Técnicas de espectroscopia 3D aplicados ao BTFI e SIFS. I - Identificação e redução de ruído em cubos de dados obtidos com espectrógrafos Fabry-Perot.

J. E. Steiner e Carlos Eduardo Paladini
IAG-USP

1 – Introdução

Com o advento da fase operacional dos instrumentos BTFI e SIFS no telescópio SOAR, é oportuno elaborar procedimentos de técnicas de espectroscopia 3D para tratar os dados a serem obtidos com esses instrumentos. Esse é um primeiro relatório de uma série que apresenta técnicas de identificação e tratamento de ruído em cubos de dados obtidos com espectrógrafos Fabry-Perot. Para servir de teste, utilizamos um cubo de dados existente, obtido com outro instrumento, com o objetivo de ilustrar os procedimentos.

O relatório 2 tratará de técnicas de análise de dados obtidos com espectrógrafos Fabry-Perot. No relatório 3 serão tratados especificidades de tratamento de dados obtidos com IFU – epectrógrafos com unidades de campo integral.

2 – Teoria

a- Transformada de Fourier

Uma transformada de Fourier pode ser definida como uma operação matemática que passa uma determinada função para o domínio de freqüências. Colocando isso de uma outra forma, pode-se dizer que se calculando a transformada de Fourier de uma função, obtém-se um espectro de freqüências dessa função, ou seja, obtém-se uma nova função que fornece as componentes em freqüência da função original. A transformada de Fourier de uma função contínua de uma única variável, f(x), pode ser dada pela equação:

$$\hat{I}(u) = \int I(x) \cdot e^{-i2\pi ux} dx \qquad (2.1)$$

onde u é a freqüência

Uma vez calculada a transformada F(u), a função original f(x) pode ser obtida aplicando-se a transformada de Fourier inversa em F(u):

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{I}(u) \cdot e^{i2\pi ux} du \qquad (2.2)$$

As equações (1.1) e (1.2) acima podem ser facilmente estendidas para funções de duas variáveis I(x,y). A transformada de Fourier de uma função contínua I(x,y) pode ser dada por

$$\hat{I}(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x,y) \cdot e^{-i2\pi(ux+vy)} dxdy \qquad (2.3)$$

onde u é a freqüência ao longo do eixo x
v é a freqüência ao longo do eixo y

e a transformada inversa de Î(u,v) pode ser dada por

$$I(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{I}(u,v) \cdot e^{i2\pi(ux+vy)} dudv \qquad (2.4)$$

e

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx\, dy$$

Onde (u,v) são as freqüências espaciais em (x,y).

Como o objetivo aqui, entretanto, é utilizar transformadas de Fourier em cubos de dados (ou seja, utilizá-las nas imagens bidimensionais dos cubos de dados), o interesse maior é nas transformadas de Fourier de funções discretas e não contínuas (já que uma imagem pode ser considerada uma função bidimensional discreta). A transformada de Fourier de uma função discreta f(x), para x=0,1,2,...,M-1, pode ser dada por

$$\hat{I}(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} I(x) \cdot e^{\frac{-i2\pi ux}{M}} . \qquad (2.5)$$

para u=0,1,2,...M-1

Similarmente, a transformada inversa de f(x) pode ser dada por

$$I(x) = \sum_{u=0}^{M-1} \hat{I}(u) \cdot e^{\frac{i2\pi ux}{M}} . \qquad (2.6)$$

Uma importante diferença da transformada de Fourier discreta para a transformada de Fourier contínua é que a última pode não existir para certas funções, enquanto que a primeira sempre existe.

Pelas equações anteriores, pode-se dizer que, em geral, transformadas de Fourier geram valores complexos. Dessa forma, uma transformada de Fourier Î(u) pode ser escrita como

$$\hat{I}(u) = \left|\hat{I}(u)\right| \cdot e^{i\phi(u)}, \qquad (2.7)$$

sendo que

$$\left|\hat{I}(u)\right| = \left(R^2(u) + F^2(u)\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.8)$$

e

$$\phi(u) = \tan^{-1}\left(\frac{F(u)}{R(u)}\right) \qquad (2.9)$$

onde F(u) = parte imaginária de Î(u)
R(u) = parte real de Î(u)
$\left|\hat{I}(u)\right|$ = magnitude da transformada de Fourier
$\phi(u)$ = ângulo de fase da transformada de Fourier

Uma quantidade que é freqüentemente utilizada para representar os resultados de uma transformada de Fourier é o espectro de potência, definido como

$$P(u) = \left|\hat{I}(u)\right|^2 = R^2(u) + F^2(u). \qquad (2.10)$$

Assim como no caso de funções contínuas, a extensão da transformada de Fourier, e sua inversa, de uma função discreta para o caso bidimensional é bastante simples. A transformada de Fourier F(u,v) de uma função discreta bidimensional f(x,y), de tamanho M x N, pode ser dada por

$$\hat{I}(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} I(x,y) \cdot e^{-i2\pi(ux/M + vy/N)}. \qquad (2.11)$$

para u = 0,1,2,...,M-1
v = 0,1,2,...,N-1

Por sua vez, a transformada inversa de F(u,v) pode ser dada por

$$I(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} \hat{I}(u,v) \cdot e^{i2\pi(ux/M + vy/N)}. \qquad (2.12)$$

Analogamente ao caso de uma transformada de Fourier discreta de uma função de uma única variável, a magnitude, o ângulo de fase e o espectro de potência da transformada de Fourier discreta de uma função de duas variáveis podem ser dadas, respectivamente, por

$$\left|\hat{I}(u,v)\right| = \left(R^2(u,v) + F^2(u,v)\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.13)$$

$$\phi(u,v) = \tan^{-1}\left(\frac{F(u,v)}{R(u,v)}\right) \qquad (2.14)$$

e

$$P(u,v) = \left|\hat{I}(u,v)\right|^2 = R^2(u,v) + F^2(u,v) \qquad (2.15)$$

b- Transformada de Anscombe

A transformada de Anscombe é uma transformação de estabilização de variança que transforma uma variável randômica com uma distribuição de Poisson em uma distribuição aproximadamente gaussiana padrão.

A transformada de Anscombe é muito usada em imagens limitadas por fótons, quando as imagens naturalmente seguem a lei de Poisson. A transformada de Anscombe é usada para pré-processar os dados e fazer o desvio padrão aproximadamente constante. A seguir algoritmos de *denoising* ,produzidos para filtrar ruído aditivo branco, podem ser utilizados.Finalmente a transformada inversa deve ser aplicada.

$$A : x \mapsto 2\sqrt{x + \tfrac{3}{8}} \qquad (2.16)$$

Ela transforma dados poissonianos em dados aproximadamente gaussianos de desvio padrão igual a 1. Essa aproximação é válida se a média dos dados poissonianos tiverem x > 4.

Um segundo aspecto importante da transformada de Anscombe é que o FWHM da PSF aumenta em √2. Isso significa que no espaço de Fourier a PSF se contrai do mesmo fator, aumentando a margem para filtrar no espaço de freqüências.

Filtros de Butterworth

Uma forma eficaz e elegante de fazer isso é transformando o cubo para o espaço de Fourier e aplicando um filtro de Butterworth.

