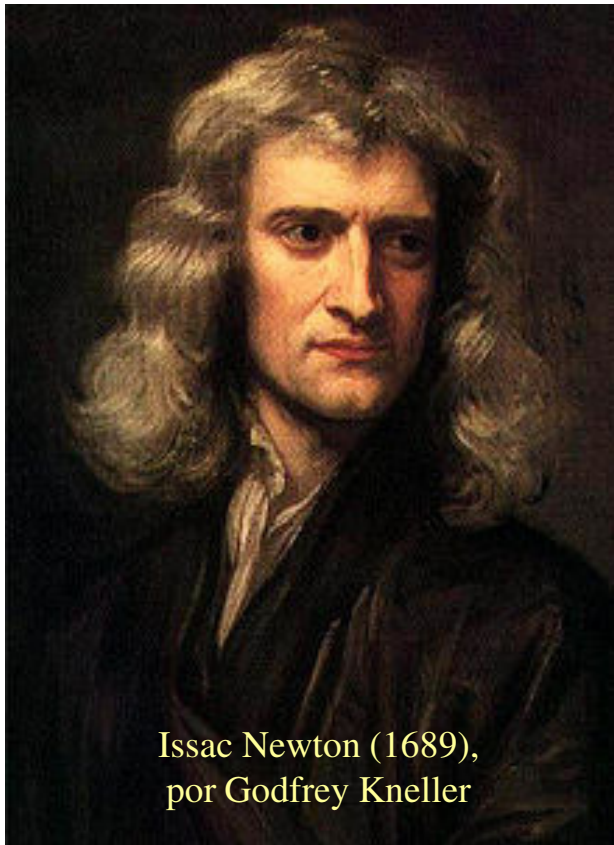


# Origens da Lei da Gravitação de Newton



Issac Newton (1689),  
por Godfrey Kneller

Astronomia ao Meio Dia  
IAG-USP – 6/6/2013

Oswaldo Pessoa Jr.  
Depto. Filosofia – FFLCH – USP  
[opessoa@usp.br](mailto:opessoa@usp.br)

# Queda livre

- Aristóteles (séc. V AEC): Corpos pesados caem com velocidade constante em meio resistivos.
- Estráton (séc. IV AEC), Filopono (séc. VI EC): Na queda livre a velocidade aumenta com o passar do tempo.

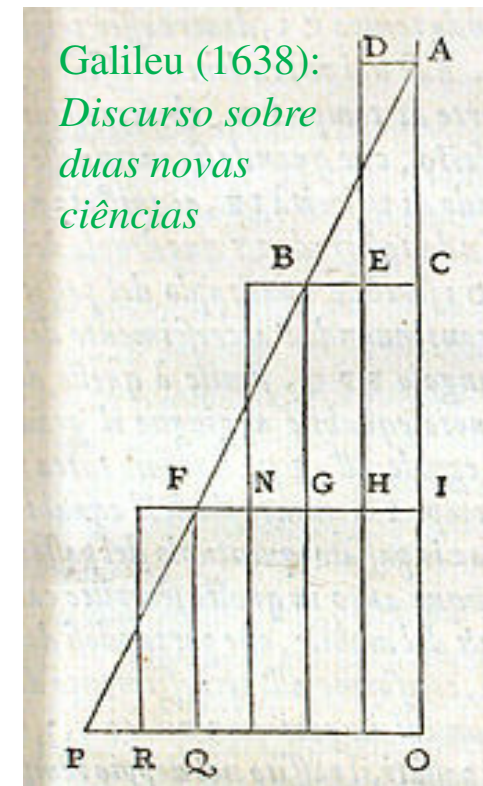
- Escola de Merton e de Paris (Idade Média):  
Descrição geométrica do movimento acelerado:

$$\bar{v} = \frac{1}{2} (v + v_0)$$

- Galileo (1638): Em tempos iguais, as distâncias percorridas variam com os números ímpares.

