Capítulo 1

Introdução

1.1 O cálculo numérico e a Astronomia

"(...) *l'Astronomie nous apprenait à ne pas nous effrayer des grands nombres.*"H. Poincaré [1]

No decorrer da história, a Astronomia teve várias vezes o importante papel de quebrar paradigmas da humanidade, ao ponto de Poincaré ter declarado que é ela a responsável por nos transformar em uma alma capaz de compreender a natureza. Para isso a Astronomia sempre desenvolveu, ou utilizou, as mais modernas técnicas numéricas e analíticas disponíveis em cada época, literalmente desbravando os limites do cálculo.

Não por acaso, atualmente a pesquisa em Astronomia tem se defrontado com problemas teóricos cada vez mais complexos e com um crescente volume de dados, que demandam recursos computacionais cada vez maiores e algoritmos cada vez mais inteligentes.

A resposta à pergunta "para que aprender a escrever um código numérico?" é, dessa forma, muito simples: grande parte da pesquisa moderna em Astronomia necessita de computadores. Alguns exemplos:

- *Simulações numéricas* modernas são capazes de resolver problemas que antes eram absolutamente impossíveis. Elas são usadas para se comparar modelos com observações e desta forma testar teorias físicas (Ex: simulação do milênio[2]).

- Dados astronômicos cada vez mais complexos requerem sofisticadas *ferramentas de visualização* para poderem ser estudados.

- A *análise de dados* é uma atividade rotineira em astronomia. Frequentemente essa análise implica no uso de técnicas numéricas para se desempenhar uma série de tarefas em um grande volume de dados.

O objetivo básico da pesquisa científica é confrontar teorias físico-matemáticas com as observações para se compreender os processos físicos que regem os sistemas naturais. Hoje em dia, o desenvolvimento eficiente de uma atividade de pesquisa requer:

- Uso frequente de técnicas numéricas para resolver problemas corriqueiros;

- Uso de novas ferramentas computacionais para tornar os códigos rápidos o suficiente. Ex: Paralelismo, vetorização, GPUs;

[1]"(...) a Astronomia nos ensinava a não temer os grandes números", H. Poincaré, in La Valeur de la Science

[2]http://www.mpa-garching.mpg.de/galform/virgo/millennium/

- Ferramentas numéricas para extração de informações dos dados observacionais;
- Implementação de ferramentas para automação de tarefas;
- Etc.

1.2 Resolução numérica de problemas

O motivo para escrever um programa, qualquer programa, é resolver um problema que é de mais rápida resolução em um computador ou, o que é o mais frequente, somente pode ser resolvido por um computador. A tarefa de escrever um problema pode ser dividida em três partes:

1. Especificar o problema de forma clara (parte mais difícil!);
2. Analisar o problema é reduzi-lo em seus elementos fundamentais;
3. Codificar o programa de acordo com o plano desenvolvido no passo 2;

Frequentemente há ainda um quarto passo:

4. Testar o problema exaustivamente, e repetir passos 2 e 3 até que o programa funcione corretamente em todas as situações.

1.3 Método numérico

Estende-se por método numérico um conjunto de regras estritas sob a forma de uma sequência de operações elementares que levam à solução do problema. Em seu nível mais fundamental (ver cap. 3), utiliza-se somente as quatro operações aritméticas $+$, $-$, $\times$, $\div$.

Esquematicamente, podemos representar a pesquisa em Astronomia através do diagrama da Fig. 1.1. Para ilustrar, consideremos os seguintes exemplos para os diversos elementos da Fig. 1.1:

- *Processo físico:* colisão de galáxias.
- *Observações:* medidas de velocidade radial de galáxias em colisão.
- *Teoria:* gravitação universal e modelos para a estrutura de galáxias.
- *Solução analítica:* equações diferenciais da gravitação.
- *Solução numérica:* emprego de algum método numérico para se resolver equações diferenciais.

O confronto entre teoria e observações frequentemente corresponde ao cerne do problema, e está sujeito à várias fontes de erro. Por um lado há os *erros observacionais*, frequentemente mal compreendidos e de difícil remoção. Esse tópico não será considerado neste curso.