Os ruídos de alta freqüência, comum nos cubos de dados podem ser eliminados utilizando-se do filtro de Butterworth de passa-baixo, que é dado por :

$$B(u,v) = \frac{1}{\left\{1 + \left[\sqrt{\left(\left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2\right)}\right]^{2n}\right\}} \qquad (2.17)$$

Onde, para pixel quadrado, a=b=f.g

$$g = \frac{4 \ln 2 \, p(") \, F_{ny}}{\pi \; FWHM(PSF)(")} \qquad (2.18)$$

d– Filtragem de bloqueio de banda

Um filtro de bloqueio de banda pode ser definido como

$$B_{bb}(u,v) = \frac{1}{\left\{1 + \left[\frac{l\sqrt{u^2 + v^2}}{u^2 + v^2 - u_0^2 - v_0^2}\right]^{2n}\right\}} \qquad (2.19)$$

Onde l é a largura da banda e u0 e v0 são as freqüências do centro da banda.

e-Tomografia PCA

Um cubo de dados obtido com IFU é caracterizado por três dimensões: $xy\lambda$. Cada pixel é caracterizado por uma intensidade $I_{ij\lambda}$, onde ij correspondem aos pixels espaciais. Inicialmente transformamos o cubo em uma matriz $I_{\beta\lambda}$ onde:

$$\beta = \mu(i - l) + j \qquad (2.20)$$

Sobre essa matriz $I_{\beta\lambda}$ é aplicada o PCA, que é muito eficiente em identificar padrões e correlações nos dados que, de outra forma dificilmente seriam notados. Matematicamente o PCA é definido como uma transformação linear que transforma os dados (correlacionados) em um novo sistema ortogonal de coordenadas (não correlacionados), ordenados de tal forma que o primeiro de autovetor explica a maior parte da variança (autovalor), seguido pelo segundo autovetor e assim por diante.

A matriz de covariança dos dados originais é dada por

$$C_{cov} = \frac{I_{\lambda\beta} \cdot [I_{\lambda\beta}]^T}{n-1} \qquad (2.21)$$

que tem a propriedade de ser simétrica

$$C_{cov} = [C_{cov}]^T \qquad (2.22)$$

A transformada que corresponde ao PCA é a dada pela fórmula:

$$T_{k\beta} = E_{k\lambda} . I_{\lambda\beta} \qquad (2.23)$$

onde $T_{\beta k}$ são os dados no novo sistema de coordenadas $E_{k\lambda}$ que são chamados de autovetores ou autoespectros. A transformação é obtida a partir da diagonalização da matriz de covariança:

$$D_{cov} = \frac{T_{k\beta} \cdot [T_{k\beta}]^T}{n-1} \qquad (2.24)$$

Sendo que os elementos diagonais dessa matriz são os autovalores. A matriz $T_{\beta k}$ pode ser retro-projetada para a forma de cubo de dados; agora os elementos espaciais serão chamados de tomogramas, pois representam recortes dos dados no novo espaço dos autovetores.

3 – Filtragem de freqüências constantes

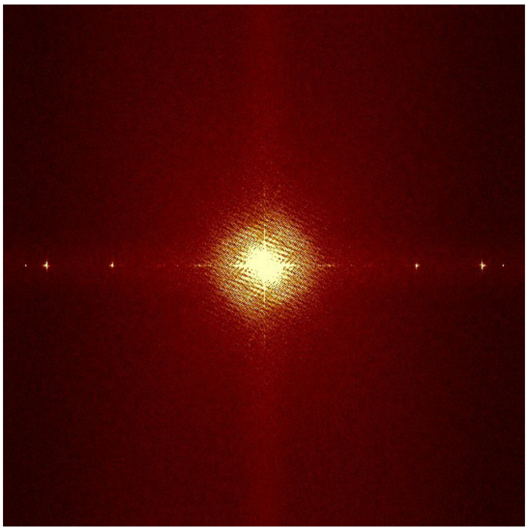
Iniciamos o processo com a filtragem de freqüências constantes. A imagem original, O, a ser filtrada é mostrada a seguir. Trata-se de uma imagem da galáxia NGC 92, pertencente a um grupo compacto de galáxias.

O

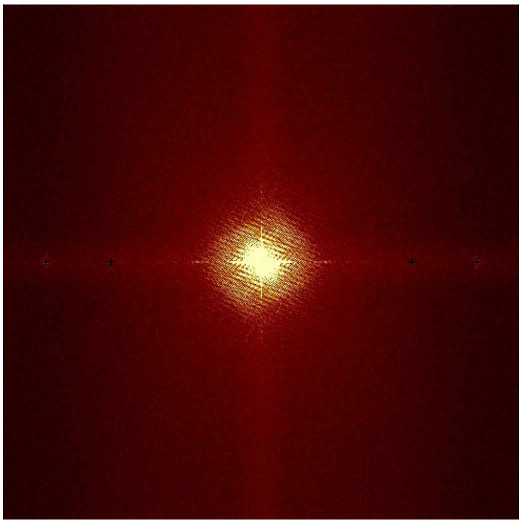
É possível ver, em diversas regiões, estrias verticais que estão presentes nos dados. Essas estrias forma introduzidas pelo instrumento e são classificadas como *fingerprints instrumentais.* A transformada de Fourier da Transformada de Anscombe é mostrada a seguir, como F.

O_A

F



B

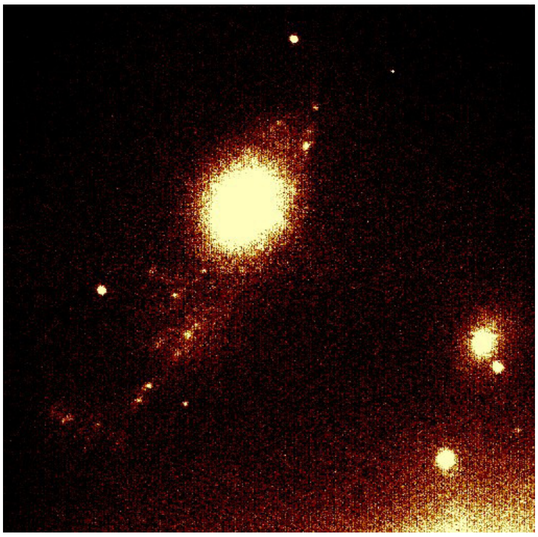


FxB

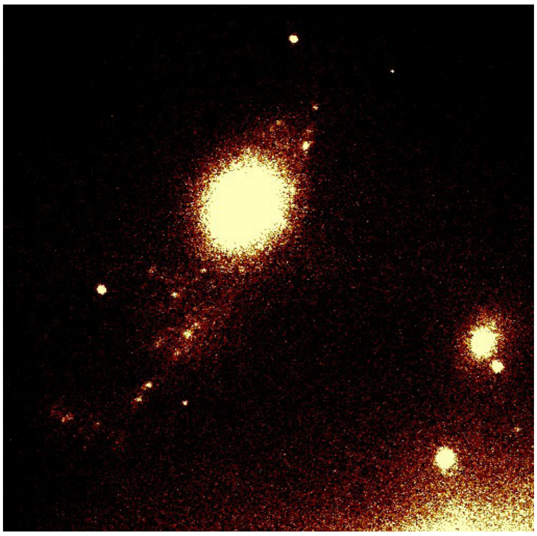
Nessa imagem fica evidente que as freqüências são bem marcadas e estão no eixo x. A seguir construímos um filtro de banda, B. Multiplicamos FxB.

