A Expansão do Universo

Ronaldo E. de Souza
mailto:ronaldo@astro.iag.usp.br

12 de março de 2007

- A Cosmologia no início do século XX

  Einstein e a relatividade geral

  Um universo ainda estático (1920)!

- E. Hubble: O Universo em movimento

  o Grande Debate

  Nasce a astronomia extragaláctica

  Lei de Hubble (1926)

- A busca de um paradigma

  o ovo primordial de Lemâitre

  estado estacionário x Big-Bang

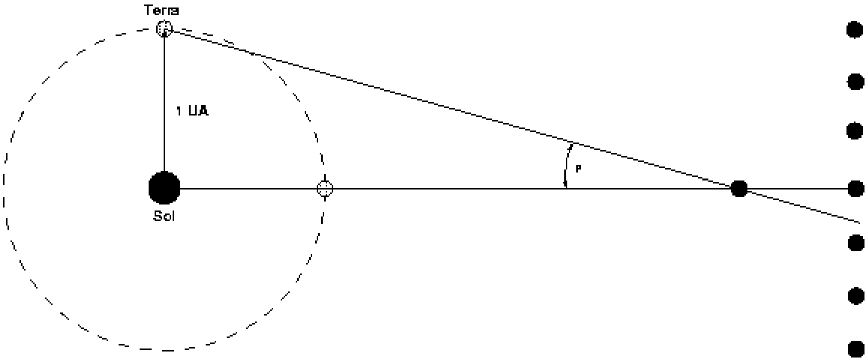
  A radiação de fundo

- Um século em busca de H0

  Onde está a dificuldade?

Em 1838 Friedrich W. Bessel anunciou a primeira medida confiável de paralaxe da estrela 61 Cygni, cerca de 0,31316"+-0,0254", implicando em uma distância da ordem de 660 000 maior que a distância da Terra ao Sol.

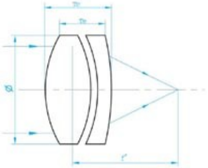
O efeito da paralaxe se deve à mudança na posição aparente das estrelas próximas em relação às estrelas de fundo, as quais permanecem praticamente fixas devido à enorme distância.

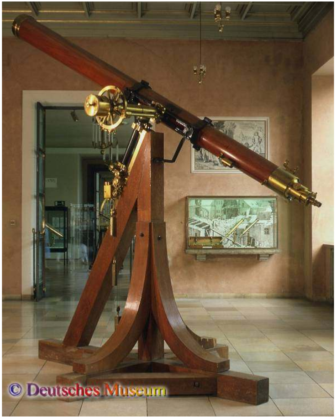


$$d = \frac{1\ UA}{\tan p} = \frac{1,4960 \text{ x } 10^{13} \text{ cm}}{\tan p}$$

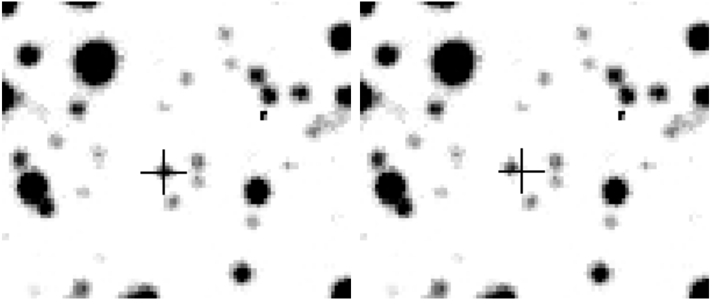
$1\mathrm{UA} = 1,4960 \text{ x } 10^{13} \text{ cm}$ denomina-se *unidade astronômica*, e corresponde à distância média da Terra ao Sol.Uma paralaxe de 1" corresponde a uma distância de $3,086 \text{ x } 10^{18} \text{ cm}$, definida como sendo o *parsec* ou pc. Pelos padrões terrestres esta é uma enorme distância correspondente a cerca de $3,26$ anos-luz, mas do ponto de vista cosmológico essa dimensão ainda é muito reduzida. Com o satélite Hiparcos podemos estimar distâncias de até 100 pc, ou cerca de 300 anos-luz, com precisão da ordem de 10%. Mas isto ainda representa menos de 1% da dimensão da Galáxia.

A medida da paralaxe dependeu do desenvolvimento das objetivas acromáticas, compondo vidros de diferentes índices de refração, realizado por Fraunhofer.

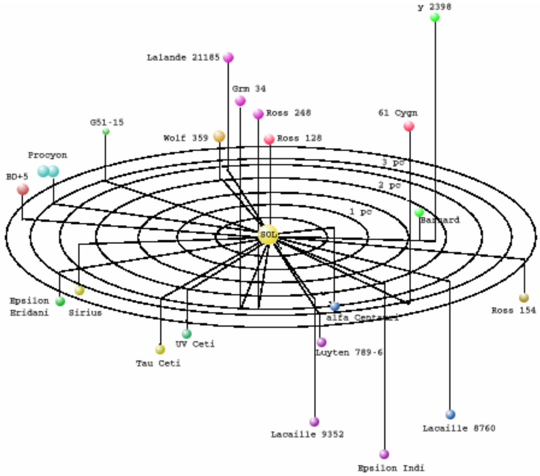




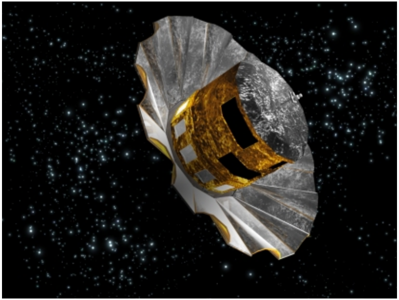
... e veja a dificuldade de medir o efeito de paralaxe a partir de telescópios no solo mesmo no caso de estrelas próximas!

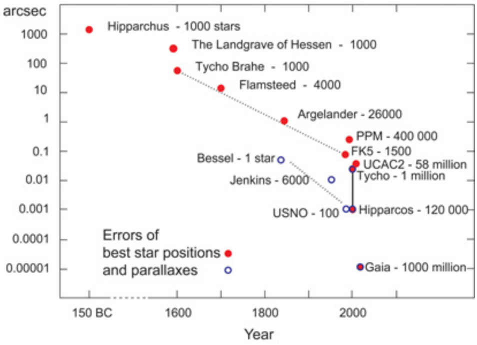


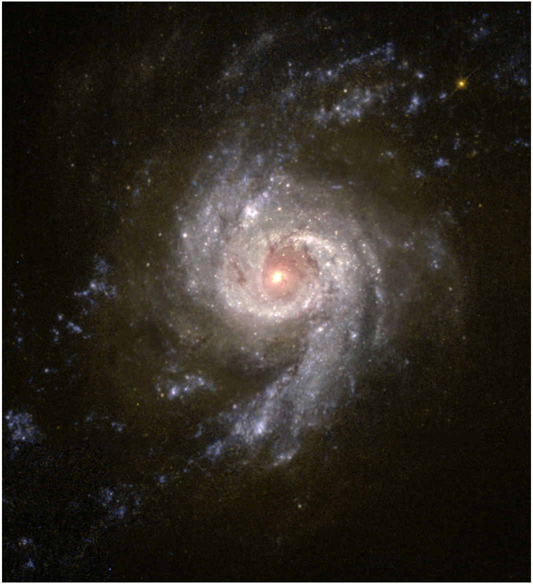
As medidas de paralaxe, mesmo realizadas do espaço, nos permitem conhecer as distâncias na vizinhança solar.



No futuro próximo aguarda-se o lançamento da missão GAIA possibilitando uma melhor cobertura galáctica.