$$x = \frac{1}{2} at^2$$

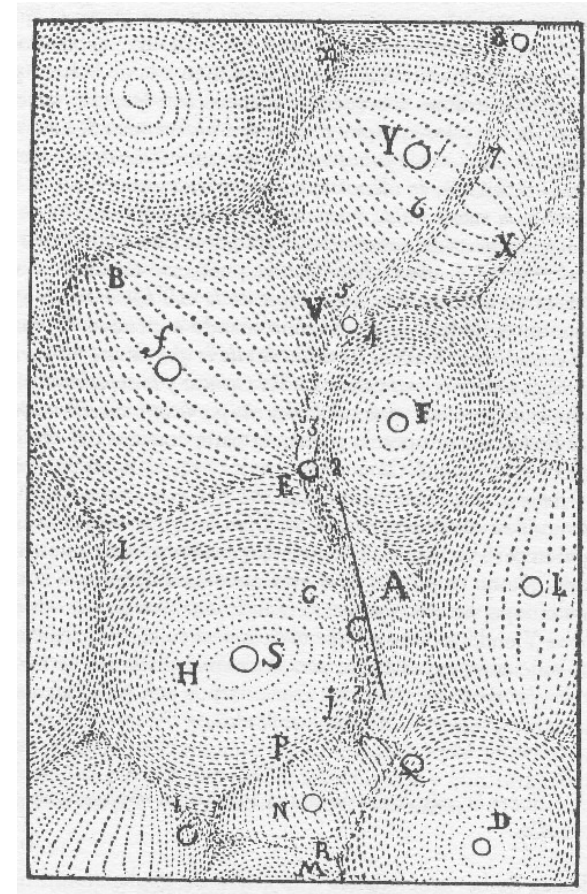
$t$	$x$	
0	0	
1	1	1
2	4	3
3	9	5
4	16	7



# Descartes: Filosofia Mecânica

*(Princípios de Filosofia, 1644)*

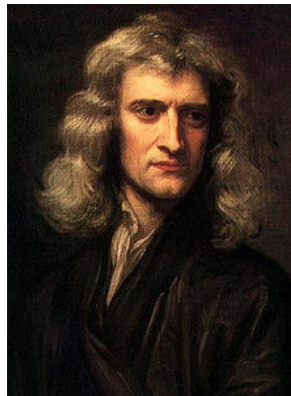
- A matéria é “inerte”, mudando de estado apenas em colisões (choques).
- **Lei da inércia:** corpo mantém MRU na ausência de forças (choques).
- **Conservação da quantidade de movimento:**  
 $\Sigma mv_i = \text{cte.}$  (Falava em “volume” ao invés de “massa”).
- **Leis do choque:** acertou só no caso simétrico.  
Princípio de ação de reação.
- **Sistema copernicano, planetas movidos a vórtices.**
- **3 elementos materiais:** 1º: Matéria sutil (luminosa);  
2º: Matéria etérea (transparente); 3º Matéria grossa (dos planetas e da atmosfera).
- Explicou **gravidade** sem força à distância, pressupondo rotação da Terra.





## Isaac Newton: início da carreira

- Isaac Newton nasceu em 4 de janeiro de 1643 (CALENDÁRIO NOVO).
- Entra na Universidade de Cambridge em junho de 1661.
- Inicia seu famoso caderno de anotações *Waste Book* na passagem de 1664-65: com estudos de séries infinitas, cálculo diferencial e integral, mecânica e óptica.



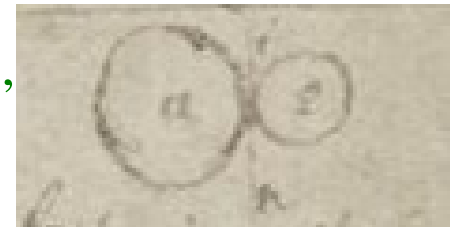
Caderno de anotações “Waste Book” (1665)

# Newton: Primeiras concepções mecânicas

- No *Waste Book* estuda colisões a partir de janeiro de 1665, usando:
  - Princípio de inércia e conservação de  $mv$  (Descartes), corrigido para levar em conta as direções dos movimentos.
  - Leis do choque de Huygens (1661), Wallis & Wren (1668).

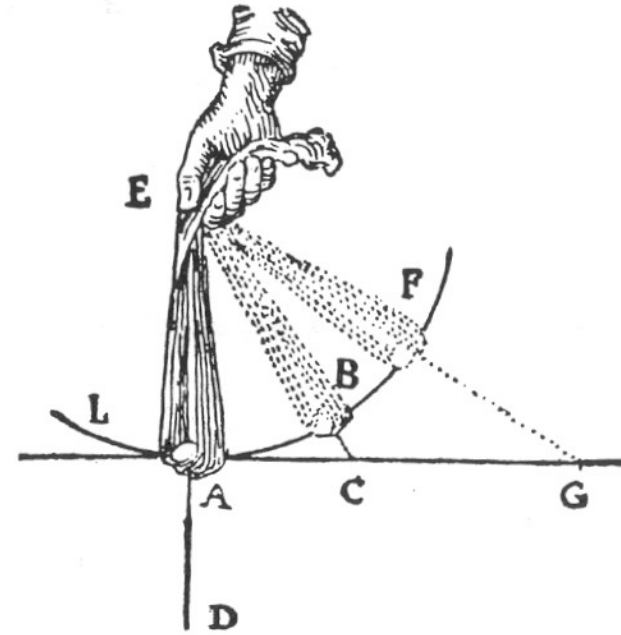
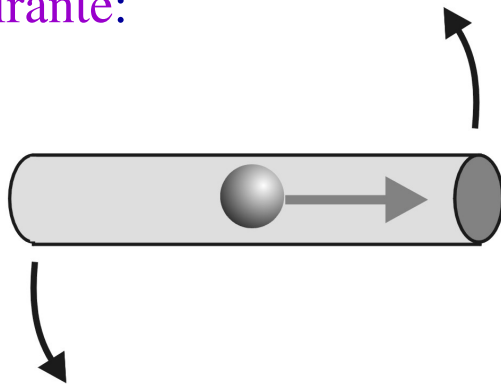
- Concepção de “força”, aplicada apenas a colisões:

