MODULO 2: TEMPERATURA E A TEORIA CINÉTICA DOS GASES

(2.6) Livre Caminho Médio

Livro: Fundamentos de Física, Halliday, Vol. 2)

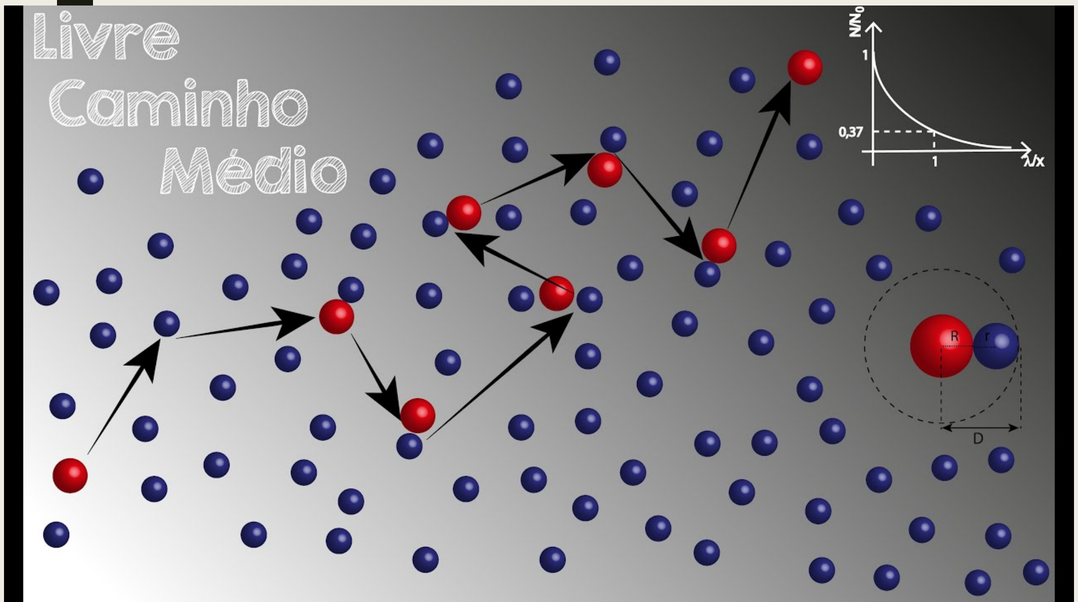
unidade 19.6 (páginas 223-225)

(2.7) Distribuição das Velocidades Moleculares

Livro texto: Princípios de Física, Serway, Vol. 2

unidade 16.6 (páginas 147-149)

2.6 – Livre Caminho Médio (19.6 do livro Halliday)

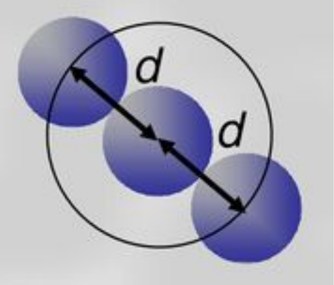


$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\, d^2 \left(\frac{N}{V}\right)}$$

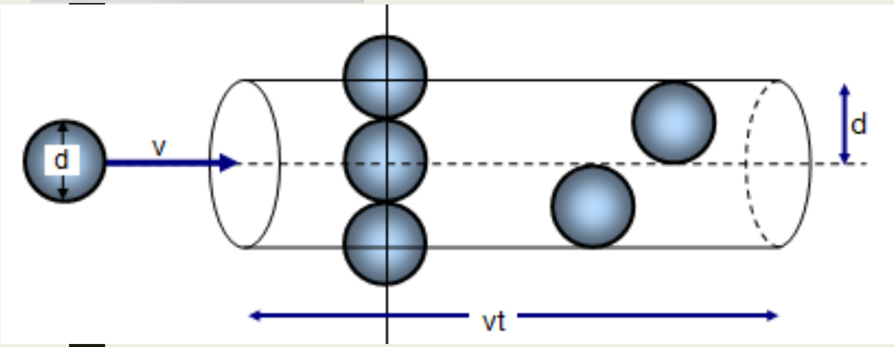
- **N =** Número de moléculas
- **V =** Volume
  - **N/V** = Número de moléculas por unidade de volume.
- **d =** Diâmetro da molécula.

- Considere a trajetória de uma molécula dentro de um gás.
- A molécula colide elasticamente com outras moléculas vizinhas enquanto se move.
  - *A molécula sofre mudanças na magnitude e direção da velocidade.*
  - *Entre 2 colisões, a molécula se move em linha reta com* ***v****=constante*
- **Livre Caminho Médio da molécula (λ) =** Distância média percorrida por uma molécula entre 2 colisões.