Dessa forma nos livramos das freqüências verticais. A transformada inversa de Anscombe da transformada inversa de Fourier, denominada f, é mostrada abaixo. A diferença entre as duas imagens, r=O-f também é mostrada a seguir. Nela vemos a imagem das estrias que estão presentes na imagem original, mas não na imagem filtrada.

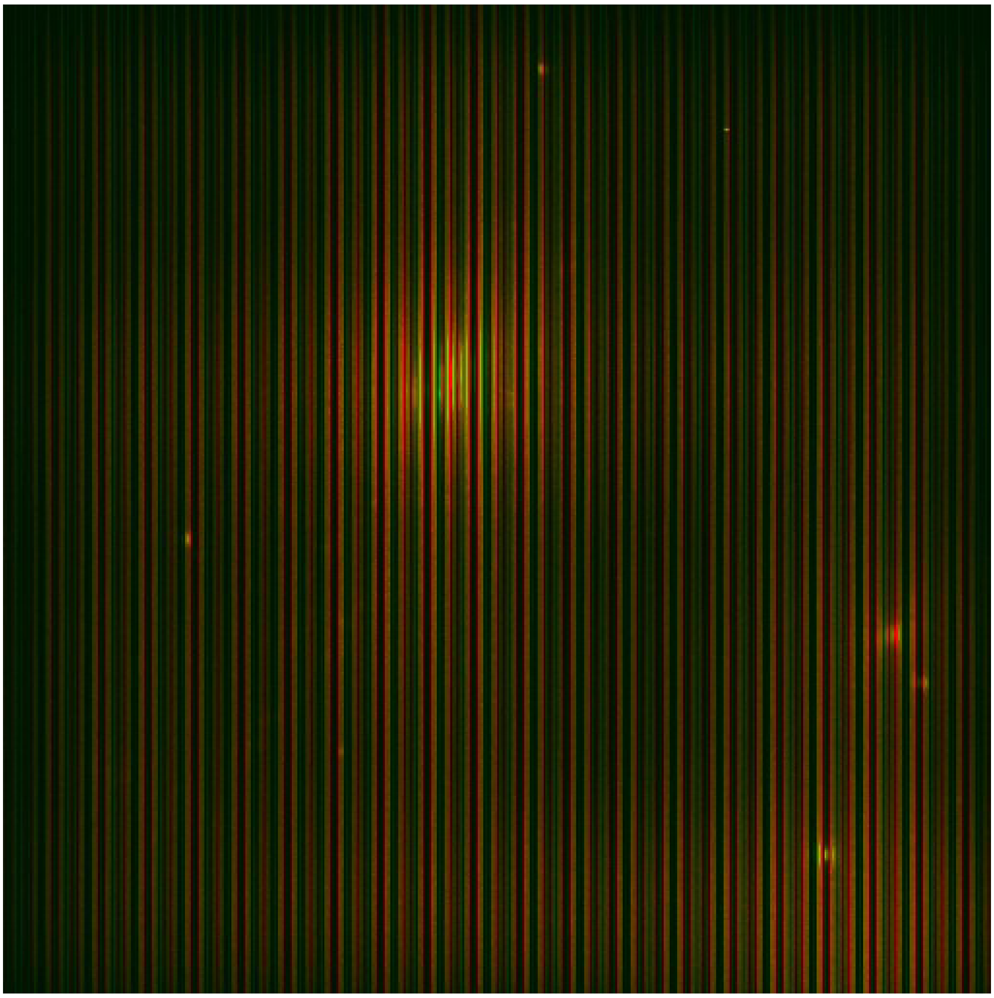
O



f



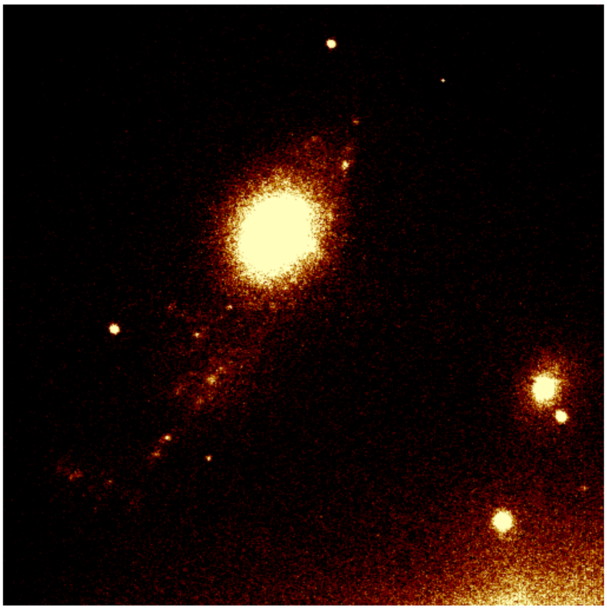
O-f



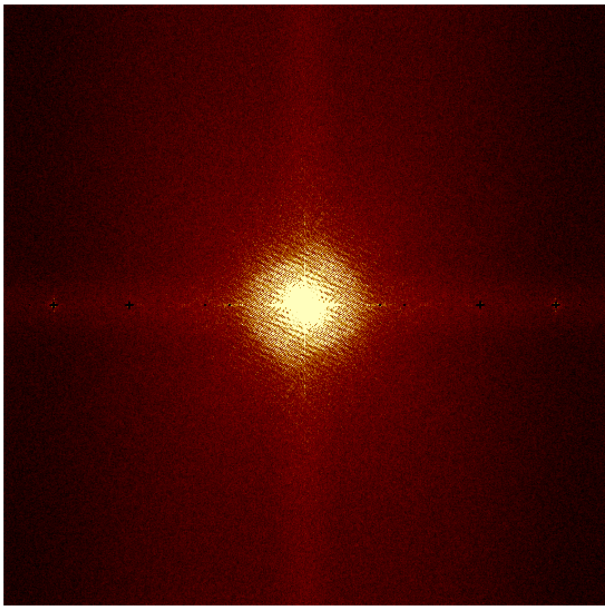
4 – Filtragem de Butterworth de alta freqüência espacial

Tratamento com filtro de Butterworth de altas freqüências espaciais. (o cubo de dados está no espaço de Anscombe).

