Problemas Capítulo 4: Solução e Dicas

José Fernando de Jesus & Rodrigo Fernandes Lira de Holanda

6 de junho de 2007

4.1 - Se estamos nos movimentando na direção do grande atrator, podemos dizer que nossa galáxia está em órbita em torno dele, o que dá uma estimativa da velocidade orbital por:

$$v^2 = \frac{GM}{R} \tag{1}$$

Assim:

$$M = \frac{v^2 R}{G} \tag{2}$$

Temos:

$$R = 45 \text{ Mpc} = 45 * 3,09 * 10^{24} \text{ cm} = 1,39 * 10^{26} \text{ cm}$$

$$G = 6,67 * 10^{-8} \text{ din cm}^2 \text{ g}^{-2}$$

$$v = 600kms^{-1} = 6 * 10^7 \text{ cm s}^{-1}$$

Logo:

$$M = \frac{(6 * 10^7)^2 * 1,39 * 10^{26}}{6,67 * 10^{-8}} = 7,50 * 10^{48} \text{ g} \tag{3}$$

Como $\text{M}_\odot = 1,989 * 10^{33}$ g, temos:

$$M_{GA} \sim 4 * 10^{15} \text{ M}_\odot$$

4.2 - Como a densidade de radiação por comprimento de onda é dada por $\rho_\lambda = \frac{4\pi}{c} B_\lambda$, temos:

$$\rho_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{exp(hc/\lambda kT) - 1} \tag{4}$$

A densidade de radiação é dada pela integral de (4) no comprimento de onda:

$$\rho_\gamma = \int \rho_\lambda \, d\lambda \tag{5}$$

O intervalo de comprimentos de onda da faixa óptica do espectro eletromagnética é dada por $4 * 10^{-5}$ cm $< \lambda < 7 * 10^{-5}$ cm, portanto:

$$\rho_{\gamma,opt} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \rho_\lambda \, d\lambda \tag{6}$$

onde $\lambda_1 = 4 * 10^{-5}$ cm e $\lambda_2 = 7 * 10^{-5}$ cm. Como esta faixa é muito estreita, podemos aproximar a integral (6) por:

$$\rho_{\gamma,opt} = \frac{8\pi hc}{\lambda_*^5} \frac{\Delta\lambda}{exp(hc/\lambda_* kT) - 1} \tag{7}$$

onde $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ e $\lambda_* = 5,5 * 10^{-5}$ cm é o ponto médio do intervalo. Além disso, calculando o argumento da exponencial com as constantes:

$$h = 6,6260755 * 10^{-27} \text{ erg s}$$

$$c = 2,99792458 * 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$$

$$k = 1,380658 * 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$$

e a temperatura da radiação cósmica de fundo $T = 2,725$ K e λ_* como dado acima, temos:

$$exp(hc/\lambda_* kT) = e^{9596} >> 1$$

Assim, podemos usar a aproximação de Wien, e escrever:

$$\rho_{\gamma,opt} = \frac{8\pi hc}{\lambda_*^5} \Delta\lambda e^{-hc/\lambda_* kT} \tag{8}$$

Assim, temos:

$$\rho_{opt} = 297,60 * e^{-9596} \simeq 297,6 * 10^{-4167} = 2,976 * 10^{-4165} \text{ erg cm}^{-3}$$

Transformando para eV m^{-3}, temos:

$$\rho_{opt} = 1,8574 * 10^{-4147} \text{ eV m}^{-3}$$

o que é muito pequeno comparado com o valor da tabela 4.2, de $2 * 10^3$ eV m^{-3}. Já a densidade númérica de fótons é dada por:

$$n_\gamma = \int \frac{\rho_\lambda d\lambda}{hc/\lambda} \tag{9}$$

Portanto:

$$n_\gamma = \int \frac{8\pi d\lambda}{\lambda^4(exp(hc/\lambda kT) - 1)} \tag{10}$$

Novamente, fazendo as mesmas aproximações, temos, para o óptico:

$$n_{opt} \simeq \frac{8\pi\Delta\lambda}{\lambda_*^4(e^{hc/\lambda_* kT} - 1)} \simeq \frac{8\pi\Delta\lambda}{\lambda_*^4} e^{-hc/\lambda_* kT} \tag{11}$$

o que resulta em:

$$n \simeq 10^{-4154} \text{ cm}^{-3} = 10^{-4148} \text{ m}^{-3}$$

o que também é bem menor que o valor dado pela tabela 4.2 de $n_{opt} \simeq 10^3$ m^{-3}. Concluímos que os fótons da faixa óptica da radiação cósmica de fundo dificilmente serão observados e os valores da tabela 4.2 são dados provavelmente por alguma outra contribuição de *foreground*.