- Em colisões elásticas, deformação gera “força”, entendida como “pressão ou amontoamento [*crowding*] de um corpo sobre outro”.
- Força é “o poder da causa que altera o movimento de um corpo”.
- Apenas força impulsiva (em choques):  $F = \Delta mv$
- Mais rigoroso, porém, seria escrever  $F \cdot \Delta t = \Delta mv$  (impulso  $I$ )



# Movimento circular

- Tema tratado por Descartes (*Princípios de Filosofia*, Parte II, § 38, em 1644)
- Numa *funda* (ver figura), a pedra tem uma tendência (*conatus*) de se mover, por inércia, em linha reta (pela tangente)
- Descartes adicionou também um conatus radial, *centrífugo*, que explicava o movimento da *bola em um tubo girante*:



- Newton identificou os dois conati: a tendência tangencial é a própria tendência centrífuga.
- Lembremos que Newton não pensava ainda em “força que busca o centro” (força de atração centrípeta – *conatus a centro*).

# Análise do movimento circular no Waste Book (1ª pg. – escrita depois)

To find a heavy body's descent in any given time, & y<sup>e</sup> proportion of y<sup>e</sup> pressure of y<sup>e</sup> rays by gravity to y<sup>e</sup> force by wh<sup>ch</sup> as given body hath any given motion; by this figure.

If y<sup>e</sup> cylinders be, of one of glass &c. to know y<sup>e</sup> proportion of their strength is known by y<sup>e</sup> proportion of their gravity of y<sup>e</sup> circles a, b, c in respect of y<sup>e</sup> arcs in.

If a staffe be bowed to find y<sup>e</sup> crooked line w<sup>ch</sup> it will resemble.

If the motion of a line is knowne to find y<sup>e</sup> crooked line w<sup>ch</sup> it will resemble continually.

If a stick ab revolves about y<sup>e</sup> center a having y<sup>e</sup> weight c string be, y<sup>e</sup> shall y<sup>e</sup> string be on a tangent to y<sup>e</sup> circle bde.

But it may be inquired what line y<sup>e</sup> weight c would describe with uneven velocity, & or wh<sup>ch</sup> y<sup>e</sup> point b describe a Parabola or some other crooked line.

If y<sup>e</sup> ball b revolves about y<sup>e</sup> center a y<sup>e</sup> force by wh<sup>ch</sup> y<sup>e</sup> stick begins to move.

If y<sup>e</sup> ball b revolves about y<sup>e</sup> center a w<sup>ch</sup> y<sup>e</sup> force from motion = a body w<sup>ch</sup> y<sup>e</sup> time of y<sup>e</sup> body b moving y<sup>e</sup> length of semidiameter on. [as if b is moved through a distance in one second of an hour & so on y<sup>e</sup> force from y<sup>e</sup> center a being continually like y<sup>e</sup> force of gravity impressed upon y<sup>e</sup> body during one second it will generate one degree of motion in y<sup>e</sup> body.] Or y<sup>e</sup> force from a in one revolution is to y<sup>e</sup> force of y<sup>e</sup> body motion as rad:circ:2.

If a ball b is moved from a to b y<sup>e</sup> force of b's motion, therefore tab:abvcted:2:in:ofu

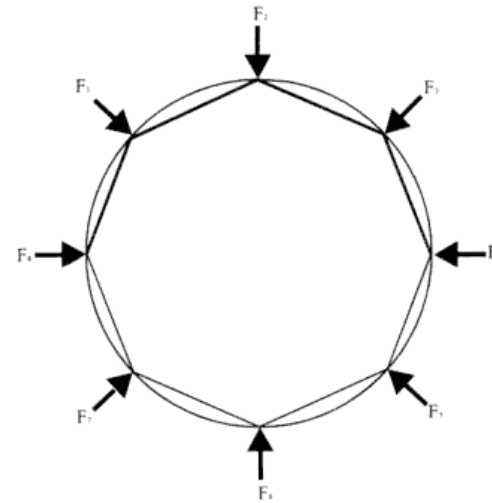
ab:fa:: force of pressure of b upon fa at its reflecting: force of b's motion.