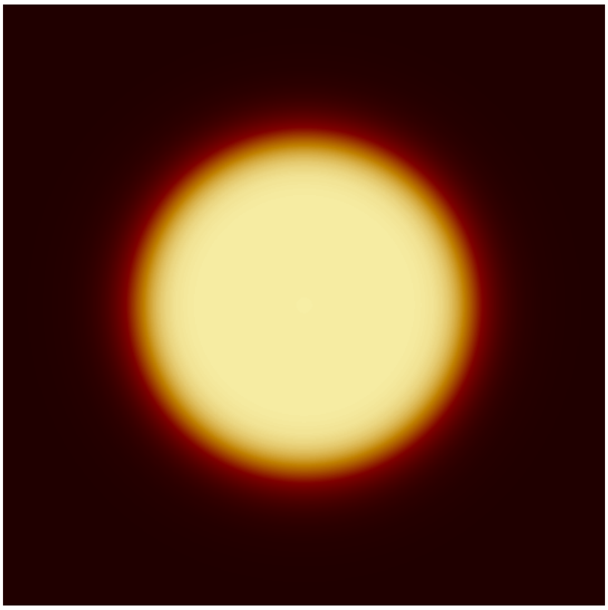
O_A



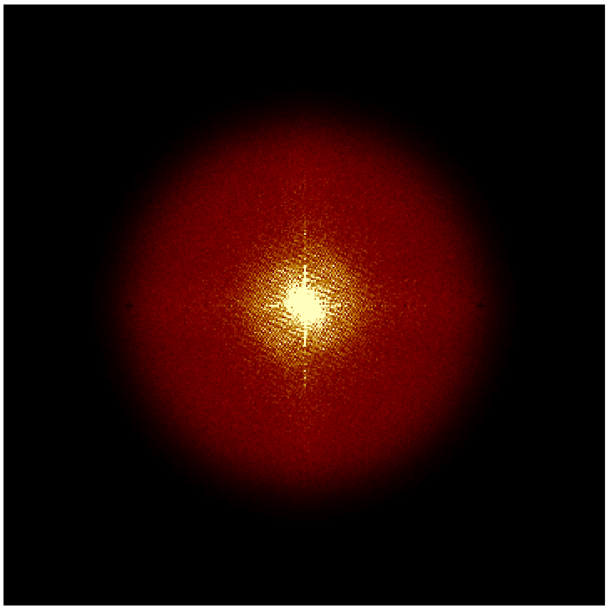
F



B

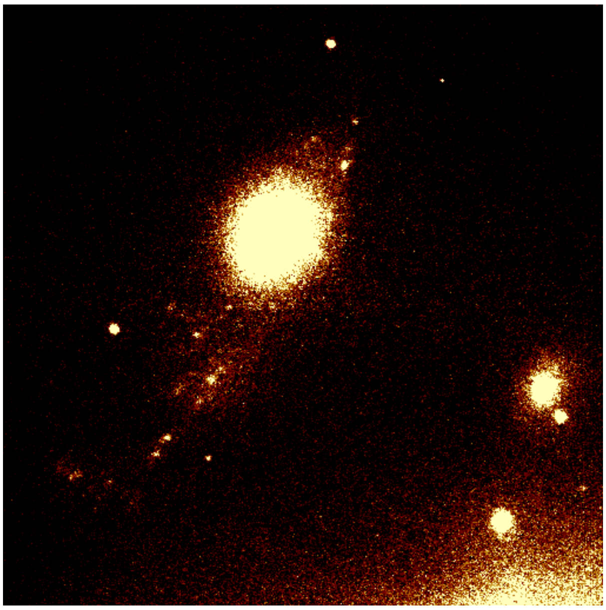


FxB

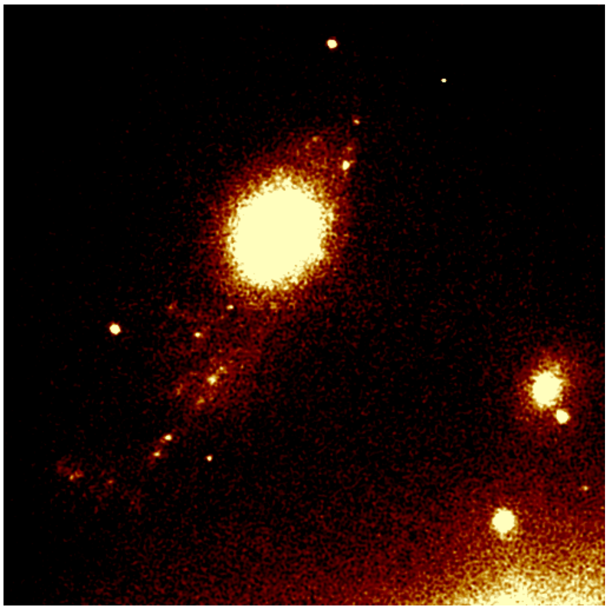


B = Filtro de Butterworth (n = 6.0, f = 2.50, p=0,42" , fwhm_psf=1,6"

O

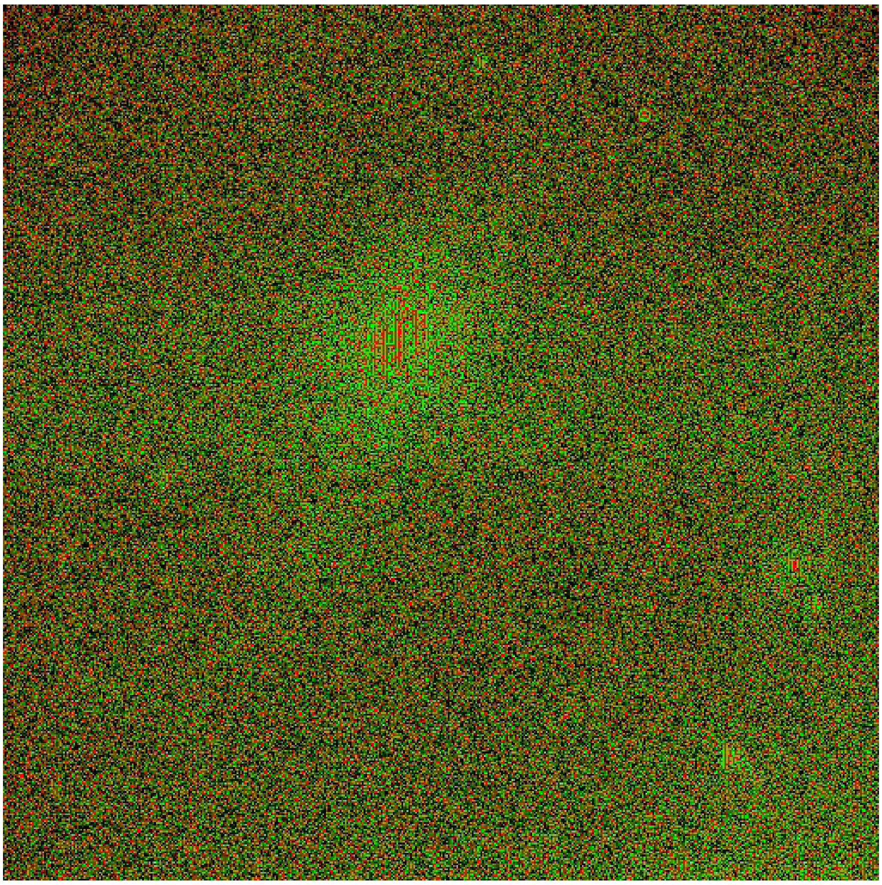


f

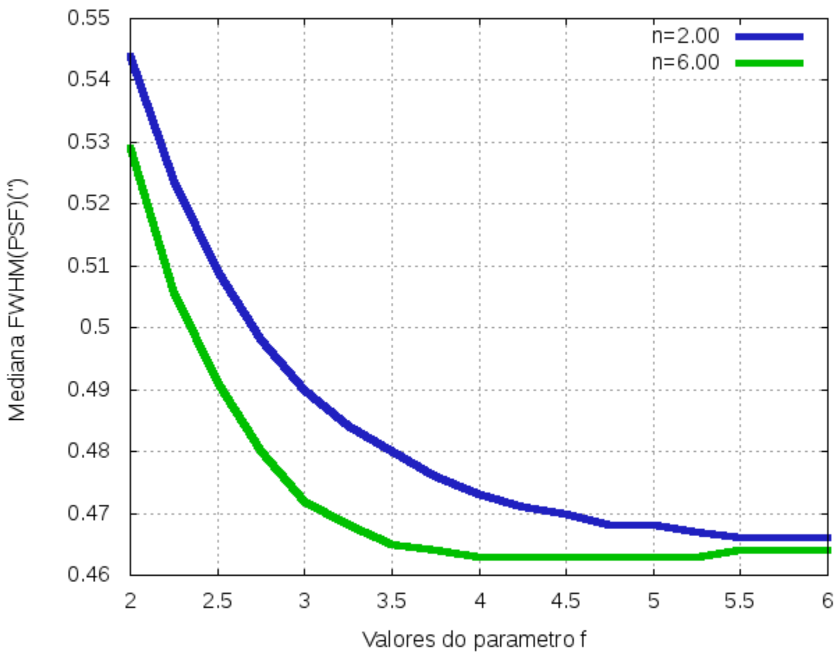


Resultado do tratamento anterior, no espaço normal (fora do espaço de Anscombe).

