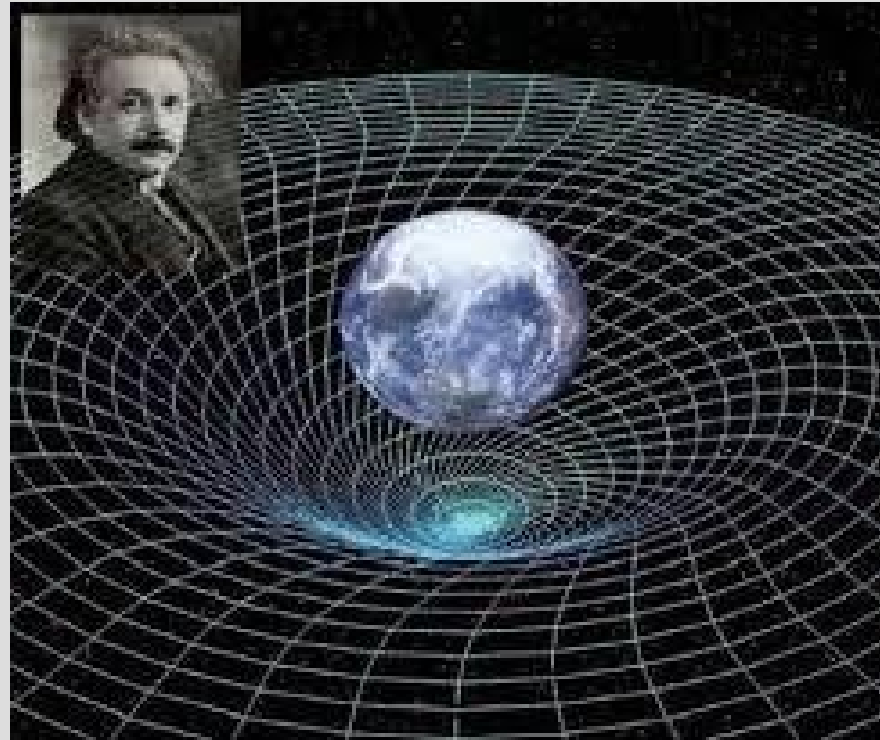


Relatividade Geral: o que é, para que serve



Ronaldo S. S. Vieira

Astronomia ao meio-dia, 01 de junho de 2017

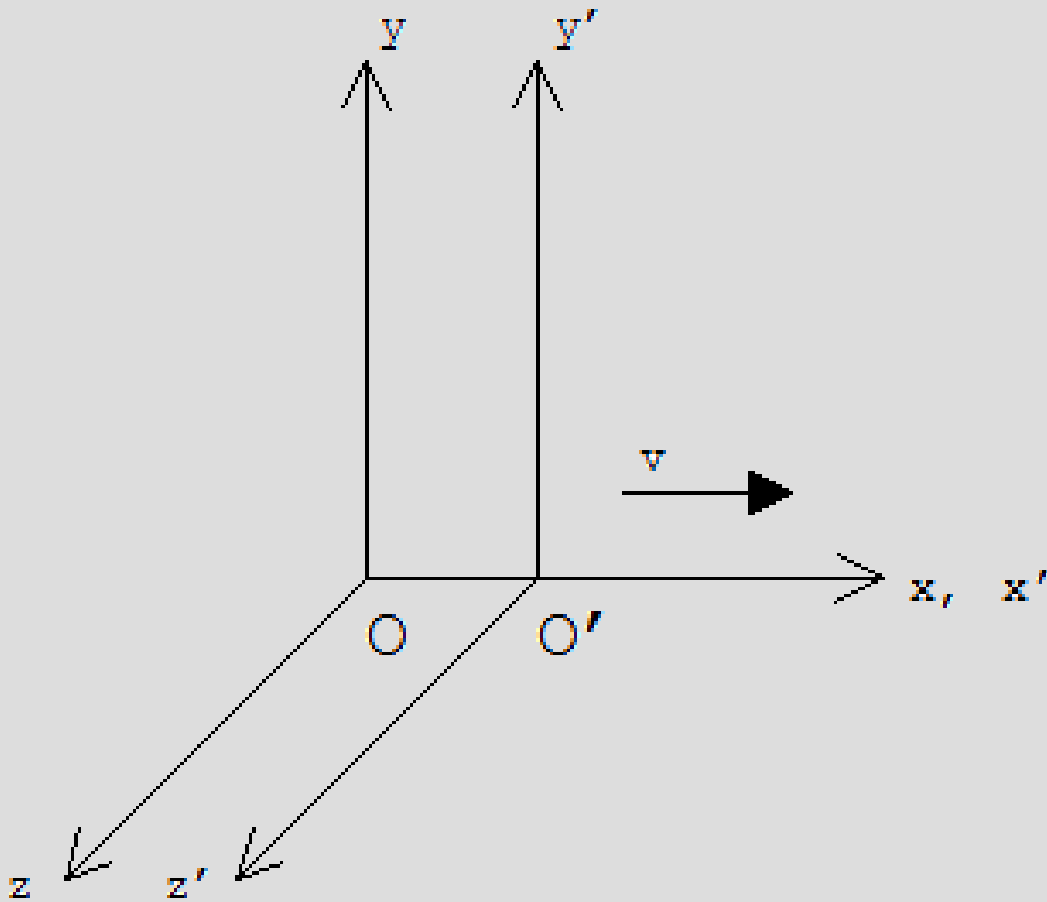
Mecânica clássica

1. Existem referenciais, ditos “inerciais”, tais que na ausência de forças externas um corpo permanece parado ou em movimento uniforme.
2. Nesses referenciais, a aceleração de um corpo é dada pela relação

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

onde \mathbf{F} é a força resultante sobre o corpo e \mathbf{m} é sua massa.

Princípio da relatividade de Galileu



$$x' = x - V t$$

$$t' = t \quad \text{tempo absoluto}$$

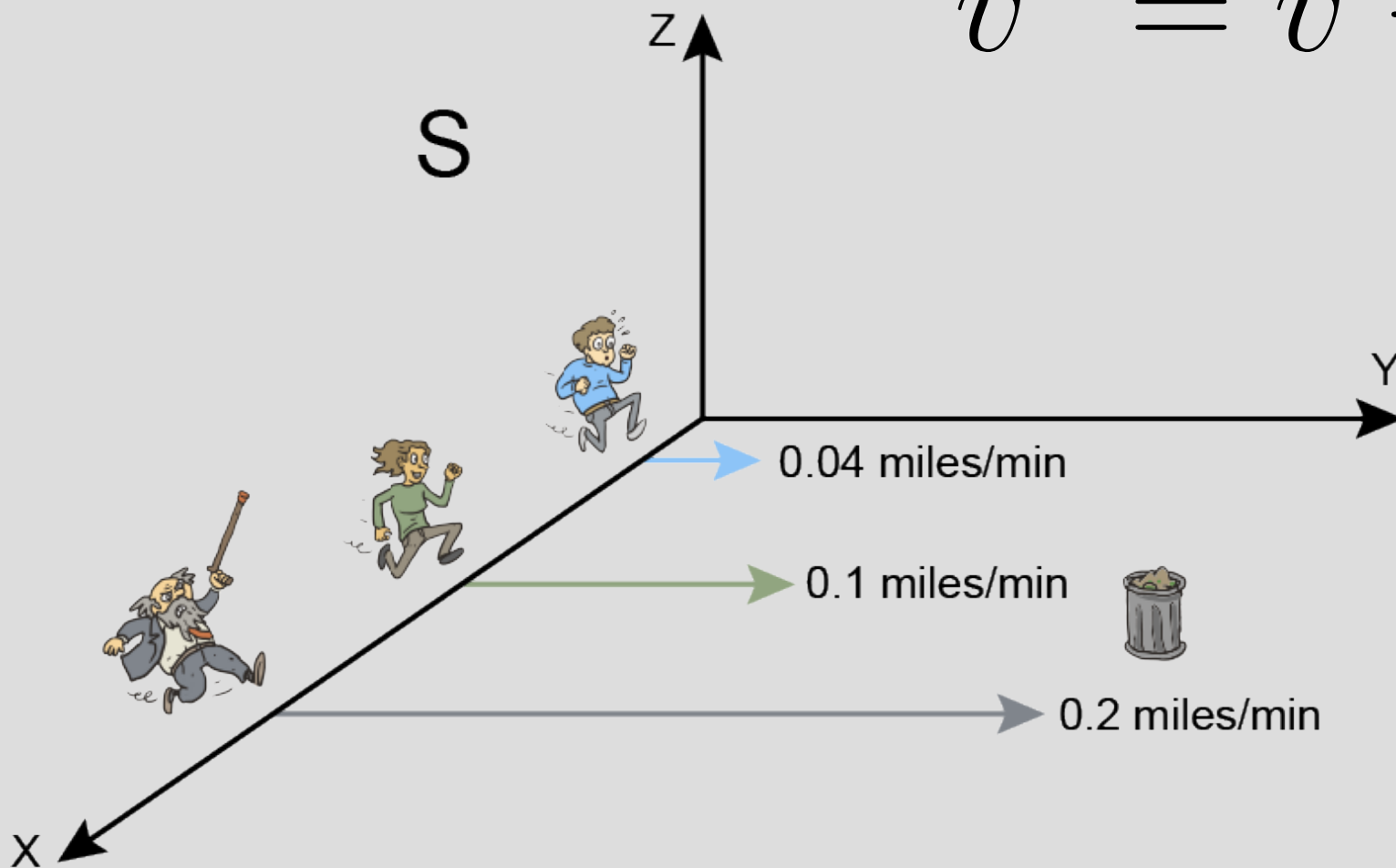
$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

Referenciais inerciais são equivalentes no que diz respeito à dinâmica

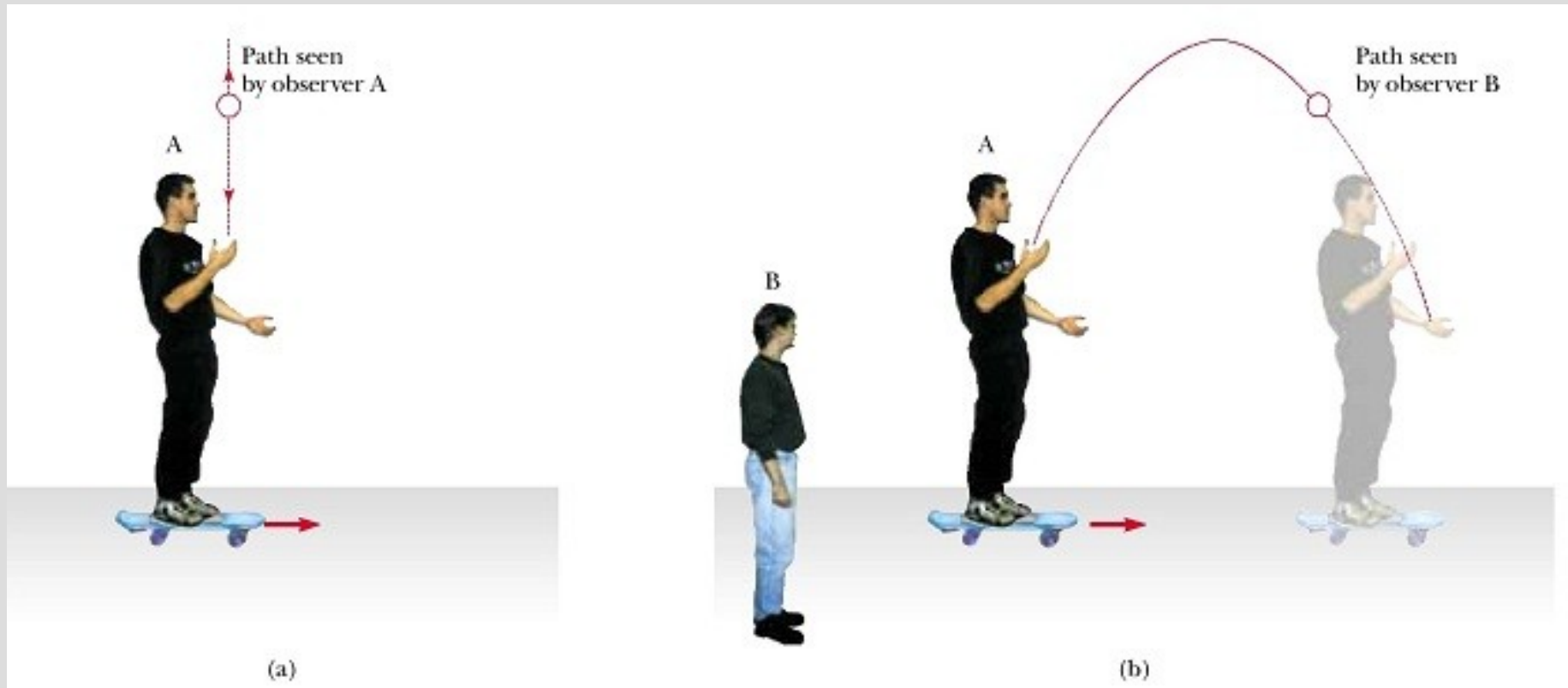
Dois referenciais inerciais medem velocidades diferentes