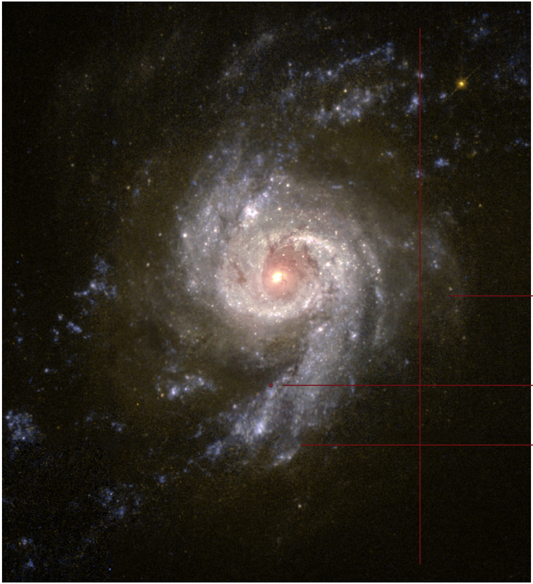






Apenas uma pequena região da Galáxia

pode ser acessada por medidas diretas de paralaxe



Apenas uma pequena região da Galáxia

pode ser acessada por medidas diretas de paralaxe

diâmetro óptico aproximado $\simeq$ 40 Kpc

vizinhança solar $\simeq$ 200 pc

A Missão GAIA vai observar

praticamente toda a Galáxia

As Cefeidas como velas padrões

Pelo teorema do Virial aplicado a uma estrela, $2T + U = 0$,

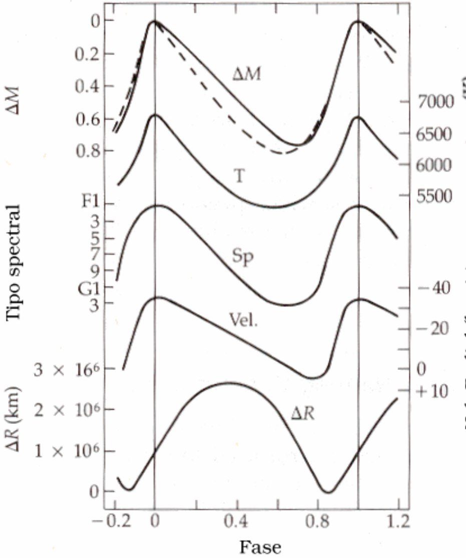
$$\frac{GM}{R} \simeq c_s^2$$

Como o período é da ordem de $2R/c_s$, equivalente ao tempo para que uma onda sonora cruze a estrela, temos que

$$P_{vib}^{-1} \simeq \frac{c_s}{2R} \simeq \sqrt{\frac{GM}{4R^3}} \simeq \sqrt{G\rho}$$

como $L = 4\pi R^2 a T_e^4$, sendo a temperatura efetiva T_e aproximadamente constante ($L \propto R^2$), e sendo $L \propto M^{4,5}$, existe uma relação estreita entre a luminosidade e o período de variabilidade ($L \propto P^{1,57}$), ou em magnitudes, $mag \simeq 3,9 \log(P) + cte$.

Portanto se soubermos o período, através da curva de luz observada, e a luminosidade aparente podemos estimar a luminosidade absoluta de uma estrela Cefeida não importa a distância em que esteja



As observações astronômicas nos permitem determinar a magnitude a partir do fluxo f observado

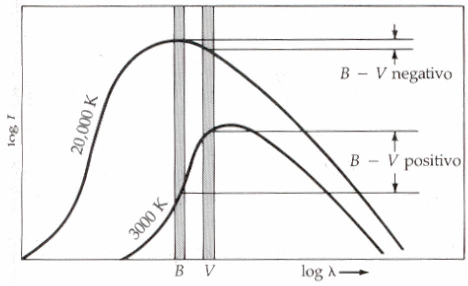
$$m_{ap} = -2,5 \log f + C^{te}$$

o fluxo que detectamos é igual ao fluxo na superfície da estrela diluído pela distância que nos separa da mesma, $f = L/4\pi d^2$. Essa dependência com o inverso do quadrado da distância nos permite determinar o chamado *módulo de distância*

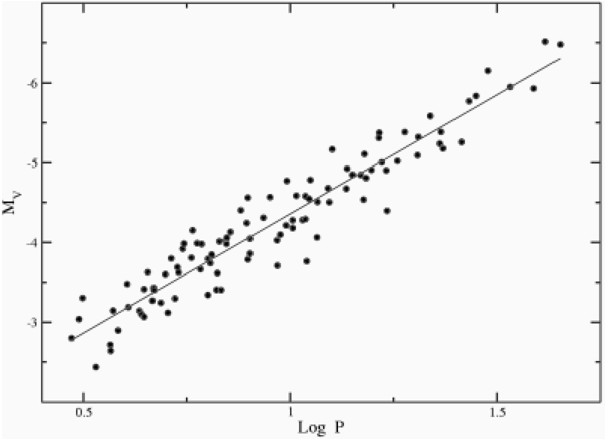
$$m_{ap} - M_{abs} = -5 + 5 \log d$$

em que a magnitude absoluta, M_{abs}, corresponde à magnitude que deveríamos observar se a estrela estivesse a 10 pc de distância e d é a distância real dada em parsecs.

Normalmente as magnitudes são estimadas medindo-se o fluxo bandas selecionadas. As mais utilizadas são U(3 500 Å), B(4 500 Å) e V(5 500 Å), cobrindo intervalos espectrais da ordem de 1 000 Å e compondo um sistema fotométrico. Dessas observações determina-se as magnitudes aparentes $m_U = U$, $m_B = B$, $m_V = V$ e índices de cor, como B-V que são indicativos da temperatura efetiva das estrelas.



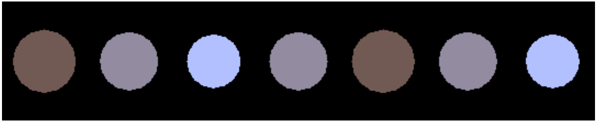
A relação PL é acuradamente seguida num intervalo de quase 5 magnitudes, representando uma variação de brilho de um fator 100 entre a estrela mais brilhante e a mais débil.



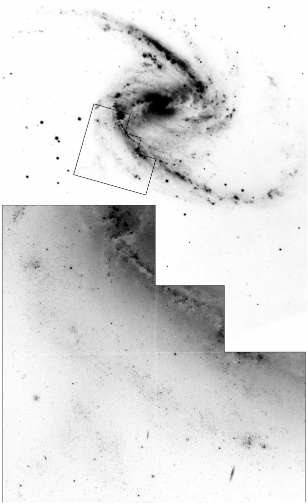
Constata-se empiricamente que

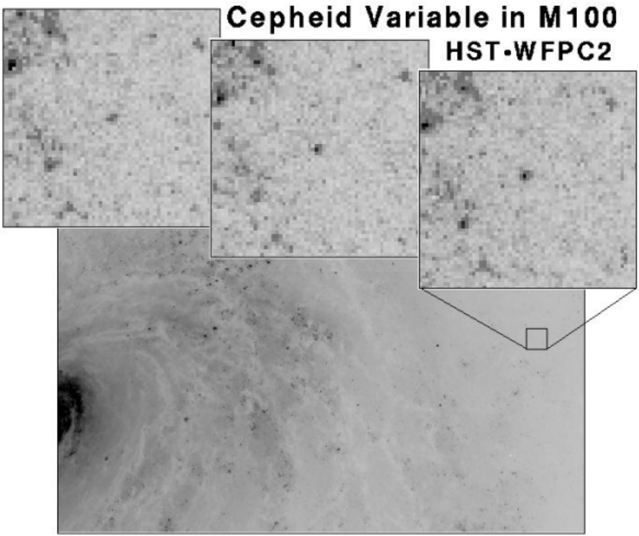
$$M_V \simeq -3,8\ \log P + 2,70\ \overline{B - V} - 2,21$$

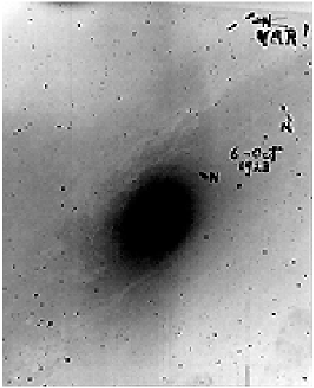
próxima da relação prevista pelo teorema do Virial. A inclusão do índice de cor médio, $\overline{B - V}$, indica que a relação período x luminosidade é ligeiramente diferente da temperatura efetiva das cefeidas.

