Cap.2 - Mecanica do Sistema Solar II:

Leis de Kepler do movimento planetário

Johannes Kepler

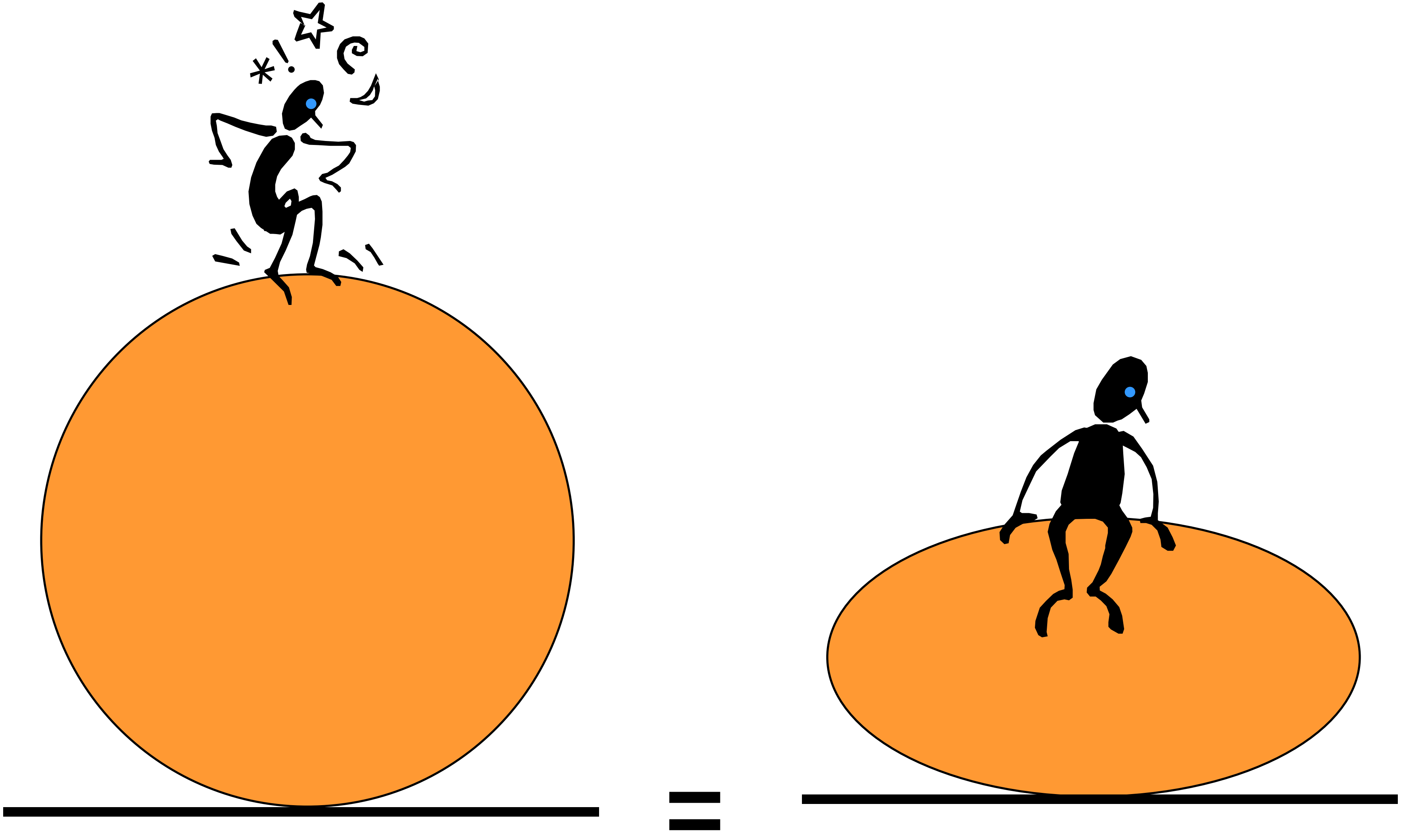
Matemático e Astrônomo Alemão

1571 - 1630

Tycho Brahe

Astrônomo Dinamarquês

1546 - 1601



Circunferência achatada = Elipse

Lei das Elipses : sobre órbitas dos planetas

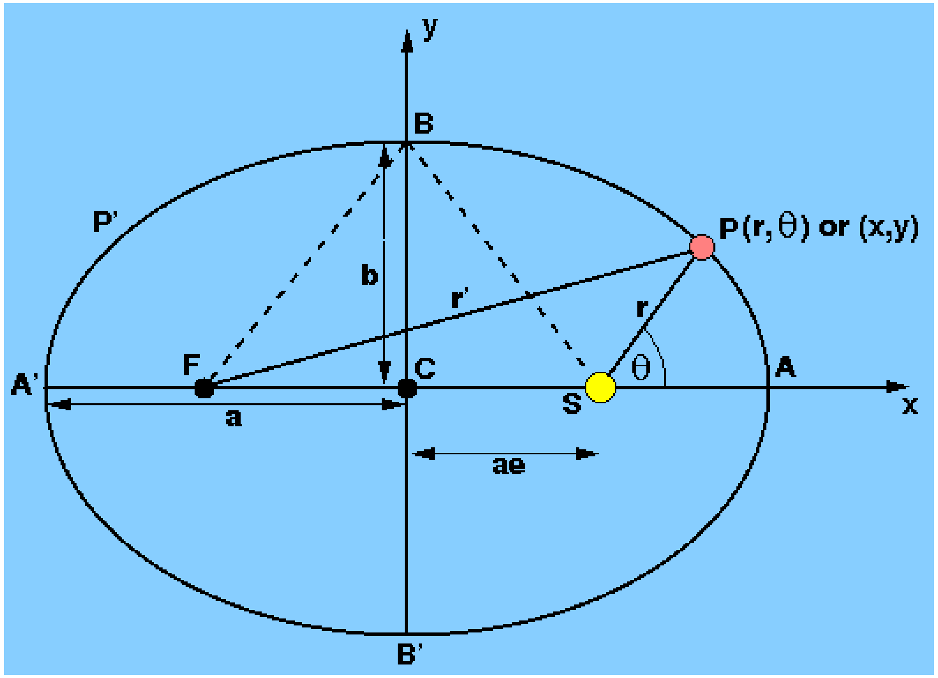