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$



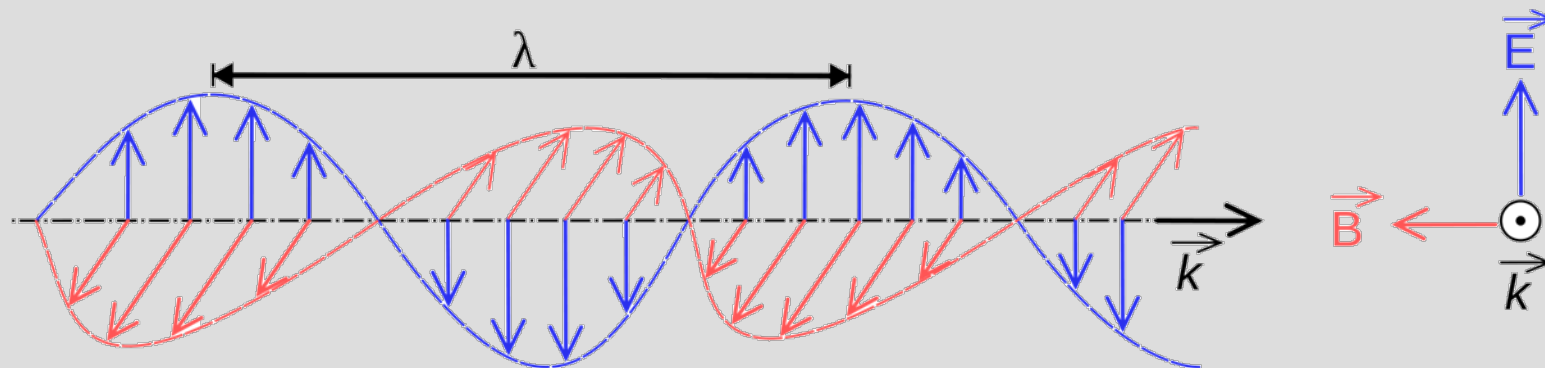
$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

$$\vec{a}' = \vec{a}$$



Eletromagnetismo (Maxwell)

A luz se propaga com velocidade $c = 300.000 \text{ km/s}$



Perguntas:

- Em que meio?
- em qual referencial?

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{V} \quad ??$$

Problema!!

1. Princípio da relatividade:

Todos os referenciais inerciais são equivalentes

2. Eletromagnetismo de Maxwell:

A luz viaja com velocidade c

3. Mecânica newtoniana e transformações de Galileu:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{V} t$$

$$t' = t$$

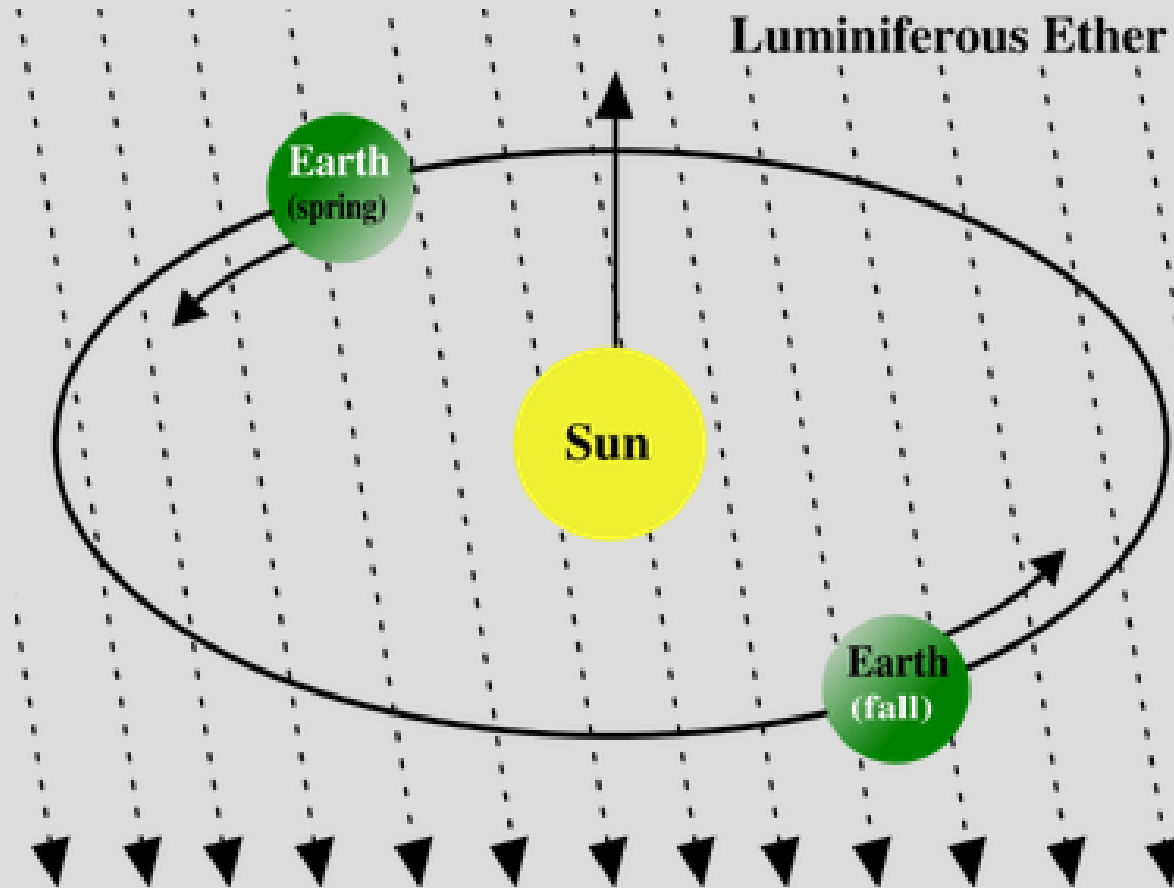
$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

a) Transformações de Galileu e eletromagnetismo de Maxwell válidos: não vale o princípio da relatividade (referencial inercial privilegiado: éter)

b) Princípio de relatividade e transformações de Galileu válidas: O eletromagnetismo de Maxwell precisa ser modificado

c) Princípio de relatividade e eletromagnetismo de Maxwell válidos: Precisamos mudar as transformações de Galileu entre os referenciais.

Experimento de Michelson-Morley



A luz viaja **no vácuo** sempre com velocidade **c**, em qualquer referencial inercial!

Relatividade especial de Einstein:

1. Todos os referenciais inerciais são equivalentes no que se refere às leis físicas

2. A luz se propaga (no vácuo) com a mesma velocidade c em todos os referenciais inerciais, independente do movimento da fonte

$$c = \Delta x / \Delta t = \Delta x' / \Delta t'$$

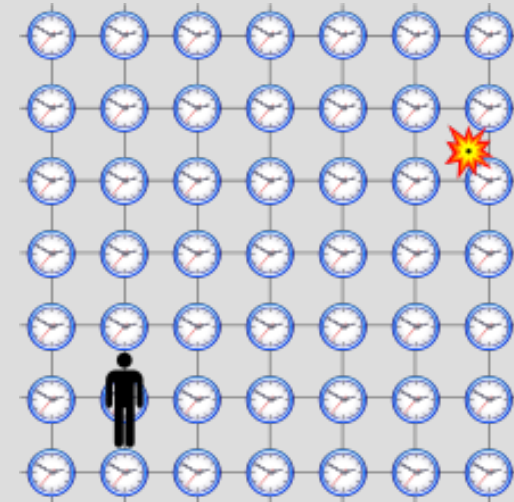
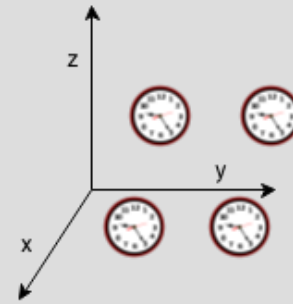
$$(c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (c \Delta t')^2 - (\Delta x')^2$$

Válido também para partículas com massa!

$$(c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (c \Delta t')^2 - (\Delta x')^2$$

Antes, todos os observadores inerciais mediam o mesmo tempo.

Com a relatividade especial, diferentes observadores medem intervalos de tempo diferentes para o mesmo fenômeno!



$$t' \neq t$$

Transformações de Lorentz

$$x' = \frac{x - V t}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

$$v' = \frac{v - V}{1 - vV/c^2}$$

$$t' = \frac{t - V x/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

Galileu:

$$x' = x - V t$$

$$t' = t$$

$$t' \neq t$$

Não valem as transformações de Galileu!

Espaço-tempo de Minkowski

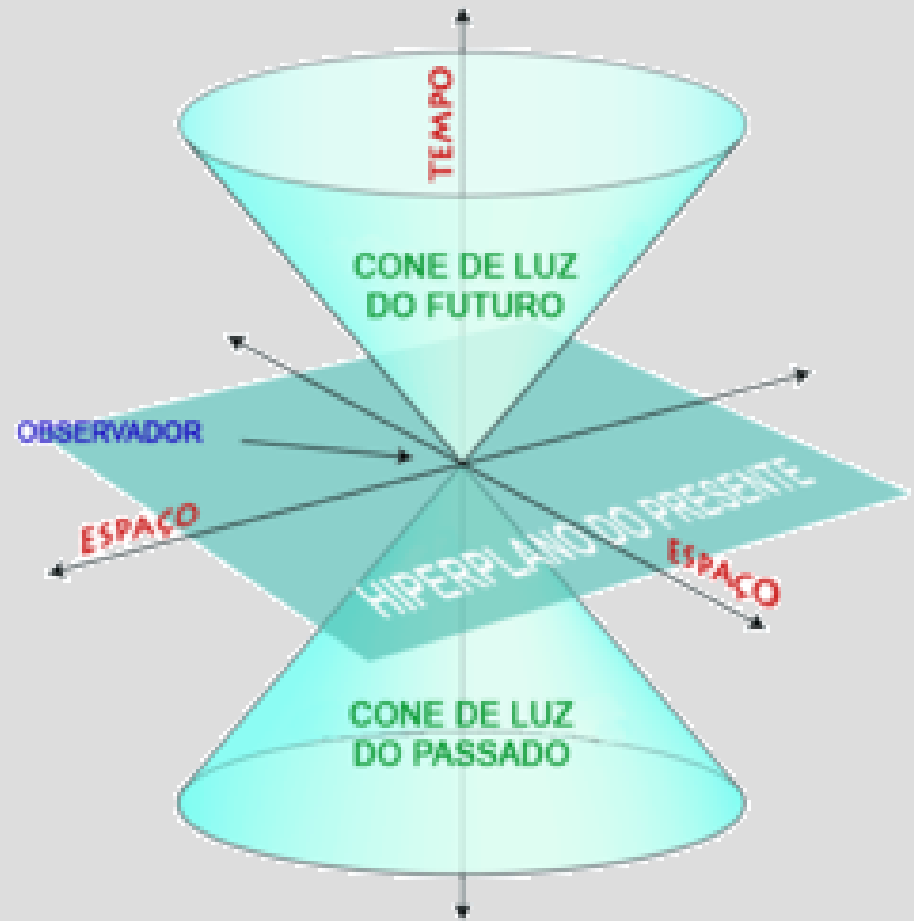
De ora em diante, espaço por si mesmo e tempo por si mesmo estão fadados a desvanecer-se em meras sombras, e apenas uma espécie de união dos dois preservará uma realidade independente.