:: force of y<sup>e</sup> reflection in one round (viz in b, c, d, & a): force of b's motion, by y<sup>e</sup> same pr

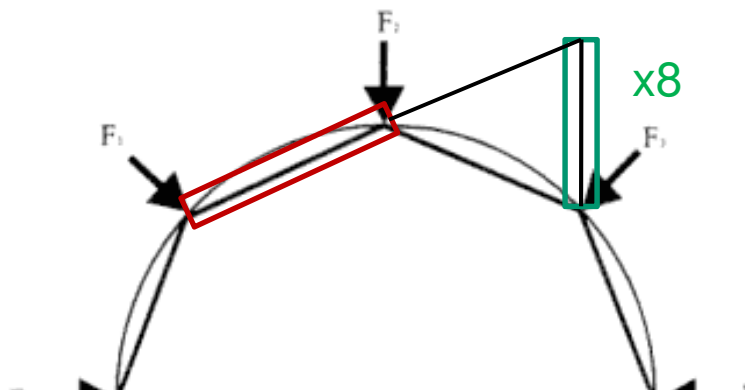


## Primeira abordagem de Newton ao movimento circular (1665)

- Newton trata do movimento circular de uma bola como choques elásticos em uma parede circular →



- Qual é a razão entre:  
a soma de todas as “forças” (impulsos) em uma volta completa  
 $(I_b) = \sum \Delta mv_i$ , e  
a “força” (momento) do movimento do corpo ( $I_0 = mv$ ) ?

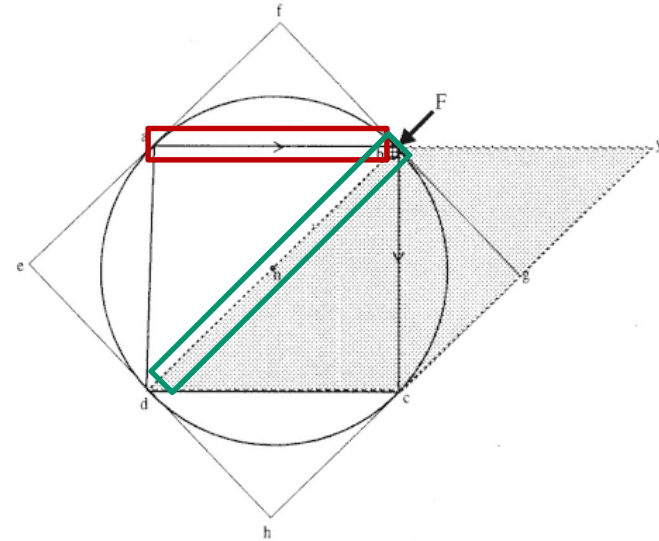




## Primeira abordagem de Newton ao movimento circular (1665)

- Caso 1: Figura de 4 lados

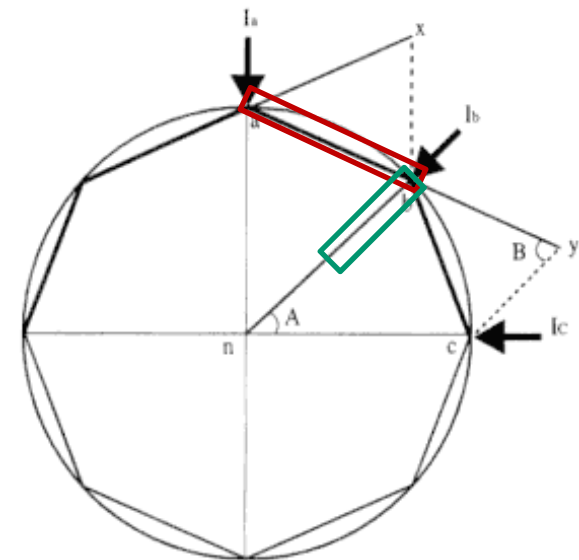
$$\frac{I_b}{I_0} = \sqrt{2} = \frac{\ell}{r} \quad (x4): 4\sqrt{2} \approx 5,65$$



- Caso 2: Figura de 8 lados

$$\frac{I_b}{I_0} = 2 \operatorname{sen} 22,5^\circ = \frac{\ell}{r} \approx 0,77 \quad (x8): \approx 6,12$$

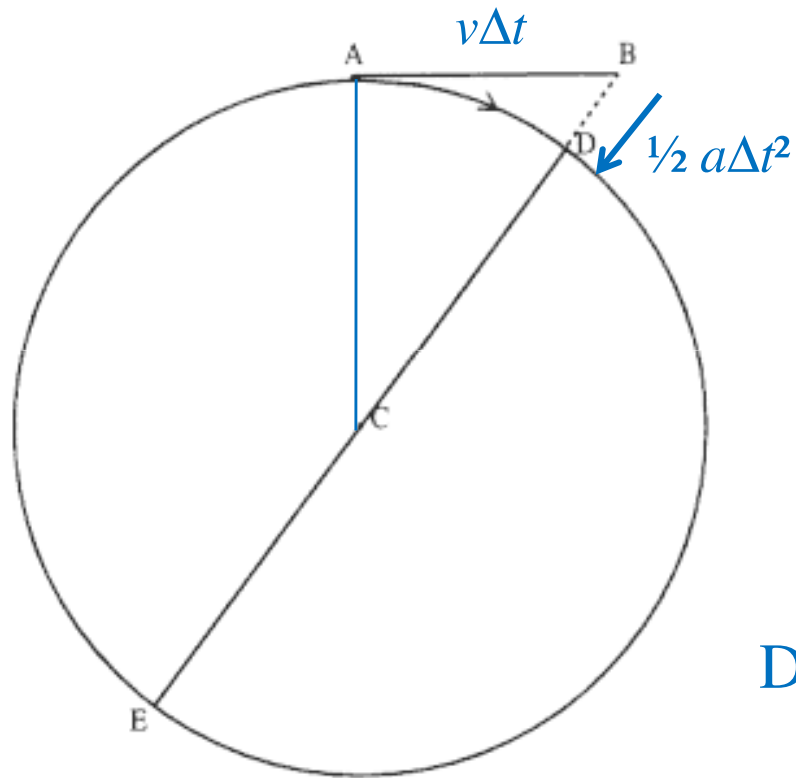
Figuras de BRACKENRIDGE (1996)



