturno	Netuno	Urano	Terra/Lua	Sol	Vênus	Marte
$\% L $	61,43	24,94	7,99	5,41	$8,598 \times 10^{-2}$	$6,97 \times 10^{-2}$	$5,89 \times 10^{-2}$	$1,12 \times 10^{-2}$
$i(^{\circ})$	0,322	0,925	0,735	0,995	1,572	—	2,154	1,631



Referências Bibliográficas

- [1] Boczko R., 1984, 'Conceitos de astronomia', Editora Edgard Blücher Ltda.
- [2] Carroll B.W., Ostlie D.A., 1996, 'Modern Astrophysics', Addison-Wesley Publ. Company Inc.
- [3] 'Connaissance des Temps – Éphémérides Astronomiques', publicação anual do *Bureau des Longitudes de Paris*, França.
- [4] Dreyer J.L.E., 1953, 'A History of Astronomy from Thales to Kepler', 2^a edição, Dover Publications, Inc.
- [5] Green R.M., 1985, "Spherical Astronomy", Cambridge University Press.
- [6] Kovalevsky J., 1995, 'Modern Astrometry', Astronomy and Astrophysics Library, Springer Verlag.
- [7] Meeus J., 1991, 'Astronomical Algorithms', Willian-Bell Inc.
- [8] Pannekoek A., 1961, 'A History of Astronomy', Dover Publications, Inc.
- [9] Seidelmann P.K., 1992, 'Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac', University Science Books.
- [10] Smart W.M., 1977, 'Textbook on Spherical Astronomy', 6^a edição, Cambridge University Press.
- [11] Snyder J.P., 1997, 'Flattening the Earth: 2000 years of map projections', The University of Chicago Press.
- [12] Taff L.G., 1981, 'Computational Spherical Astronomy', Wiley-Interscience Publication.
- [13] Tárzia R.D., 1993, 'Astronomia Fundamental', Editora UFMG.
- [14] Urban S.E., Seidelmann P.K., 2012, 'Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac', 3^a Edição', Univ Science Books.

Índice Remissivo

A

Abd al-Rahman, 133
aberração secular, 116
Abu al-Biruni, 133
Abu Ishaq Ibrahim ibn Yahya al-Zarqali, 133
aceleração aparente da Lua, 63
Adams, 63
afastamento da Lua, 63
afélio, 22
Aglaonice, 128
Ahmad al-Fargani, 133
al-Birjandi, 134
Alexandria, 128, 158
Alhazém, 133
Almagesto, 130, 133
Almucântar, 17
Alpetragius, 134
al-Sufi, 133
altura, 17
al-Zarkali, 133
analema, 48
Anaximandro, 122
Anaxímenes de Mileto, 122
Andrômeda, 2
ângulo da vertical, 83
ângulo de refração, 95
ângulo horário, 19, 20
anno domini, 70, 132
ano, 46, 69
ano anomalístico, 55
ano besseliano, 54
ano bissexto, 71
ano draconiano, 55, 153
ano marciano, 172
ano trópico, 54, 60, 71
anomalia, 93, 181
anomalia excêntrica, 181
anomalia média, 50, 182
anomalia verdadeira, 77, 181
anos bissextos, 58
anos-luz, 4, 102
Antártico, 24

antumbra, 148
anular-total, 150
Apolônio, 130
apsides, 181
arcos gravitacionais, 117
áreas iguais, 41
Áries, 18
Aristarco, 127
Aristóteles, 126
Ártico, 24
Aryabhata, 132
Arzachel, 133
ascensão reta, 18, 19
aspecto, 41
Assuã, 128, 158
asterismos, 7
astrometria, 2
astronomia de posição, 2
Astronomia nova, 175
atmosfera terrestre, 94
Averróis, 133
azimutais, 41
azimutal, 40
azimute, 17

B

banda fotométrica, 3
baricentro, 179, 188
Beda, 132
BeiDou, 85
bissexto, 70
blue moon, 57
Brahmagupta, 132
brilho, 2
Bureau de Longitudes de Paris, 89

C

calendário, 68
Calendário Republicano, 72
Campano de Novara, 135
Caronte, 171
Cassini, G., 155, 165

- Cassini, J., 111
 catálogo fundamental, 13
 centro de massa, 188
 Chandler, 94
 Ciclo de indicação, 73
 Ciclo de Meton, 71
 Ciclo metônico, 58, 73
 Ciclo solar, 72
 ciclos astronômicos, 46
 ciclos de Milankovitch, 188
 cilíndrica, 40
 círculo
 grande, principal, 15
 círculo apsidal, 181
 círculo polar, 24
 circumpolar, 25
 Clairaut, 84
 Cláudio Ptolomeu, 130
 Computus, 132
 configurações planetárias, 140
 conformes, 41
 cônica, 40, 181
 cônica equidistante, 42
 conjunção inferior, 140
 conjunção superior, 140, 141
 constante de aberração, 115
 Constante Solar, 76
 constelações, 5
 coordenada selenográfica, 157
 coordenadas
 aparentes, 115
 médias, 92
 verdadeiras, 92
 coordenadas aparentes, 119
 Corpus Christi, 76
 crepúsculo, 100
 cronologia, 68
 culminação, 25
 culminação inferior, 28
 culminação superior, 28
- D**
- data juliana, 73
 De Luce, 135
 De revolutionibus orbium coelestium, 136
 De temporum ratione, 132
 declinação, 18, 19
 desvio para o Leste, 61
 dia, 46, 68, 69
 dia estelar, 47
 dia juliano, 73
 dia sideral, 46
 dia solar, 47
 direção verdadeira, 41
 Dominica, 69
- E**
- eclipse, 146, 207
 eclipse anular, 148
 eclipse central, 148
 eclipse da Lua, 148
 eclipse do Sol, 148
 eclipse não-central, 148
 eclipse penumbral, 151
 eclipse total, 148
 eclíptica, 11
 elipse paraláctica, 105
 elipsoide, 80, 83
 elipsoide de revolução, 93
 alongação, 93, 118, 140, 205
 alongação máxima, 131
 alongação ocidental, 141
 alongação oriental, 141
 época, 15, 74
 época de Bessel, 55
 equação de Kepler, 182
 equação de movimento, 181
 Equação do Centro, 50
 equação do centro, 182
 equação do tempo, 49
 equador, 16
 equador celeste, 18
 Equador Galáctico, 21
 equador geográfico, 81
 equante, 130
 equidistante, 43
 equidistantes, 41
 equinócio, 23, 54
 equinócio vernal, 18
 equiretangular, 43
 Eratóstenes, 128
 Esfera Celeste, 15
 esfera celeste, 1
 esfera de Hill, 187
 esferas homocêntricas, 125
 Estação Espacial Internacional, 86
 estações do ano, 22, 54, 170, 200
 Estereográfica, 41
 esterradiano, 1
 Estrela de Barnard, 119
 Estrela Polar, 27
 Euclides, 127
 Euclidiana, 36
 Eudoxo, 125
 European Space Agency, 2
 excentricidade, 82, 130, 181, 187
 exoplaneta, 103
 Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac, 118
 Extended Hipparcos Compilation, 3, 112
- F**
- fases, 11
 fases da Lua, 46
 fases de Vênus, 137

Fifth Fundamental Catalogue, 119
Filolau, 125
FK4, 13
FK5, 119
fluxo, 2, 3
força central, 178
força de maré, 87
fórmula de Laplace, 97
fórmula fundamental, 37
Foucault, Léon, 62
frenagem, 63
fuso horário, 66

G

Galileo (Sistema de Posicionamento Global), 85
Galileu Galilei, 137, 146
Gemini Norte, 38
Gêmeino de Rodes, 129
geocêntrico, 16
geodésica, 36, 39
Geografia, 40
geoide, 81, 82
Georg von Peurbach, 135
Gerardo de Cremona, 134
Gerbert d'Aurillac, 134
Girard:teorema, 39
Global Navigation Satellite System, 84
Global Positioning System, 84
GLONASS, 84
gnômon, 122
Gnomônica, 41
gravitação universal, 176, 179
Greenwich, 47, 52, 66, 81
Greenwich Mean Time, 52
Guilherme de Conches, 134
Guilherme de São Clodoaldo, 135

H

Halley, 63, 111, 135
Hammer-Aifoff, 43
Harmonice Mundi, 176
HEALPix, 43
Hégira, 72
heliacal, 53
heliocêntrico, 16, 136
Heráclides Ponticus, 126
híbrido, 150
Hiparco, 2, 13, 128
Hipátia, 132
Hipócrates de Quios, 124
Hiparcos, 2, 104
HM Nautical Almanac Office, 64
homepage, 2
hora sideral de Greenwich, 47
hora sideral local, 46, 47
hora sideral média, 46
hora sideral verdadeira, 46

Horário de Verão, 67
horário de verão, 25
Horizons, 109, 141
horizonte, 4
horizonte astronômico, 17
horos, 4
hyperlinks, 2

I

Ibn al-Haytham, 133
Ibn al-Shatir, 134
Ibn Rochd de Córdoba, 133
ICRS, 119
IERS Rapid Service/Prediction Center, 59
indicatriz de Tissot, 45
indicação, 73
insolação, 22, 76
Inter Gravissimas, 71
International Celestial Reference Frame, 14
International Celestial Reference System, 14
International Earth Rotation and Reference Systems Service, 15
International Earth Rotation Service, 94
International Terrestrial Reference System, 15
Internet, 68
Isaac Newton, 140
ISS, 86

J

J2000, 15, 74
Jacobiano, 40
João de Sacrobosco, 135
Johannes Kepler, 138
Johannes Müller de Königsberg, 135
Joseph Justus Scaliger, 72
Journal de Sçavans, 174
Júpiter, 173

K

Kitab al-Manazir, 133

L

laçada, 12
Laskar, 54
latitude, 16, 27, 35, 81
latitude astronômica, 81
latitude eclíptica, 20
latitudes geocêntricas, 82
leap second, 65
lei dos senos, 37
leibnitz, 185
leis de movimento planetário, 175
lente gravitacional, 117
Leucipo de Mileto, 122
Libra, 18
libração, 58
libração diurna, 157
libração em latitude, 157

libração em longitude, 157
 libração física, 158
 libração óptica, 157
 linha de mudança de data, 66
 linha de rumo, 39
 longitude, 16, 81
 longitude eclíptica, 20
 loxodromia, 39
 Lua Azul, 57
 Lua Cheia, 11, 46
 eclesiástica, 75
 luminosidade, 3
 lunação, 56