– Hermann Minkowski
(1864–1909)

$$x' = \frac{x - V t}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

$$t' = \frac{t - V x/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

$$t' \neq t$$



Dilatação do tempo

Objeto parado no referencial S' : $\Delta x' = 0$

Estamos no referencial S , que se move com velocidade constante em relação a S'

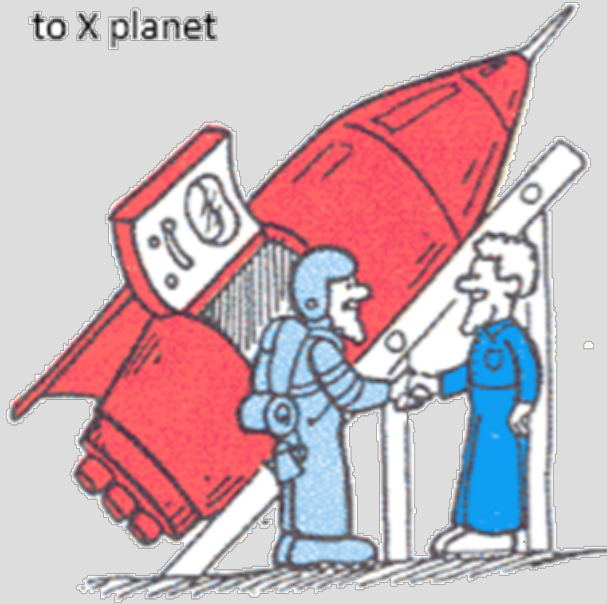
$$(c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (c \Delta t')^2 - (\Delta x')^2$$

$$(c \Delta t)^2 = (c \Delta t')^2 + (\Delta x)^2$$

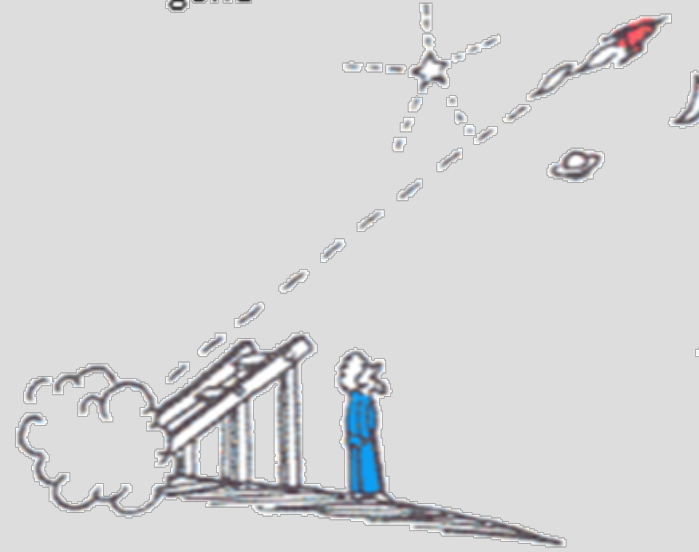
$$\Delta t > \Delta t'$$

“Paradoxo” dos gêmeos

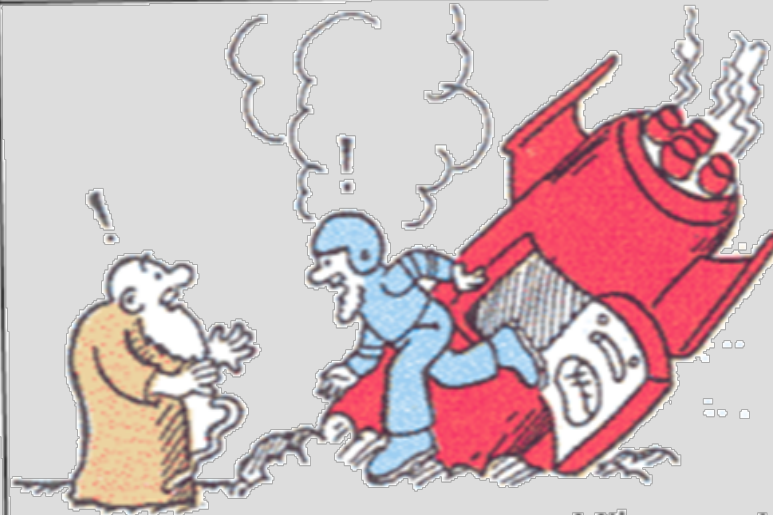
Miko leaves the Earth
to X planet



Miko is watching his
gone



Miko is waiting his back

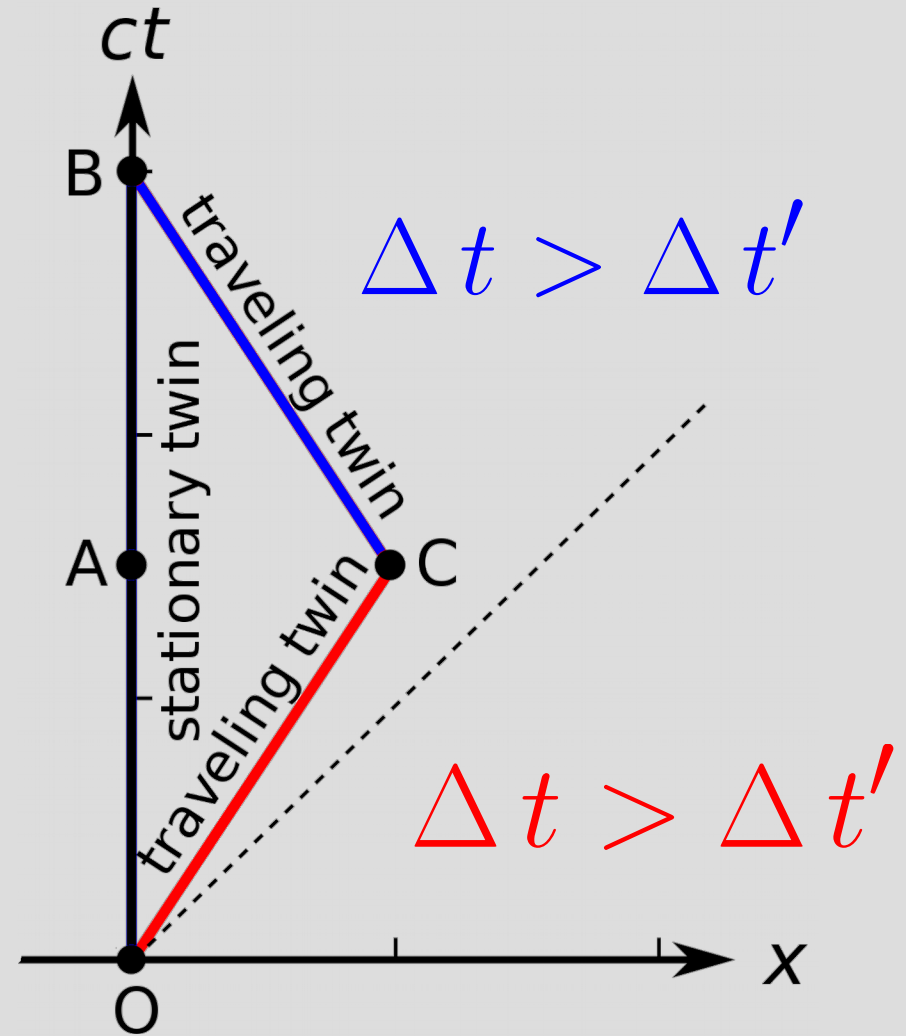


Miko surprises with
Miko's age

Um observador inercial **nunca verá** o outro passar por ele duas vezes.

Para que o foguete volte, ele precisa em algum momento **acelerar** (mudar a velocidade).

$$\Delta t > \Delta t'$$



A **aceleração** do foguete é que faz com que o astronauta volte mais novo!

Gravidade

$$F_g = \frac{G M m_g}{r^2}$$

E a lei da gravitação universal? Continua valendo?



Se valer, temos “ação à distância”!

Incompatível com a relatividade especial (a informação viaja com velocidade máxima c !)

Relatividade geral

Relatividade especial: compatibiliza o princípio da relatividade de Galileu e o eletromagnetismo

Relatividade geral: compatibiliza as teorias acima também com a gravidade!

- Uma visão do espaço na mecânica newtoniana e na teoria da relatividade de Einstein
<http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172008000100017>
- Geometria, espaço-tempo e gravitação: conexão entre conceitos da relatividade geral
<http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172009000400010>

Princípio de equivalência

Massa inercial
(2ª lei):

$$\vec{F} = m_i \vec{a}$$

Massa gravitacional:

$$\vec{F}_g = m_g \vec{g}$$

Conclusão:

$$m_i \vec{a} = m_g \vec{g}$$

Experimento de Galileu



$$\vec{a} = \vec{g} \rightarrow m_i = m_g$$

Einstein elevou os resultados experimentais a um **princípio!**

Princípio de equivalência 1:

$$m_i = m_g$$

Logo, a gravidade pode ser vista como uma **força de inércia!**

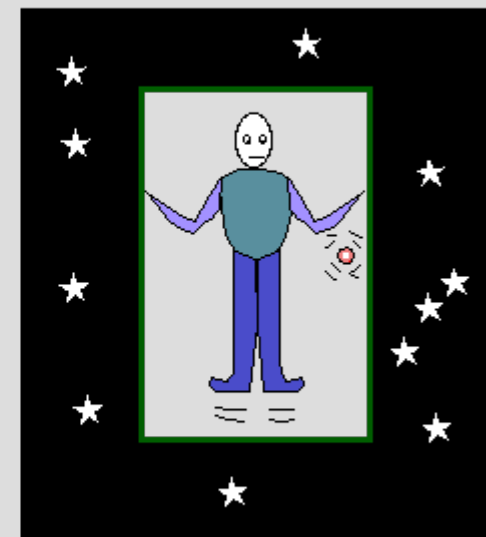
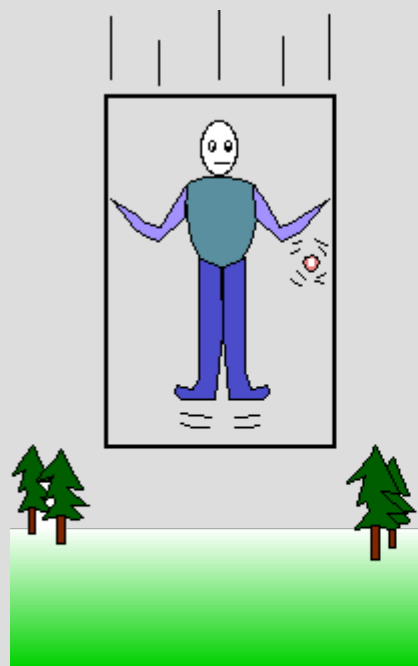
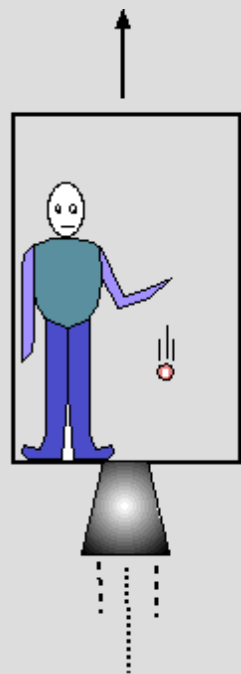
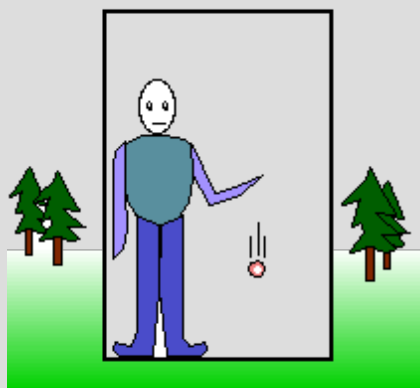
Princípio de equivalência 2:

Um referencial com aceleração constante na relatividade especial é **localmente** equivalente a um referencial em repouso em um campo gravitacional

Princípio de equivalência 3:

A queda livre em um campo gravitacional é **localmente** equivalente a um movimento uniforme na ausência de campo gravitacional

Elevador de Einstein



Things move the same way in a gravity field as those in a reference frame accelerating upward with the same magnitude.