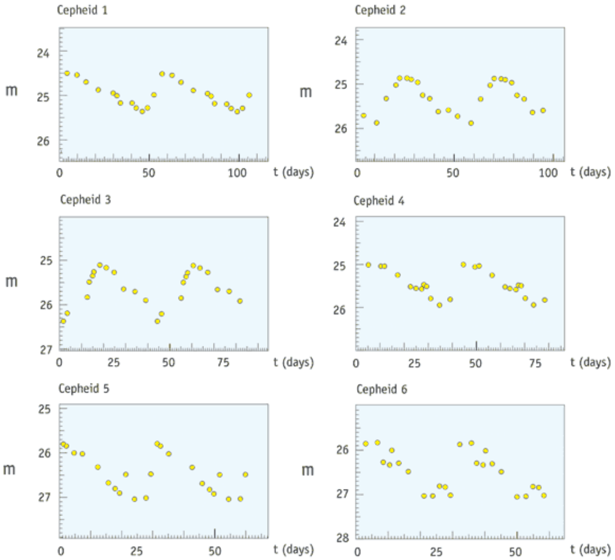


A observação de estrelas Cefeidas em galáxias próximas pode ser realizada através do telescópio espacial Hubble.



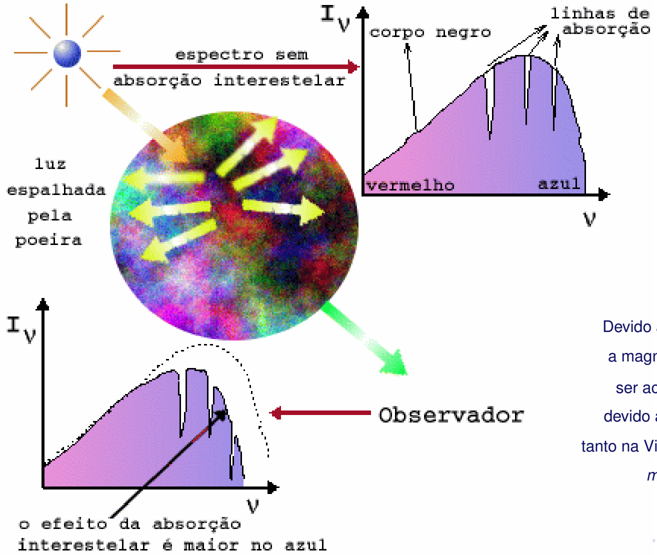

Cepheid Variable in M100
HST•WFPC2


VAR!



Exemplos de curvas de luz
de variáveis cefeidas em M100
observadas pelo HST
em Freedman et al. (1994).

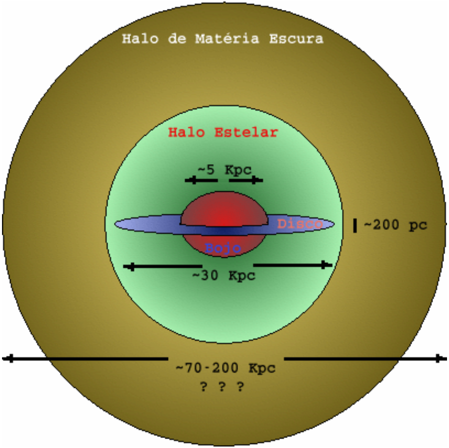
Por exemplo, suponha que tenha sido encontrada uma variável cefeida com um período de trinta dias em Andrômeda, e que ademais tenha, em média, uma magnitude visual aparente 18,70. Qual seria a distância de Andrômeda? Adotando-se um índice de cor médio $\overline{B-V} \simeq 1,0$, típico para essa classe de objetos, temos que a magnitude absoluta dessa estrela deve ser em média $M_V \simeq -5,12$ e portanto o módulo de distância de Andrômeda deve ser $m_V - M_V \simeq 23,82$ correspondendo a uma distância de 582 Kpc, ou cerca de dois milhões de anos-luz.

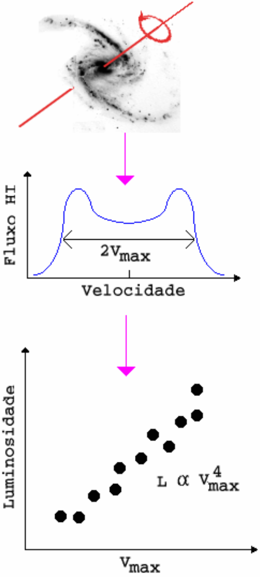


Devido à absorção interestelar
a magnitude observada deve
ser acrescida de um termo
devido à absorçao interestelar
tanto na Via Láctea como na galáxia

$m_{obs} = m_0 + A_\lambda$

A estrutura típica das galáxias espirais mostra a presença de um disco, bojo e halos estelares imersos em um halo estenso de matéria escura de dimensão ainda pouco conhecida.





Estando o disco estelar em equilíbrio

dinâmico de rotação temos

$$V_{rot}^2 \simeq GM/R$$

ademais a sua densidade projetada

de massa é aproximadamente constante

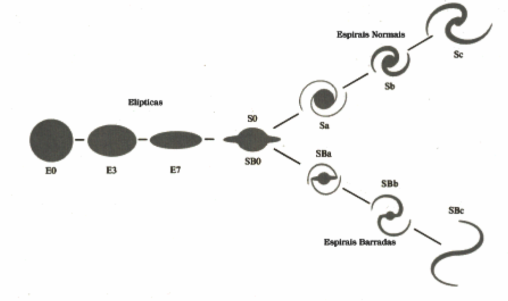
$$M/R^2 \simeq C^{te}$$

e para uma dada razão M/L resulta que

$$L \propto V^4$$

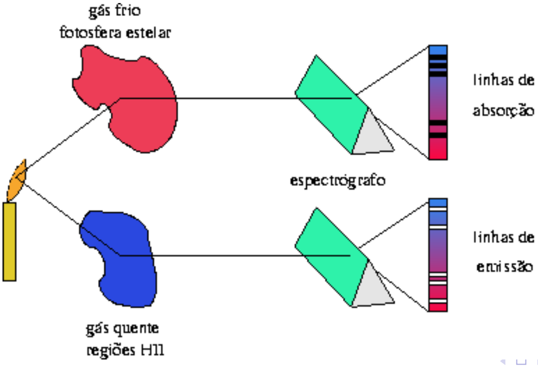
Os coeficientes da relação Tully-Fisher dependem da classificação morfológica das galáxias

$$M_B \simeq -11,0 \ \log v_{rot}(\mathrm{Km} \cdot \mathrm{s}^{-1}) + 3,31 \quad (Sc)$$
$$M_B \simeq -10,2 \ \log v_{rot}(\mathrm{Km} \cdot \mathrm{s}^{-1}) + 2,71 \quad (Sb)$$
$$M_B \simeq -9,95 \ \log v_{rot}(\mathrm{Km} \cdot \mathrm{s}^{-1}) + 3,15 \quad (Sa)$$



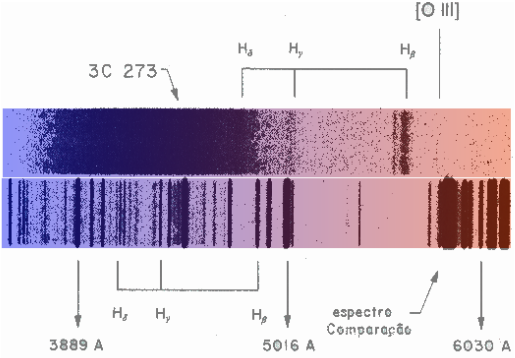
Andrômeda, por exemplo, tem uma velocidade máxima de rotação $v_{rot} \simeq 200 \ \mathrm{Km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ e sendo de tipo morfológico próximo a *Sa*, deve ter $M_B \simeq -19,75$. Como sua magnitude aparente é $m_B \simeq 4,4$, a distância deve ser $d \simeq 676 \ \mathrm{Kpc}$.