4.3 - Como as galáxias estão muito afastadas umas das outras, podem ser consideradas como partículas de um gás ideal e, portanto, obedecem:

$$P = nkT \tag{12}$$

onde P é a pressão das galáxias, n é sua densidade numérica, k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura de agitação das partículas (galáxias). Além disso, podemos definir a velocidade quadrática média:

$$< v^2 >= \frac{3kT}{2m} \tag{13}$$

onde m é a massa das partículas. Isolando kT em (13) e substituindo em (12), temos:

$$P = \frac{nm < v^2 >}{3} = \frac{\rho < v^2 >}{3} \tag{14}$$

onde ρ é a densidade e usamos a igualdade $\rho = nm$. Temos, para as galáxias hoje:

$$\rho_{gal} \simeq 4 * 10^{-32} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

$$< v^2 >= (100 \text{ Km} \cdot \text{s}^{-1})^2 = 10^{14} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}$$

Assim:

$$P = \frac{4 * 10^{-32} * 10^{14}}{3} = 1,33 * 10^{-18} \text{ din cm}^{-2} \tag{15}$$

Enquanto que a pressão de radiação é dada por:

$$P_r = \frac{\rho_r c^2}{3} \tag{16}$$

como $\rho_{r0} \simeq 4,65 * 10^{-34}$ g cm^{-3} e $c \simeq 3 * 10^{10}$ cm s^{-1}, temos:

$$P_r = \frac{4,65 * 10^{-34} * 9 * 10^{20}}{3} = 1,39 * 10^{-13} \text{ din cm}^{-2} \tag{17}$$

Portanto, $P_r \simeq 10^5 P_{gal}$, ou seja, $P_r >> P_{gal}$.

4.4 - Uma possível maneira de obter o redshift de equipartição é a seguinte:

$$\frac{\rho_r}{\rho_m} = \frac{\rho_{r0}}{\rho_{m0}}\frac{1}{R} \approx 3,1490 * 10^{-5}\frac{h^{-2}}{\Omega_{0m}}\frac{1}{R} \approx 2,1432 * 10^{-4}(1+z)$$

Na equipartição $\frac{\rho_r}{\rho_m} = 1$, então,

$$1 + z_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = 3,1756 * 10^4 h^2 \Omega_{0m} \approx 4668,1$$

Utilizamos o fato de que $\rho_{m0} = \Omega_0 \rho_{0c} = 1,8788 * 10^{-29}\Omega_{0m}h^2 g.cm^3$ e $h = 0,7$ e $\Omega_{0m} = 0,3$.

A temperatura pode ser obtida por $T_{eq} = T_0(1 + z_{eq}) = 8,6567 * 10^4 h^2 \Omega_{0m} K \approx 12,725K$. Para obter a densidade de partículas, lembramos que:

$$\rho_{meq} = \rho_{mo}\frac{1}{R_{eq}} = 6,0167 * 10^{-16} h^8 \Omega_{0m}^4 \text{ g cm}^{-3} \approx 2,80696.10^{-19} \text{ g cm}^{-3}$$

4.5 - Temos, da equação de Friedmann:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} R^2 \left(\frac{\rho_{m0}}{R^3} + \frac{\rho_{r0}}{R^4}\right) - \frac{kc^2}{R_0} \tag{18}$$

Se $\rho_r >> \rho_m$, (18) fica:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} R^2 \rho_r - \frac{kc^2}{R_0} \tag{19}$$

Nessa época, o parâmetro de densidade é dado por:

$$\Omega = \frac{\rho_r}{\rho_c} = \frac{8\pi G \rho_r}{3H^2} \tag{20}$$

Dividindo (19) por $\dot{R}^2$ e usando a definição de $H \equiv \frac{\dot{R}}{R}$, temos:

$$1 = \frac{8\pi G \rho_r}{3H^2} - \frac{kc^2}{R_0 \dot{R}^2} \tag{21}$$

Portanto:

$$\Omega = 1 + \frac{kc^2}{R_0 \dot{R}^2} \tag{22}$$

Agora, calculando (22) em t_0, temos:

$$\Omega_0 = 1 + \frac{kc^2}{R_0 H_0^2} \Rightarrow \frac{kc^2}{R_0} = H_0^2(\Omega_0 - 1) \tag{23}$$