Livre Caminho Médio : Outras Moléculas em Repouso



- Cada molécula é uma esfera de **diâmetro d, velocidade v.**
  - Colisão acontece quando os centros de 2 moléculas estão a distância **d** um do outro.
- Quando a molécula se move, ela colide com outras moléculas existentes dentro de um **cilindro de raio d** centrado nela.



$$\lambda = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Número de colisões}} \text{(em } \Delta t\text{)}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{v\,\Delta t}{\left(\frac{N}{V}\right)\,\pi d^2\, v\Delta t} = \frac{1}{\pi d^2 \left(\frac{N}{V}\right)}}$$

- Área da seção transversal do cilindro = **πd^2**
- Em tempo = **Δt**, distância percorrida por molécula = **$v\,\Delta t$**
  - *Esta distância é o comprimento do cilindro das colisões.*
- Volume do cilindro de colisões = **$(\pi d^2)\,(v\,\Delta t)$**
- Número de colisões = N. de moléculas dentro do cilindro = **$(N/V)\,(\pi d^2\, v\Delta t)$**

Livre Caminho Médio

- Livre Caminho Médio, quando as outras moléculas estão em repouso :

$$\lambda_{ap} = \frac{1}{\pi d^2 \left(\frac{N}{V}\right)}$$

- Mas, na verdade, as outras moléculas também estão se movendo.
- Numerador: Velocidade média das moléculas em relação ao recipiente = $\mathbf{v_{med}}$
- Denominador: Velocidade de uma molécula em relação às outras moléculas = $\mathbf{v_{rel}}$

$$\lambda_{ap} = \frac{v_{med}\, \Delta t}{\left(\frac{N}{V}\right) \pi d^2\ v_{rel}\, \Delta t}$$

- Usando uma derivação mais complicada → $v_{rel} = \sqrt{2}\ v_{med}$

- A diferença entre $\boldsymbol{\lambda_{ap}}$ e $\boldsymbol{\lambda}$ é apenas por um fator $\mathbf{1/\sqrt{2}}$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\, \pi\, d^2 \left(\frac{N}{V}\right)}}$$

Exemplo 19-4

(a) Qual é o livre caminho médio λ de moléculas de oxigênio à temperatura $T = 300$ K e a uma pressão $p = 1{,}0$ atm? Suponha que o diâmetro das moléculas é $d = 290$ pm e que o gás é ideal.

- Unidade de diâmetro = pm = picômetro
- 1 picômetro = 10^{-12} m

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\, d^2 \left(\frac{N}{V}\right)}}$$

$$P\,V = N\,k_B\,T$$

Cálculo: Para aplicar a Eq. 19-25 precisamos conhecer o número de moléculas por unidade de volume, N/V. Como estamos supondo que se trata de um gás ideal, podemos usar a lei dos gases ideais na forma da Eq. 19-9 ($pV = NkT$) para escrever $N/V = p/kT$. Substituindo este valor na Eq. 19-25, obtemos

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2\ N/V} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2\ p}$$

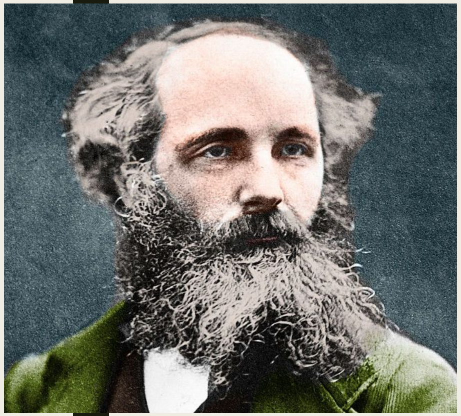
$$= \frac{(1{,}38\times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})}{\sqrt{2}\pi(2{,}9\times 10^{-10}\ \text{m})^2\,(1{,}01\times 10^5\ \text{Pa})}$$

$$= 1{,}1 \times 10^{-7}\ \text{m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este valor corresponde a cerca de 380 vezes o diâmetro de uma molécula de oxigênio.

2.7 – Distribuição de Velocidades Moleculares

(16.6 do livro Serway)



- **James Clerk Maxwell** (1831-1879, cientista da Escócia) desenvolveu um modelo teórico para a distribuição de velocidades de moléculas.
  - *Na década de 1860.*
  - *Experimentos só foram possíveis na década de 1920 que confirmaram as previsões teóricas de Maxwell.*

❖ Qual é a distribuição das velocidades das moléculas que esperamos de um gás contido em um recipiente?

- Intuitivamente, esperamos que a distribuição das velocidades:
  - Dependa da temperatura.
  - Tem um pico ao redor de v_{vmq} .