r = O-f

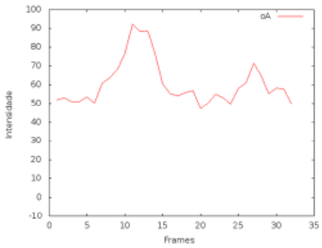


A seguir apresentamos as curvas de FWHM da PSF para filtros de Butterworth com n e f variáveis.

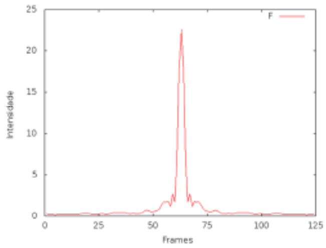


5 – Filtragem de Butterworth de alta freqüência espectral

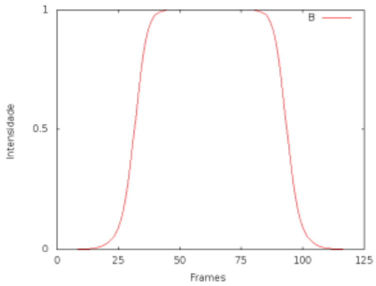
Extraímos o espectro de uma região H II qualquer da galáxia. A seguir mostramos a transformada de Anscombe desse espectro. Depois, mostramos a transformada de Fourier desse espectro, o filtro de Butterworth espectral de passa-baixo, que corta as altas freqüências. Neste caso a freqüência de corte é $0.5F_{Ny}$ com índice de n = 6 e o produto BxF.



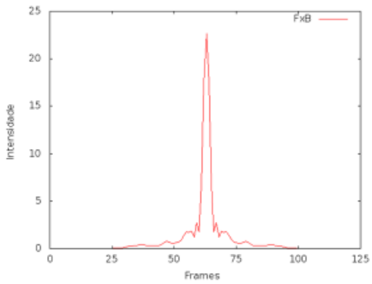
Original – FT



Butterworth filter

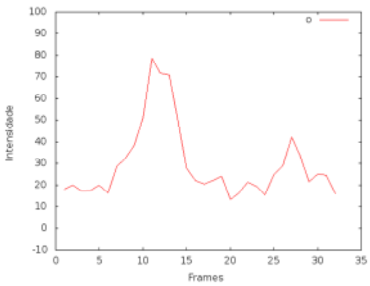


BF x FT

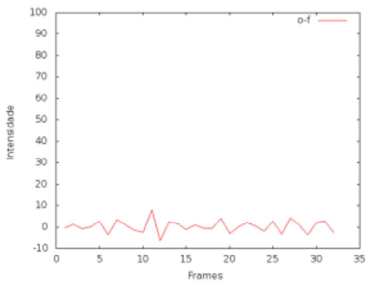


Mostramos, abaixo, o espectro original, o espectro filtrado e a diferença dos dois.

