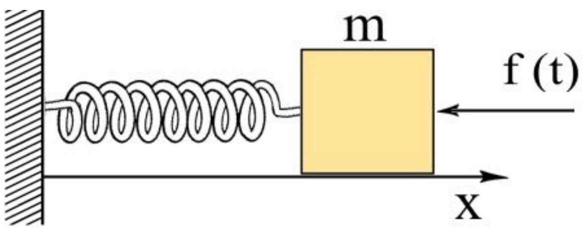
Pêndulo Físico

Prof. Responsável: Dra. Leticie Mendonça Ferreira

Material desenvolvido pelo monitor Henrique Barros de Oliveira, sob orientação da profa. Leticie M. Ferreira, no contexto do projeto “Reelaboração do Material Didático das Disciplinas Avançadas de Laboratório de Física”.

Caro aluno, nesse experimento iremos estudar o movimento de um pêndulo físico. Ao contrário do pêndulo simples, que é uma idealização, o pêndulo físico é qualquer pêndulo real. Ambos, porém, executam um movimento oscilatório em torno da sua posição de equilíbrio.

Os fenômenos oscilatórios estão presentes em todos os campos da Física. Exemplos de sistemas mecânicos incluem pêndulos, diafragmas, cordas de instrumentos musicais, entre outros. Um outro exemplo que você com certeza já estudou é o sistema massa-mola. Sob a ação da força restauradora exercida pela mola, este sistema executa um movimento oscilatório muito semelhante ao de um pêndulo.



2 - Sistema massa-mola.

1 - Galileu Galilei

Datas Históricas

1588

Observando o movimento de candelabros da Catedral de Pisa, Galileu notou que os candelabros com maior amplitude de oscilação pareciam levar o mesmo tempo para realizar uma oscilação que os candelabros que oscilavam com menor amplitude.

1602

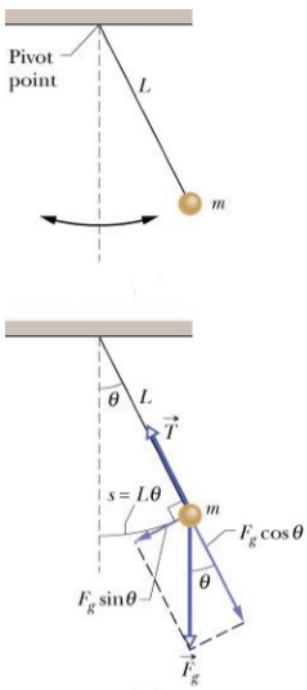
Em 1602 Galileu apresentou a ideia do isocronismo de pêndulos, isto é, que o período de oscilação de um pêndulo é independente da sua amplitude. Também observou que os mesmos voltavam praticamente à mesma altura da qual tinham sido soltos.

1. Introdução teórica

Um pêndulo desviado da sua posição de equilíbrio e depois solto fornece um exemplo de oscilação livre. Ou seja, após ser estabelecida a configuração inicial, o pêndulo não está submetido a forças externas oscilatórias e estabelece então o seu próprio período de oscilação, determinado pelos parâmetros que o caracterizam.

Devemos distinguir um pêndulo simples de um pêndulo físico. O pêndulo simples é um modelo idealizado constituído por um corpo puntiforme de massa m suspenso por um fio inextensível de comprimento L e massa desprezível.

Quando o pêndulo é abandonado de um ângulo inicial θ_0 com a vertical, ele oscila em torno da sua posição de equilíbrio com um período T. Nesta situação, as forças que atuam sobre a massa suspensa são seu peso e a tensão no fio, conforme mostra a figura abaixo.