Velocidade Médio Quadrático

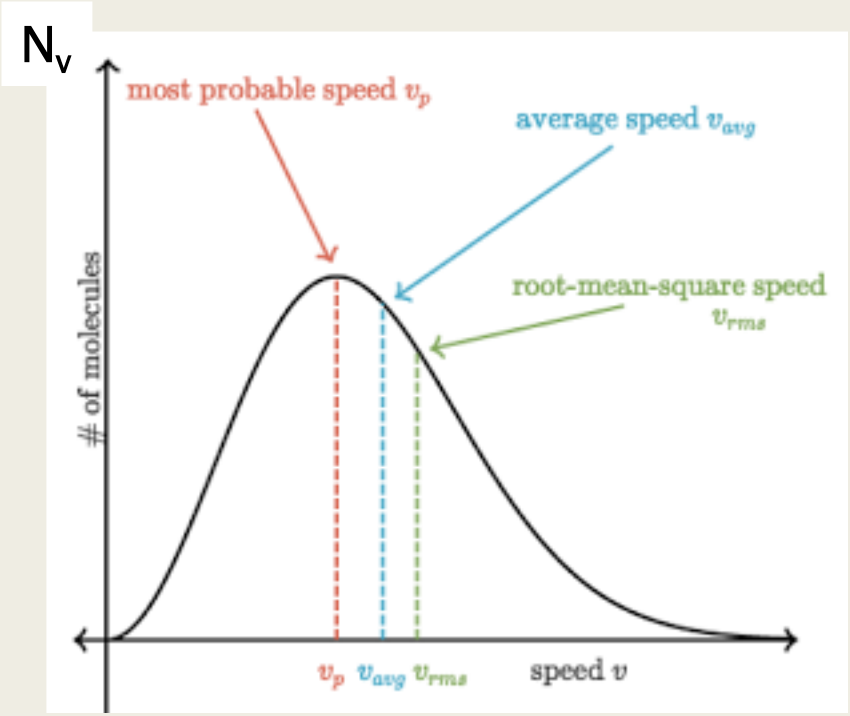
$$v_{vmq} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

○ Algumas moléculas podem ter velocidades muito menores ou muito maiores do que v_{vmq} , porque há um grande número de moléculas passando por colisões aleatórias.

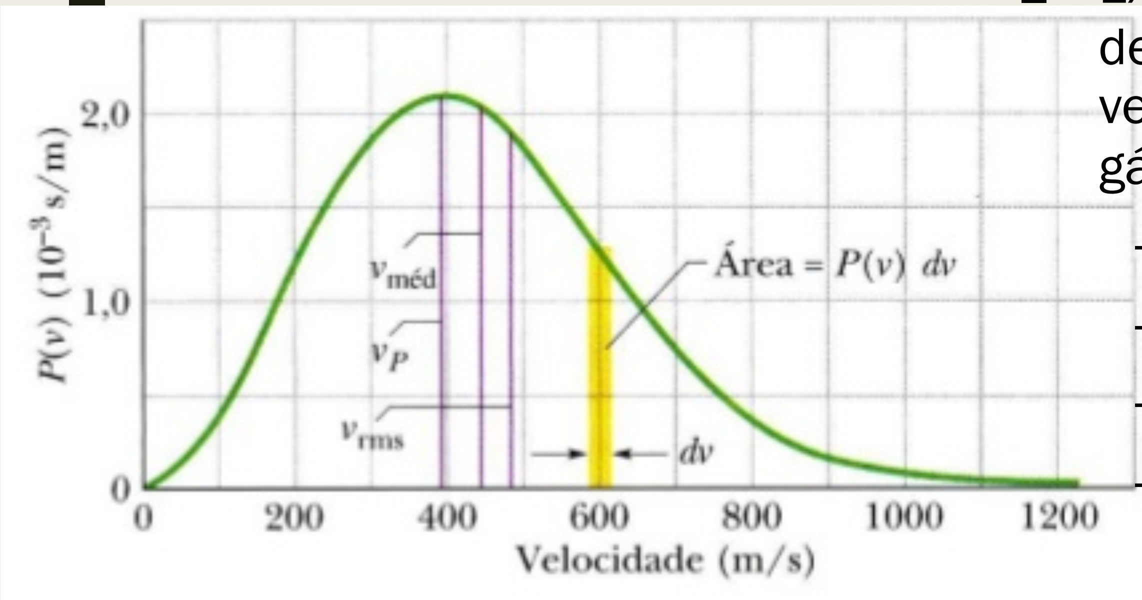
Função de Distribuição Maxwell-Boltzmann

✓ A distribuição da velocidade das moléculas de gás em equilíbrio térmico é observado como tendo uma forma de sino assimétrica (figura).