- Caso 3: Figura de  $n$  lados, com  $n \rightarrow \infty$   
(círculo)

$$\frac{I_b}{I_0} = \frac{\ell}{r} = \frac{(2\pi r/n)}{r} \quad (x n): 2\pi \approx 6,28$$

Mais tarde Newton (1669) deriva a aceleração centrífuga a partir da geometria de um círculo (independente de Huygens, 1659)



- Usando a lei da queda de Galileo, e considerando  $\Delta t$  bem pequeno:

$$r^2 + (v\Delta t)^2 = \left( \frac{1}{2} a\Delta t^2 + r \right)^2$$

Desprezando termo  $\Delta t^4$ , obtém-se:

$$a = v^2/r$$

Resultado anterior (aproximação poligonal) pode ser derivado a partir da lei de Huygens (obtido com a aproximação parabólica)

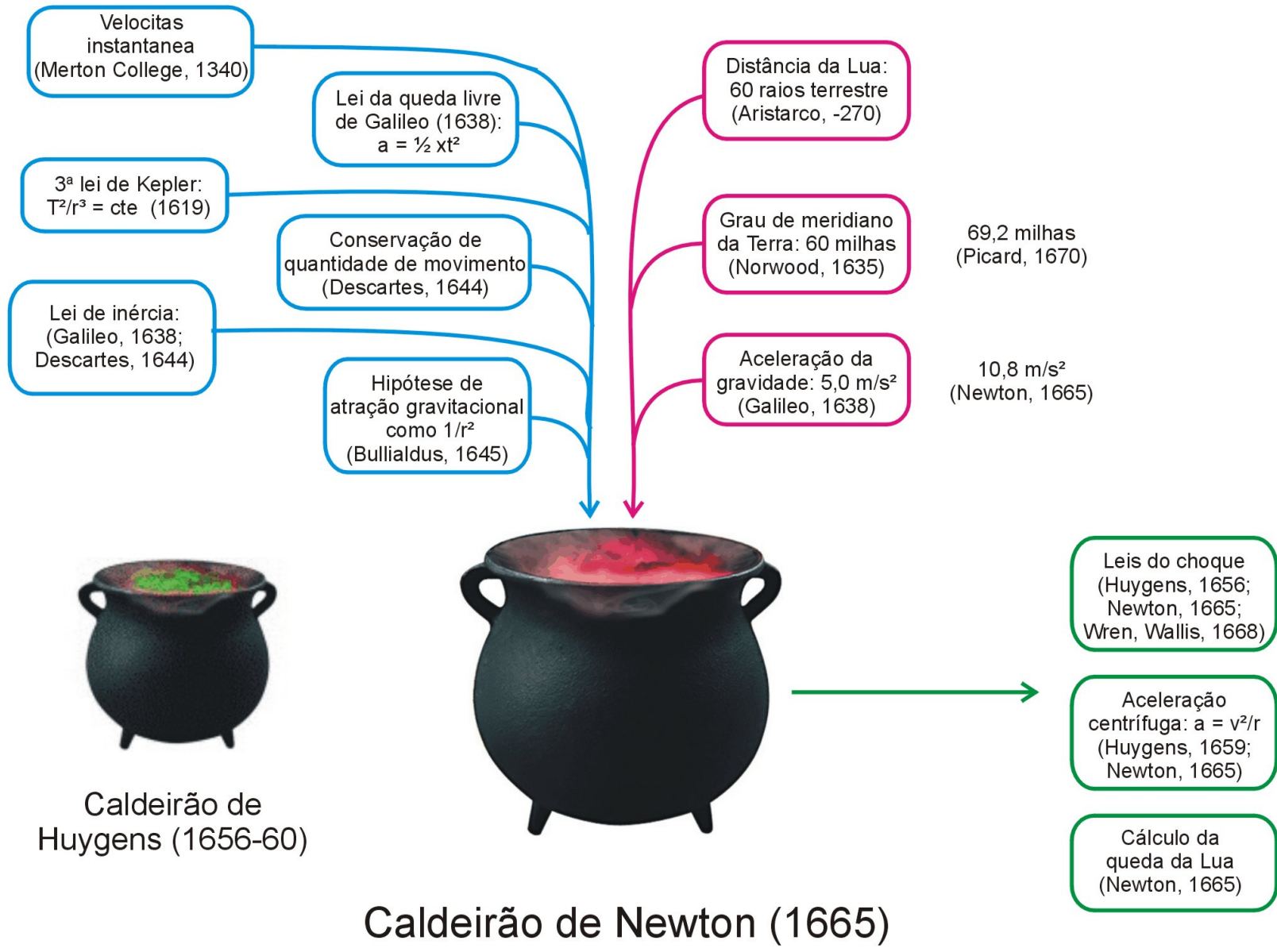
$$\frac{I_b}{I_0} = \frac{\int \overset{\text{Força escalar}}{F} dt}{mv} = \frac{FT}{mv} = \frac{\overset{\text{Lei de Huygens}}{\frac{mv^2}{r}} \frac{2\pi r}{v}}{mv} = 2\pi$$