Substituindo em (22), temos:

$$\Omega = 1 + \frac{H_0^2(\Omega_0 - 1)}{\dot{R}^2} \tag{24}$$

Vamos agora estimar o parâmetro de densidade no final da era de Planck. Para isso, vamos usar a equação (24) e a seguinte aproximação, válida para a era da radiação:

$$R = \left(\frac{t}{t_r}\right)^{1/2} \tag{25}$$

onde $t_r = \frac{1}{\sqrt{\frac{32\pi}{3} G \rho_{r0}}}$. Derivando esta equação, chegamos a:

$$\dot{R} = \frac{1}{2(t_r t)^{1/2}} \tag{26}$$

Calculando (26) no tempo de Planck, $t_{pl} = \left(\frac{G\hbar}{c^5}\right)^{1/2}$, e inserindo em (24), temos:

$$\Omega = 1 + H_0^2(\Omega_0 - 1)\sqrt{\frac{3\hbar}{2\pi c^5 \rho_{r0}}} \tag{27}$$

De onde, com os valores:

$$H_0^{-1} = 9,7776 * 10^9 h^{-1} anos$$

$$h = 0,72$$

$$\rho_{r0} = 4,6486 * 10^{-34} \text{ g cm}^{-3}$$

$$\hbar = 1,0546 * 10^{-27} \text{ erg s}$$

$$c = 2,9979 * 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$$

Chegamos ao seguinte resultado:

$$\Omega = 1 + 7,2837 * 10^{-61}.$$

4.6 - Conforme visto nos capítulos anteriores a maior contribuição para a densidade de energia da radiação vem dos fótons da radiação de fundo, entretanto, durante a era da inflação é gerado um fundo de neutrinos que, por terem massa muito pequena, têm praticamente a velocidade da luz e portanto contribuem, tanto quanto os fótons, para elevar a contribuição dinâmica da matéria na forma relativística alterando o valor de Ω_0 na equação acima.

4.7 - A energia total relativística de uma partícula com massa m é dada por:

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \tag{28}$$

onde c é a velocidade da luz e p é o momento da partícula. O limite não-relativístico é dado por $p << mc$ e a energia térmica é dada por:

$$kT = E - mc^2 \tag{29}$$

onde k é a constante de Boltzmann. A energia total de uma partícula no limite não-relativístico é encontrado expandindo-se a energia relativística (28) para pequenos p, de onde tem-se:

$$E \simeq mc^2 + \frac{p^2}{2m} \tag{30}$$

A energia térmica fica, então:

$$kT = \frac{p^2}{2m} \tag{31}$$

que é a energia cinética não-relativística. Portanto:

$$p = \sqrt{2mkT} \tag{32}$$

e:

$$\frac{p}{mc} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}} \tag{33}$$

Se $\frac{p}{mc} << 1$, a partícula é não-relativística. Vamos conferir se isso é válido para o próton e o nêutron. Temos:

$$m_p = 1,67262 * 10^{-24} \text{ g}$$

$$m_n = 1,67493 * 10^{-24} \text{ g}$$

$$c = 2,99792458 * 10^{10} \text{ cm s}^-1$$

Vamos utilizar como temperatura da nucleossíntese a temperatura inicial, que é dada por $kT \sim 1$ MeV. Se as partículas forem não-relativísticas a essa temperatura, obviamente elas serão não-relativísticas em toda a nucleossíntese, uma vez que essa é a maior temperatura dessa fase. Inserindo os valores acima, temos:

$$\frac{p_p}{mc} = 4,62\%$$

$$\frac{p_n}{mc} = 4,61\%$$

o que pode ser considerado não-relativístico. Chegaríamos à mesma conclusão se utilizássemos a fórmula relativística completa (28).