A luz das estrelas, ou das regiões HII de uma galáxia, quando analisada por um espectrógrafo permite a medida do deslocamento espectral das linhas devido ao movimento da fonte em relação ao observador.



O deslocamento na posição das linhas espectrais em relação ao padrão de laboratório permite a obtenção experimental do **redshift.**

$$z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$$

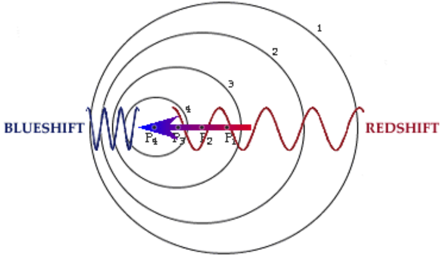


A interpretação clássica do redshift se baseia no efeito Doppler da radiação. Para baixas velocidades ($v << c$)

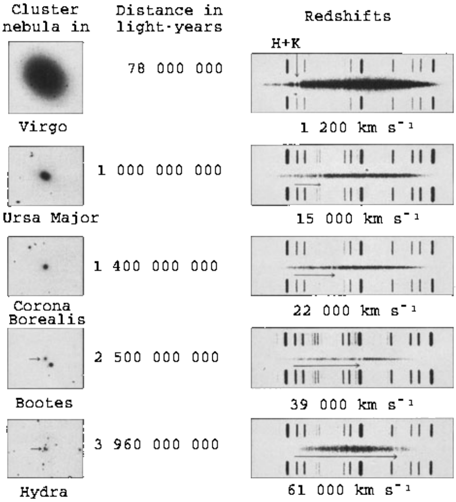
$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \simeq \frac{v}{c}$$

e, na relatividade restrita,

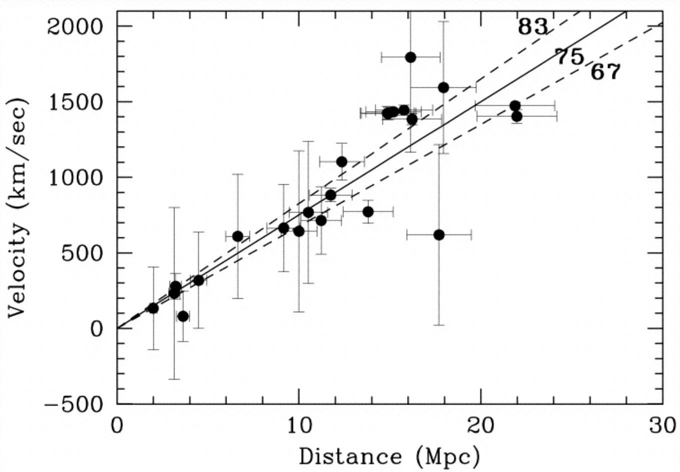
$$\frac{v}{c} = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1}$$

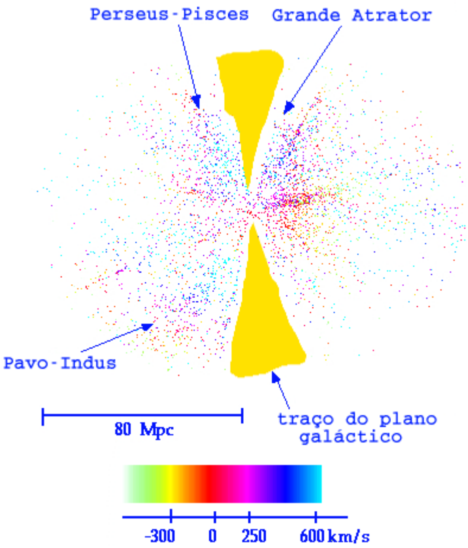


Utilizando esta interpretação E. Hubble detectou a expansão do Universo e mostrou que $v = H_0 d$.

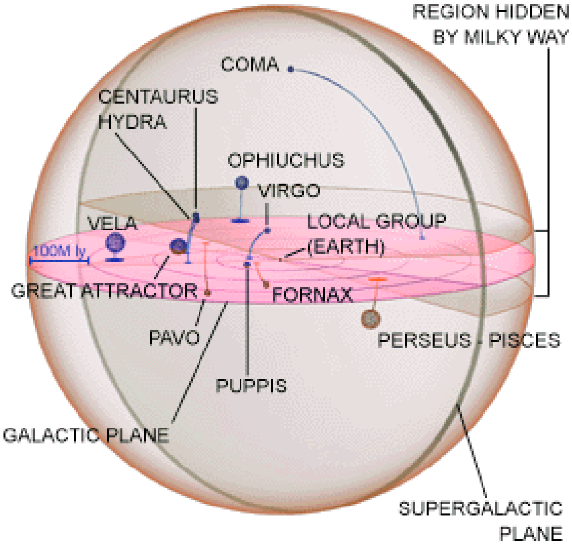


Estimativa de H_0 baseada somente nas Cefeidas
$H_0 = (75 \pm 8)\ \mathrm{Km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$ (Freedman *et al.* 2001).





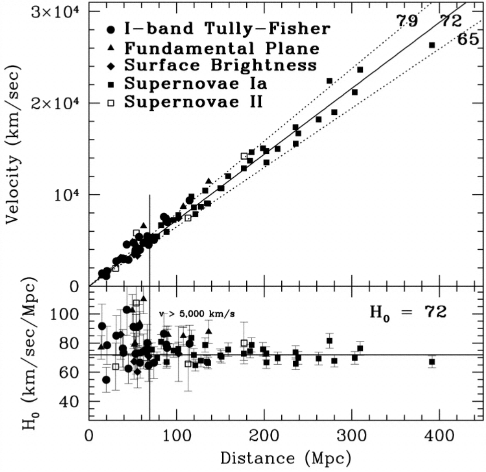
A aplicação das Cefeidas para estimar a constante de Hubble depende de uma correção cinemática a ser aplicada nas velocidades observadas devido ao movimento das galáxias locais em relação ao aglomerado de Virgo e ao Grande Atrator.



As melhores estimativas de H0 baseadas nas Cefeidas resultam em

$$H_0 = (75 \pm 8)\ \mathrm{Km} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{Mpc}^{-1}.$$

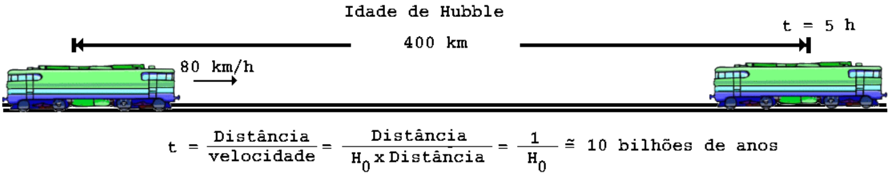
Estimativa de H_0 baseada em vários indicadores
$H_0 = (72 \pm 7)\ \mathrm{Km} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{Mpc}^{-1}$(Freedman *et al.* 2001).



Uma galáxia a uma velocidade constante v, deve ter percorrido uma distância $d = vt_H$. Nesse caso, concluímos que a grande expansão deve ter ocorrido em um instante no passado,

$$t_H = \frac{1}{H_0} = 9,7778 \text{ x} 10^9 \ h^{-1} \quad \text{anos}$$

conhecida como a idade de Hubble.