3 - Modelo de pêndulo simples

Momento de Inércia

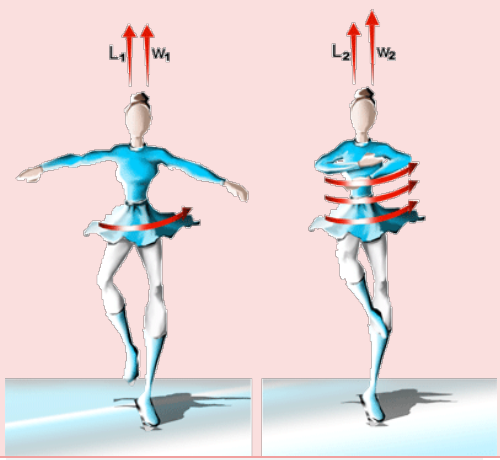
Em Mecânica, o momento de inércia expressa o grau de dificuldade em se alterar o estado de movimento de um corpo em rotação. Diferentemente da massa inercial (que é uma propriedade intrínseca de um corpo), o momento de inércia depende da distribuição da massa do corpo em torno de um eixo de rotação específico. Para uma distribuição contínua de massa, o momento de inércia é dado pela seguinte integral:

$$I = \int r^2 dm$$

onde r é a distância em relação ao eixo de rotação.

Curiosidades

Uma grande quantidade de atletas, bem como dançarinos, se aproveita da mudança do seu momento de inércia, variando a forma de seu corpo, para controlar o seu movimento.



4 – A patinadora aumenta a sua velocidade angular ao aproximar os braços do corpo, que tem por efeito diminuir o seu momento de inércia.

1.1 Equacionamento

Observando a figura anterior notamos que existe um ângulo θ com a vertical, o peso tem componentes $mg\cos\theta$, ao longo do fio, e $mg\text{sen}\,\theta$ na direção perpendicular ao raio da trajetória, apontando no sentido da diminuição de θ.

A componente tangencial à trajetória é a força restauradora responsável por restituir a massa a sua posição de equilíbrio. Logo, a segunda lei de Newton é expressa como:

$$-mg\,\text{sen}\,\theta = m\frac{d^2S}{dt^2}\,. \quad (1)$$

Para ângulos pequenos, $\text{sen}\,\theta \approx \theta$ (em radianos!) e podemos mostrar que o comportamento do pêndulo simples é descrito pela seguinte equação diferencial expressa em termos das variáveis angulares:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\,\omega^2\theta\,, \quad (2)$$

onde ω é a frequência angular, relacionada ao período T através da seguinte relação:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3)$$

Veja que o período não depende da amplitude do movimento e nem da massa do corpo.

A solução da equação (2) é:

$$\theta = \theta_0\cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

1.2 O pêndulo físico

Por outro lado, como já mencionado, o pêndulo físico consiste de um corpo rígido, com volume finito, livre para girar em torno de um eixo horizontal que não passa pelo seu centro de massa, como pode ser visto na figura 6. Quando o pêndulo é deslocado de sua posição de equilíbrio de um

5 - Brook Taylor (1685-1731)

Datas Históricas

1715

Taylor publica os livros Methodus Incrementorum Directa et Inversa e, logo após, Linear Perspective: Or, a New Method of Representing Justly All Manner of Objects as They Appear to the Eye in All Situations – onde aplica por primeira vez sua série.

Curiosidades

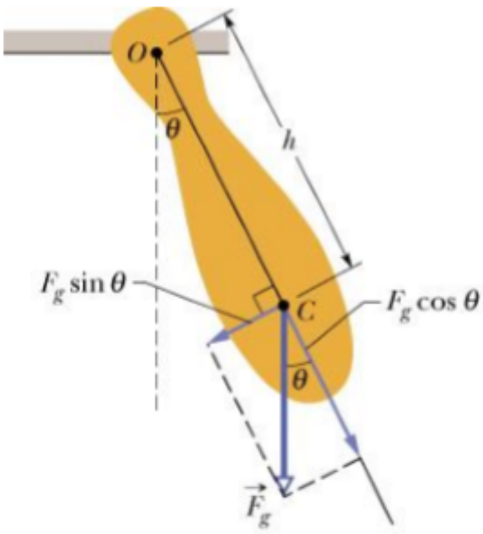
Embora a aproximação: $\text{sen}\,\theta \approx \theta$ possa parecer trivial, visto que os números são realmente próximos para pequenos valores, isso na realidade resulta do truncamento da série de Taylor. Abaixo temos a expressão para o período do pêndulo sem nenhuma hipótese simplificadora:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\right)^2\cdot\sin^{2n}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right]$$

ângulo θ, o torque restaurador em relação ao eixo, na aproximação de pequenos ângulos, tem uma magnitude dada por:

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh\theta\ . \qquad (5)$$

onde h é a distância do centro de massa ao eixo de rotação e I é o momento de inércia.