M

Maestlin, Michael, 138
 magnitude, 2
 magnitude:absoluta, 3
 magnitude:aparente, 3
 Marciano Capella, 132
 maré de sizígia, 142
 Marte, 172
 mecânica celeste, 178
 Mercator, 43
 meridiano local, 17, 19
 meridiano principal, 15, 17
 mês, 46, 56, 69
 mês anomalístico, 153
 mês sideral, 57
 mês sinódico, 56, 153
 meteoros, 2
 Meton, 125
 Meton de Atenas, 58
 Michael Scot, 135
 Milankovitch, 188
 milênio juliano, 54, 74
 milha náutica, 38
 Mini Lua, 57
 momento angular, 176
 Monte Regio, 135
 movimento anual, 18
 movimento aparente, 8
 movimento diário, 9
 movimento direto, 18
 movimento médio do Sol, 52
 movimento próprio, 5, 9, 109
 movimento próprio total, 113
 mudanças climáticas, 187
 Muhammad al-Battani, 133
 Muhammad al-Khwarizmi, 133
 Mysterium Cosmographicum, 138

N

nadir, 4, 17
 nascer, 98
 nascimento heliacal, 53
 Nasir al-Din al-Tusi, 134

National Earth Orientation Service, 94
 Netuno, 174
 Network Time Protocol, 68
 New Horizons, 108
 Newcomb, 54, 59, 63
 Newton, 13, 179, 185
 Nicolas de Oresme, 135
 Nicolau Copérnico, 136
 Nicolau de Cusa, 135
 nodo ascendente, 55
 nodos, 11
 NTP, 68
 Nur ad-Din al-Bitruji, 134
 nutação, 87, 91
 Nuvem de Oort, 113, 114
 nuvens de Magalhães, 2

O

obliquidade
 eclíptica, 23, 80, 88
 Lua, 157
 ocultação, 144
 Oenópides, 123
 oposição, 142, 204
 Optica Promota, 166
 orientação, 5
 Ortográfica, 41
 Os Elementos, 127

P

Pálida, 112
 paralaxe, 102
 paralaxe anual, 102
 paralaxe diária, 106
 paralaxe horizontal, 106
 paralelo padrão, 42
 parâmetros orbitais, 187
 parciais, 148
 Parmênides, 122
 parsec, 102
 Páscoa, 199
 passagem meridiana, 25, 48
 Pêndulo de Foucault, 62
 Pentecostes, 76
 penumbra, 148
 periélio, 22, 113
 período de saros, 154
 Período Juliano, 73
 período sinódico, 142
 perspectivas, 40
 Pitágoras, 124
 planetas exteriores, 141
 planetas interiores, 140
 planisfério, 37
 plano invariante, 190
 plano principal, 15
 plate carrée, 42, 43

polígono esférico, 37
polo celeste, 8
poluição luminosa, 4
ponto de Áries, 18
ponto de Libra, 18
pôr (ocaso), 98
precessão, 11, 34, 87
precessão geodésica, 87
precessão luni-solar, 87
precessão planetária, 87
primeiro vertical, 17, 35
Principia Mathematica, 140, 176, 178
problema de 2 corpos, 178
Proxima Centauri, 103, 113
pseudo-distância, 86
pseudo-range, 86

Q

Qibla, 133
quadratura, 142
Quaresma, 76
Quarta-feira de cinzas, 76

R

Radiogaláxia, 14
redução ao dia, 119
Redução ao Equador, 50
referencial, 13
refração astronômica, 95
Regiomontanus, 135
Research Consortium on Nearby Stars, 103
retrógrado, 12, 125
Rigel, 4
Robert Grosseteste, 135
Roemer, 174
Roger Bacon, 135
Rosh Hashanah, 71
Royal Society's Proceedings, 65

S

saros, 154
satélites de Júpiter, 137
Saturno, 173
século juliano, 74
segundo de tempo sideral, 47
segundo intercalar, 65
semana, 46, 69
Shabbat, 69
Siena, 128
sinusoidal, 43
Sirius, 3
Sistema de navegação por satélite, 84
Sistema de referência, 2, 13
Sistema Solar, 6, 20, 34, 189
sizígia, 142
Sol médio, 48
Sol verdadeiro, 48

sólidos platônicos, 138
solstício, 23, 54
stadia, 126, 128
stadium, 128
Super Lua, 56
Superaglomerado Local, 22
supernova, 138
Systema Saturnium, 171

T

Tabelas Rudolfinas, 145
Tábuas de Toledo, 133
Tabule Almanach Planetarium, 135
Tales de Mileto, 121
Taqi ad-Din, 134
tectônica de placas, 64
Tempo Atômico Internacional, 59
tempo civil, 52
tempo das efemérides, 58
tempo dinâmico, 58
tempo dinâmico baricêntrico, 58
tempo dinâmico terrestre, 58
tempo sideral, 47, 50
tempo sideral local, 20
Tempo Terrestre, 59
Tempo Universal, 52
tempo universal coordenado, 65
temporada de eclipses, 153
Téon de Alexandria, 132
teoria atomista, 123
Theoricae novae planetarum, 135
timestamp, 68
topocêntrico, 16, 26
trânsito, 19, 99, 140, 144
trânsito superior, 28
Tratado da Esfera, 39, 135
triângulo esférico, 36
Trópico de Câncer, 23
Trópico de Capricórnio, 23
Tycho Brahe, 13, 138

U

Ulugh Beg, 134
umbra, 148
Universal Time, 52
Uraniborg, 138
Urano, 173
uranografia, 40
Uranometria, 6
Ursa Maior, 85

V

velocidade da luz, 175
vertical astronômica, 81
Via Láctea, 34
vis viva, 185, 186

WWGS, [80](#)World Geodetic System, [80](#)**X**Xenofanes de Colophon, [122](#)**Z**zênite, [4](#), [17](#)Zeus, [6](#)Zij al-Sindh, [133](#)Zij-i Ilkhani, [134](#)Zodiaco, [6](#), [24](#)Zupi, Giovanni, [137](#)

Domingo de Páscoa entre 1970 e 2079 (veja mais detalhes na seção 2.5):

29 março 1970 ; 15 abril 1990 ; 4 abril 2010 ; 21 abril 2030 ; 10 abril 2050
 11 abril 1971 ; 31 março 1991 ; 24 abril 2011 ; 13 abril 2031 ; 2 abril 2051
 2 abril 1972 ; 19 abril 1992 ; 8 abril 2012 ; 28 março 2032 ; 21 abril 2052
 22 abril 1973 ; 11 abril 1993 ; 31 março 2013 ; 17 abril 2033 ; 6 abril 2053
 14 abril 1974 ; 3 abril 1994 ; 20 abril 2014 ; 9 abril 2034 ; 29 março 2054
 30 março 1975 ; 16 abril 1995 ; 5 abril 2015 ; 25 março 2035 ; 18 abril 2055
 18 abril 1976 ; 7 abril 1996 ; 27 março 2016 ; 13 abril 2036 ; 2 abril 2056
 10 abril 1977 ; 30 março 1997 ; 16 abril 2017 ; 5 abril 2037 ; 22 abril 2057
 26 março 1978 ; 12 abril 1998 ; 1 abril 2018 ; 25 abril 2038 ; 14 abril 2058
 15 abril 1979 ; 4 abril 1999 ; 21 abril 2019 ; 10 abril 2039 ; 30 março 2059
 6 abril 1980 ; 23 abril 2000 ; 12 abril 2020 ; 1 abril 2040 ; 18 abril 2060
 19 abril 1981 ; 15 abril 2001 ; 4 abril 2021 ; 21 abril 2041 ; 10 abril 2061
 11 abril 1982 ; 31 março 2002 ; 17 abril 2022 ; 6 abril 2042 ; 26 março 2062
 3 abril 1983 ; 20 abril 2003 ; 9 abril 2023 ; 29 março 2043 ; 15 abril 2063
 22 abril 1984 ; 11 abril 2004 ; 31 março 2024 ; 17 abril 2044 ; 6 abril 2064
 7 abril 1985 ; 27 março 2005 ; 20 abril 2025 ; 9 abril 2045 ; 29 março 2065
 30 março 1986 ; 16 abril 2006 ; 5 abril 2026 ; 25 março 2046 ; 11 abril 2066
 19 abril 1987 ; 8 abril 2007 ; 28 março 2027 ; 14 abril 2047 ; 3 abril 2067
 3 abril 1988 ; 23 março 2008 ; 16 abril 2028 ; 5 abril 2048 ; 22 abril 2068
 26 março 1989 ; 12 abril 2009 ; 1 abril 2029 ; 18 abril 2049 ; 14 abril 2069
 30 março 2070 ; 19 abril 2071 ; 10 abril 2072 ; 26 março 2073 ; 15 abril 2074
 7 abril 2075 ; 19 abril 2076 ; 11 abril 2077 ; 3 abril 2078 ; 23 abril 2079

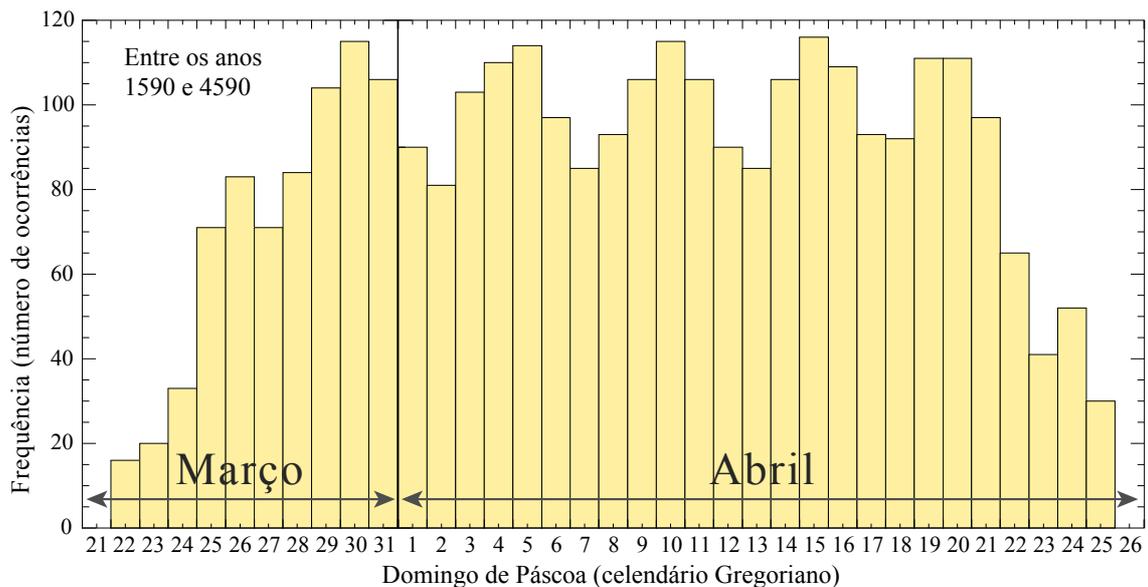


Figura 5.18: Número de vezes em que ocorre o domingo de Páscoa em um intervalo de 3 mil anos para as datas entre 22 de março e 25 de abril.