4.8 - A taxa de interação por partícula é $\Gamma = n\sigma v$, onde n é a densidade espacial de partículas, σ é a seção de choque e v a velocidade quadrática média. A escala de tempo é o inverso da taxa de reação, ou seja, $t = 1/\Gamma$, portanto, $t = (n_p \sigma v)^{-1}$.
Vamos tomar a idade do Universo igual a 231 s, pois foi em torno desta idade que a reação em questão pôde se iniciar. Então, temos que obter a densidade de prótons, a temperatura e a velocidade quadrática média

dos prótons naquela época, para isso vamos obter iniciamente o fator de escala utilizando a relação da época da radiação $R = (t/3 * 10^{19})^{1/2}$, então $R = 2,8 * 10^{-9}$, de forma que $1/R = 3,6 * 10^{8}$. A temperatura é obtida por $T = \frac{1{,}308\text{ MeV}}{\sqrt{t}} = 0,086\,\text{MeV}$. A densidade de bárions naquele instante é dado por

$$\eta = \eta_0 (1/R)^3 \approx 10^{19}$$

cm^{-3}. A velocidade quadrática média é dada por $v = \sqrt{3kT/m} = 1,6 * 10^{8}\text{cm/s}$. Portanto, $t \approx 6\text{s}$. Bem menor que o tempo de vida médio dos nêutrons.

4.9 - A abundância do ^4He é dada por:

$$Y \simeq 0,223 \left(\frac{\eta}{10^{-10}}\right)^{0{,}056} \tag{34}$$

onde η é a razão bárion-fóton. A abundância de deutério é dada por:

$$\frac{D}{H} \simeq 4 * 10^{-4} \left(\frac{\eta}{10^{-10}}\right)^{-1{,}43} \tag{35}$$

Se a abundância de bárions fosse 10 vezes maior que as estimativas atuais, teríamos uma razão bárion-fóton dez vezes maior, $\eta_+ = 10\eta$ e as abundâncias dos elementos leves seriam:

$$\frac{Y_+}{Y} = \left(\frac{\eta_+}{\eta}\right)^{0{,}056} = 10^{0{,}056} = 1,14$$

$$\frac{[D/H]_+}{[D/H]} = \left(\frac{\eta_+}{\eta}\right)^{-1{,}43} = 10^{-1{,}43} = 0,0372$$

Por outro lado, se a a abundância de bárions fosse dez vezes menor teríamos uma razão bárion-fóton $\eta_- = \frac{\eta}{10}$ e:

$$\frac{Y_-}{Y} = \left(\frac{\eta_-}{\eta}\right)^{0{,}056} = 10^{-0{,}056} = 0,879$$

$$\frac{[D/H]_-}{[D/H]} = \left(\frac{\eta_-}{\eta}\right)^{-1{,}43} = 10^{1{,}43} = 26,92$$

4.10 - A entropia por bárion é definida por $s = \frac{4aT^3}{3n_b}$ e $n_\gamma = 0,370\frac{aT^3}{k}$, onde n é a densidade de partículas de cada componente. Podemos obter então $s = 3,6\frac{n_\gamma}{n_b}$ ou $s = 3,6/\eta$, com $\eta = \frac{n_b}{n_\gamma} = 2,7 * 10^{-8}\Omega_{0b}h^2$. Se $\Omega_{0b} = 0,04$, teríamos $s = 6,6 * 10^9$, se $\Omega_{0b} = 1$, teríamos $s = 2,8 * 10^8$, ou seja, a entropia por bárion diminuiria em uma ordem de grandeza. Como $\eta = 2,7 * 10^{-8}\Omega_{0b}h^2$, se $\Omega_{0b} = 0,04$, teríamos $\eta = 5,5 * 10^{-10}$, mas se $\Omega_{0b} = 1$, teríamos $\eta \sim 10^{-8}$, o que não está de acordo com o intervalo permitido para η via nucleossíntese primordial, que restringe $1,2 * 10^{-10} < \eta < 3 * 10^{-10}$.

4.11 - O fato de o Universo ser dominado pela matéria hoje e ter sido dominado pela radiação no passado é explicado pela dependência temporal das densidades de matéria e radiação. Enquanto a densidade de matéria escala com $\rho_m \propto R^{-3}$, a densidade de radiação escala com $\rho_r \propto R^{-4}$. Assim, em tempos primitivos ($R \to 0$) o que prevalece é a radiação e, em tempos atuais ($R \to 1$), o que prevalece é a matéria.

4.12 - Sabemos que $N_n = N_{n0}e^{-0,693t/\tau_{1/2}}$, se $N_{n0} = 200$, depois de 228 segundos teríamos apenas 42 nêutrons para cada volume com 1000 prótons, assim, o número de prótons aumentaria para 1158. Como consequência disto, $N_n/N_p = 0,036$. Então apenas 21 átomos de He^4 seriam formados com os deutérios disponíveis e teríamos $Y = 4 * 21/(890 + 4 * 21) = 0,086$, em total desacordo com as observações astronômicas, $0,23 < Y < 0,25$.