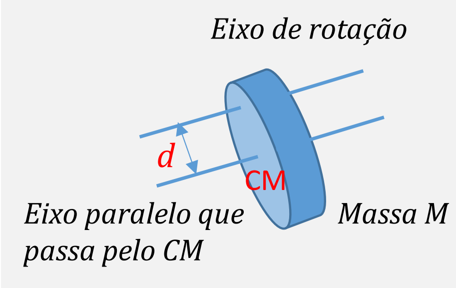
6 – Modelo de pêndulo físico

Logo, o movimento do pêndulo físico tem período igual a:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}}\ . \qquad (6)$$

Na presença apenas de forças conservativas, observa-se também que a energia mecânica se conserva, seja um pêndulo simples ou físico. Durante o movimento oscilatório, ocorre continuamente a conversão de energia potencial gravitacional em energia cinética e vice-versa. Na natureza, porém, praticamente todas as oscilações apresentam um fator de amortecimento. Ou seja, na prática, a energia mecânica não se conserva, sendo dissipada devido ao atrito com o ar ou algum outro fluido, ou em função do atrito de contato.

A equação diferencial que descreve o movimento do pêndulo físico amortecido é deduzida a partir da segunda lei de Newton para rotações e tem a seguinte forma:



7 - Rotação em torno de um eixo fora do centro de massa (CM).

Teorema de Steiner (ou dos Eixos Paralelos)

O momento de inércia depende do eixo de rotação escolhido. Usualmente você encontra em tabelas as expressões para o momento de inércia de corpos que apresentam simetria geométrica e para eixos de rotação que passam pelo centro de massa (CM) do corpo. Se o eixo de interesse for paralelo a um eixo que passe pelo CM, é possível determinar facilmente o momento de inércia nesse caso usando o teorema de Steiner:

$$I = I_{CM} + Md^2,$$

onde d é a distância do eixo de interesse ao centro de massa.

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh\theta - b\frac{d\theta}{dt} \qquad (7)$$

Por fim, podemos resolver a equação diferencial de segunda ordem acima obtendo o seguinte resultado:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-bt/2I} \cos\left(\sqrt{\left(\frac{Mgh}{I} - \frac{b^2}{4I^2}\right)} * t + \varphi\right) \qquad (8)$$

onde θ_0 é a amplitude inicial do movimento oscilatório amortecido e φ é a constante de fase, que depende da posição do pêndulo em $t = 0$.

2. Antes de iniciar

Verifique as peças do conjunto:

- Suporte de sustentação
- Conector USB
- Sensor de oscilações
- PC/software para coleta dos dados
- Haste
- Massa metálica
- Vasilhame
- Água

Verifique também se o PC está ligando corretamente e familiarize-se com o programa de coleta de dados.

2.1 Procedimento

- O aparato experimental consiste de uma haste fixa a um suporte por uma das extremidades. Neste mesmo ponto é fixado um sensor de movimento, o qual detecta o deslocamento angular da haste. Em algum ponto ao longo da haste deve ser acoplada a massa metálica.

- Após definida a posição da massa, meça todas as grandezas relevantes para a análise do pêndulo: massas, dimensões, posições. Veja que você irá precisar desses valores para realizar uma estimativa do momento de inércia do pêndulo.

8 - Conjunto a ser trabalhado.

Acima podemos ver o conjunto como ele deverá ser montado para a realização do experimento.