Enquanto permanecem dúvidas sobre o valor da constante de Hubble é usual utilizar a normalização,

$$H_0 = h\,100\ \mathrm{Km} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{Mpc}^{-1}$$

em que a constante de normalização deve estar contida no intervalo $0,5 \leq h \leq 1$ e se preferirmos apostar nos resultados mais recentes, então $h = 0,72 \pm 0,05$, utilizando os dados do telescópio espacial Hubble (HST), ou $h = 0,65 \pm 0,06$, segundo o grupo de estudos das supernovas.

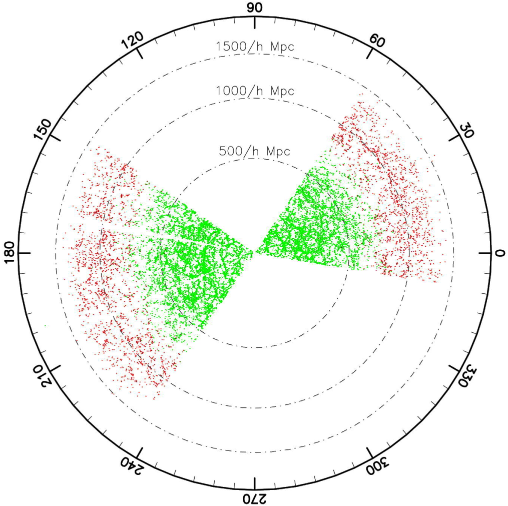
Mas a rigor a aplicação da teoria da relatividade restrita não é plenamente justificável conforme examinaremos no próximo capítulo. Isto se deve à teoria da relatividade geral, na qual o *redshift* é na verdade um sintoma da expansão da estrutura do espaço-tempo cosmológica, e não um sintoma de um afastamento cinemático entre objetos. Pelo momento, esta distinção não terá uma conseqüência prática imediata. Entretanto é prudente manter esta ressalva para quando formos realizar uma discussão mais ampla desse problema.

Problemas da interpretação de Hubble

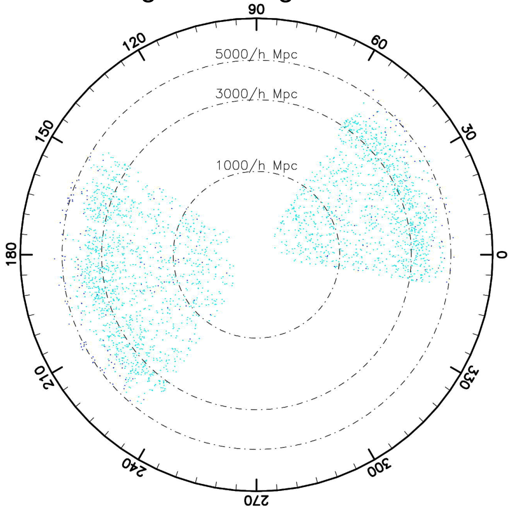
- Qual é o papel da gravidade durante este processo de expansão violenta?
- Como a gravitação afeta a estrutura do espaço, do tempo e conseqüentemente as estimativas de distância e idade?
- Seria justo admitir que estamos em um local tão privilegiado?
- Será que as galáxias sempre existiram na forma que podemos observar hoje?

o Universo em expansão deve ser necessariamente homogêneo e isotrópico, quando examinado por um observador típico. Os diversos observadores, independentemente uns dos outros, vão concordar, em um dado instante, com a mesma interpretação do Universo. Observe a aparência celular em pequenas escalas, devido aos aglomerados e grupos, e a diminuição na densidade de objetos distantes devido à dificuldade de observar objetos muito débeis.

Distribuição de galáxias observadas através do projeto Sloan.

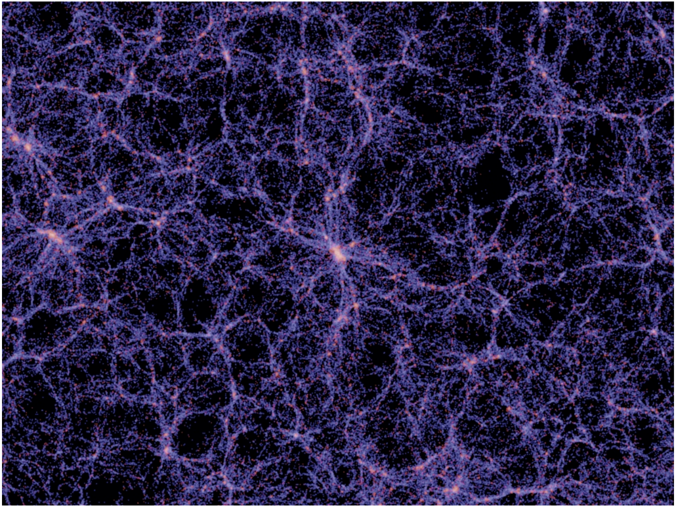


Os quasares são os objetos mais brilhantes indicam um Universo bastante homogêneo em grandes escalas.

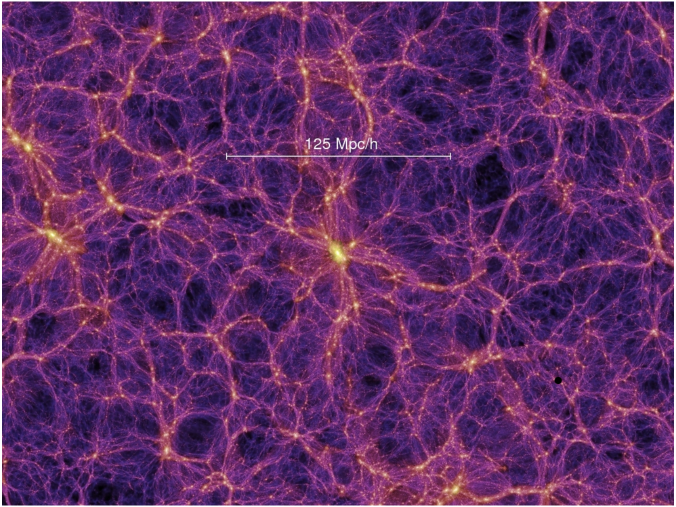


A homogeneidade não é sinônimo de uniformidade. A distribuição de galáxias tem uma aparência nitidamente celular em pequenas escalas, enquanto em grandes escalas esta estrutura celular se multiplica em várias direções gerando a homogeneidade. Localmente, existe um excesso de probabilidade de encontrar uma galáxia próxima a uma outra galáxia dada. Isto significa que a distribuição de galáxias é correlacionada em pequenas escalas, devido à ação da força gravitacional. Em grandes escalas esse grau de correlação vai se esmaecendo e passamos a ter uma distribuição homogênea.

Simulação da distribuição de luz, galáxias, pelo Consórcio Virgo



Simulação da distribuição da massa, matéria escura, pelo Consórcio Virgo



O fluxo de uma galáxia de luminosidade L, e distância r é

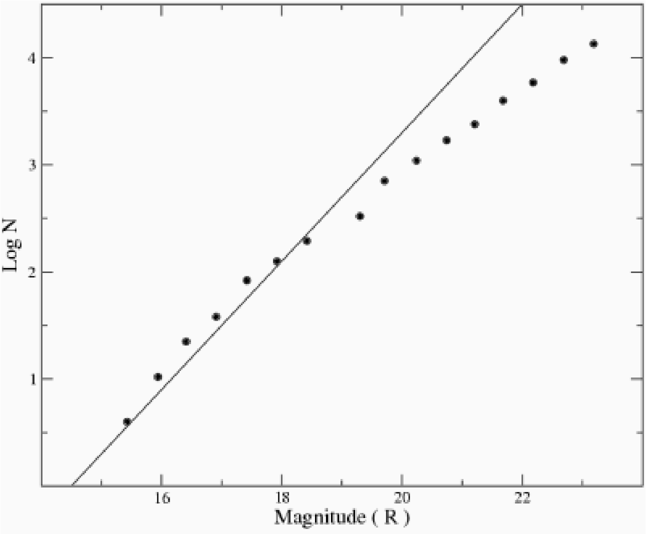
$$f = \frac{L}{4\pi r^2}$$

estando distribuídas uniformemente, com uma densidade volumétrica n, o número total, por unidade de ângulo sólido, será $nr^3/3$. Como todas terão um fluxo aparente superior ou igual a f, já que as mais próximas são mais brilhantes

$$N(>f) = n\frac{r^3}{3} = \frac{n}{3}(\frac{L}{4\pi f})^{3/2} \propto f^{-3/2}$$