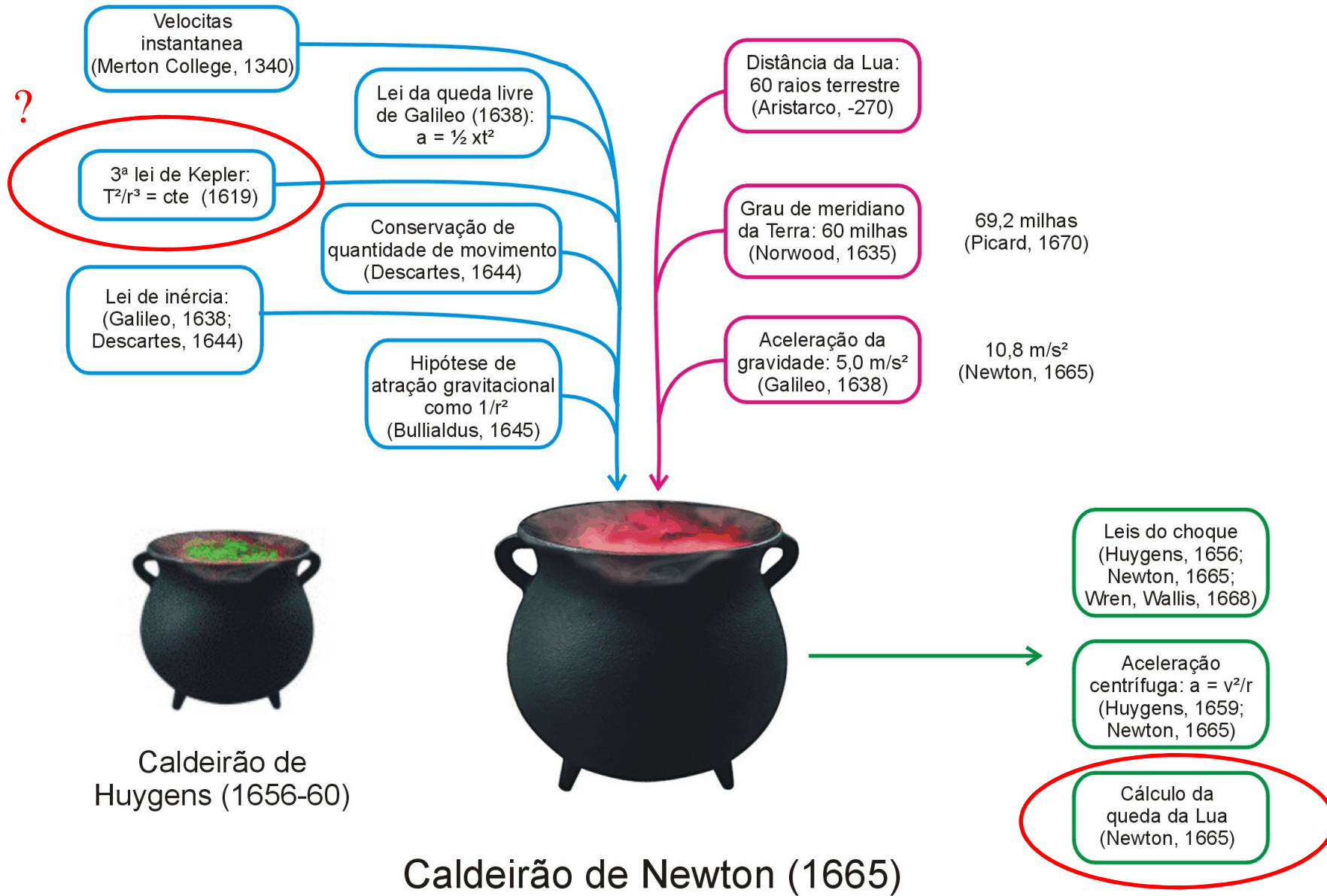
- Perguntaram a Newton como ele descobriu a lei da gravitação universal. Sua resposta: “pensando no problema sem parar” (Westfall, p. 105)

## Pausa para reflexão...

- Quais “avanços” anteriores foram necessários para as novas descobertas de Newton (e de Huygens)?
- Esta é uma pergunta típica da abordagem dos “modelos causais” à história da ciência...