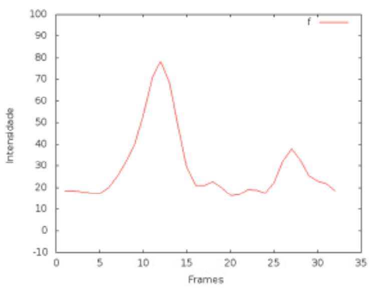
Original spectrum

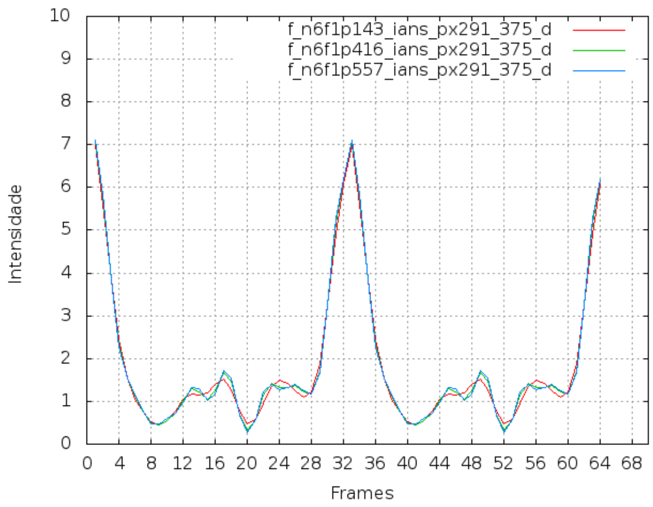


Noise = Original – filtered

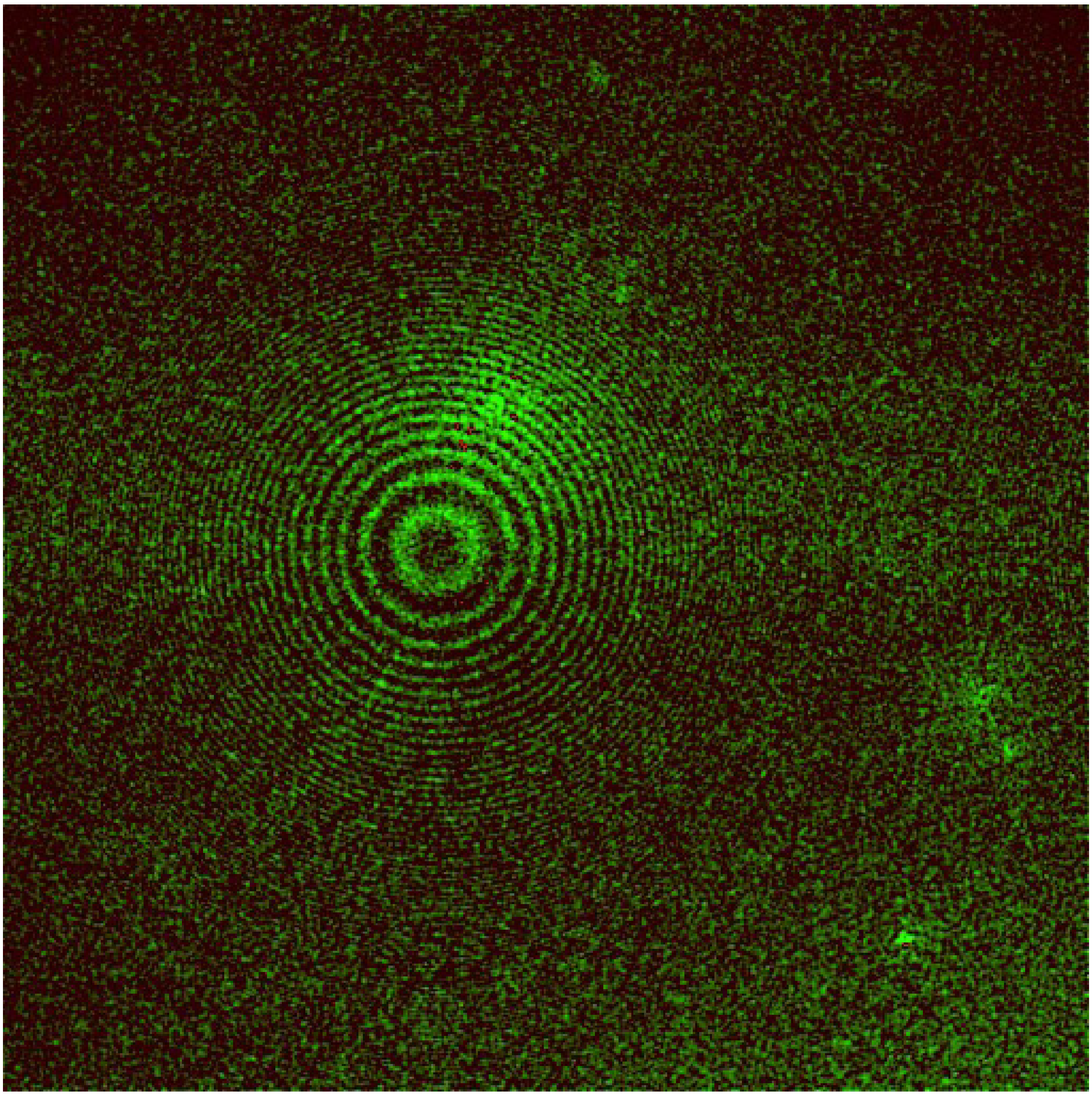


filtered sectrum



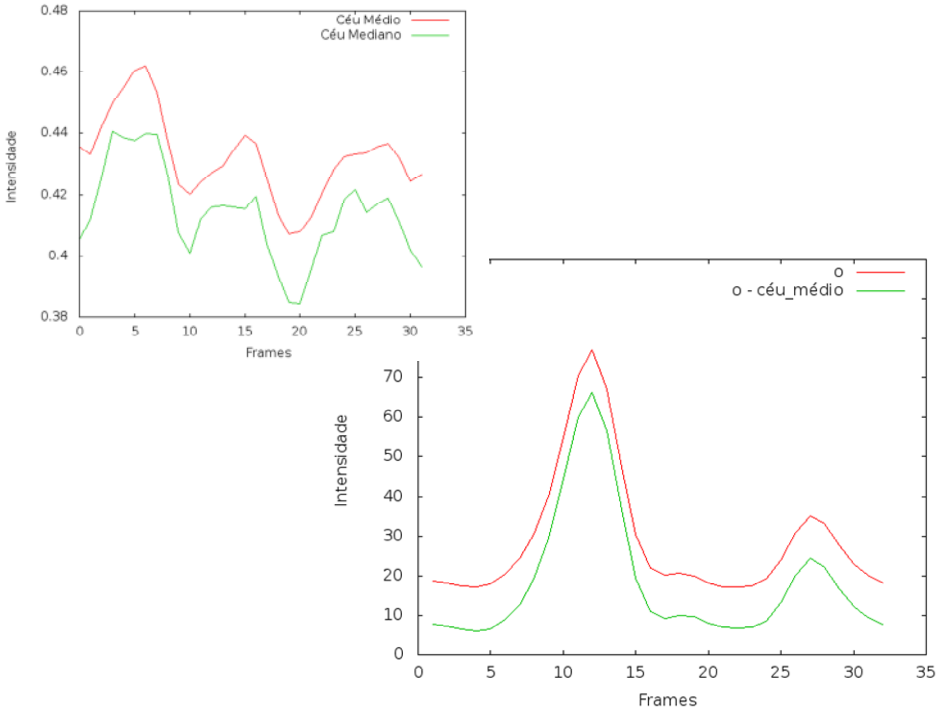


Freqüências de cortes de 0.4 (vermelho), 0.5 (verde) e 0.55 (azul)). A seguir, a diferença entre o cubo original e o filtrado.



6 – Subtração de céu, incluídas as linhas de OH

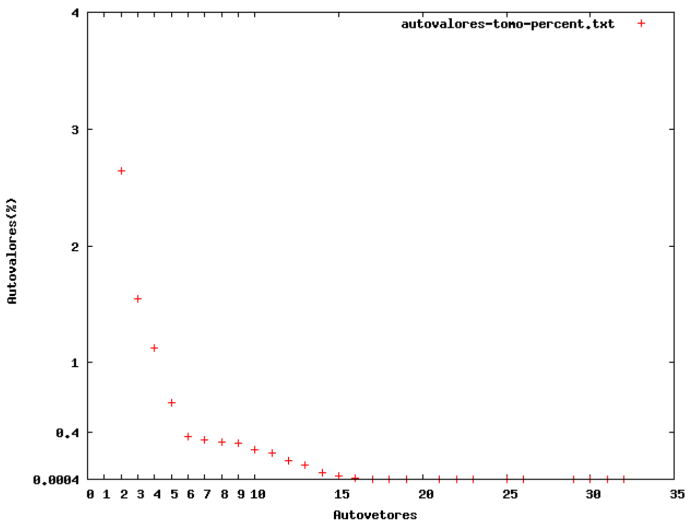
O céu é identificado em uma região que não tem objetos. Podemos extrair o espectro médio e o espectro mediano.



Depois mostramos o espectro da região H II (5x5 pixels) com e sem o céu médio.

7 – Filtragem de ruídos com PCA

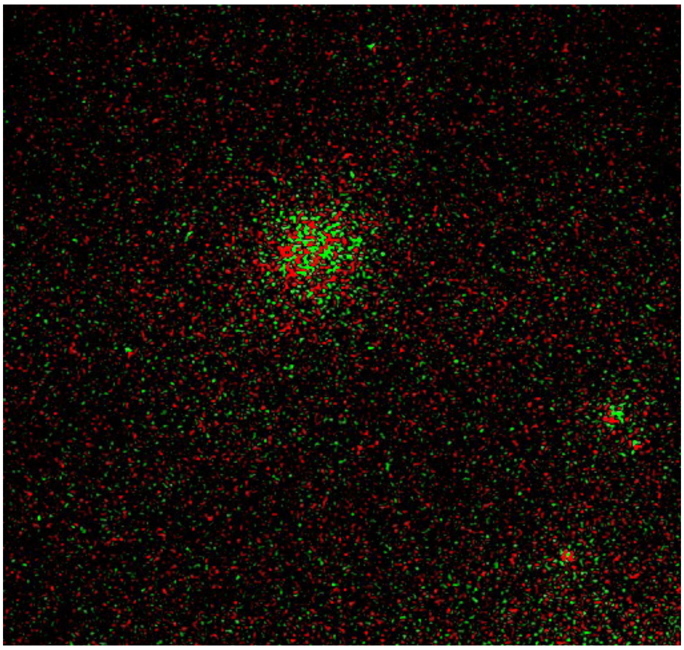
A filtragem de ruído de alta freqüência parece ser muito eficiente. Podemos, ainda fazer o PCA para uma remoção final de ruído não correlacionado. Para isso identificamos os 32 autovetores, cujos autovalores são mostrado abaixo juntamente com o teste de *scree*.