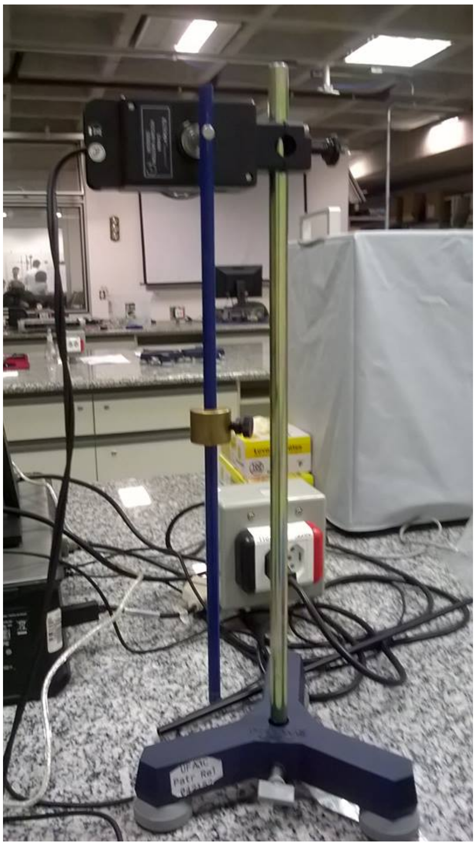
É interessante notar que a massa é suspensa por uma barra de aço de massa não desprezível.

9 – Conector USB

A imagem acima mostra o conector USB que deve ser ligado ao computador a fim de transmitir os dados.

- Inicialmente coloque o pêndulo físico (composto pela haste + massa metálica) a oscilar, abandonando-o de um ângulo inicial θ_0 pequeno (para que a aproximação seja válida) e colete os dados durante um certo tempo. O software conectado ao sensor irá fornecer um gráfico da posição angular em função do tempo.

- Em seguida, para simular o amortecimento, repita o procedimento com o pêndulo físico dentro do vasilhame com água.



10 - Equipamento com configuração distinta.

A mudança da posição do peso ao longo da haste irá alterar o momento de inércia do conjunto. Isso pode ser observado (embora não seja obrigatório) mudando a altura da peça metálica e observando a mudança de comportamento.

3 Questões

- Demonstre que a equação (8) é solução da equação (7).

- Descreva detalhadamente o procedimento de análise para obter, ***a partir da análise gráfica***, o momento de inércia do pêndulo físico.

- Determine o momento de inércia do pêndulo físico, e sua incerteza, a partir dos dados experimentais.

- Estime o momento de inércia e compare o valor experimental com o valor estimado. Explique a aproximação feita e mostre todos os cálculos para estimar o valor do momento de inércia.

- Determine o coeficiente de amortecimento a partir da análise das amplitudes do movimento amortecido. Para tanto, faça um gráfico linearizado relacionando os valores de amplitude e tempo.

Notas finais

Lembre-se que todos os valores apresentam incerteza, e é parte importante do relatório fazer as propagações de erro de forma bem organizada.

Faça seu relatório de forma concisa e bem estruturada.

Referências

Paul A. Tipler, Gene Mosca. Física para Cientistas e Engenheiros, vol. 1. 6a edição. Editora LTC.

David Halliday, Jearl W. Resnick. Fundamentos de Física, vol. 2. 8a edição. Editora LTC.

D. Young, Freedman. Física, vol. 2. 12a edição. Editora Pearso

Site http://galileo.rice.edu/lib/student_work/experiment95/galileo_pendulum.html acessado 10/06/2017

Site http://galileo.rice.edu/bio/narrative_2.html acessado 10/06/2017

Site http://cnx.org/content/m11929/latest/ acessado 10/06/2017

Site http://historiadafisicauc.blogspot.com.br/2011/06/galileo-e-o-pendulo.html acessado 10/06/2017

Figuras

1 - Galileu Galilei - https://pt.wikipedia.org/wiki/Galileu acessado 10/06/2017 Licença padrão da Wikipédia

4 - http://efisica.if.usp.br/mecanica/basico/corpos_rigidos/rotacoes/ acessado 12/07/2017

5 - Brook Taylor https://en.wikipedia.org/wiki/Brook_Taylor acessado 10/06/2017 Licença padrão da Wikipédia

8 - Manual Pêndulo Físico Amortecido UFABC

9 - Manual Pêndulo Físico Amortecido UFABC

As demais imagens são todas próprias e seu uso é livre.