Início das estações do ano, definido por $\lambda_{\odot} = 0, 90^{\circ}, 180^{\circ}$ e 270° . Data em Tempo Universal Coordenado (UTC). Para hora legal de Brasília subtraia 3 horas (2 horas durante o horário de Verão). O erro é inferior a 30 segundos. Tabela calculada usando a teoria planetária VSOP87 (Bretagnon et al. 1987).

ano	Outono			Inverno			Primavera			Verão		
	março	duração	#	junho	duração	#	setembro	duração	#	dezembro	duração	#
	dia hh:mm:ss	[dias]	# dia									
1990:	20 21:19:17	92.75940	# 21	15:32:48	93.64077	# 23	06:55:31	89.84132	# 22	03:07:00	88.99649	
1991:	21 03:01:57	92.76170	# 21	21:18:48	93.64535	# 23	12:48:06	89.83720	# 22	08:53:39	88.99612	
1992:	20 08:48:04	92.76813	# 21	03:14:10	93.64488	# 22	18:42:47	89.83365	# 21	14:43:14	88.99820	
1993:	20 14:40:39	92.76327	# 21	08:59:45	93.64079	# 23	00:22:29	89.83565	# 21	20:25:49	89.00153	
1994:	20 20:28:01	92.76356	# 21	14:47:33	93.64700	# 23	06:19:13	89.83577	# 22	02:22:43	88.99424	
1995:	21 02:14:26	92.76386	# 21	20:34:23	93.65181	# 23	12:12:60	89.83598	# 22	08:16:48	88.99047	
1996:	20 08:03:05	92.76435	# 21	02:23:44	93.65025	# 22	18:00:06	89.83735	# 21	14:05:53	88.99221	
1997:	20 13:54:40	92.76755	# 21	08:19:56	93.64989	# 22	23:55:46	89.84116	# 21	20:07:02	88.99132	
1998:	20 19:54:32	92.75559	# 21	14:02:35	93.64904	# 23	05:37:12	89.84672	# 22	01:56:28	88.99261	
1999:	21 01:45:49	92.75229	# 21	19:49:07	93.65444	# 23	11:31:30	89.84188	# 22	07:43:48	88.99406	
2000:	20 07:35:15	92.75865	# 21	01:47:42	93.65270	# 22	17:27:35	89.84017	# 21	13:37:26	88.99533	
2001:	20 13:30:43	92.75487	# 21	07:37:43	93.64358	# 22	23:04:28	89.84515	# 21	19:21:29	88.99629	
2002:	20 19:16:08	92.75574	# 21	13:24:24	93.64652	# 23	04:55:23	89.84651	# 22	01:14:22	88.98986	
2003:	21 00:59:46	92.75743	# 21	19:10:28	93.65025	# 23	10:46:49	89.84513	# 22	07:03:48	88.98946	
2004:	20 06:48:38	92.75572	# 21	00:56:52	93.64789	# 22	16:29:50	89.84151	# 21	12:41:36	88.99432	
2005:	20 12:33:25	92.75882	# 21	06:46:07	93.65072	# 22	22:23:09	89.84151	# 21	18:34:56	88.99350	
2006:	20 18:25:34	92.75020	# 21	12:25:51	93.65105	# 23	04:03:22	89.84633	# 22	00:22:05	88.98981	
2007:	21 00:07:25	92.74931	# 21	18:06:25	93.65611	# 23	09:51:13	89.84485	# 22	06:07:48	88.98645	
2008:	20 05:48:17	92.75769	# 20	23:59:21	93.65633	# 22	15:44:28	89.84672	# 21	12:03:44	88.98603	
2009:	20 11:43:37	92.75131	# 21	05:45:31	93.64796	# 22	21:18:34	89.85292	# 21	17:46:47	88.98987	
2010:	20 17:32:11	92.74736	# 21	11:28:24	93.65321	# 23	03:09:00	89.85377	# 21	23:38:26	88.98769	
2011:	20 23:20:42	92.74707	# 21	17:16:29	93.65842	# 23	09:04:36	89.85098	# 22	05:30:01	88.98915	
2012:	20 05:14:24	92.74610	# 20	23:08:47	93.65289	# 22	14:48:57	89.84906	# 21	11:11:35	88.99327	
2013:	20 11:01:53	92.75141	# 21	05:03:55	93.65291	# 22	20:44:06	89.85199	# 21	17:10:58	88.99034	
2014:	20 16:57:04	92.74593	# 21	10:51:12	93.65128	# 23	02:29:02	89.85691	# 21	23:02:59	88.98759	
2015:	20 22:45:07	92.74498	# 21	16:37:53	93.65460	# 23	08:20:31	89.85236	# 22	04:47:55	88.98767	
2016:	20 04:30:09	92.75277	# 20	22:34:09	93.65760	# 22	14:21:05	89.84935	# 21	10:44:08	88.98922	
2017:	20 10:28:36	92.74689	# 21	04:24:07	93.65114	# 22	20:01:46	89.85149	# 21	16:27:54	88.99133	
2018:	20 16:15:25	92.74433	# 21	10:07:15	93.65750	# 23	01:54:03	89.85322	# 21	22:22:41	88.98312	
2019:	20 21:58:23	92.74709	# 21	15:54:12	93.66383	# 23	07:50:07	89.85366	# 22	04:19:23	88.97929	
2020:	20 03:49:34	92.74587	# 20	21:43:37	93.65762	# 22	13:30:35	89.85534	# 21	10:02:16	88.98273	
2021:	20 09:37:24	92.74631	# 21	03:32:05	93.65898	# 22	19:21:01	89.85988	# 21	15:59:14	88.98202	
2022:	20 15:33:20	92.73641	# 21	09:13:46	93.65962	# 23	01:03:37	89.86425	# 21	21:48:08	88.98349	
2023:	20 21:24:21	92.73152	# 21	14:57:44	93.66122	# 23	06:49:53	89.85929	# 22	03:27:16	88.98544	
2024:	20 03:06:18	92.73930	# 20	20:50:54	93.66157	# 22	12:43:33	89.85897	# 21	09:20:28	88.98675	
2025:	20 09:01:22	92.73665	# 21	02:42:09	93.65075	# 22	18:19:13	89.86371	# 21	15:02:58	88.98811	
2026:	20 14:45:50	92.73510	# 21	08:24:23	93.65327	# 23	00:05:05	89.86460	# 21	20:50:06	88.98226	
2027:	20 20:24:33	92.74038	# 21	14:10:42	93.66033	# 23	06:01:34	89.86142	# 22	02:42:01	88.98262	
2028:	20 02:16:60	92.73949	# 20	20:01:51	93.65507	# 22	11:45:09	89.85720	# 21	08:19:31	88.98772	
2029:	20 08:01:49	92.74049	# 21	01:48:08	93.65987	# 22	17:38:20	89.85806	# 21	14:13:56	88.98472	
2030:	20 13:51:56	92.73557	# 21	07:31:08	93.66359	# 22	23:26:43	89.86302	# 21	20:09:27	88.98010	
2031:	20 19:40:48	92.73344	# 21	13:16:57	93.66539	# 23	05:15:07	89.86129	# 22	01:55:22	88.97662	
2032:	20 01:21:42	92.74088	# 20	19:08:34	93.66813	# 22	11:10:41	89.86463	# 21	07:55:45	88.97693	
2033:	20 07:22:31	92.73501	# 21	01:00:56	93.66009	# 22	16:51:28	89.87106	# 21	13:45:47	88.98021	
2034:	20 13:17:17	92.72687	# 21	06:43:59	93.66345	# 22	22:39:21	89.87114	# 21	19:33:47	88.97829	
2035:	20 19:02:31	92.72944	# 21	12:32:54	93.67069	# 23	04:38:42	89.86941	# 22	01:30:39	88.98053	
2036:	20 01:02:36	92.72874	# 20	18:31:59	93.66048	# 22	10:23:05	89.86775	# 21	07:12:38	88.98430	
2037:	20 06:50:01	92.73068	# 21	00:22:12	93.66017	# 22	16:12:50	89.87129	# 21	13:07:30	88.98118	
2038:	20 12:40:23	92.72830	# 21	06:09:08	93.66172	# 22	22:02:01	89.87504	# 21	19:02:04	88.97897	
2039:	20 18:31:47	92.72596	# 21	11:57:10	93.66124	# 23	03:49:21	89.86874	# 22	00:40:20	88.97993	
2040:	20 00:11:26	92.73243	# 20	17:46:07	93.66564	# 22	09:44:38	89.86662	# 21	06:32:34	88.98192	
2041:	20 06:06:32	92.72851	# 20	23:35:35	93.66020	# 22	15:26:17	89.86929	# 21	12:18:03	88.98263	
2042:	20 11:53:02	92.72398	# 21	05:15:33	93.66369	# 22	21:11:16	89.86980	# 21	18:03:47	88.97481	
2043:	20 17:27:31	92.72957	# 21	10:58:05	93.67262	# 23	03:06:39	89.87105	# 22	00:00:57	88.97175	
2044:	19 23:20:16	92.72957	# 20	16:50:51	93.66440	# 22	08:47:35	89.87204	# 21	05:43:18	88.97503	
2045:	20 05:07:20	92.72659	# 20	22:33:37	93.66598	# 22	14:32:38	89.87653	# 21	11:34:50	88.97413	

Datas das passagens da Terra pelo periélio e afélio (Tempo Universal Coordenado, UTC), com as respectivas distâncias em Unidades Astronômicas e a longitude eclíptica do Sol. O erro é inferior a 45 segundos.