Caldeirão de Huygens (1656-60)

Caldeirão de Newton (1665)

## Lei de atração $F \propto 1/r^2$

- Ismaël Bulliadus, padre francês, publicou em 1645 sua *Astronomia philolaica*, em que apoia Copérnico e Kepler.
- Discutindo a força de atração em Kepler, que cai como  $1/r$ , argumentou que seria mais razoável que caísse como  $1/r^2$ , como ocorre com a intensidade da luz irradiada no espaço.
- Não acreditava, porém, na existência de tais forças.
- Tornou-se membro da Royal Society em 1667.
- Seu cálculo dos raios das órbitas dos planetas seria elogiado por Newton, no *Principia*.



## Queda da maçã e da Lua

- “No ano de 1666 ele se retirou novamente de Cambridge, para sua mãe em Lincolnshire, e enquanto estava perdido em pensamentos em um jardim, veio à sua mente que o poder da gravidade (que trouxe uma maçã da árvore para o chão) não estava limitada a uma certa distância da Terra, mas de que seu poder deveria se estender para muito mais longe do que se costumava pensar. Por que não tão alto quanto à Lua, ele disse a si mesmo, e neste caso ela deveria influenciar seu movimento e talvez retê-la em sua órbita. Daí ele passou a calcular qual seria o efeito daquela suposição, mas [...] seu cálculo não concordou com a teoria, e o inclinou a considerar uma noção de que junto com a força da gravidade deveria haver uma mistura daquela força que a Lua teria se ela estivesse sendo carregada em um vórtice.”



(John Conduitt, 1727, marido da sobrinha de Newton.)



# 1º teste lunar de Newton (1666 e no *Principia*, 1687)

Dados empíricos:

(1) Distância da Lua:  $d_L = 60 r_T$  (raios da Terra)

(2) Raio da Terra  $r_T$ :

(3) Período da Lua:  
 $T = 27$  dias, 7 hs, 43 min  
 $= 39.343$  minutos

$1^\circ \text{ --- } 60 \text{ milhas (69,2 no } \textit{Principia})$   
 $360^\circ \text{ --- } p = 21.600 \text{ milhas}$   
 $r_T = p/2\pi = 3438 \text{ milhas} = 17.200.000 \text{ pés}$   
 1 milha = 5000 pés

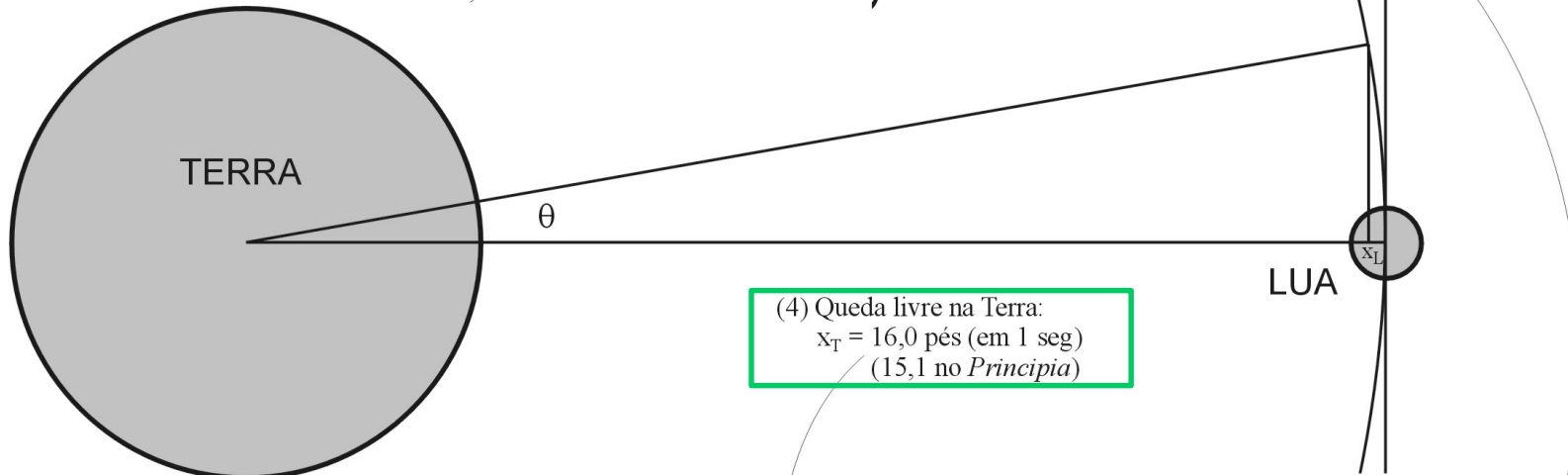
Ângulo percorrido em 1 min:  
 $\theta = 0,00915^\circ$

Queda da lua em um minuto de tempo  
 (valor teórico de referência):

$$x_{L-REF.} = d_L (1 - \cos \theta) =$$

$$= 60 \cdot 17.200.000 \cdot 0,0000000127 =$$

$$= 13,2 \text{ pés (15,2 no } \textit{Principia})$$



(4) Queda livre na Terra:  
 $x_T = 16,0$  pés (em 1 seg)  
 (15,1 no *Principia*)