1ª Lei: *A órbita de cada planeta é uma elipse com o Sol situado em um dos focos.*

Matematicamente, uma elipse é definida como o locus de todos os pontos, de modo que a soma das distâncias a partir de dois loci (focos) até qualquer ponto sobre a elipse é constante:

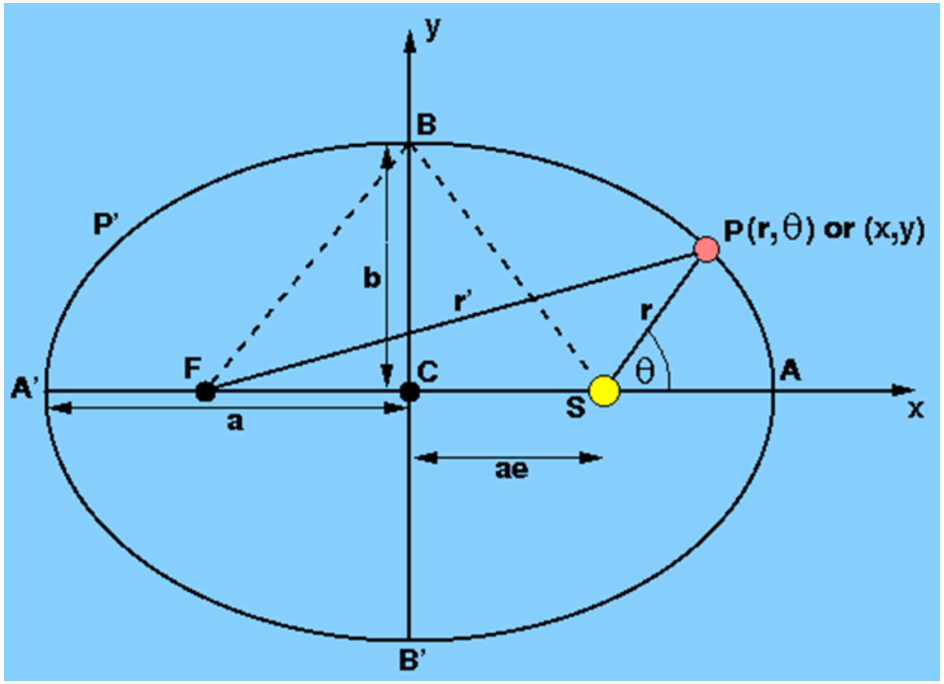
$r + r' = 2a = \text{constante}$

onde a é o semi-eixo maior.