	periélio				afélio		
	data	dist [AU]	long[graus]		data	dist [AU]	long[graus]
1990	04/01 17:22:50	0.98330282	284.103390	#	04/07 05:04:19	1.016652066	101.985991
1991	03/01 02:59:14	0.98328087	282.221226	#	06/07 15:26:26	1.016702752	104.069549
1992	03/01 15:02:55	0.98332397	282.490277	#	03/07 12:07:09	1.016740004	101.800255
1993	04/01 03:03:50	0.98328263	283.774826	#	04/07 22:21:01	1.016666334	102.928512
1994	02/01 05:54:08	0.98330130	281.608589	#	05/07 19:16:54	1.016724009	103.529666
1995	04/01 11:05:21	0.98330234	283.622538	#	04/07 02:16:37	1.016741821	101.676651
1996	04/01 07:24:43	0.98322281	283.215705	#	05/07 18:59:53	1.016717326	104.011340
1997	01/01 23:16:09	0.98326741	281.601269	#	04/07 19:19:15	1.016753606	102.840111
1998	04/01 21:15:03	0.98329978	284.325284	#	03/07 23:50:17	1.016696334	101.843666
1999	03/01 13:00:23	0.98328091	282.704005	#	06/07 22:50:47	1.016717952	104.430108
2000	03/01 05:17:55	0.98332142	282.132906	#	03/07 23:49:11	1.016741098	102.331110
2001	04/01 08:52:18	0.98328603	284.078294	#	04/07 13:37:23	1.016642632	102.647660
2002	02/01 14:08:55	0.98328979	282.013644	#	06/07 03:47:08	1.016688201	103.931152
2003	04/01 05:01:42	0.98332040	283.419495	#	04/07 05:39:22	1.016728221	101.873382
2004	04/01 17:41:48	0.98326484	283.709403	#	05/07 10:52:58	1.016693678	103.751770
2005	02/01 00:35:18	0.98329683	281.718147	#	05/07 04:57:35	1.016741599	103.285503
2006	04/01 15:30:01	0.98332699	284.144796	#	03/07 23:09:50	1.016697254	101.879822
2007	03/01 19:43:04	0.98326019	283.053819	#	06/07 23:52:37	1.016705946	104.534383
2008	02/01 23:51:04	0.98328006	281.963061	#	04/07 07:41:17	1.016753511	102.707157
2009	04/01 15:29:36	0.98327303	284.418516	#	04/07 01:39:59	1.016666415	102.239013
2010	03/01 00:09:39	0.98328966	282.496864	#	06/07 11:30:05	1.016701957	104.303995
2011	03/01 18:32:20	0.98334127	283.030716	#	04/07 14:53:51	1.016740389	102.306838
2012	05/01 00:31:53	0.98328410	284.058478	#	05/07 03:31:23	1.016675064	103.525580
2013	02/01 04:37:21	0.98329048	281.946951	#	05/07 14:44:28	1.016708492	103.736899
2014	04/01 11:58:33	0.98333472	284.050127	#	04/07 00:13:04	1.016681615	101.983192
2015	04/01 06:36:21	0.98327739	283.572108	#	06/07 19:40:15	1.016682113	104.427744
2016	02/01 22:48:27	0.98330394	281.976161	#	04/07 16:24:37	1.016750933	103.113193
2017	04/01 14:17:44	0.98330943	284.428590	#	03/07 20:10:57	1.016675595	102.082673
2018	03/01 05:34:56	0.98328427	282.791564	#	06/07 16:46:33	1.016696067	104.575458
2019	03/01 05:19:50	0.98330117	282.532164	#	04/07 22:10:48	1.016754345	102.659229
2020	05/01 07:47:49	0.98324357	284.428475	#	04/07 11:34:40	1.016694253	102.958715
2021	02/01 13:50:31	0.98325706	282.396766	#	05/07 22:27:22	1.016729217	104.110500
2022	04/01 06:54:19	0.98333654	283.891066	#	04/07 07:10:20	1.016715365	102.329002
2023	04/01 16:17:35	0.98329557	284.041274	#	06/07 20:06:11	1.016680582	104.514985
2024	03/01 00:38:13	0.98330700	282.111546	#	05/07 05:06:03	1.016725495	103.685580
2025	04/01 13:27:50	0.98332741	284.450078	#	03/07 19:54:34	1.016643738	102.137964
2026	03/01 17:15:32	0.98330206	283.343193	#	06/07 17:30:15	1.016643981	104.667875
2027	03/01 02:32:08	0.98333346	282.469730	#	05/07 05:05:52	1.016728922	102.994360
2028	05/01 12:28:02	0.98330736	284.685744	#	03/07 22:17:36	1.016679762	102.490977
2029	02/01 18:13:37	0.98329173	282.646003	#	06/07 05:11:40	1.016712713	104.437477
2030	03/01 10:13:04	0.98334179	283.076666	#	04/07 12:57:19	1.016722644	102.618171
2031	04/01 20:48:06	0.98326642	284.297242	#	06/07 07:09:05	1.016688169	104.061842
2032	03/01 05:10:45	0.98324690	282.365399	#	05/07 11:53:30	1.016750976	104.017546
2033	04/01 11:51:08	0.98329896	284.439199	#	03/07 20:51:41	1.016693605	102.241206
2034	04/01 04:46:53	0.98328934	283.888885	#	06/07 18:48:47	1.016670324	104.788067
2035	03/01 00:53:38	0.98332496	282.456792	#	05/07 18:21:39	1.016740636	103.590238
2036	05/01 14:16:47	0.98332022	284.819525	#	03/07 21:16:50	1.016663275	102.519505
2037	03/01 04:00:38	0.98328891	283.117880	#	06/07 12:05:02	1.016665144	104.777998
2038	03/01 05:01:14	0.98335489	282.910532	#	04/07 19:45:49	1.016690867	102.952622
2039	05/01 06:41:33	0.98331126	284.773470	#	05/07 13:25:11	1.016658821	103.421198
2040	03/01 11:32:07	0.98329366	282.695145	#	05/07 19:01:46	1.016727115	104.362422
2041	03/01 21:51:14	0.98334710	283.907041	#	04/07 01:38:04	1.016688663	102.492290
2042	04/01 09:06:33	0.98330145	284.139040	#	06/07 13:09:19	1.016655398	104.624789
2043	02/01 22:15:05	0.98328821	282.408782	#	06/07 02:24:35	1.016744140	103.970415
2044	05/01 12:52:03	0.98328963	284.820882	#	03/07 15:24:02	1.016695993	102.348676
2045	03/01 14:56:09	0.98326534	283.640708	#	06/07 12:50:35	1.016688826	104.872191

Data da Lua Cheia (Tempo Universal Coordenado, UTC) e distância Terra–Lua nesta data. O erro é inferior a 45 segundos.

d/ m/ ano	h: m: s	dist [km]	d/ m/ ano	h: m: s	dist [km]	d/ m/ ano	h: m: s	dist [km]		
30/01/2010	6:18:08	; 356607		9/09/2014	1:38:42	; 359181		19/04/2019	11:12:44	; 368586
28/02/2010	16:38:25	; 358433		8/10/2014	10:51:09	; 365664		18/05/2019	21:11:57	; 378795
30/03/2010	2:25:58	; 364689		6/11/2014	22:23:26	; 375445		17/06/2019	8:31:17	; 389565
28/04/2010	12:19:03	; 374087		6/12/2014	12:27:24	; 386777		16/07/2019	21:38:52	; 398909
27/05/2010	23:07:56	; 384884		5/01/2015	4:53:56	; 397241		15/08/2019	12:29:57	; 404935
26/06/2010	11:31:02	; 395113		3/02/2015	23:09:38	; 404342		14/09/2019	4:33:29	; 406247
26/07/2010	1:37:14	; 402798		5/03/2015	18:06:06	; 406323		13/10/2019	21:08:34	; 402365
24/08/2010	17:05:16	; 406294		4/04/2015	12:06:16	; 402833		12/11/2019	13:35:04	; 393971
23/09/2010	9:17:54	; 404703		4/05/2015	3:42:44	; 394984		12/12/2019	5:12:53	; 382862
23/10/2010	1:37:12	; 398190		2/06/2015	16:19:38	; 384742		10/01/2020	19:21:53	; 371541
21/11/2010	17:28:00	; 388057		2/07/2015	2:20:09	; 374184		9/02/2020	7:33:50	; 362476
21/12/2010	8:14:05	; 376526		31/07/2015	10:43:27	; 365116		9/03/2020	17:48:17	; 357399
19/01/2011	21:21:59	; 366157		29/08/2015	18:35:43	; 358991		8/04/2020	2:35:37	; 357030
18/02/2011	8:36:13	; 359101		28/09/2015	2:51:02	; 356879		7/05/2020	10:45:45	; 361183
19/03/2011	18:10:35	; 356577		27/10/2015	12:05:40	; 359329		5/06/2020	19:12:56	; 369007
18/04/2011	2:44:31	; 358796		25/11/2015	22:44:49	; 366155		5/07/2020	4:44:59	; 379151
17/05/2011	11:09:12	; 365166		25/12/2015	11:12:05	; 376268		3/08/2020	15:59:24	; 389879
15/06/2011	20:14:10	; 374512		24/01/2016	1:46:23	; 387702		2/09/2020	5:22:45	; 399204
15/07/2011	6:40:14	; 385226		22/02/2016	18:20:33	; 397951		1/10/2020	21:05:58	; 405150
13/08/2011	18:58:09	; 395404		23/03/2016	12:01:33	; 404625		31/10/2020	14:49:51	; 406166
12/09/2011	9:27:20	; 403045		22/04/2016	5:24:19	; 406249		30/11/2020	9:30:22	; 401725
12/10/2011	2:06:26	; 406381		21/05/2016	21:15:07	; 402698		30/12/2020	3:28:52	; 392771
10/11/2011	20:16:49	; 404372		20/06/2016	11:02:58	; 394999		28/01/2021	19:16:51	; 381519
10/12/2011	14:37:05	; 397257		19/07/2016	22:57:11	; 384827		27/02/2021	8:17:55	; 370593
9/01/2012	7:30:44	; 386721		18/08/2016	9:27:09	; 374105		28/03/2021	18:48:43	; 362173
7/02/2012	21:54:20	; 375309		16/09/2016	19:05:39	; 364752		27/04/2021	3:32:03	; 357616
8/03/2012	9:40:02	; 365502		16/10/2016	4:23:38	; 358473		26/05/2021	11:14:23	; 357461
6/04/2012	19:19:12	; 359080		14/11/2016	13:52:35	; 356520		24/06/2021	18:40:12	; 361562
6/05/2012	3:35:36	; 356955		14/12/2016	0:06:06	; 359448		24/07/2021	2:37:27	; 369213
4/06/2012	11:12:06	; 359259		12/01/2017	11:34:32	; 366881		22/08/2021	12:02:33	; 379234
3/07/2012	18:52:26	; 365490		11/02/2017	0:33:29	; 377421		20/09/2021	23:55:20	; 389990
2/08/2012	3:28:02	; 374646		12/03/2017	14:54:26	; 388860		20/10/2021	14:57:22	; 399421
31/08/2012	13:58:43	; 385281		11/04/2017	6:08:47	; 398717		19/11/2021	8:58:09	; 405300
30/09/2012	3:19:17	; 395532		10/05/2017	21:43:11	; 404918		19/12/2021	4:36:12	; 405934
29/10/2012	19:50:09	; 403228		9/06/2017	13:10:17	; 406272		17/01/2022	23:49:07	; 401022
28/11/2012	14:46:40	; 406349		9/07/2017	4:07:15	; 402623		16/02/2022	16:57:10	; 391886
28/12/2012	10:21:54	; 403873		7/08/2017	18:11:16	; 394793		18/03/2022	07:18:11	; 380828
27/01/2013	4:39:03	; 396392		6/09/2017	7:03:26	; 384376		16/04/2022	18:55:36	; 370263
25/02/2013	20:26:41	; 385862		5/10/2017	18:40:43	; 373411		16/05/2022	04:14:40	; 362125
27/03/2013	9:27:54	; 374760		4/11/2017	5:23:28	; 364000		14/06/2022	11:52:15	; 357656
25/04/2013	19:57:40	; 365316		3/12/2017	15:47:31	; 357982		13/07/2022	18:38:07	; 357418
25/05/2013	4:25:28	; 359110		2/01/2018	2:24:37	; 356602		12/08/2022	01:36:16	; 361412
23/06/2013	11:32:47	; 356991		31/01/2018	13:27:17	; 360199		10/09/2022	09:59:36	; 369132
22/07/2013	18:16:03	; 359172		2/03/2018	0:51:55	; 368039		9/10/2022	20:55:34	; 379484
21/08/2013	1:45:09	; 365343		31/03/2018	12:37:28	; 378491		8/11/2022	11:02:46	; 390661
18/10/2013	23:38:18	; 385705		30/04/2018	0:58:50	; 389462		8/12/2022	04:08:50	; 400240
18/10/2013	23:38:18	; 385705		29/05/2018	14:20:14	; 398835		6/01/2023	23:08:35	; 405791
17/11/2013	15:16:25	; 396284		28/06/2018	4:53:39	; 404792		5/02/2023	18:29:16	; 405829
17/12/2013	9:28:47	; 403902		27/07/2018	20:21:03	; 406099		7/03/2023	12:41:02	; 400434
16/01/2014	4:52:53	; 406527		26/08/2018	11:56:52	; 402419		6/04/2023	04:35:08	; 391132
14/02/2014	23:53:42	; 403469		25/09/2018	2:53:05	; 394465		5/05/2023	17:34:36	; 380200
16/03/2014	17:09:00	; 395641		24/10/2018	16:45:49	; 383846		4/06/2023	03:42:15	; 369883
15/04/2014	7:42:56	; 385100		23/11/2018	5:39:47	; 372719		3/07/2023	11:39:11	; 361933
14/05/2014	19:16:30	; 374224		22/12/2018	17:49:08	; 363367		1/08/2023	18:32:09	; 357527
13/06/2014	4:12:02	; 365040		21/01/2019	5:16:37	; 357714		31/08/2023	01:36:07	; 357341
12/07/2014	11:25:26	; 358975		19/02/2019	15:54:07	; 356843		29/09/2023	09:58:03	; 361554
10/08/2014	18:09:52	; 356896		21/03/2019	1:43:25	; 360769		28/10/2023	20:24:34	; 369703