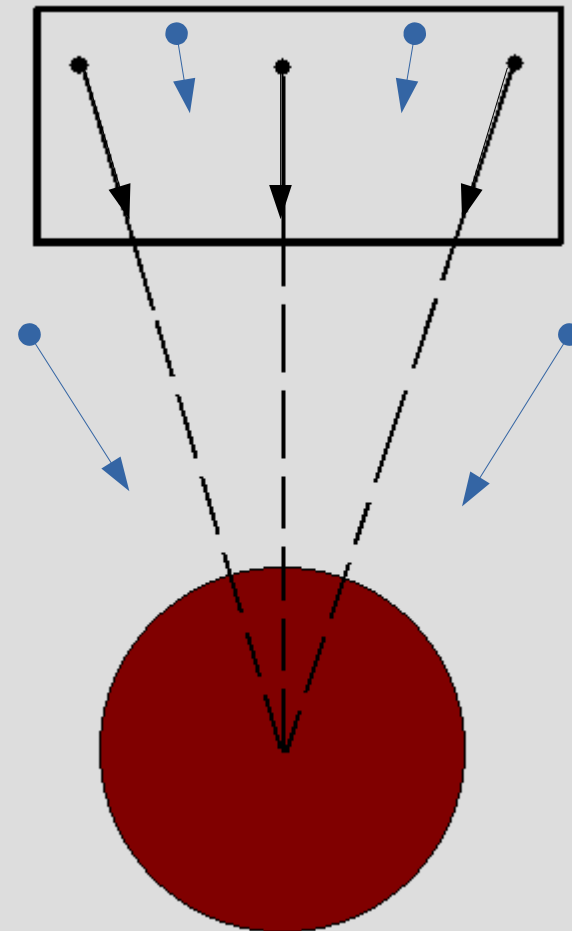
Things falling freely in a gravity field all accelerate by the same amount, so they move the same way as if they were in a region of zero gravity — “weightlessness”!

O princípio de equivalência vale apenas **localmente!!**



Em um elevador grande, **não vale** o princípio de equivalência!

Regiões maiores: efeitos de maré (o campo gravitacional não é constante)



Suponhamos que a gravidade esteja “embutida” na descrição do espaço-tempo.

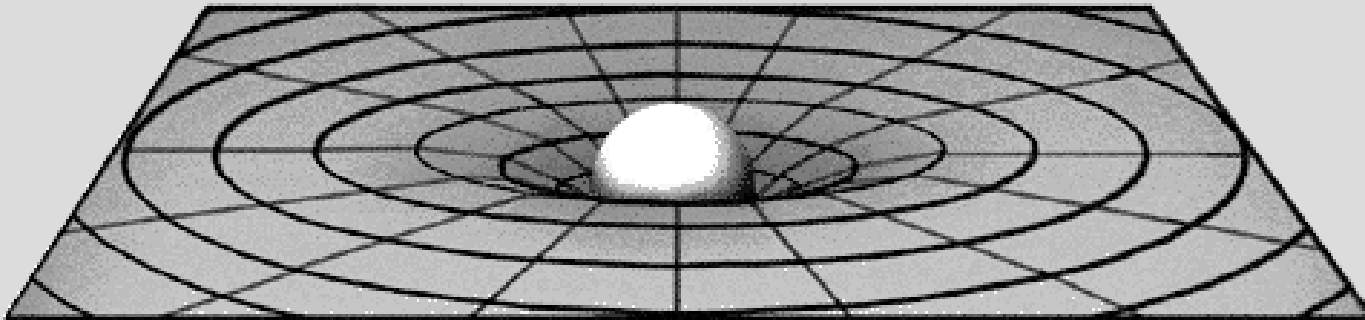
A força gravitacional varia de ponto a ponto. Quando estamos em um referencial em queda livre, cada “referencial inercial” equivalente vale apenas na região em que essa força não varia.

$$F_g = \frac{G M m_g}{r^2}$$

Ao longo da trajetória a “aceleração” equivalente ao referencial inercial varia.
Não existe referencial inercial global!

$$g = \frac{G M}{r^2} = g(r)$$

O princípio de equivalência implica então que o espaço-tempo é **curvo!!**



As trajetórias das partículas (geodésicas) não são linhas retas!

Formulação matemática

Gravitação newtoniana

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

$$\downarrow$$
$$\Phi$$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\nabla \Phi$$

Relatividade geral

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

$$\downarrow$$
$$g_{\mu\nu}$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0$$

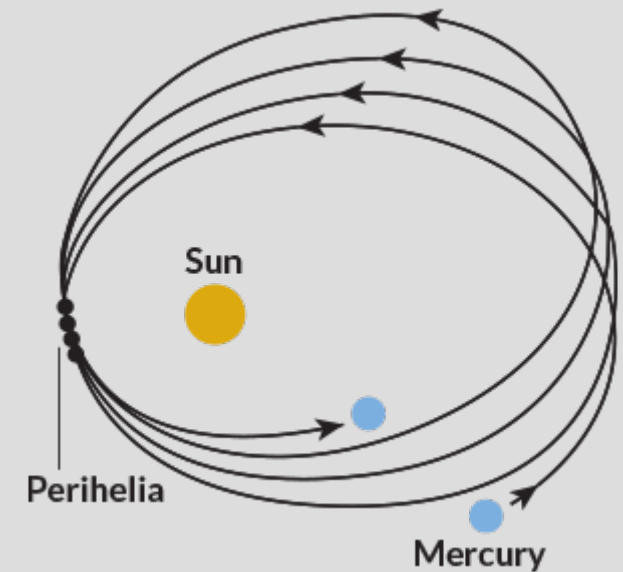
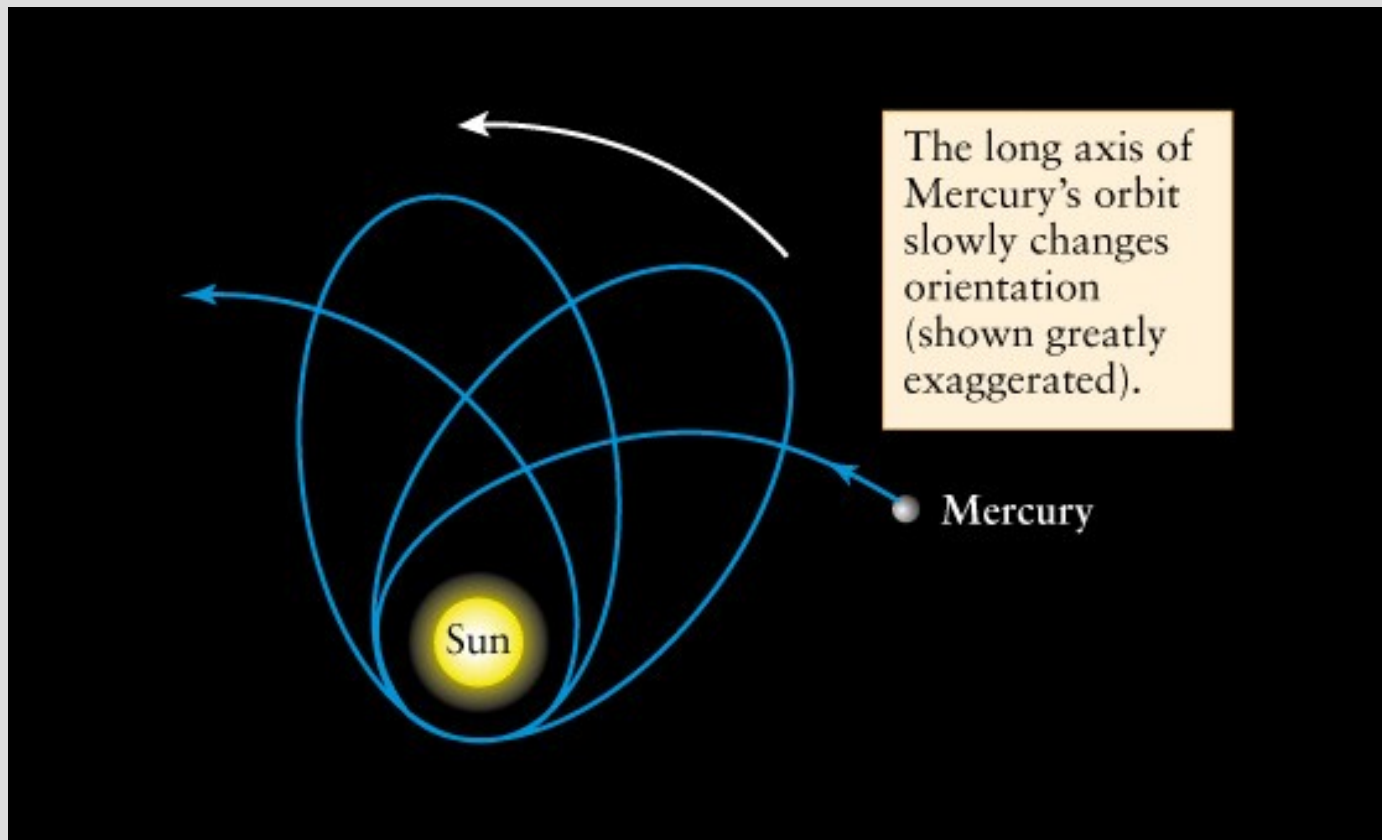
Testes da relatividade:

Precessão do periélio de mercúrio

$$F_g = \frac{G M m_g}{r^2} \longrightarrow \text{Órbitas são elipses!}$$

$$\Delta \phi = 6\pi \frac{GM/c^2}{r}$$

por órbita



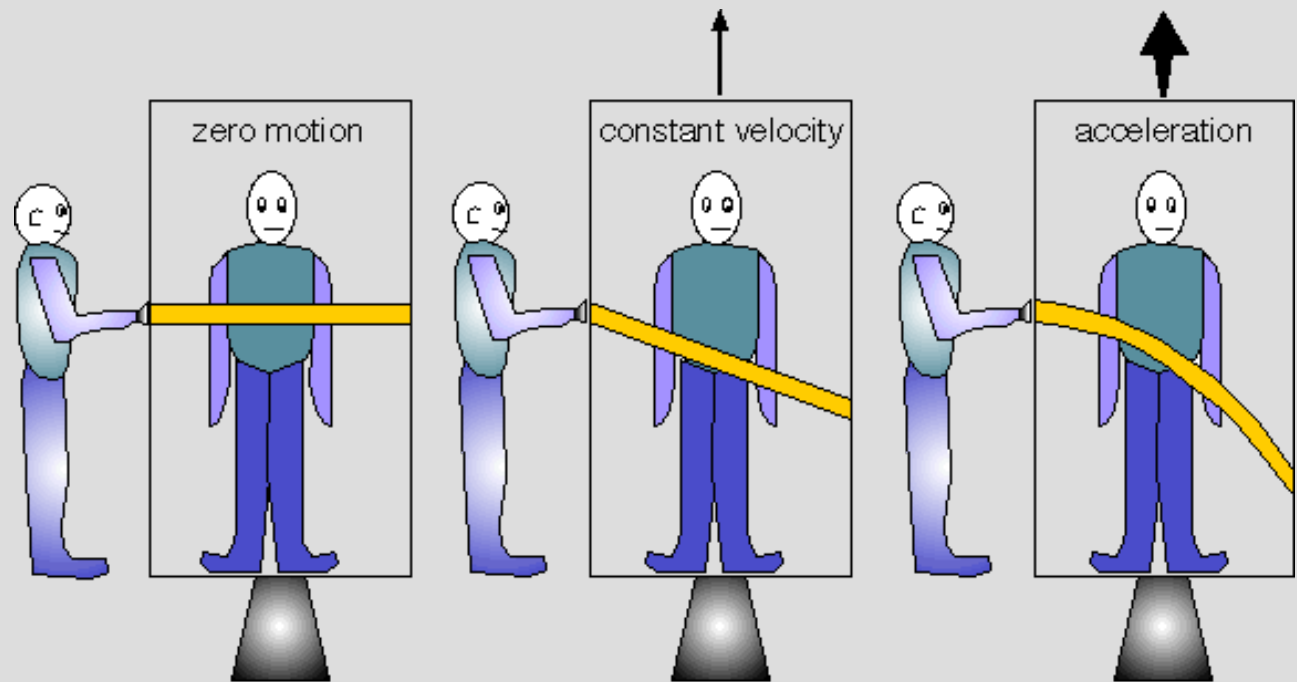
Deflexão da luz

Espaço plano: luz caminha em linha reta.

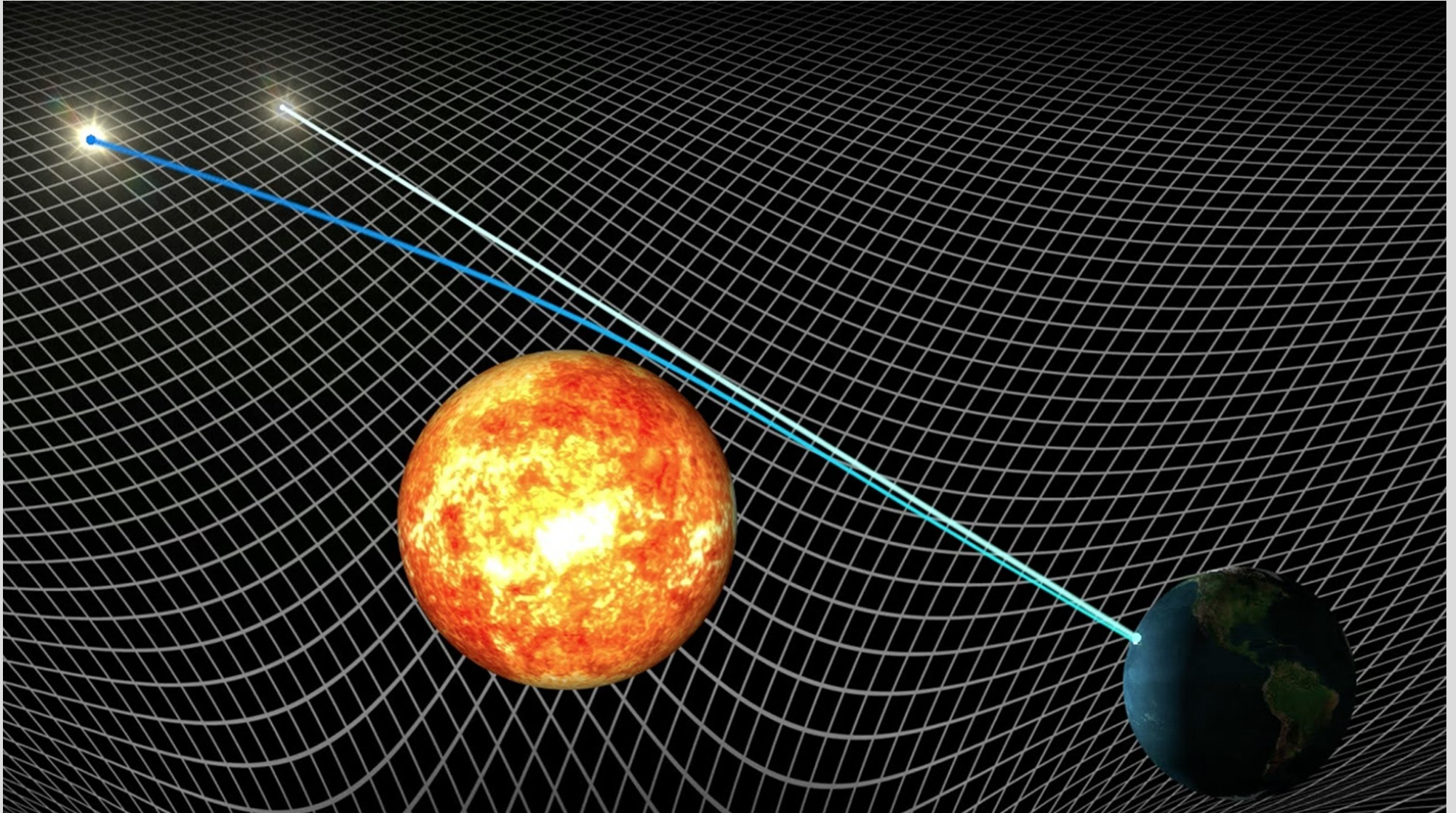
A luz deve se curvar em um elevador acelerado!

Idéia para
gravitação:
Usar princípio
de equivalência!

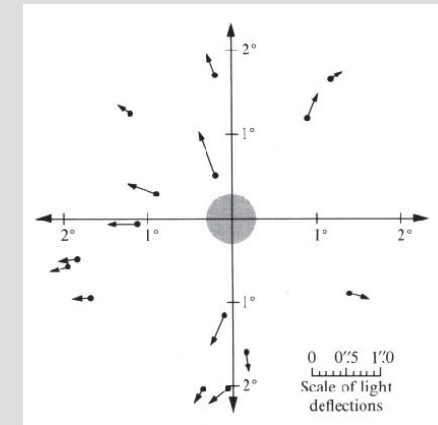
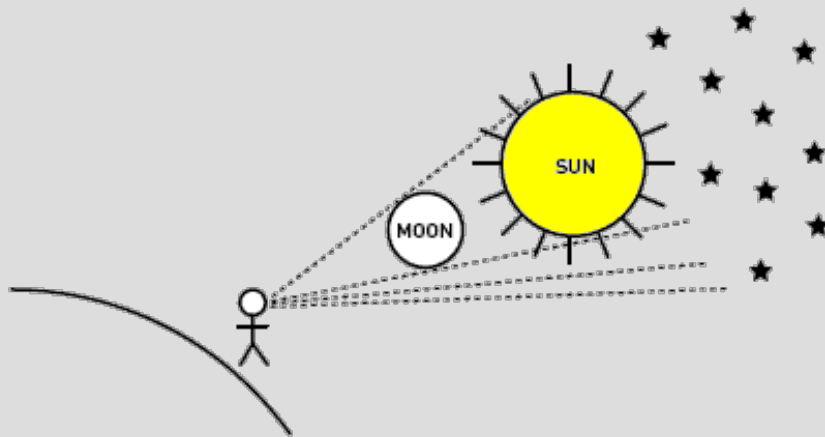
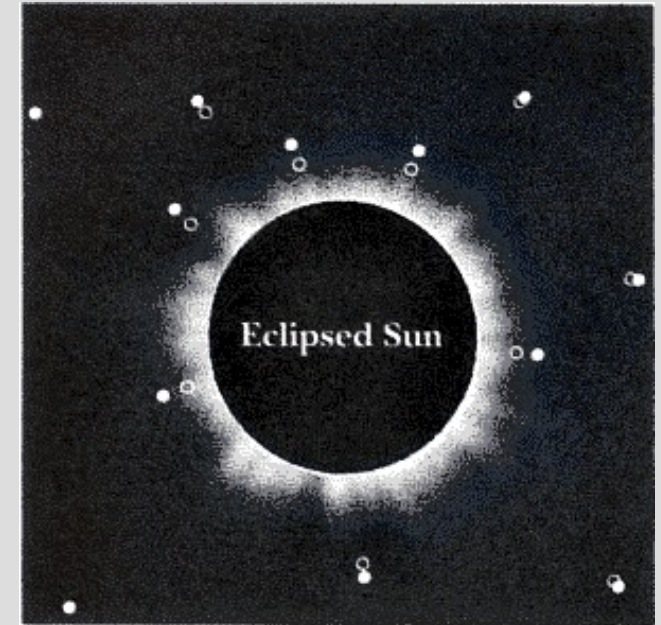
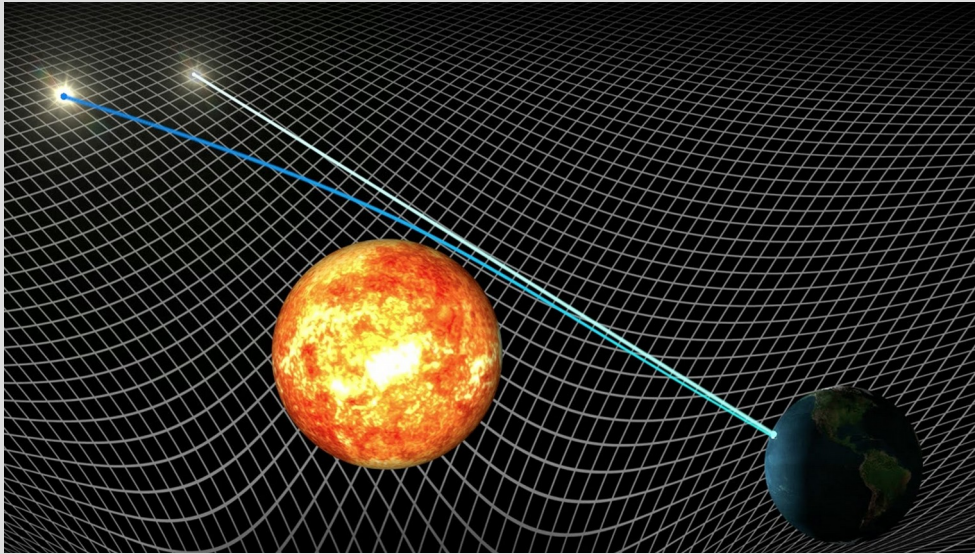
Os raios de
luz se curvam
na presença
de um campo
gravitacional!



The path of a light beam in three different types of reference frames moving with respect to the person *outside* the elevator. The light path shown is what the person *inside* the elevator sees. Under large acceleration, the beam of light will curve downward. It should also do that in a region of strong gravity.