No caso de uma órbita planetária, o semi-eixo maior da elipse é a distância média do Sol até o planeta.



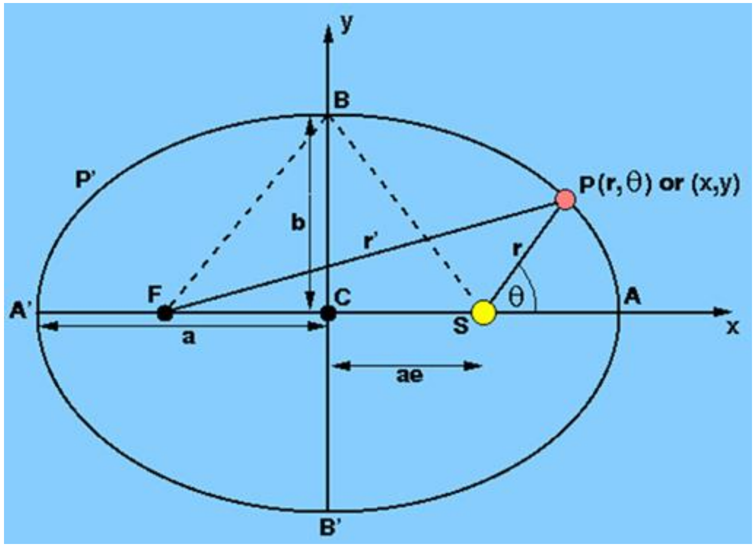
Propriedades da elipse



- *<u>Eixo maior</u>* – linha *AA'*, onde *A* e *A'* são os vértices da elipse.

- *<u>Semi-eixo maior</u>* – as linhas *CA e CA'*, onde *C* é o centro da elipse. Para cada ponto *P* sobre a elipse à distância *r* do foco *S*, há um ponto simétrico *P'* a uma distância *r'* de *S* – a média dessas distâncias é $(r + r') / 2 = a$. Este resultado vale para qualquer par de pontos arbitrários, mas simétricos. Portanto, o semi-eixo maior é igual à distância média entre o Sol e um planeta em uma órbita elíptica.

- *<u>Semi-eixo menor</u>* – as linhas *CB* e *CB'*. Se *a* e *b* denotam os comprimentos dos semi-eixos maior e menor, respectivamente, então usando as linhas pontilhadas ($r = r' = a$) e o teorema de Pitágoras, encontra-se que $b^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2(1 - e^2)$, onde e é a excentricidade da elipse.



- *Excentricidade* – a razão *CS* / *CA*.
  Se a elipse é um círculo , e = 0, desde que *S* e *F* sejam coincidentes *C*.
  O outro limite para e é 1, obtido quando a elipse é tão estreita que o foco levado para infinito. A distância para cada foco ao centro da elipse é ae.

- *Periélio* – quando o planeta *P* está em *A*. Logo, mais próximo do Sol e podemos escrever $SA = CA - CS = a - ae = a\,(1 - e)$.

- *Afélio* – quando o planeta *P* está em *A´* e, portanto, mais distante do Sol. Assim, podemos escrever $SA´ = CA´ + CS = a + ae = a\,(1 + e)$.

- *Anomalia verdadeira* – o ângulo *ASP*.

- É importante saber a equação de uma elipse, já que isso pode nos fornecer a distância de um foco a um ponto sobre a elipse (por exemplo, distância Terra-Sol) em função da posição do ponto sobre a elipse.

- Se centralizarmos o sistema de coordenadas polares (r, θ) em *S* e a linha *SA* corresponder a $\theta = 0$, então r mede a distância *SP* e θ (a anomalia verdadeira) mede o ângulo *ASP* no sentido anti-horário.

- Usando $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

e a lei dos cossenos da trigonometria plana, temos:

$$r'^2 = r^2 + (2ae)^2 + 2r(2ae)\cos\theta.$$

- A partir da definição de uma elipse, temos $r' = 2a - r$.