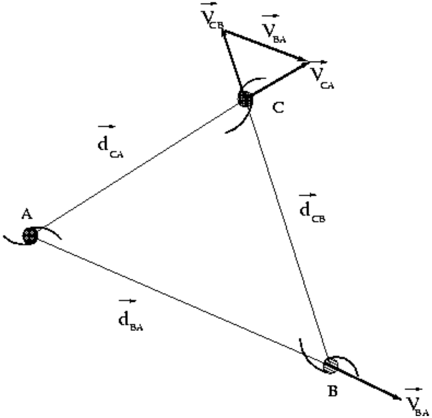
$$N(<m) = N_0 10^{0,6m}$$

esta é a previsão das contagens em um Universo euclidiano.


Log N
1
2
3
4
16
18
20
22
Magnitude (R)

As observações, ilustradas na figura anterior, indicam que os objetos mais brilhantes que cerca de 19-20 mag na banda R, centrada em 5500 Å, seguem a previsão euclidiana. O excesso de objetos mais débeis detectados, relativamente à previsão desses modelos, aponta para a presença de efeitos de curvatura do Universo e/ou evolução das galáxias . Este resultado é que uma galáxia típica tem uma magnitude absoluta $M_{V*} \simeq -20,30$, aproximadamente $2,0\ \mathrm{x}10^{10}\ \mathrm{L}_{\odot}$, ou cerca de 20 bilhões de estrelas do tipo solar. A densidade destas galáxias deve ser da ordem de $n_* \simeq 0,0034\ \mathrm{gal}\cdot\ \mathrm{Mpc}^{-3}$.

A universalidade da lei de Hubble pode ser entendida como uma conseqüência do princípio cosmológico. Se o observador *A* verificar a validade da lei de Hubble, então os outros observadores também devem detectar a validade dessa lei.

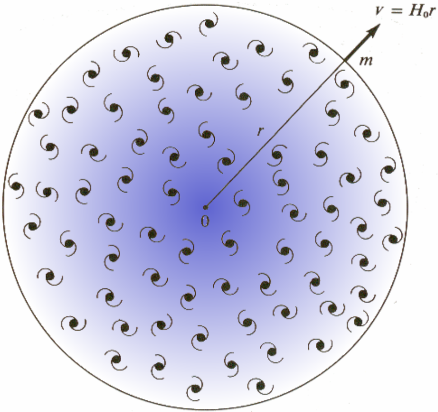


A inconsitência da física newtoniana quando aplicada ao Universo é facilmente percebida porque em um Universo finito, e newtoniano, o princípio cosmológico seria rompido pela presença dos observadores privilegiados nas fronteiras. E em um Universo newtoniano infinito e uniforme os pontos eqüidistantes de uma dada posição contribuiriam igualmente para a aceleração gravitacional que em conseqüência deveria ser nula. Se $\vec{g}$ é igualmente nulo, então, pela equação de Poisson, temos

$$\nabla^2\phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho$$

e portanto o único modelo, newtoniano, satisfazendo o princípio cosmológico, seria um Universo vazio!

A saída para se construir uma cosmologia newtoniana consiste em usar o Teorema de Birkoff, demonstrável na Teoria da Relatividade Geral, segundo o qual somente a massa interior a um raio r é que determina o movimento da camada esférica.



Nestas condições uma galáxia de massa m, a uma distância r do centro, será atraída pela massa

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3$$

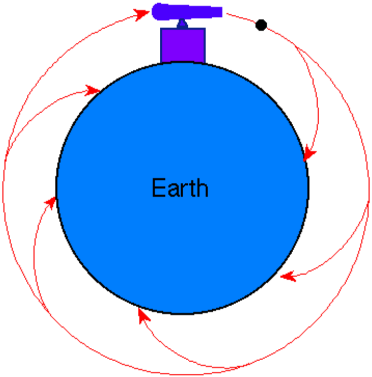
sendo ρ_0 a densidade atual. Na ausência de criação de massa o processo de expansão é determinado pela energia total

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = C^{te}$$

sendo v a velocidade de expansão do volume dada pela lei de Hubble, $v = H_0 r$.

dentro deste cenário devem existir três possíveis classes de modelos:

- $E < 0 \longrightarrow$ Universo *fechado*
- $E = 0 \longrightarrow$ Universo *crítico*
- $E > 0 \longrightarrow$ Universo *aberto*



Para que o Universo seja crítico, a densidade total de massa deve ter hoje um valor ρ_{0c} que obedeça à relação

$$\frac{1}{2}mH_0^2r^2 - \frac{Gm}{r}\frac{4\pi}{3}\rho_{0c}r^3 = 0$$

que pode ser expressa em termos da constante de Hubble,

$$\rho_{0c} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,8788\mathrm{x}10^{-29}h^2\ \mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3}$$

correspondendo a cerca de 11 átomos por metro cúbico. A variação na taxa de expansão, devido à aceleração gravitacional, é compensada com uma variação temporal da constante de Hubble

$$v = H(t)r$$

Uma camada de raio atual a, terá em um instante t um raio

$$r(t) = R(t)a$$

A sua velocidade de expansão depende da taxa de expansão do parâmetro de escala, $v = \dot{R}a$, e da massa interior

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3 a^3$$

E a sua energia normalizada pela energia total de repouso

$$E = -mc^2\,\frac{1}{2}k$$

onde o sinal de k determina se a energia total é positiva, negativa ou nula. Esta definição é feita para compatibilizar o resultado com a teoria da relatividade geral.

A constante k determina o comportamento do modelo

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi}{3} G\rho R^2 = -\frac{kc^2}{a^2}$$

e definindo $K_0 = k/a^2$, obtemos

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi}{3} G\rho R^2 = -K_0 c^2$$

Nesta formulação a constante K_0 não depende da massa da camada, ao contrário da energia E. Entretanto, o seu significado nesta formulação newtoniana é um tanto obscuro, e está atrelado a uma normalização da energia total da camada. Na teoria da relatividade geral K_0 está relacionada com a curvatura do Universo.

Conforme veremos, na teoria da relatividade geral a constante de curvatura, k, pode ter apenas os valores:

- **k=+1** Universo Fechado ($E < 0$)
  a expansão atinge um máximo, é freada, e segue-se o recolapso.
- **k=0** Universo Plano ($E = 0$)
  a expansão é freada mas prossegue indefinidamente e a velocidade terminal é nula.
- **k=-1** Universo Aberto ($E > 0$)
  a expansão é freada, prossegue indefinidamente e a velocidade terminal é diferente de zero.

Se não houver criação, ou aniquilação de massa, dentro da região de raio a, temos

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho(t)R(t)^3 a^3 = \frac{4\pi}{3}\rho_0 a^3$$

que resulta na relação

$$\rho R^3 = \rho_0$$

Essa é a equação de conservação da massa em coordenadas comóveis. Em conseqüência obtemos a lei de Hubble generalizada

$$v(t) = H(t)r(t) = H(t)R(t)a$$

Portanto, a lei de Hubble é sempre obedecida, mas a constante de Hubble se modifica a cada instante. Como $v(t) = dr(t)/dt = \dot{R}a$, podemos concluir que

$$H(t) = \frac{1}{R}\frac{dR}{dt}$$

Essa relação pode ser substituída na equação de Friedmann resultando em

$$(H^2 - \frac{8\pi}{3}G\rho)R^2 = -K_0c^2$$

e utilizando a condição de conservação da massa obtemos

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi}{3} G \rho_0 \frac{1}{R} = -K_0 c^2$$

que é a mesma equação obtida inicialmente por Friedmann a partir da teoria da relatividade geral.