Continua →

(Continuação) Data da Lua Cheia (Tempo Universal Coordenado, UTC) e distância Terra–Lua nesta data. O erro é inferior a 45 segundos.

d/ m/ ano	h: m: s	dist [km]	d/ m/ ano	h: m: s	dist [km]	d/ m/ ano	h: m: s	dist [km]
27/11/2023	09:16:52	; 380486	3/09/2028	23:48:10	; 406158	12/06/2033	23:19:42	; 386055
27/12/2023	00:33:49	; 391770	3/10/2028	16:25:33	; 405156	12/07/2033	09:29:01	; 375446
25/01/2024	17:54:40	; 400995	2/11/2028	09:17:55	; 399074	10/08/2033	18:08:06	; 366071
24/02/2024	12:31:07	; 405917	2/12/2028	01:40:47	; 389145	9/09/2033	02:20:57	; 359470
25/03/2024	07:00:59	; 405393	31/12/2028	16:49:02	; 377601	8/10/2033	10:58:33	; 356828
23/04/2024	23:49:36	; 399779	30/01/2029	06:04:05	; 367046	6/11/2033	20:32:31	; 358802
23/05/2024	13:53:43	; 390644	28/02/2029	17:10:40	; 359658	6/12/2033	07:22:31	; 365275
22/06/2024	01:08:25	; 380040	30/03/2029	02:26:48	; 356681	4/01/2034	19:47:34	; 375191
21/07/2024	10:17:40	; 369927	28/04/2029	10:37:13	; 358382	3/02/2034	10:05:02	; 386606
19/08/2024	18:26:18	; 361968	27/05/2029	18:37:57	; 364265	5/03/2034	02:10:41	; 397043
18/09/2024	02:34:57	; 357484	26/06/2029	03:22:49	; 373273	3/04/2034	19:19:27	; 404129
17/10/2024	11:26:52	; 357367	25/07/2029	13:36:15	; 383899	3/05/2034	12:16:17	; 406328
15/11/2024	21:29:00	; 361874	24/08/2029	01:51:44	; 394277	2/06/2034	03:54:33	; 403372
15/12/2024	09:02:12	; 370403	22/09/2029	16:29:51	; 402365	1/07/2034	17:45:03	; 396119
13/01/2025	22:27:29	; 381417	22/10/2029	09:28:09	; 406276	31/07/2034	05:54:57	; 386134
12/02/2025	13:54:01	; 392628	21/11/2029	04:03:34	; 404819	29/08/2034	16:49:43	; 375310
14/03/2025	06:55:17	; 401500	20/12/2029	22:47:06	; 398118	28/09/2034	02:57:15	; 365623
13/04/2025	00:22:53	; 406006	19/01/2030	15:54:54	; 387808	27/10/2034	12:42:56	; 358882
12/05/2025	16:56:33	; 405278	18/02/2030	06:20:17	; 376424	25/11/2034	22:32:35	; 356445
11/06/2025	07:44:26	; 399739	19/03/2030	17:56:55	; 366444	25/12/2034	08:54:53	; 358938
10/07/2025	20:37:22	; 390730	18/04/2030	03:20:26	; 359658	23/01/2035	20:17:01	; 366019
9/08/2025	07:55:37	; 380054	17/05/2030	11:19:33	; 357029	22/02/2035	08:54:23	; 376327
7/09/2025	18:09:24	; 369669	15/06/2030	18:41:26	; 358782	23/03/2035	22:42:39	; 387714
7/10/2025	03:48:04	; 361455	15/07/2030	02:12:25	; 364537	22/04/2035	13:21:18	; 397766
5/11/2025	13:19:45	; 356978	13/08/2030	10:44:50	; 373400	22/05/2035	04:26:22	; 404412
4/12/2025	23:14:32	; 357218	11/09/2030	21:18:24	; 383999	20/06/2035	19:38:02	; 406370
3/01/2026	10:03:24	; 362313	11/10/2030	10:47:22	; 394483	20/07/2035	10:37:23	; 403315
1/02/2026	22:09:46	; 371388	10/11/2030	03:30:53	; 402625	19/08/2035	01:00:49	; 395901
3/03/2026	11:38:27	; 382614	9/12/2030	22:41:04	; 406296	17/09/2035	14:24:02	; 385625
2/04/2026	02:12:32	; 393596	8/01/2031	18:26:25	; 404355	17/10/2035	02:36:02	; 374529
1/05/2026	17:23:45	; 402001	7/02/2031	12:46:45	; 397299	15/11/2035	13:49:19	; 364797
31/05/2026	08:45:49	; 406135	9/03/2031	04:30:08	; 387021	15/12/2035	00:33:35	; 358360
29/06/2026	23:57:18	; 405253	7/04/2031	17:21:47	; 375949	13/01/2036	11:16:29	; 356529
29/07/2026	14:36:19	; 399616	7/05/2031	03:40:19	; 366295	11/02/2036	22:09:06	; 359679
28/08/2026	04:19:05	; 390395	5/06/2031	11:58:57	; 359674	12/03/2036	09:09:55	; 367121
26/09/2026	16:49:33	; 379433	4/07/2031	19:01:46	; 357018	10/04/2036	20:23:02	; 377305
26/10/2026	04:12:17	; 368870	3/08/2031	01:46:00	; 358653	10/05/2036	08:10:04	; 388230
24/11/2026	14:54:01	; 360763	1/09/2031	09:20:55	; 364386	8/06/2036	21:02:30	; 397838
24/12/2026	01:28:41	; 356737	30/09/2031	18:58:18	; 373479	8/07/2036	11:19:51	; 404285
22/01/2027	12:17:51	; 357644	30/10/2031	07:33:13	; 384515	7/08/2036	02:49:29	; 406216
20/02/2027	23:24:07	; 363307	28/11/2031	23:19:02	; 395334	5/09/2036	18:46:09	; 403109
22/03/2027	10:44:16	; 372529	28/12/2031	17:33:36	; 403373	5/10/2036	10:15:43	; 395523
20/04/2027	22:27:39	; 383431	27/01/2032	12:53:04	; 406522	4/11/2036	00:44:48	; 385009
20/05/2027	10:59:34	; 393903	26/02/2032	07:43:47	; 404003	3/12/2036	14:08:58	; 373758
19/06/2027	00:44:57	; 401953	27/03/2032	00:46:50	; 396627	2/01/2037	02:35:41	; 364122
18/07/2027	15:45:32	; 405979	25/04/2032	15:10:11	; 386348	31/01/2037	14:04:33	; 358079
17/08/2027	07:29:17	; 405079	25/05/2032	02:37:42	; 375472	2/03/2037	00:28:34	; 356748
15/09/2027	23:04:05	; 399351	23/06/2032	11:32:58	; 366029	31/03/2037	09:53:58	; 360186
15/10/2027	13:47:32	; 389936	22/07/2032	18:51:57	; 359511	29/04/2037	18:54:19	; 367574
14/11/2027	03:26:26	; 378763	21/08/2032	01:47:13	; 356886	29/05/2037	04:24:35	; 377519
13/12/2027	16:09:17	; 368140	19/09/2032	09:30:39	; 358651	27/06/2037	15:20:24	; 388283
12/01/2028	04:03:33	; 360266	18/10/2032	18:58:34	; 364742	27/07/2037	04:15:40	; 397915
10/02/2028	15:04:12	; 356720	17/11/2032	06:42:32	; 374325	25/08/2037	19:09:54	; 404462
11/03/2028	01:06:30	; 358071	16/12/2032	20:49:31	; 385667	24/09/2037	11:32:18	; 406383
9/04/2028	10:27:03	; 363867	15/01/2033	13:07:39	; 396343	24/10/2037	04:37:07	; 403028
8/05/2028	19:49:24	; 372914	14/02/2033	07:04:45	; 403840	22/11/2037	21:35:47	; 394966
7/06/2028	06:09:20	; 383576	16/03/2033	01:37:59	; 406358	22/12/2037	13:39:07	; 383966
6/07/2028	18:11:22	; 393956	14/04/2033	19:17:57	; 403445	21/01/2038	04:00:24	; 372559
5/08/2028	08:10:24	; 402068	14/05/2033	10:43:16	; 396064	19/02/2038	16:09:50	; 363242

Datas (UTC) das oposições de Marte, Júpiter e Saturno entre 1990 e 2060. Próximo destas datas, os planetas em oposição transitam pelo meridiano local aproximadamente à meia-noite. Esta é a época mais propícia para observação destes planetas.