**Lei da Gravitação (hipótese):**

Aceleração na superfície da Terra:  $g_T = \text{cte.} / r_T^2$   
 Aceleração da Lua:  $g_L = \text{cte.} / d_L^2 = \text{cte.} / (60 r_T)^2$

**Lei de Galileu:**

Dist. de queda na sup. da Terra:  $x_T = \frac{1}{2} g_T t^2$   
 Distância de queda da Lua:  $x_L = \frac{1}{2} g_L t^2$

$$x_T = 3600 x_L \text{ (no mesmo tempo } t)$$

ou

$$x_L \text{ (em } t \text{ de 1 min)} = x_T \text{ (em } t \text{ de 1 seg):}$$

$x_{L-TEO.} = 16,0$  pés (em 1 min)  
 $x_{L-REF.} = 13,2$  pés (em 1 min)

Erro de 21%

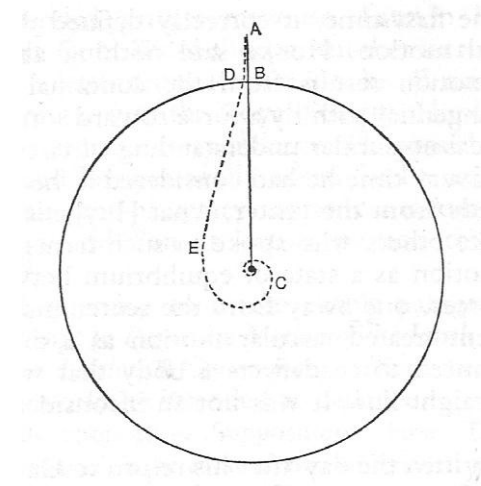
# Discussão

- Se Newton (1666) tivesse tido um dado melhor para o raio da Terra (obtido por Picard em 1670, e publicado em 1684), a confirmação do cálculo da queda da Lua poderia tê-lo convencido da validade da lei de atração gravitacional  $F \propto 1 / r^2$ , **sem utilizar a lei de Kepler**.
- Este seria um **cenário contrafactual**, mas plausível, para a história da mecânica.
- A lei da aceleração centrípeta  $a \propto v^2 / r$  também não foi explicitamente usada, mas é plausível que seu estudo (por parte de Newton) **tenha sido instrumental** para seu cálculo.
- Assim, esta seria uma **condição necessária** (implícita) para o cálculo da queda da Lua, assim como foram (explicitamente) a lei da inércia e a lei da queda de Galileo (além dos dados experimentais, que eram necessários, apesar de “errôneos”).
- Ao recordar o episódio mais tarde, Newton (1714) sugeriu que ele havia chegado à ideia da força  $F \propto 1 / r^2$  a partir da junção da 3ª lei de Kepler,  $T^2 \propto r^3$ , com a lei da força centrífuga em um movimento circular:  $F \propto r / T^2$ . (Lembrando que  $T = 2\pi r/v$ )
- **Por que ele não levou em conta a validade de sua derivação sem a 3ª lei de Kepler?**
- Talvez para se contrapor melhor às alegações de prioridade feitas por Hooke...

## Robert Hooke



- Em 1679, Hooke incentivou Newton a examinar novamente o problema dos movimentos planetários.
  - Newton formulou então o problema de qual é a trajetória na queda livre, levando em conta o movimento da Terra e a maior velocidade tangencial de corpos mais elevados.
  - Sua solução em espiral estava claramente errada, e o próprio Hooke lhe apontou o erro.
  - Hooke então lhe sugeriu usar uma lei de atração com força  $F \propto 1 / r^2$ . Newton calculou que neste caso a órbita seria uma elipse. Contudo, teve um crise a abandonou seu trabalho.
- Em agosto de 1684, o astrônomo Edmond Halley visita Newton, perguntando-o qual seria a trajetória de um corpo orbitando com uma força proporcional a  $1 / r^2$ . Newton retorna ao trabalho, e escreve um 1º esboço, conhecido como *De Motu* (De motu coporum in gyrum - Do movimento dos corpos em órbita, nov. 1684).
  - Hooke então o acusa de plágio (com alguma razão), e se tornam inimigos.
  - Em 1689, Newton publica o *Principia*.



## Algumas Referências Bibliográficas

- BARRA, EDUARDO S.O. (1993), “Newton sobre movimento, espaço e tempo”, *Cadernos de História e Filosofia da Ciência* (série 3) 3: 85-115.
- BRACKENRIDGE, J.B. (1996), *The Key to Newton's Dynamics: The Kepler Problem and the Principia*. Berkeley: University of California Press.
- HERIVEL, J. (1965), *The Background to Newton's Principia*. Oxford: Clarendon.
- WESTFALL, R.S. (1980), *Never at Rest: A biography of Isaac Newton*. Cambridge U. Press.