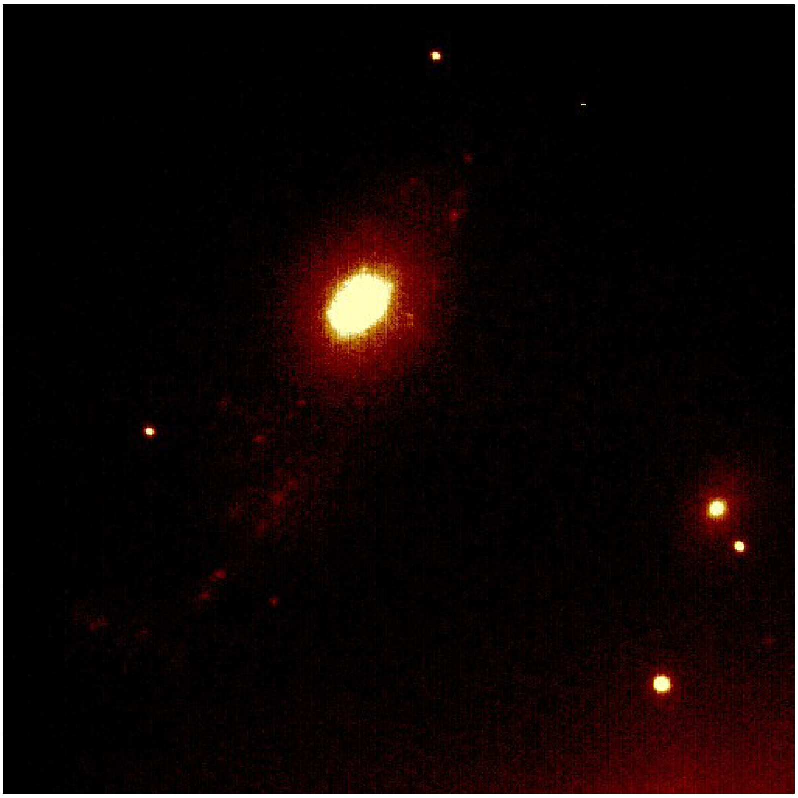
NGC 092 filtrada		
1	91,8516%	91,8516%
2	2,6405%	94,4921%
3	1,5437%	96,0358%
4	1,1230%	97,1588%
5	0,6528%	97,8116%
6	0,3633%	98,1749%
7	0,3388%	98,5137%
8	0,3189%	98,8326%
9	0,3051%	99,1376%
10	0,2522%	99,3898%
11	0,2292%	99,6190%
12	0,1635%	99,7825%
13	0,1205%	99,9030%
14	0,0537%	99,9567%
15	0,0261%	99,9828%
16	0,0079%	99,9908%
17	0,0025%	99,9932%
18	0,0007%	99,9940%
19	0,0007%	99,9947%
20	0,0001%	99,9947%
21	0,0006%	99,9954%
22	0,0006%	99,9960%
23	0,0006%	99,9966%
24	0,0003%	99,9968%
25	0,0005%	99,9973%
26	0,0005%	99,9978%
27	0,0003%	99,9981%
28	0,0003%	99,9984%
29	0,0004%	99,9988%
30	0,0004%	99,9992%
31	0,0004%	99,9996%
32	0,0004%	100,0000%

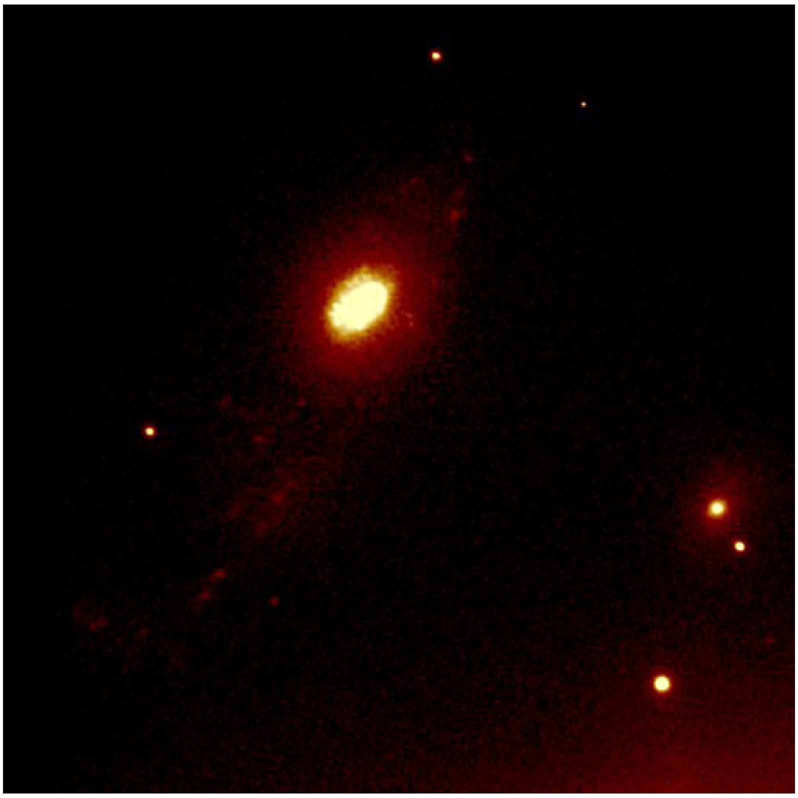
O diagrama de scree mostra que os autovetores acima de 6 são dominados por ruído. No entanto, por termos cerca de 1 milhão de pixels espaciais, podemos ter autovetroes nos quais o ruído é dominante, mas ainda tem informação localizada (exemplo: uma região H II) que não pode ser descartada. Por isso, salvamos os 8 primeiros autovetores e descartamos os autovetores de 9 em diante.