Marte	Júpiter		Saturno	
27-11-1990	29-01-1991	15-06-2031	14-07-1990	30-10-2028
07-01-1993	28-02-1992	19-07-2032	27-07-1991	13-11-2029
12-02-1995	30-03-1993	25-08-2033	07-08-1992	27-11-2030
17-03-1997	30-04-1994	01-10-2034	19-08-1993	11-12-2031
24-04-1999	01-06-1995	08-11-2035	01-09-1994	24-12-2032
13-06-2001	04-07-1996	12-12-2036	14-09-1995	08-01-2034
28-08-2003	09-08-1997	14-01-2038	26-09-1996	22-01-2035
07-11-2005	16-09-1998	15-02-2039	10-10-1997	05-02-2036
24-12-2007	23-10-1999	16-03-2040	23-10-1998	17-02-2037
29-01-2010	28-11-2000	16-04-2041	06-11-1999	03-03-2038
03-03-2012	01-01-2002	17-05-2042	19-11-2000	16-03-2039
08-04-2014	02-02-2003	20-06-2043	03-12-2001	28-03-2040
22-05-2016	04-03-2004	24-07-2044	17-12-2002	10-04-2041
27-07-2018	03-04-2005	30-08-2045	31-12-2003	23-04-2042
13-10-2020	04-05-2006	07-10-2046	13-01-2005	05-05-2043
08-12-2022	06-06-2007	13-11-2047	27-01-2006	17-05-2044
16-01-2025	09-07-2008	17-12-2048	10-02-2007	29-05-2045
19-02-2027	14-08-2009	19-01-2050	24-02-2008	10-06-2046
25-03-2029	21-09-2010	19-02-2051	08-03-2009	22-06-2047
04-05-2031	29-10-2011	21-03-2052	21-03-2010	03-07-2048
27-06-2033	03-12-2012	20-04-2053	03-04-2011	16-07-2049
15-09-2035	05-01-2014	22-05-2054	15-04-2012	28-07-2050
19-11-2037	06-02-2015	24-06-2055	28-04-2013	09-08-2051
02-01-2040	08-03-2016	29-07-2056	10-05-2014	21-08-2052
06-02-2042	07-04-2017	04-09-2057	23-05-2015	03-09-2053
11-03-2044	09-05-2018	12-10-2058	03-06-2016	16-09-2054
17-04-2046	10-06-2019	18-11-2059	15-06-2017	29-09-2055
03-06-2048	14-07-2020	22-12-2060	27-06-2018	11-10-2056
14-08-2050	19-08-2021	23-01-2062	09-07-2019	25-10-2057
28-10-2052	26-09-2022	23-02-2063	20-07-2020	08-11-2058
17-12-2054	03-11-2023	25-03-2064	02-08-2021	22-11-2059
24-01-2057	07-12-2024	25-04-2065	14-08-2022	05-12-2060
27-02-2059	10-01-2026	26-05-2066	27-08-2023	19-12-2061
02-04-2061	11-02-2027	29-06-2067	08-09-2024	02-01-2063
14-05-2063	12-03-2028	03-08-2068	21-09-2025	16-01-2064
13-07-2065	12-04-2029	09-09-2069	04-10-2026	29-01-2065
02-10-2067	13-05-2030	17-10-2070	18-10-2027	12-02-2066

Datas da máxima elongação de Mercúrio e Vênus (próxima página), quando estes planetas são mais facilmente observáveis. O tipo de elongação pode ser Ocidental (oc; visível antes do nascer do Sol) ou Oriental (or; visível ao anoitecer). Para cada data é dada a magnitude aparente e a elongação em graus. Valores calculados a partir da teoria VSOP87.

Mercúrio

Tipo	Data	Hora	Mag	elong	Tipo	Data	Hora	Mag	elong
noite (or)	10/02/2020	13:56	-0.49	18.20	noite (or)	03/02/2027	06:15	-0.51	18.32
manhã (oc)	24/03/2020	02:08	+0.28	27.78	manhã (oc)	17/03/2027	06:52	+0.24	27.63
noite (or)	04/06/2020	13:09	+0.50	23.60	noite (or)	28/05/2027	09:59	+0.47	22.92
manhã (oc)	22/07/2020	15:14	+0.25	20.13	manhã (oc)	15/07/2027	19:25	+0.32	20.70
noite (or)	01/10/2020	16:07	+0.10	25.82	noite (or)	24/09/2027	22:00	+0.14	26.26
manhã (oc)	10/11/2020	17:05	-0.51	19.10	manhã (oc)	04/11/2027	08:55	-0.51	18.77
noite (or)	24/01/2021	01:58	-0.53	18.56	noite (or)	17/01/2028	17:17	-0.53	18.81
manhã (oc)	06/03/2021	11:23	+0.18	27.27	manhã (oc)	27/02/2028	16:37	+0.14	26.89
noite (or)	17/05/2021	05:54	+0.41	22.02	noite (or)	09/05/2028	06:15	+0.35	21.39
manhã (oc)	04/07/2021	19:47	+0.40	21.55	manhã (oc)	26/06/2028	19:35	+0.45	22.23
noite (or)	14/09/2021	04:25	+0.21	26.76	noite (or)	06/09/2028	10:21	+0.25	27.05
manhã (oc)	25/10/2021	05:30	-0.51	18.40	manhã (oc)	17/10/2028	23:05	-0.50	18.19
noite (or)	07/01/2022	11:05	-0.52	19.22	noite (or)	31/12/2028	00:45	-0.50	19.58
manhã (oc)	16/02/2022	21:08	+0.07	26.28	manhã (oc)	09/02/2029	01:48	+0.02	25.75
noite (or)	29/04/2022	08:10	+0.25	20.61	noite (or)	21/04/2029	13:37	+0.17	20.09
manhã (oc)	16/06/2022	14:57	+0.50	23.20	manhã (oc)	08/06/2029	11:51	+0.51	23.93
noite (or)	27/08/2022	16:16	+0.31	27.32	noite (or)	19/08/2029	21:43	+0.34	27.42
manhã (oc)	08/10/2022	21:15	-0.46	17.98	manhã (oc)	01/10/2029	15:12	-0.43	17.89
noite (or)	21/12/2022	15:32	-0.46	20.14	noite (or)	14/12/2029	03:00	-0.42	20.60
manhã (oc)	30/01/2023	05:55	-0.05	24.96	manhã (oc)	22/01/2030	10:11	-0.11	24.35
noite (or)	11/04/2023	22:11	+0.06	19.49	noite (or)	04/04/2030	08:22	-0.02	19.11
manhã (oc)	29/05/2023	05:34	+0.52	24.89	manhã (oc)	21/05/2030	02:22	+0.51	25.56
noite (or)	10/08/2023	01:48	+0.39	27.40	noite (or)	02/08/2030	05:36	+0.42	27.27
manhã (oc)	22/09/2023	13:17	-0.37	17.86	manhã (oc)	15/09/2030	06:26	-0.31	17.90
noite (or)	04/12/2023	14:30	-0.36	21.27	noite (or)	26/11/2030	23:30	-0.31	21.80
manhã (oc)	12/01/2024	14:39	-0.18	23.50	manhã (oc)	04/01/2031	19:58	-0.24	22.88
noite (or)	24/03/2024	22:35	-0.13	18.70	noite (or)	18/03/2031	12:08	-0.21	18.47
manhã (oc)	09/05/2024	21:31	+0.49	26.37	manhã (oc)	02/05/2031	20:33	+0.46	26.87
noite (or)	22/07/2024	06:40	+0.46	26.93	noite (or)	15/07/2031	07:25	+0.49	26.57
manhã (oc)	05/09/2024	02:32	-0.23	18.05	manhã (oc)	29/08/2031	17:36	-0.15	18.24
noite (or)	16/11/2024	08:10	-0.24	22.55	noite (or)	09/11/2031	15:08	-0.18	23.12
manhã (oc)	25/12/2024	02:32	-0.31	22.05	manhã (oc)	18/12/2031	10:27	-0.35	21.47
noite (or)	08/03/2025	06:11	-0.30	18.25	noite (or)	29/02/2032	21:49	-0.36	18.16
manhã (oc)	21/04/2025	18:50	+0.42	27.39	manhã (oc)	13/04/2032	20:47	+0.39	27.65
noite (or)	04/07/2025	04:39	+0.51	25.93	noite (or)	26/06/2032	02:15	+0.52	25.37
manhã (oc)	19/08/2025	09:49	-0.05	18.58	manhã (oc)	11/08/2032	21:28	+0.03	18.92
noite (or)	29/10/2025	22:03	-0.10	23.88	noite (or)	22/10/2032	03:57	-0.05	24.44
manhã (oc)	07/12/2025	21:04	-0.41	20.73	manhã (oc)	30/11/2032	08:12	-0.45	20.23
noite (or)	19/02/2026	17:43	-0.43	18.12	noite (or)	12/02/2033	10:11	-0.47	18.17
manhã (oc)	03/04/2026	22:35	+0.34	27.82	manhã (oc)	27/03/2033	02:29	+0.30	27.81
noite (or)	15/06/2026	20:01	+0.52	24.52	noite (or)	07/06/2033	16:25	+0.51	23.84
manhã (oc)	02/08/2026	08:09	+0.14	19.47	manhã (oc)	25/07/2033	15:12	+0.22	19.95
noite (or)	12/10/2026	10:04	+0.03	25.16	noite (or)	04/10/2033	16:06	+0.08	25.66
manhã (oc)	20/11/2026	23:33	-0.48	19.62	manhã (oc)	13/11/2033	13:47	-0.50	19.23

Continuação da página anterior com as datas de elongação máxima de Vênus.