- **N_v = Função de distribuição Maxwell-Boltzmann das velocidades.**
  - **N** = Número total de moléculas de gás.
- Número de moléculas com velocidade entre **v** e **v+dv : dN = N_v dv**
- Fração de moléculas com velocidade entre **v** e **v+dv : f_v = N_v dv / N**
  - Também, **f_v** = Probabilidade de que uma molécula tenha uma velocidade na faixa de **v** a **v+dv** .



Função de Distribuição Maxwell-Boltzmann



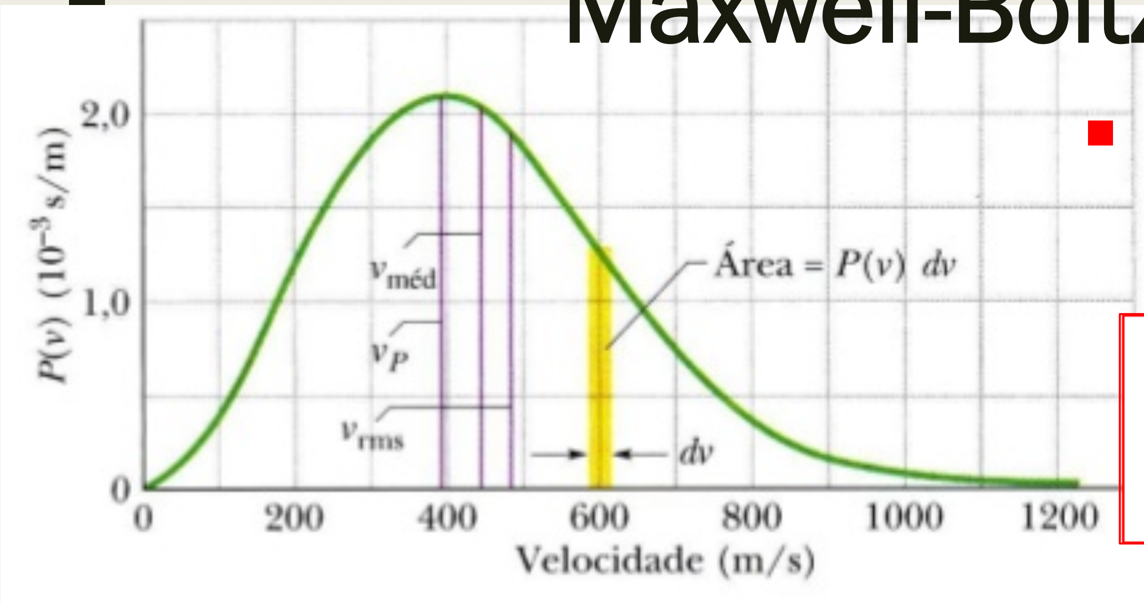
- Expressão matemática que descreve a distribuição das velocidades das **N** moléculas de gás, usando:
  - **v** = Velocidade
  - **m_0** = Massa de uma molécula
  - **k_B** = Constante de Boltzmann
  - **T** = Temperatura absoluta.

$$\boxed{N_v = 4\pi N \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2\, e^{\frac{-m_0 v^2}{2k_B T}}}$$

$$\int_{v=0}^{\infty} N_v\, dv = N$$

➢ Número de moléculas com velocidade entre **v** e **v+dv : dN = N_v dv**
  - Esse número também é igual à área do retângulo sombreado amarelo na figura.

Velocidades Relevantes na Distribuição Maxwell-Boltzmann



- v_{mp} = Velocidade Mais Provável
  - Em qual v a curva de distribuição atinge um pico.

$$\boxed{v_{mp} = \sqrt{\frac{2\,k_B T}{m_0}} = 1,41\sqrt{\frac{k_B T}{m_0}}}$$

- $v_{méd}$ = Velocidade Média

$$\boxed{v_{\text{méd}} = \sqrt{\frac{8\,k_B T}{\pi\,m_0}} = 1,60\sqrt{\frac{k_B T}{m_0}}}$$

$$v_{mp} < v_{\text{méd}} < v_{vmq}$$

- v_{vmq} = Velocidade Médio Quadrático

$$\boxed{v_{vmq} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_0}} = 1,73\sqrt{\frac{k_B T}{m_0}}}$$

Distribuição MB em Temperaturas Diferentes

- Curvas de distribuição de velocidade (função de Maxwell-Boltzmann) em duas temperaturas.
  - $T_2 > T_1$
- **O pico de cada curva se desloca para a direita conforme T aumenta.**
  - ➜ a velocidade médio quadrático aumenta com o aumento da temperatura, como esperado.
- **A largura da curva aumenta com a temperatura.**
- A forma das curvas é assimétrica porque a velocidade mais baixa possível é zero, enquanto o limite superior da velocidade clássica é infinito.