Experimento de Eddington (Sobral, Ilha do Príncipe, 1919)



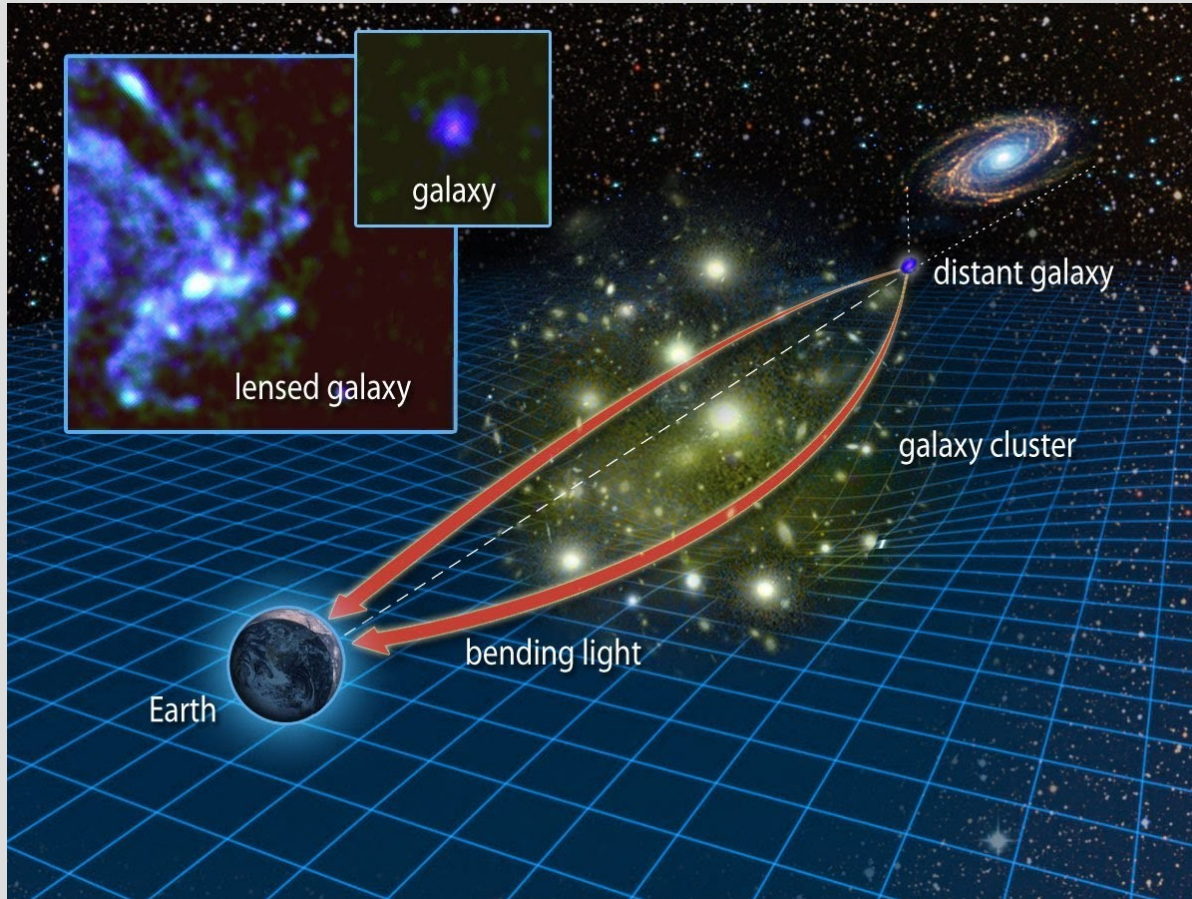
– O eclipse que confirmou Einstein:

<http://revistapesquisa.fapesp.br/2016/02/19/o-eclipse-que-confirmou-einstein/>

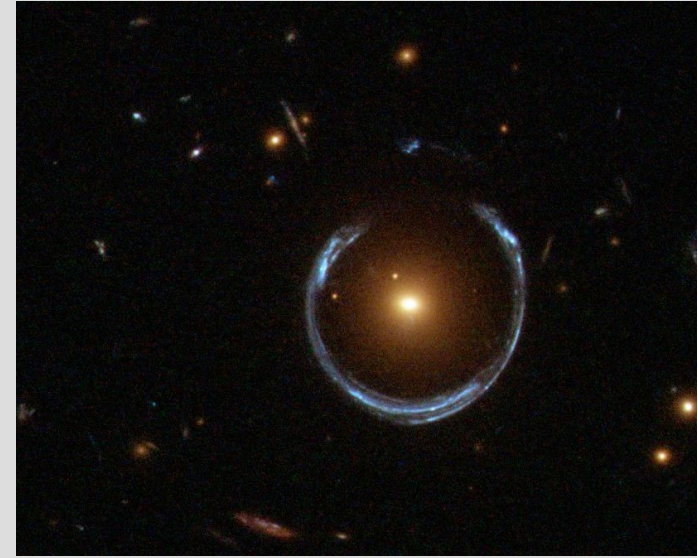
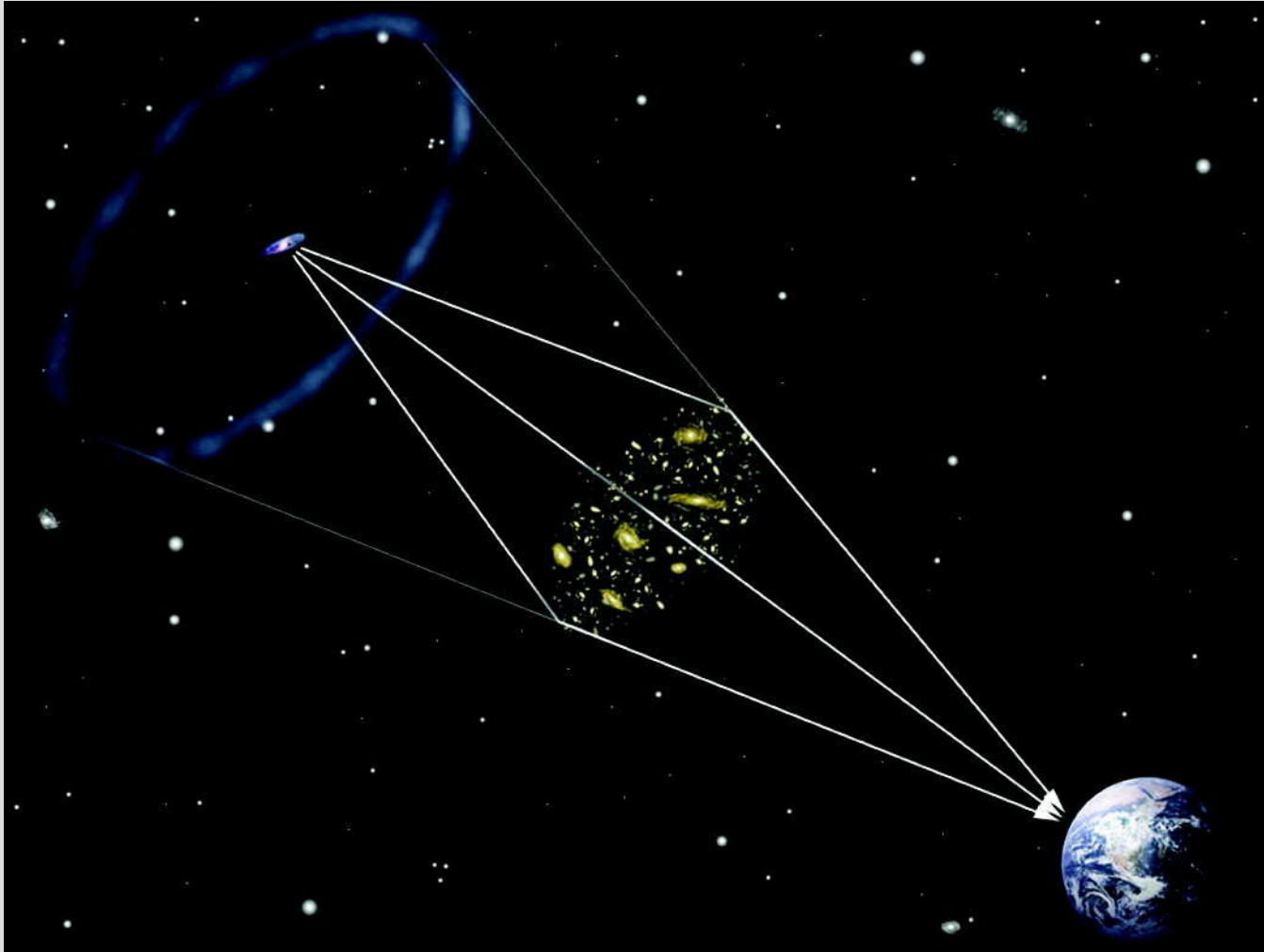
– A deflexão da luz pela gravidade e o eclipse de 1919:

<https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/download/9255/15164>

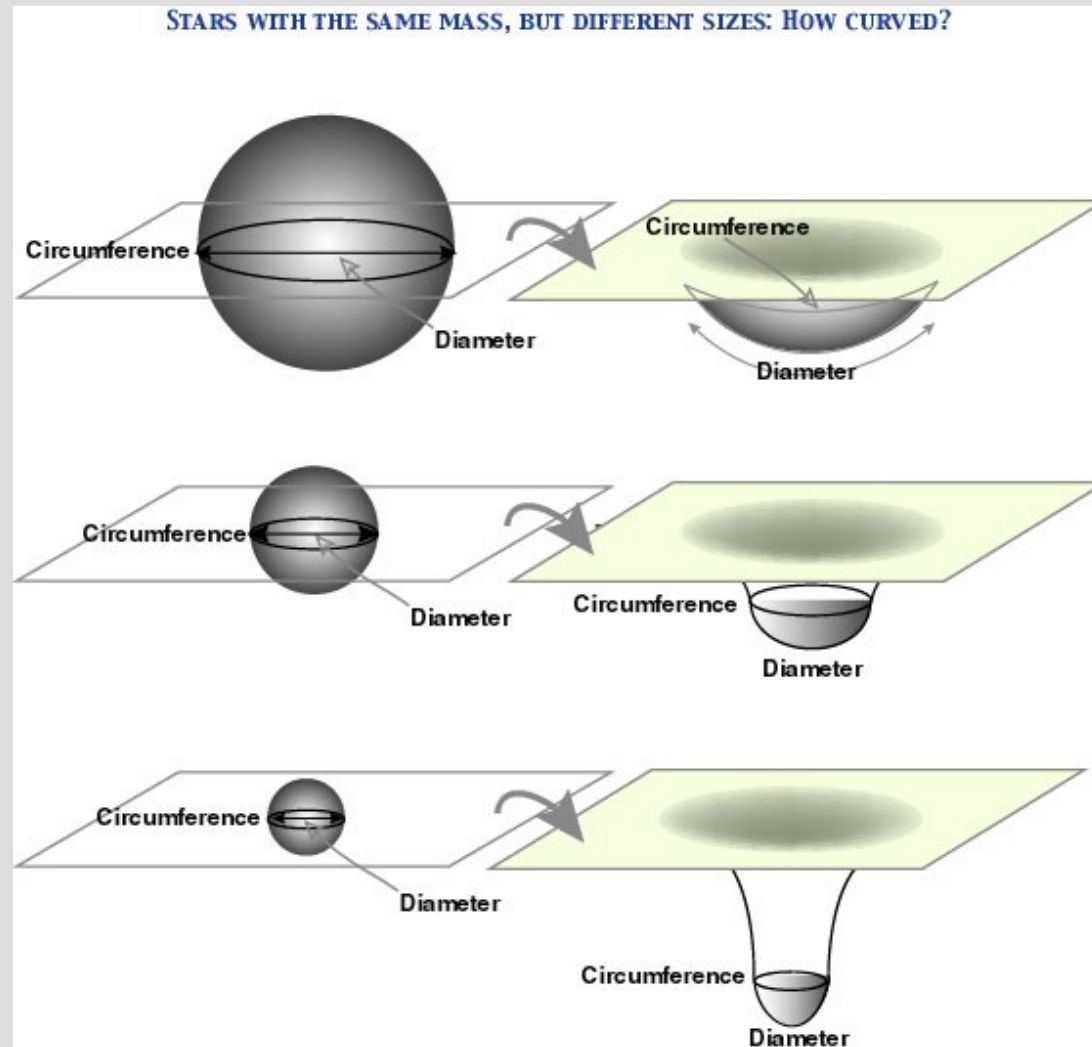
Lentes gravitacionais



Anéis de Einstein



Buracos negros



– Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de Schwarzschild
<http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0191>