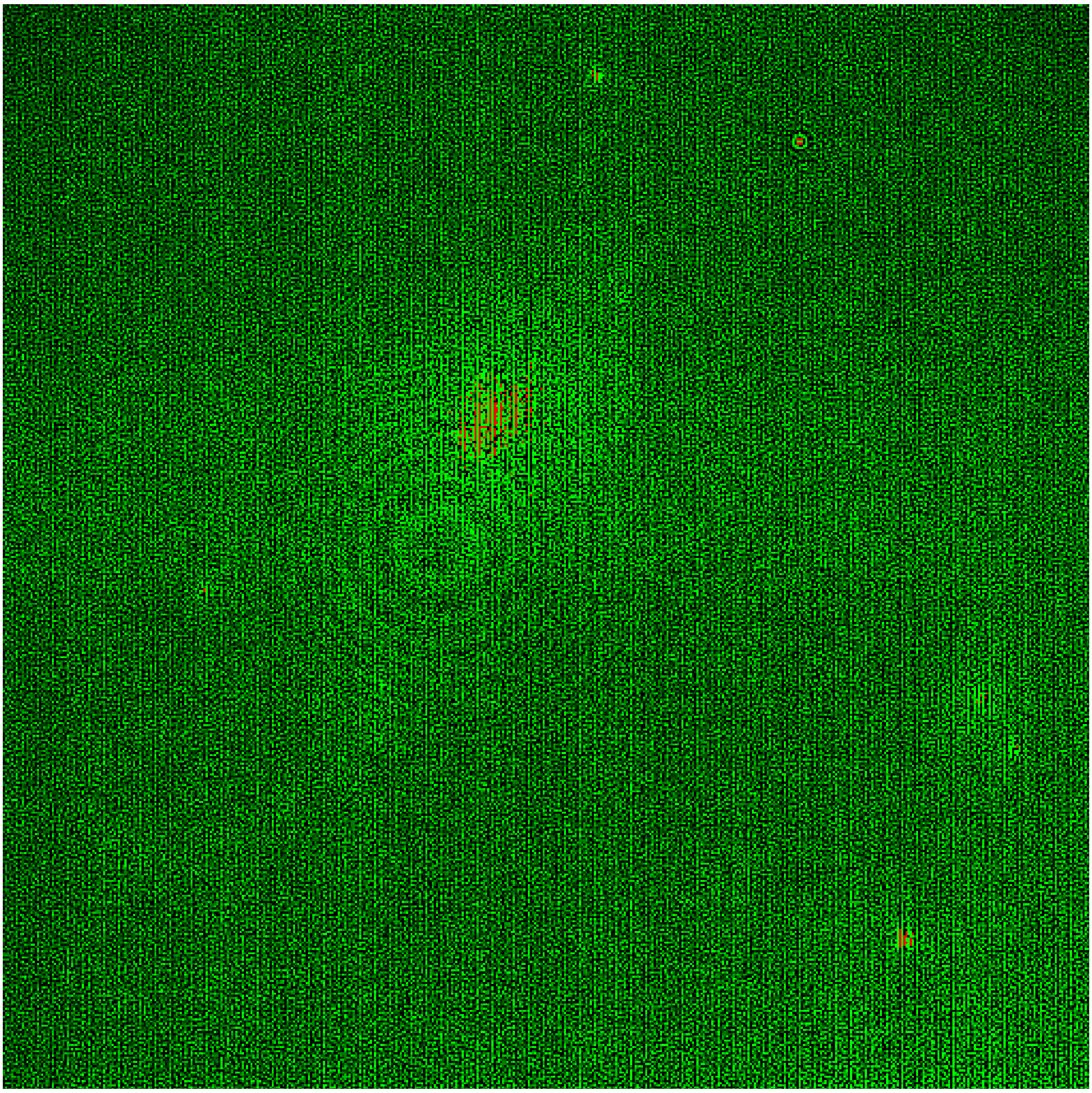
A seguir mostramos a diferença entre o cubo não filtrado e o filtrado.



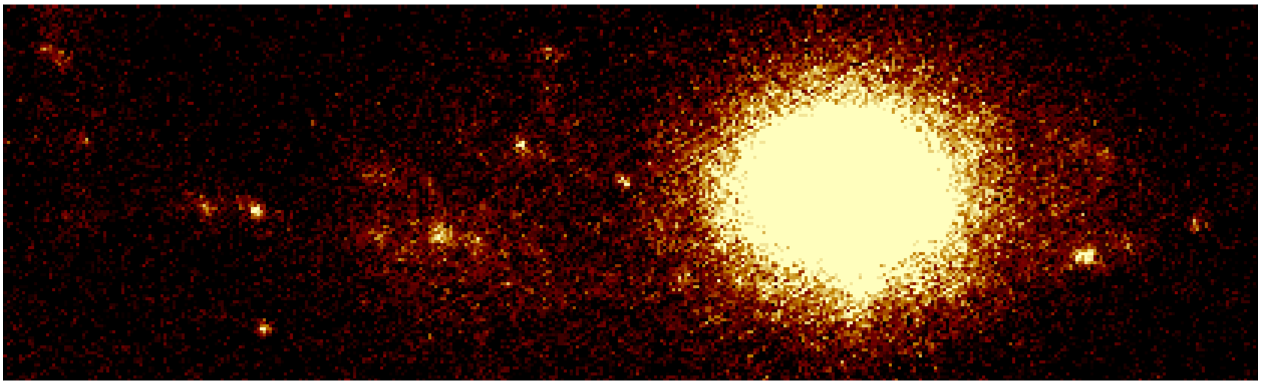
8 - Comparação: Início e fim





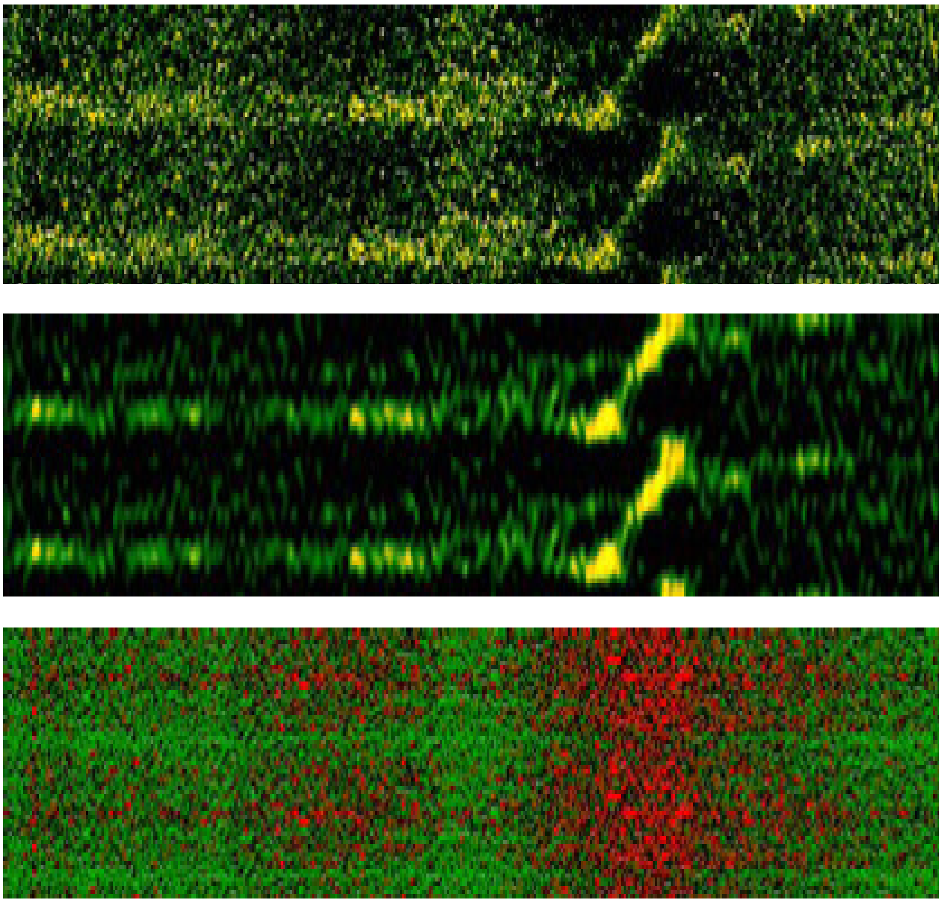


Diferença entre o cubo original e o cubo final.



Radial velocity curve: o, f, r

Free spectral range



Referências:

Gonzales, R. C. & Woods, R.E. *Digital Image Processing*, 2008, Pearson Education Inc, New Jersey.

Steiner, J.E., Menezes, R.B., Ricci, T.V. & Oliveira, A.S. 2009, MNRAS, 395, 64.

Agradecimentos:
INCT-A/CNPq/FAPESP; Roberto Menezes; Tiago Ricci.