Vênus

Tipo	Data	Hora	Mag	elong	Tipo	Data	Hora	Mag	elong
noite (or)	24/03/2020	22:16	-4.45	46.08	noite (or)	31/12/2056	12:52	-4.52	47.24
manhã (oc)	13/08/2020	00:15	-4.40	45.79	manhã (oc)	22/05/2057	12:07	-4.42	45.96
noite (or)	29/10/2021	20:54	-4.51	47.04	noite (or)	05/08/2058	12:33	-4.42	45.76
manhã (oc)	20/03/2022	09:26	-4.49	46.59	manhã (oc)	25/12/2058	04:34	-4.53	46.93
noite (or)	04/06/2023	11:02	-4.40	45.40	noite (or)	13/03/2060	03:36	-4.47	46.28
manhã (oc)	23/10/2023	23:16	-4.48	46.42	manhã (oc)	01/08/2060	09:33	-4.40	45.75
noite (or)	10/01/2025	05:03	-4.25	47.17	noite (or)	17/10/2061	19:14	-4.50	46.88
manhã (oc)	01/06/2025	03:29	-4.41	45.88	manhã (oc)	08/03/2062	03:04	-4.51	46.70
noite (or)	15/08/2026	06:32	-4.43	45.89	noite (or)	23/05/2063	16:04	-4.41	45.44
manhã (oc)	03/01/2027	18:00	-4.54	46.95	manhã (oc)	11/10/2063	23:41	-4.46	46.28
noite (or)	22/03/2028	12:28	-4.46	46.11	noite (or)	29/12/2064	03:28	-4.52	47.26
manhã (oc)	10/08/2028	16:04	-4.40	45.78	manhã (oc)	20/05/2065	03:45	-4.42	45.98
noite (or)	27/10/2029	10:54	-4.51	47.02	noite (or)	03/08/2066	03:36	-4.42	45.73
manhã (oc)	17/03/2030	23:57	-4.49	46.61	manhã (oc)	22/12/2066	19:06	-4.53	46.92
noite (or)	02/06/2031	03:35	-4.40	45.40	noite (or)	10/03/2068	19:07	-4.47	46.32
manhã (oc)	21/10/2031	14:13	-4.47	46.39	manhã (oc)	30/07/2068	00:39	-4.40	45.74
noite (or)	07/01/2033	20:06	-4.52	47.19	noite (or)	15/10/2069	07:34	-4.50	46.84
manhã (oc)	29/05/2033	17:33	-4.41	45.90	manhã (oc)	05/03/2070	15:35	-4.51	46.73
noite (or)	12/08/2034	19:02	-4.43	45.85	noite (or)	21/05/2071	07:38	-4.41	45.45
manhã (oc)	01/01/2035	07:28	-4.54	46.95	manhã (oc)	09/10/2071	15:53	-4.46	46.26
noite (or)	20/03/2036	03:26	-4.46	46.16	noite (or)	26/12/2072	18:54	-4.53	47.27
manhã (oc)	08/08/2036	08:39	-4.40	45.77	manhã (oc)	17/05/2073	19:20	-4.42	46.00
noite (or)	25/10/2037	01:25	-4.51	46.98	noite (or)	31/07/2074	18:12	-4.42	45.70
manhã (oc)	15/03/2038	13:51	-4.50	46.63	manhã (oc)	20/12/2074	08:40	-4.53	46.90
noite (or)	30/05/2039	19:34	-4.40	45.41	noite (or)	08/03/2076	09:36	-4.47	46.35
manhã (oc)	19/10/2039	04:23	-4.47	46.36	manhã (oc)	27/07/2076	15:21	-4.40	45.73
noite (or)	05/01/2041	09:59	-4.52	47.20	noite (or)	12/10/2077	20:05	-4.49	46.81
manhã (oc)	27/05/2041	07:04	-4.41	45.92	manhã (oc)	03/03/2078	05:01	-4.51	46.75
noite (or)	10/08/2042	07:52	-4.43	45.82	noite (or)	18/05/2079	23:57	-4.41	45.46
manhã (oc)	29/12/2042	22:03	-4.53	46.94	manhã (oc)	07/10/2079	08:01	-4.46	46.23
noite (or)	17/03/2044	19:07	-4.46	46.20	noite (or)	24/12/2080	10:47	-4.53	47.28
manhã (oc)	06/08/2044	01:28	-4.40	45.76	manhã (oc)	15/05/2081	10:06	-4.43	46.02
noite (or)	22/10/2045	15:56	-4.50	46.95	noite (or)	29/07/2082	07:55	-4.42	45.67
noite (or)	22/10/2045	15:57	-4.50	46.95	manhã (oc)	17/12/2082	21:32	-4.53	46.89
manhã (oc)	13/03/2046	02:54	-4.50	46.66	noite (or)	05/03/2084	23:32	-4.47	46.40
noite (or)	28/05/2047	10:38	-4.41	45.41	manhã (oc)	25/07/2084	06:39	-4.40	45.73
manhã (oc)	16/10/2047	18:08	-4.47	46.33	noite (or)	10/10/2085	09:04	-4.49	46.77
noite (or)	02/01/2049	23:08	-4.52	47.22	manhã (oc)	28/02/2086	19:06	-4.51	46.77
manhã (oc)	24/05/2049	21:12	-4.42	45.94	noite (or)	16/05/2087	16:37	-4.41	45.48
noite (or)	07/08/2050	21:42	-4.42	45.79	manhã (oc)	04/10/2087	23:48	-4.45	46.21
manhã (oc)	27/12/2050	13:24	-4.53	46.94	noite (or)	22/12/2088	01:58	-4.53	47.29
noite (or)	15/03/2052	11:26	-4.46	46.24	manhã (oc)	12/05/2089	23:57	-4.43	46.04
manhã (oc)	03/08/2052	17:58	-4.40	45.76	noite (or)	26/07/2090	20:50	-4.41	45.64
noite (or)	20/10/2053	06:09	-4.50	46.92	manhã (oc)	15/12/2090	11:03	-4.53	46.88
manhã (oc)	10/03/2054	15:14	-4.50	46.68	noite (or)	03/03/2092	13:37	-4.48	46.44
noite (or)	26/05/2055	01:24	-4.41	45.42	manhã (oc)	22/07/2092	22:48	-4.40	45.73
manhã (oc)	14/10/2055	08:27	-4.46	46.31	noite (or)	07/10/2093	23:01	-4.49	46.73

Eclipses do Sol visíveis de São Paulo ($23^{\circ}33'34''$ S, $46^{\circ}44'07''$ W) onde a fração coberta do Sol é de pelo menos 50%. Nos séculos **XX**, **XXI** e **XXII** nenhum eclipse do Sol é total ou anular na cidade de São Paulo. A primeira e as duas últimas linhas da tabela abaixo dão os últimos e próximos eclipses totais e anulares visíveis em São Paulo (com o tempo de duração da totalidade entre parênteses).

Em destaque os eclipses onde mais de 90% superfície do Sol é coberta. A altura e azimute do Sol são dados em graus. Os horários correspondem à hora legal de Brasília (UTC – 3h; se o horário de verão estiver em vigor, uma hora deve ser acrescentada ao valor da tabela).

Data	Início Parcial	Altura do Sol	Eclipse Máximo	Altura do Sol	Azimute do Sol	Fim do Eclipse	Altura do Sol	Magnitude do Eclipse	Fração do Sol Eclipsada
1590-Fev-04	12:28:04	82	13:56:16	67	284	15:15:53	49	1.049	1.000 (T:2m04s)
1650-Abr-30	12:23:05	51	14:12:32	40	318	15:51:34	22	0.948	0.898 (A:5m38s)
1661-Set-23	05:57(r)	0(r)	06:33:36	08	087	07:52:08	26	0.922	0.850 (A:3m59s)
1734-Out-26	15:15:59	40	16:39:34	21	265	17:50:35	05	0.946	0.896 (A:4m10s)
1907-Jul-10	10:36:15	39	12:41:19	44	351	14:38:08	32	0.836	0.775
1908-Dez-23	06:10:39	10	07:08:55	23	107	08:14:26	37	0.709	0.634
1912-Out-10	08:56:54	44	10:16:12	61	058	11:41:48	73	0.957	0.952 ←
1918-Dez-03	10:48:49	74	12:44:57	79	275	14:32:02	54	0.599	0.493
1927-Jan-03	18:04:27	10	18:55(s)	0(s)	245	18:55(s)	0(s)	0.849(s)	0.805(s)
1947-Mai-20	08:17:55	20	09:28:31	32	044	10:48:02	43	0.921	0.911 ←
1952-Ago-20	11:11:15	51	12:54:35	53	342	14:30:22	40	0.668	0.573
1966-Nov-12	09:43:06	60	11:03:19	77	064	12:30:40	79	0.696	0.624
1973-Jan-04	11:26:55	80	13:21:50	74	270	14:59:55	52	0.650	0.550
1980-Ago-10	16:56:44	10	17:46(s)	0(s)	287	17:46(s)	0(s)	0.706(s)	0.621(s)
1992-Jun-30	06:52:25	00	07:56:19	13	058	09:09:08	26	0.834	0.802
1994-Nov-03	08:41:18	45	09:57:28	62	078	11:22:27	79	0.851	0.824
2001-Jun-21	06:50(r)	0(r)	07:31:53	08	060	08:36:58	20	0.705	0.637
2027-Fev-06	11:30:55	76	13:21:17	74	297	14:59:07	52	0.844	0.777
2034-Set-12	12:51:38	60	14:30:02	45	303	15:55:41	27	0.747	0.675
2044-Fev-28	17:37:16	13	18:33:52	00	261	18:34(s)	0(s)	0.605	0.504
2057-Jan-05	05:28(r)	0(r)	05:28(r)	0(r)	115	06:05:35	07	0.600(r)	0.507(r)
2059-Mai-11	16:35:26	12	17:32(s)	0(s)	290	17:32(s)	0(s)	0.621(s)	0.531(s)
2061-Out-13	05:38(r)	0(r)	06:15:49	08	095	07:19:03	23	0.622	0.521
2071-Mar-31	09:47:12	45	11:23:01	60	024	13:05:02	59	0.973	0.961 ←
2075-Jan-16	15:52:53	40	17:00:08	25	257	17:59:55	12	0.888	0.863
2081-Mar-10	10:15:00	54	11:58:48	70	013	13:41:51	61	0.774	0.696
2103-Jan-08	15:09:00	50	16:18:03	34	258	17:19:32	20	0.948	0.943 ←
2110-Ago-15	13:43:37	46	15:17:23	31	305	16:36:46	15	0.823	0.766
2111-Fev-08	06:24:25	07	07:23:20	20	098	08:29:47	35	0.743	0.681
2113-Jun-13	13:59:12	36	15:26:02	23	311	16:40:45	09	0.994	0.996 ←
2115-Nov-16	05:16(r)	0(r)	05:30:40	03	109	06:28:32	16	0.671	0.578
2118-Set-15	13:17:30	58	14:34:49	44	300	15:45:54	30	0.672	0.596
2125-Mai-03	07:57:39	18	09:12:02	32	051	10:38:29	45	0.627	0.534
2132-Dez-07	12:19:33	85	14:17:44	58	265	15:56:15	36	0.625	0.519
2158-Jul-25	12:16:05	47	13:45:30	41	331	15:05:17	30	0.826	0.786
2164-Set-16	08:34:23	33	10:11:41	53	050	12:01:16	64	0.892	0.847
2165-Mar-12	08:14:51	28	09:28:37	45	070	10:51:10	61	0.917	0.906 ←
2167-Jul-16	10:52:37	41	12:17:56	45	358	13:42:03	40	0.588	0.497
2172-Out-17	12:19:07	75	13:47:25	59	292	15:10:29	41	0.777	0.722
2180-Mai-24	09:06:47	28	10:49:05	42	024	12:45:42	44	0.709	0.622
2187-Jan-09	12:07:50	88	14:10:34	63	267	15:51:42	40	0.875	0.808
2207-Mai-27	12:16:50	45	14:16:08	35	322	15:59:09	17	0.938	0.881 (A:6m16s)
2464-Ago-03	09:14:48	30	11:02:47	46	025	12:59:44	48	0.962	0.925 (A:3m25s)
2690-Jan-02	15:29:26	44	16:55:40	25	255	18:08:01	09	0.915	0.837 (A:6m26s)
2906-Nov-07	14:20:44	54	15:39:24	36	266	16:47:59	20	1.039	1.000 (T:2m48s)
2914-Dez-08	05:13(r)	0(r)	05:55:56	09	111	06:51:40	21	1.030	1.000 (T:1m34s)

Na tabela acima, “(r)” significa que o eclipse já está em curso quando o Sol nasce. “(s)” significa que o eclipse ainda está em curso quando o Sol de põe. Nestes casos, a hora indicada corresponde ao nascer ou pôr do Sol e não ao final do eclipse. “Magnitude do Eclipse” corresponde à fração do diâmetro do Sol eclipsada pela Lua e “Fração do Sol Eclipsada” corresponde à área do Sol eclipsada. Quando a umbra passa por São Paulo, é dado a duração da fase de totalidade do eclipse (apenas 3 casos nesta tabela). Os cálculos foram feitos por Fred Espenak e Chris O’Byrne (GSFC/NASA), disponíveis no site eclipse.gsfc.nasa.gov/JSEX/JSEX-SA.html.