Por outro lado, há os erros inerentes à criação de um modelo matemático (ver Fig. 1.1). Eles podem ser divididos em duas categorias:

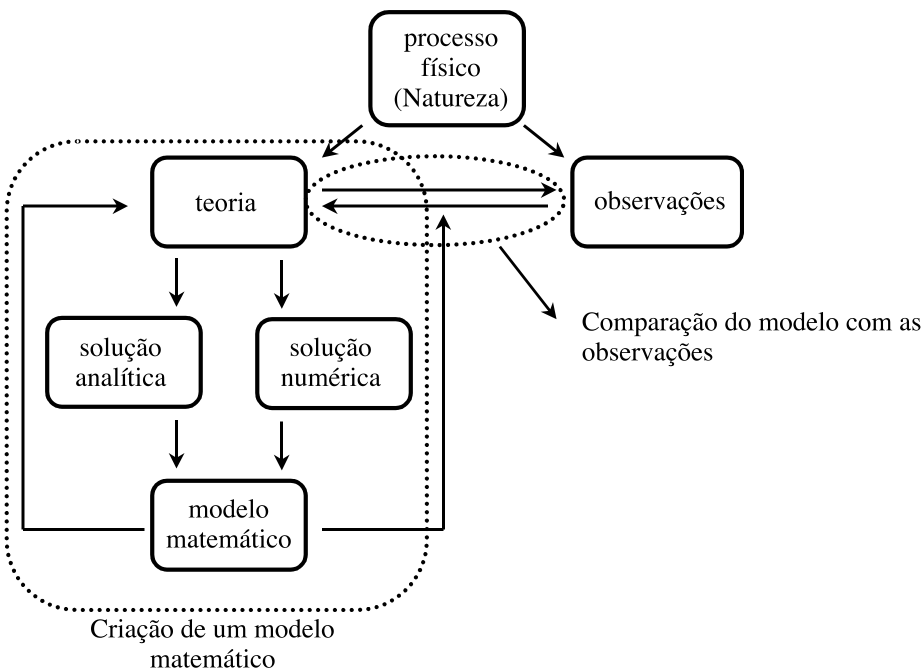

Figura 1.1: Pesquisa científica.

a. Simplificações no modelo matemático

Via de regra a descrição teórica do sistema estudado corresponde a uma simplificação do problema. Em geral há duas razões pelas quais se adotam simplificações:

- Simplificar o problema é a única forma de resolvê-lo;

- Adaptação do modelo ao sistema físico estudado.

Estas simplificações dão origem ao chamado *erro inerente* ao modelo matemático.

Um exemplo do segundo caso acima é aproximar-se a fotosfera solar por uma fotosfera plano paralela. As equações do transporte radiativo tomam uma forma mais simples quando escritas em uma simetria cilíndrica, e por isso frequentemente modelos de atmosferas estelares empregam essa forma das equações. Tais modelos são chamados de *modelos plano-paralelos.* No caso do Sol, a fotosfera tem ≈ 400 km de expessura enquanto o raio do Sol é $\approx 700\,000$ km, o que indica que efeitos da curvatura da fotosfera provavelmente são pequenos e que a aproximação plano-paralela é provavelmente adequada. O mesmo não é válido para a atmosfera de estrelas evoluídas (gigantes e supergigantes); nelas, a atmosfera corresponde a uma fração considerável do volume da estrela.

Outro aspecto ligado a essa questão são os erros instrínsecos na criação de um modelo matemático que advém do desconhecimento da física subjacente ao sistema estudado. Por causa disso, aspectos físicos importantes do modelos podem estar sendo omitidos, ou descritos de forma errada. Os exemplos são inúmeros:

- ao estudar-se espectros estelares, confronta-se linhas observadas com modelos atômicos. Entretanto, o conhecimento de átomos complexos, como Fe, ainda é incompleto;

- a turbulência é um fenômeno comum em astrofísica, e ocorre em situações tão diversas como no meio interestelar e em atmosferas estelares. Não existe ainda uma teoria física satisfatória para a turbulência. O mesmo vale, em grande medida, para fenômenos de convecção, que são muito importantes no interior estelar.

Tendo em vista as questões as questões acima, é importante desenvolvermos uma postura crítica em relação a modelos matemáticos.

b. Erros numéricos

Veremos no cap. 3 que existem três tipos distintos de erros numéricos que podem acometer os modelos matemáticos. Um deles, chamado de *erro de truncamento*, é inerente ao processo matemático de se atingir uma solução através de aproximações sucessivas. Os outros dois (erros de *representação* e *arredondamento*) estão associados ao *hardware* do computador utilizado.

Os três fatores combinados levam à chamada *perda de precisão numérica*, que pode ter resultados catastróficos (literalmente).