Derivando-se a equação de Friedmann em relação ao tempo obtemos a equação de movimento,

$$\ddot{r} = -\frac{4\pi}{3} G\rho_0 r = -\frac{GM(r)}{r^2}$$

ou ainda

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3} G\rho R$$

mostrando que somente a massa interior à camada é que determina a evolução dinâmica do Universo, de acordo com o teorema de Birkhoff, que adotamos no início.

Para que o Universo seja crítico devemos ter $k = 0$ e obtemos para um instante arbitrário,

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

que determina a condição para que o Universo seja crítico. A razão entre a densidade de massa real e a densidade crítica é denominada de parâmetro de densidade,

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}$$

O valor do parâmetro de densidade no instante atual é

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{0c}}$$

Em princípio, Ω_0 é um parâmetro que pode ser diretamente inferido a partir das observações e por isso é comum eliminar a constante k da equação de Friedmann avaliada no instante atual,

$$K_0 c^2 = H_0^2(\Omega_0 - 1)$$

obtendo-se a equação de Friedmann na forma

$$\dot{R}^2 - H_0^2 \Omega_0 \frac{1}{R} = -H_0^2(\Omega_0 - 1)$$

a qual mostra como se processa a evolução dinâmica do Universo em termos dos dois parâmetros, H_0 e Ω_0, que podem em princípio ser determinados a partir das observações astronômicas.

Uma forma alternativa de descrever a taxa de expansão consiste em utilizar o parâmetro de desaceleração definido por

$$q = -\frac{\ddot{R}}{RH^2}$$

Diferenciando-se a equação de Friedmann verificamos que

$$q = \frac{\Omega}{2}$$

Como $q > 0$, o Universo deve se desacelerar qualquer que seja o modelo. Isto decorre de ser a gravitação uma força atrativa freando a expansão cósmica. Conforme veremos esta conclusão pode ser alterada, como indicam as observações recentes, incluindo-se um termo conhecido como a constante cosmológica, provocando uma aceleração do Universo.

Quando $k = 0$, ou $\Omega_0 = 1$, temos um Universo crítico e

$$R(t) = (t/t_0)^{2/3}$$

sendo $t_0 = 2H_0^{-1}/3$ a idade do Universo hoje, quando $R = 1$. Numericamente temos que $t_0 = 6,5185\mathrm{x}10^9 h^{-1}$ anos, ou ainda $t_0 = 1,0\ \mathrm{x}10^{10}$ anos para um valor da constante de Hubble igual a $H_0 = 65\ \mathrm{Km} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{Mpc}^{-1}$. Concluimos ainda que a densidade média de massa do Universo decresce gradualmente com a idade

$$t = \frac{1}{\sqrt{6\pi G\rho}}$$

na mesma escala do tempo de queda livre em um meio de densidade ρ.

No caso mais geral adota-se a transformação paramétrica

$$R = p\chi$$
$$t = q\tau$$

sendo p e q constantes cujo valor precisamos determinar.

$$\dot{\chi}^2 - \frac{H_0^2 \Omega_0 q^2}{p^3} \frac{1}{\chi} = -H_0^2(\Omega_0 - 1)\frac{q^2}{p^2}$$

Como são constantes arbitrárias impomos as condições

$$H_0^2 \Omega_0 \frac{q^2}{p^3} = 1$$
$$H_0^2 (1 - \Omega_0) \frac{q^2}{p^2} = \pm 1$$

e conseqüentemente

$$q = \frac{1}{H_0} \frac{\Omega_0}{|1-\Omega_0|^3}$$
$$p = \frac{\Omega_0}{|1-\Omega_0|}$$

que nos permite escrever a equação de Friedmann na forma

$$\dot{\chi}^2 - \frac{1}{\chi} = \pm 1$$

sendo o sinal positivo adotado quando $\Omega_0 < 1$ e o negativo quando $\Omega_0 > 1$. A integração formal dessa equação pode ser expressa na forma

$$\tau = \int_0^{\chi} (\frac{\chi}{1 \pm \chi})^{1/2} d\chi$$

e dependendo do sinal na expressão no denominador temos as soluções

$$\chi = \frac{1}{2}(1 - \cos\eta)$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\eta - \sin\eta) \qquad \Omega_0 > 1$$

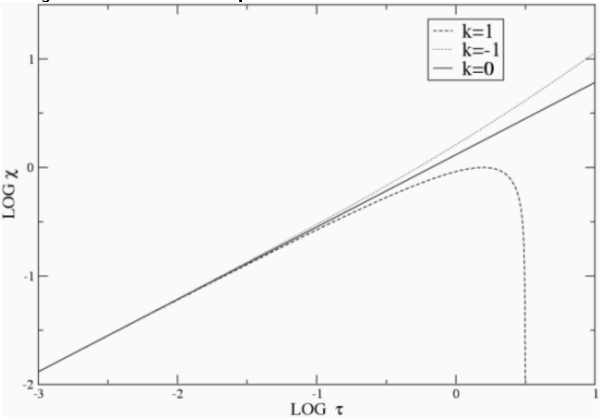
ou

$$\chi = \frac{1}{2}(\cosh\eta - 1)$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sinh\eta - \eta) \qquad \Omega_0 < 1$$

conhecidas como as soluções paramétricas da equação de Friedmann.

Dependência do fator de escala de expansão em função do tempo. Pode-se verificar que quando o fator de escala é reduzido as três curvas convergem assintoticamente para a mesma solução do modelo plano.



Essas soluções se distanciam bastante das soluções de um Universo crítico quando estamos distantes da origem, conforme podemos perceber na Figura acima.

Contudo, para $t \simeq 0$ as três soluções se aproximam de uma solução comum. Quando $R \to 0$ o termo em $1/R$ domina sobre o segundo membro da equação de Friedmann e

$$\dot{R}^2 \simeq \frac{H_0^2 \Omega_0}{R} \qquad R \to 0 \, , t \to 0$$

cuja solução é a mesma de um Universo crítico,

$$R \simeq \left(\frac{9H_0^2\Omega_0}{4}\right)^{1/3} t^{2/3} \qquad R \rightarrow 0 \,, t \rightarrow 0$$

a menos de uma constante de proporcionalidade. Portanto, mesmo que não saibamos qual o valor mais adequado do parâmetro de densidade, as características dinâmicas da expansão inicial estão muito bem determinadas pela equação de Friedmann.

Próximo da singularidade inicial $R \to 0$ a densidade diverge

$$\rho = \frac{\rho_0}{R^3} \simeq \frac{4\rho_0}{9H_0^2\Omega_0}\frac{1}{t^2}\,, \qquad t \to 0$$

e as perturbações quânticas dominam. Numa região de massa m, a maior velocidade de transfência de informação é c e a sua dimensão máxima passa a ser

$$\mathcal{L} \simeq \frac{Gm}{c^2}$$

Pelo princípio da incerteza o limite, da ordem do comprimento de onda de Compton, que não podemos ultrapassar sem romper com a descrição quântica é

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc}$$

em que $\hbar$ é a constante de Planck.

Quando $\mathcal{L} \simeq \lambda$, a teoria quântica e a teoria da relatividade geral devem se fundir

$$\frac{Gm}{c^2} \simeq \frac{\hbar}{mc}$$

para descrever uma escala de massa

$$m_{pl} = (\frac{\hbar c}{G})^{1/2} = 2,1767 \text{ x}10^{-5} \text{ g}$$

conhecida como a massa de Planck.