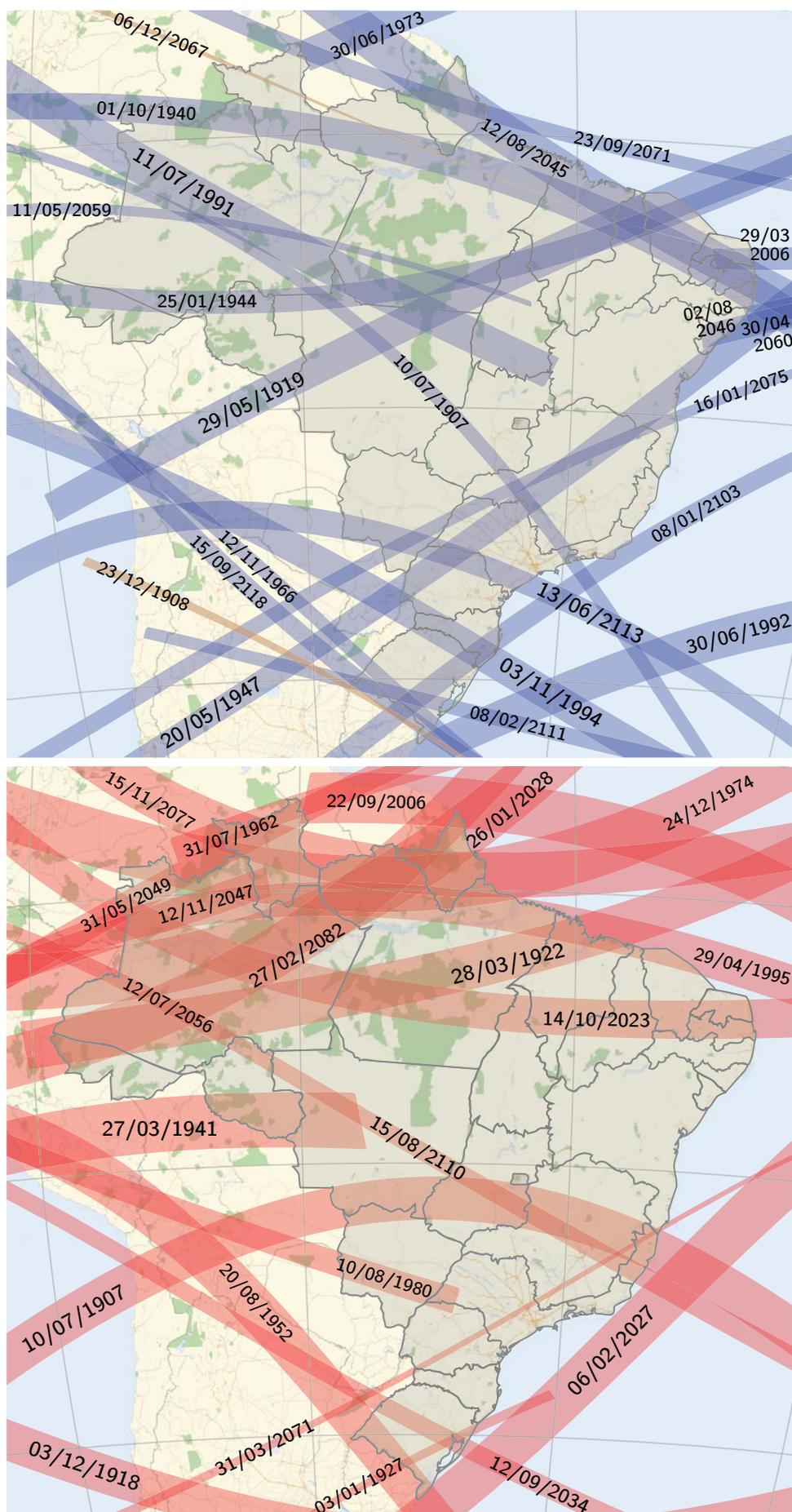


Figura 5.19: Eclipses que passam pelo Brasil entre 1900 e 2120, Acima: totais (azul) e híbridos (castanho). Abaixo: eclipses anulares (vermelho). Os cálculos dos eclipses foram feitos por Fred Espenak, NASA/Goddard Space Flight Center.

Lista dos eclipses totais da Lua entre 2000 e 2060. O horário é de Brasília (UTC-3h). Fonte: Cálculos feitos por Fred Espenak, www.eclipsewise.com/lunar/LEcatalog.

Data	Hora do máximo	Duração	Duração totalidade	Visibilidade
21-01-2000	01:44	03h23m	01h17m	Visível em todo Brasil
16-07-2000	10:56	03h56m	01h46m	Não observável no Brasil
09-01-2001	17:21	03h16m	01h01m	Nordeste, final do eclipse quando a lua nasce
16-05-2003	00:40	03h14m	00h51m	Visível em todo Brasil
08-11-2003	22:19	03h31m	00h22m	Visível em todo Brasil
04-05-2004	17:30	03h23m	01h15m	Final do eclipse, quando a Lua nasce
28-10-2004	00:04	03h39m	01h20m	Visível em todo Brasil
03-03-2007	20:21	03h41m	01h13m	Final do eclipse, quando a Lua nasce
28-08-2007	07:37	03h32m	01h30m	Início do eclipse, antes da Lua se pôr
21-02-2008	00:26	03h25m	00h50m	Visível em todo Brasil
21-12-2010	05:17	03h29m	01h12m	Início do eclipse, antes da Lua se pôr
15-06-2011	17:13	03h39m	01h40m	Final do eclipse, quando a Lua nasce
10-12-2011	11:32	03h32m	00h51m	Não observável no Brasil
15-04-2014	04:46	03h35m	01h18m	Final do eclipse, quando a Lua nasce
08-10-2014	07:55	03h20m	00h59m	Final do eclipse, quando a Lua nasce
04-04-2015	09:00	03h29m	00h05m	Final do eclipse, quando a Lua nasce
27-09-2015	23:47	03h20m	01h12m	Visível em todo Brasil
31-01-2018	10:30	03h23m	01h16m	Não observável no Brasil
27-07-2018	17:22	03h55m	01h43m	Final do eclipse, quando a Lua nasce
21-01-2019	02:12	03h17m	01h02m	Visível em todo Brasil
26-05-2021	08:19	03h07m	00h15m	Início do eclipse, antes da Lua se pôr
16-05-2022	01:12	03h27m	01h25m	Visível em todo Brasil
08-11-2022	07:59	03h40m	01h25m	Amazônia, início do eclipse, antes a Lua se põe
14-03-2025	03:59	03h38m	01h05m	Visível em todo Brasil
07-09-2025	15:12	03h29m	01h22m	Não observável no Brasil
03-03-2026	08:34	03h27m	00h58m	Amazônia, início do eclipse, antes a Lua se põe
31-12-2028	13:52	03h29m	01h11m	Não observável no Brasil
26-06-2029	00:22	03h40m	01h42m	Visível em todo Brasil
20-12-2029	19:42	03h33m	00h54m	Totalidade e final do eclipse, quando a Lua nasce
25-04-2032	12:14	03h31m	01h06m	Não observável no Brasil
18-10-2032	16:03	03h16m	00h47m	Nordeste, final do eclipse quando a lua nasce
14-04-2033	16:13	03h35m	00h49m	Nordeste, final do eclipse quando a lua nasce
08-10-2033	07:55	03h22m	01h19m	Amazônia, início do eclipse, antes da Lua se pôr
11-02-2036	19:12	03h22m	01h14m	Final do eclipse, quando a Lua nasce
06-08-2036	23:52	03h51m	01h35m	Visível em todo Brasil
31-01-2037	11:01	03h18m	01h04m	Não observável no Brasil
26-05-2040	08:45	03h31m	01h32m	Amazônia, início do eclipse, antes da Lua se pôr
18-11-2040	16:04	03h40m	01h28m	Nordeste, final do eclipse quando a lua nasce
25-03-2043	11:31	03h35m	00h53m	Não observável no Brasil
18-09-2043	22:51	03h26m	01h12m	Visível em todo Brasil
13-03-2044	16:38	03h29m	01h06m	Visível em todo Brasil
07-09-2044	08:20	03h26m	00h34m	Início do eclipse, antes da Lua se pôr
11-01-2047	22:25	03h29m	01h10m	Visível em todo Brasil
07-07-2047	07:35	03h39m	01h41m	Início do eclipse, antes da Lua se pôr
01-01-2048	03:53	03h34m	00h56m	Início e totalidade do eclipse, antes da Lua se pôr
06-05-2050	19:31	03h26m	00h43m	Final do eclipse quando a lua nasce
30-10-2050	00:21	03h13m	00h34m	Visível em todo Brasil
25-04-2051	23:15	03h41m	01h10m	Visível em todo Brasil
19-10-2051	16:11	03h24m	01h24m	Nordeste, final do eclipse quando a lua nasce
22-02-2054	03:50	03h21m	01h12m	Visível em todo Brasil
18-08-2054	06:25	03h47m	01h23m	Amazônia, início do eclipse, antes da Lua se pôr
11-02-2055	19:45	03h18m	01h06m	Final do eclipse quando a lua nasce
06-06-2058	16:15	03h33m	01h37m	Não observável no Brasil
10-11-2058	00:15	03h41m	01h30m	Visível em todo Brasil
04-04-2061	18:53	03h30m	00h30m	Final do eclipse quando a lua nasce
29-09-2061	06:37	03h22m	00h59m	Início do eclipse, antes da Lua se pôr