Métrica de Schwarzschild

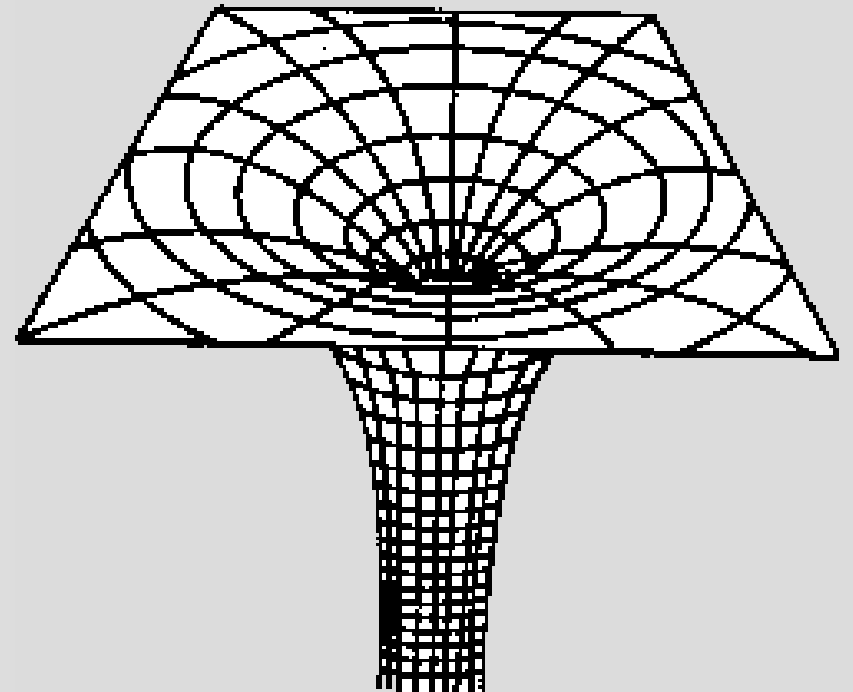
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Estrela



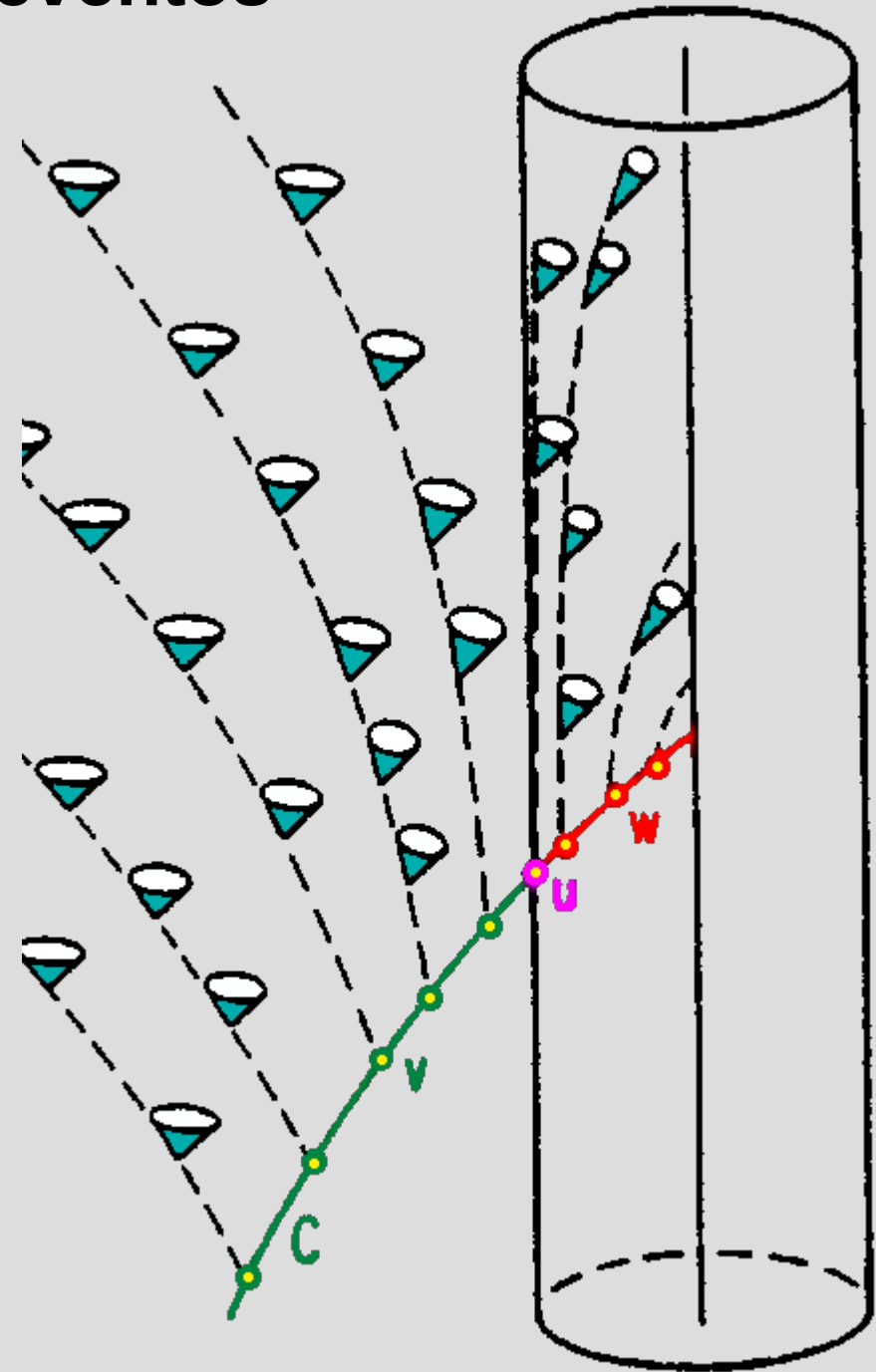
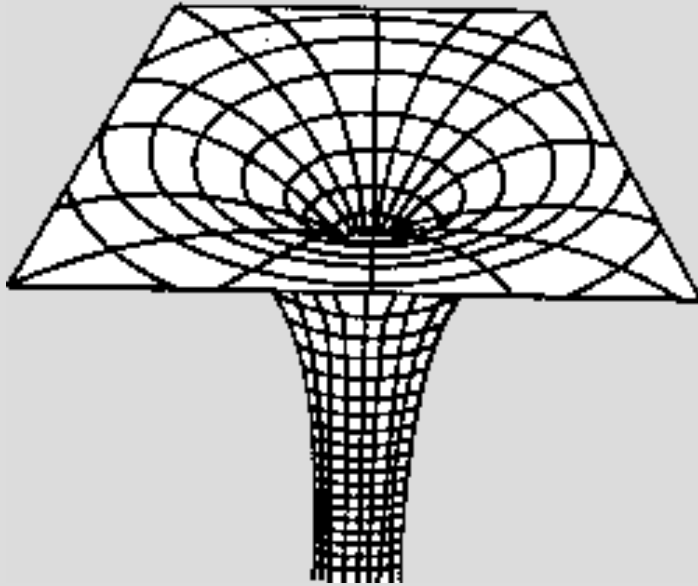
$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Buraco negro