A dimensão física correspondente é

$$\lambda_{pl} = (\frac{G\hbar}{c^3})^{1/2} = 1,6160 \text{ x}10^{-33} \text{ cm}$$

estabelecendo uma escala de tempo de Planck

$$t_{pl} = (\frac{G\hbar}{c^5})^{1/2} = 5,3906 \text{ x}10^{-44} \text{ s}$$

Abaixo deste limite não podemos mais aplicar a teoria da relatividade geral tal qual conhecemos para descrever o Universo, e a equação de expansão desenvolvida anteriormente cessa de ser válida. Nessa escala, o *continuum* espaço-tempo deixa de ser suave e temos necessariamente que entender os efeitos da mecânica quântica sobre a estrutura deste mesmo espaço-tempo. Ou seja, podemos concluir que a teoria da relatividade geral, tal qual a conhecemos hoje, nos permite saber quase tudo a respeito da expansão do Universo, exceto como ela se originou!

Quanto $t \to 0$ o Universo se aproxima do modelo crítico, $\Omega(t) \to 1$ e

$$1 - \frac{1}{\Omega(t)} = R\left(1 - \frac{1}{\Omega_0}\right)$$

como $R \simeq 0$ a expressão acima pode ser desenvolvida em série

$$\Omega(t) - 1 \simeq \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0^{2/3}}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}, \qquad t \to 0$$

próximo da era de Planck temos que

$$\Omega(t_{pl}) - 1 \simeq (\Omega_0 - 1)\Omega_0^{2/3} \text{ x}7,5 \text{ x}10^{-41} h^{2/3}$$

Como $0,2 < \Omega_0 \leq 1$ o Universo deve ter sido criado com um ajuste extraordinariamente fino sobre o parâmetro de densidade já que $\Omega(t_{pl})$ era praticamente indistingüível da unidade!

Quais os limites que podemos impor sobre a idade do Universo e o que podemos aprender a partir destas restrições?

Quando $\Omega_0 > 1$

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{3/2}} [\cos^{-1}(2\Omega_0^{-1} - 1) - \frac{2}{\Omega_0}(\Omega_0 - 1)^{1/2}]$$

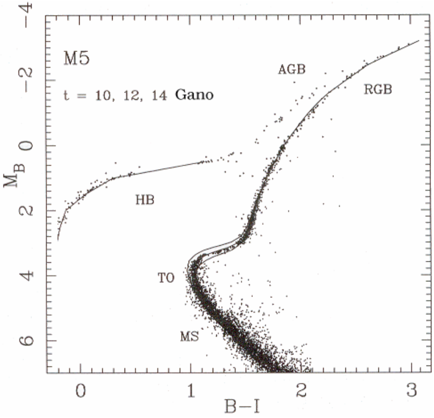
e no caso de $\Omega_0 < 1$

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{3/2}} [-\cosh^{-1}(2\Omega_0^{-1} - 1) + \frac{2}{\Omega_0}(1 - \Omega_0)^{1/2}]$$

Como Ω_0 não deve ser muito diferente de 1 podemos aproximar estas soluções pela expressão

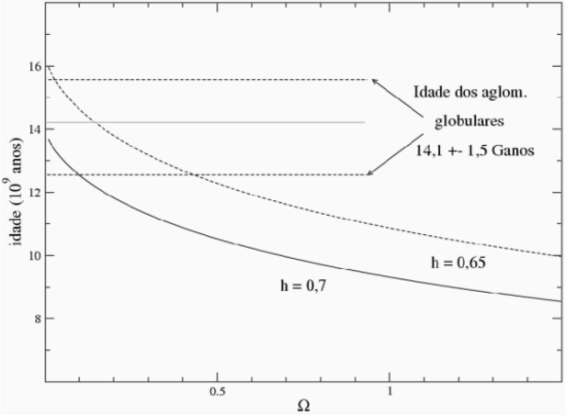
$$t_0 \simeq \frac{2}{3H_0}[1 - \frac{1}{5}(\Omega_0 - 1) + ...] \; .$$

- rochas lunares $4,6 \pm 0,1$ Ganos
- disco galáctico $9,5 \pm 1,0$ Ganos
- aglom. globulares $14,1 \pm 1,5$ Ganos
- ^{238}U em estrelas $14,0 \pm 2,4$ Ganos



modelo cosmológico apenas com bárions

- descarta $\Omega_0 = 1 \rightarrow 9,3 < t_0(\text{ Ganos}) < 10,9$
- modelo favorecido $\Omega_0 \simeq 0,06$ ..
- .. mas as observações indicam $\Omega_0 \simeq 0,3 - 0,4$!?



Solução? → energia escura!

1. Imagine que num futuro próximo possamos instalar um telescópio no solo do planeta Marte e medir paralaxes com precisão da ordem de 0,001". Qual seria a distância máxima possível de ser medida com este instrumento?
2. As galáxias espirais podem ser aproximadamente modeladas como sendo constituídas por um disco fino circular. Na nossa Galáxia, por exemplo, a escala de altura do disco é da ordem de 3% da dimensão radial. Nessa aproximação, mostre como é possível estimar a velocidade de rotação no plano do disco, que entra na relação Tully-Fischer, a partir da velocidade de rotação projetada na linha de visada, a que temos acesso observacional, utilizando a razão axial aparente $q = b/a$ obtida a partir das imagens.
3. As inomogeneidades do Universo local induzem movimentos peculiares da ordem de 200-300 $\mathrm{Km \cdot s^{-1}}$ nas galáxias. Quão distantes devem estar as galáxias de uma amostra para que o efeito desta perturbação seja inferior a 10% nas estimativas da constante de Hubble?
4. Estime a velocidade de recessão de um quasar observado a um *redshift* $z = 4,5$ utilizando a previsão da teoria da relatividade restrita.
5. A idade do sistema solar, obtida através das rochas lunares, é estimada em aproximadamente 4,6 bilhões de anos. Utilizando apenas esta informação estime um limite superior para a constante de Hubble. Faça o mesmo exercício utilizando a estimativa de idade do disco galáctico e dos aglomerados globulares.
6. Em um modelo crítico, a densidade de massa do Universo no instante atual deve ser ρ_{0c}, mas no passado esta densidade deve ter sido bem maior. Imagine que esse seja um modelo adequado para o Universo. Quanto tempo após a criação deve ter transcorrido para que a densidade média do Universo fosse igual à densidade do ar, da água, de um sólido e da matéria nuclear? Por que densidades tão elevadas não resultaram na formação de sólidos? Qual era a densidade de massa na era de Planck?
7. As galáxias e aglomerados de galáxias devem ter se desenvolvido a partir de pertubações presentes quando ocorreu a recombinação do hidrogênio em $R \simeq 1/1000$. Estime a idade do Universo e a densidade de massa quando isto ocorreu. Estas estimativas dependem muito do parâmetro de densidade?

8 Em 1921, Vesto M. Slipher anunciou a determinação da velocidade radial de NGC 584, com um valor de 1100 milhas por segundo, após ter exposto um espectro fotográfico deste objeto durante mais de duas semanas! Supondo que a idade da Terra era de 4,6 bilhões de anos, ele estimou qual deveria ser a distância deste objeto, tendo ela mantido a velocidade observada. Refaça estas estimativas e comente esta determinação de distância à luz dos modelos cosmológicos conhecidos.

9 Faça uma expansão em série até a quinta ordem das soluções da equação de Friedmann para o caso não crítico. Para $\Omega_0 = 0, 1, 1$ e 10, a partir de qual parâmetro de escala as três soluções passam a diferir por mais de 1%? Qual seria a idade do Universo nesta época?

10 Mostre que no modelo plano o *lookback time*, o intervalo decorrido entre a emissão do fóton e a sua detecção no presente, é dado por

$$t_L = \frac{2}{3} t_H (1 - R^{3/2}) \ .$$

Ao observarmos um quasar em $z = 5$, o fator de escala do Universo conforme veremos no próximo capítulo deve ter sido $R = 1/(1 + z)$. Qual a fração da idade de Hubble que estamos amostrando no passado ao observar este objeto?

FIM