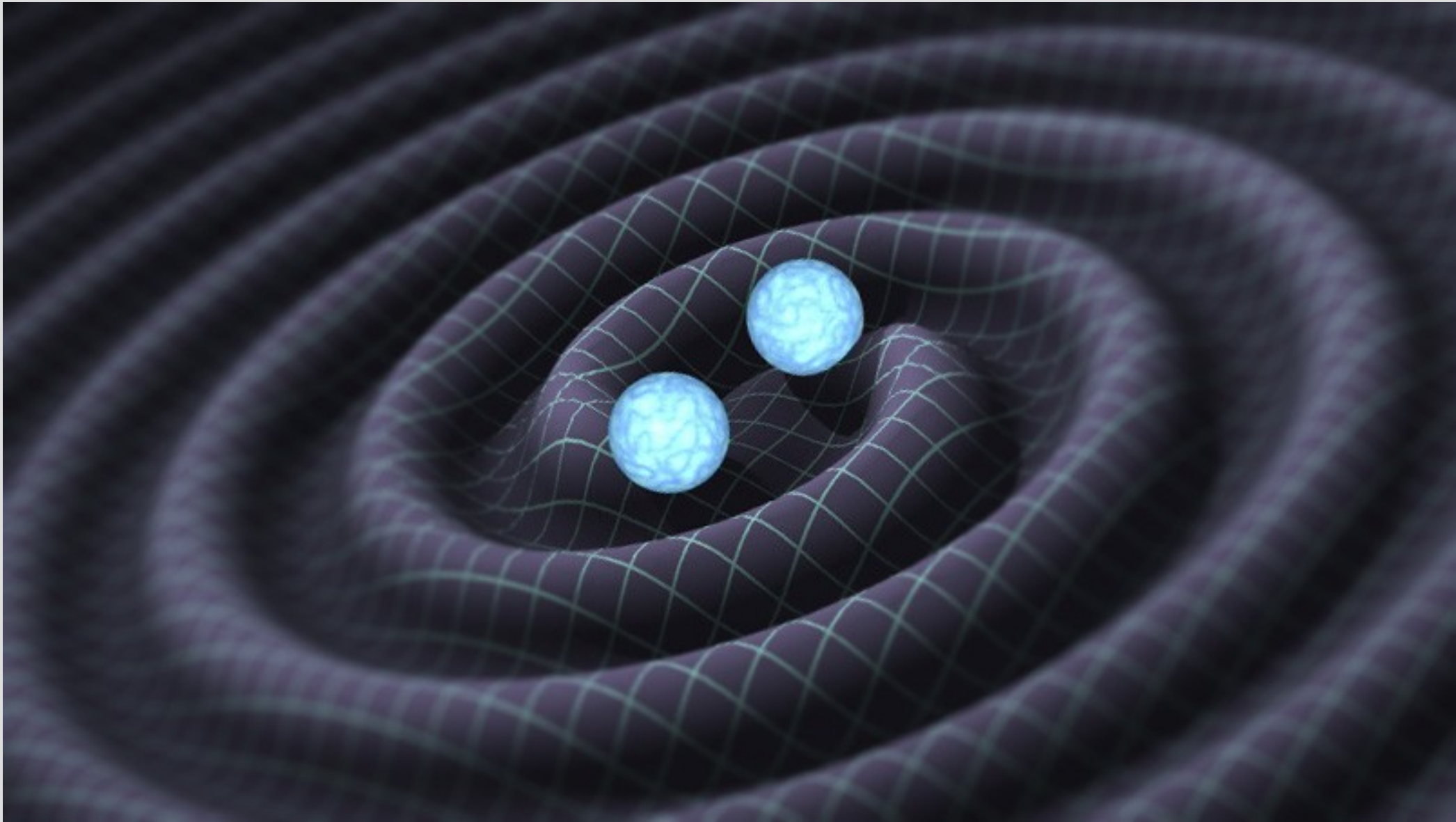
Horizonte de eventos

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

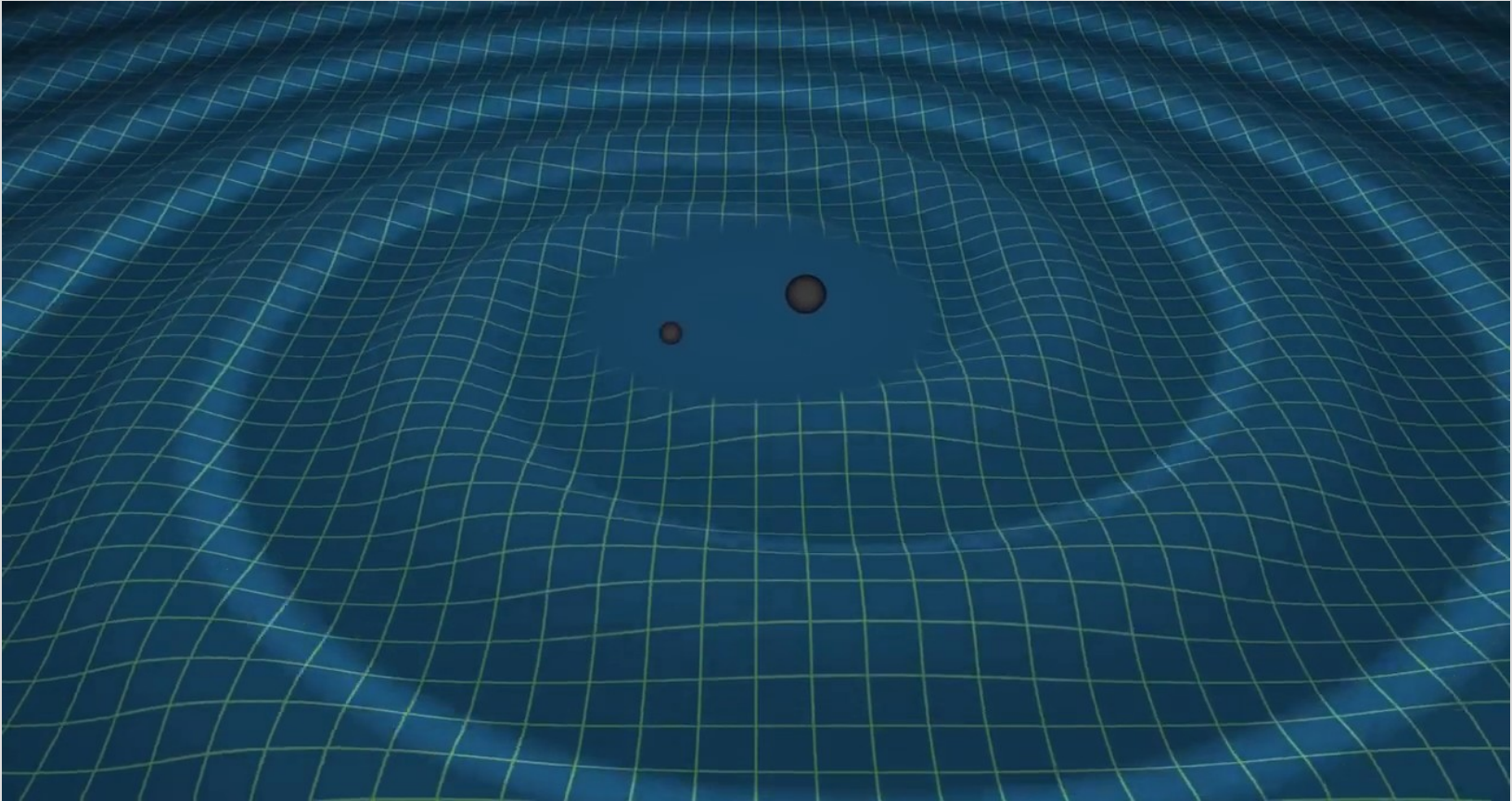


**Nada sai do buraco negro,
nem a luz!!**

Ondas gravitacionais



Ondas gravitacionais carregam energia!!



Objetos massivos se movendo geram uma espécie de “radiação gravitacional”, perturbações no espaço-tempo que se propagam com a **velocidade da luz**

LIGO

Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory

<https://www.ligo.caltech.edu/>





O que é uma onda gravitacional?

Vídeo:

<https://www.youtube.com/watch?v=HxX0OELmCKM>

Aplicação prática (única?): GPS

Do paradoxo dos gêmeos, vemos que a aceleração faz com que os relógios de um observador acelerado (astronauta no foguete) se atrasem em relação aos de um observador inercial.

O mesmo acontece na presença de um campo gravitacional (da Terra, por exemplo), pelo princípio de equivalência.

Redshift (desvio para o vermelho) gravitacional:

O tempo passa *mais devagar* na superfície da Terra do que no espaço!

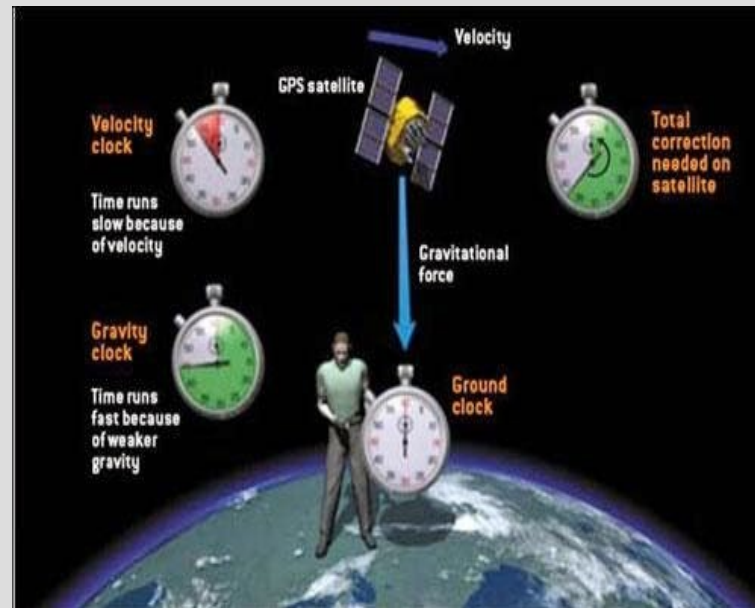
O tempo passa *mais rápido* para quem está mais afastado da superfície da Terra!

Correção 1: "desvio para o vermelho" gravitacional.

Os relógios do GPS se adiantam em relação aos da Terra: os relógios da Terra **se atrasam** em relação aos do GPS ($45 \mu\text{s}/\text{dia}$)

Correção 2: dilatação do tempo dos relógios da Terra em relação aos do GPS, que estão em órbita: os relógios da Terra **se adiantam** em relação aos do GPS ($7 \mu\text{s}/\text{dia}$)

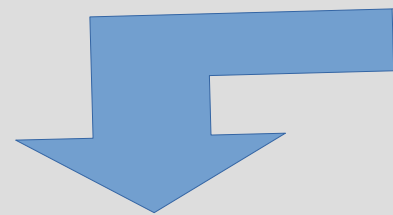
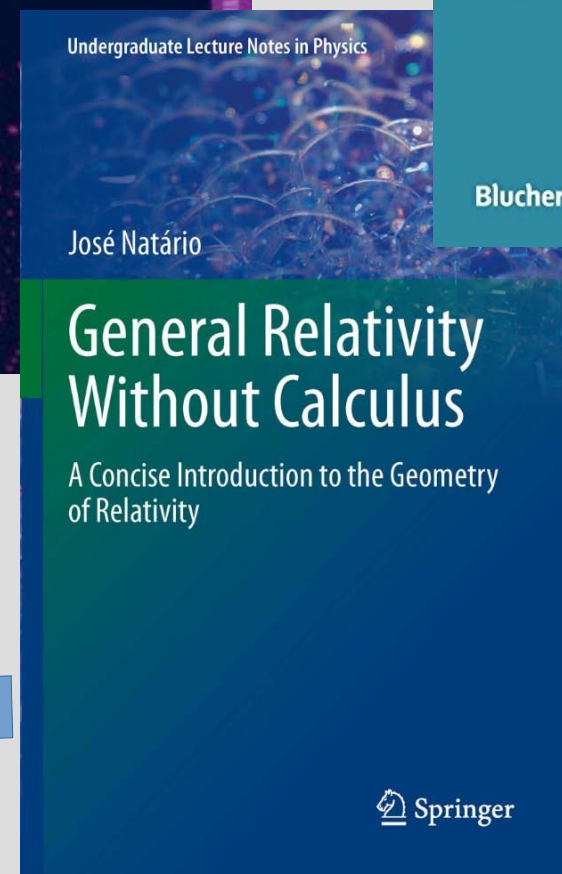
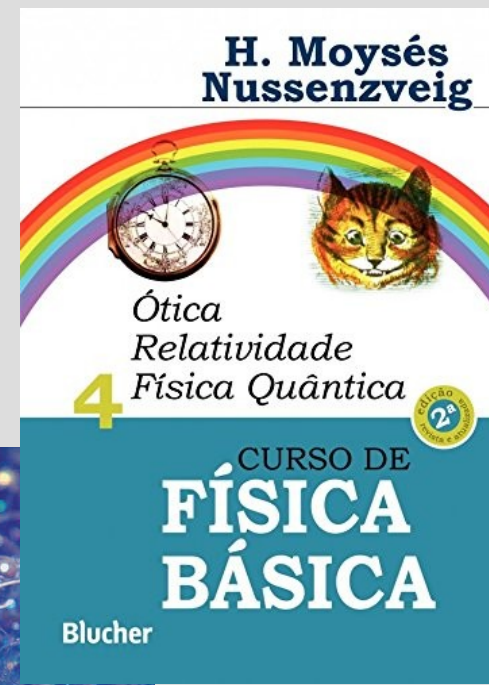
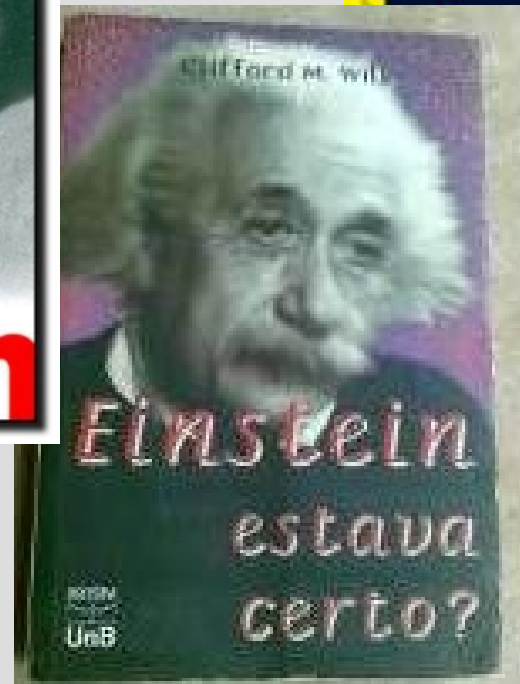
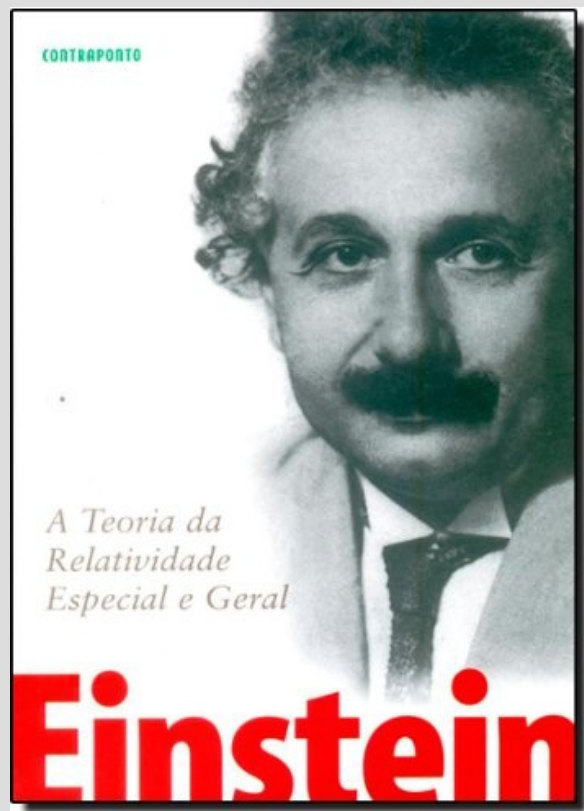
Efeito total: atraso de $38 \mu\text{s}/\text{dia}$ dos relógios da Terra em relação aos do GPS.





Vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=yCs0nOl35lc>

<https://www.youtube.com/watch?v=1u8hKBaJ2Gc>



Link para apostila em português (Relatividade geral sem cálculo):
<https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~jnatar/books/Estagio.pdf>