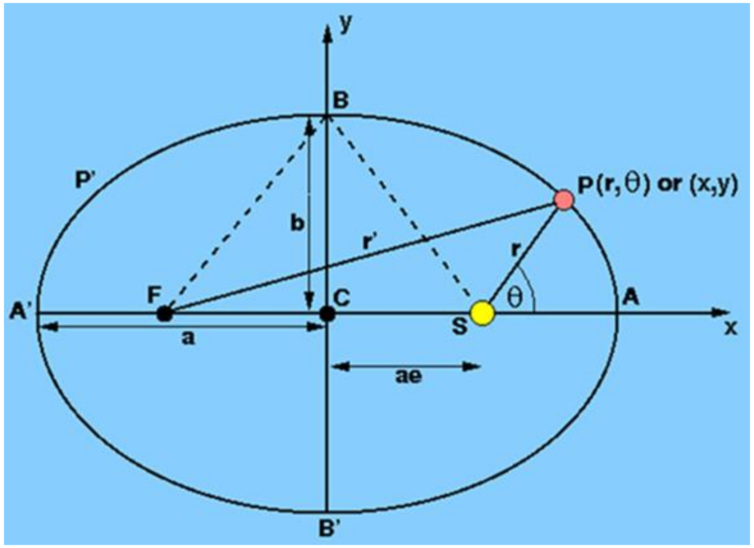
Então,

$$r = a(1 - e^2) / (1 + e\cos\theta).$$

Essa é a equação da elipse em coordenadas polares.

- Em coordenadas cartesianas (x, y),
a equação da elipse pode ser derivada usando a figura ao lado e o teorema de Pitágoras:

$$r'^2 = (x + ae)^2 + y^2$$
$$r^2 = (x - ae)^2 + y^2$$



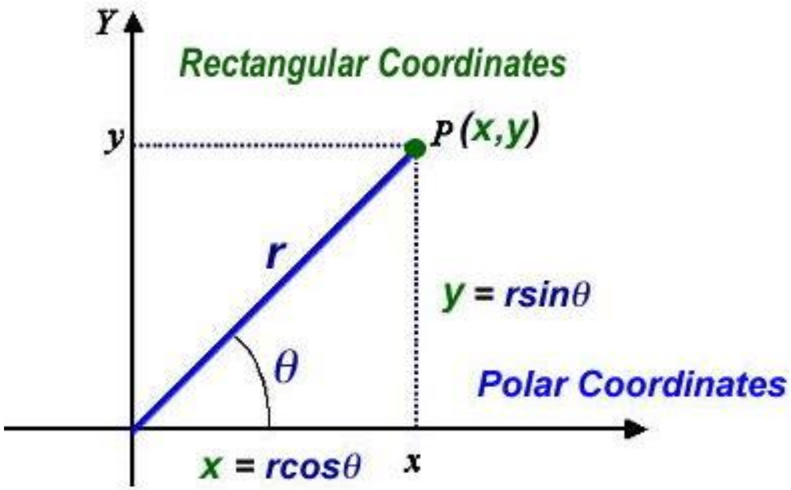
- Subtraindo essas duas eqçs. entre si e usando $r' = 2a - r$, encontramos que $r' = a + ex$. Substituindo de novo na primeira das duas eqçs. acima e empregando a relação $b^2 = a^2(1 - e^2)$, obtemos

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1,$$

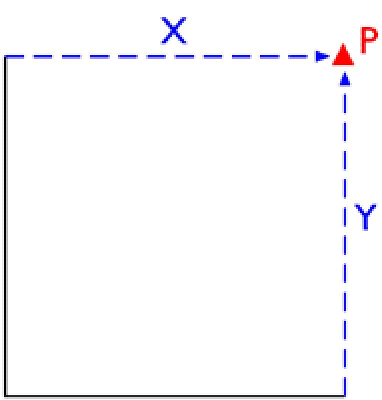
que é a equação para uma elipse em coordenadas cartesianas.

Podemos ver que essa equação se reduz à equação do círculo para a=b.

Sistemas de coordenadas cartesianas e polares

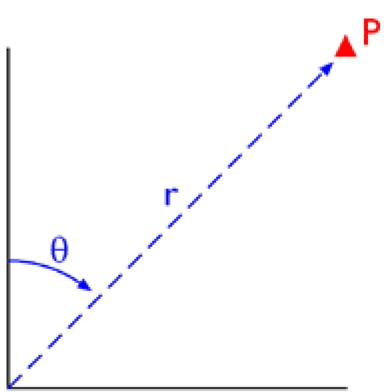


Cartesian coordinates

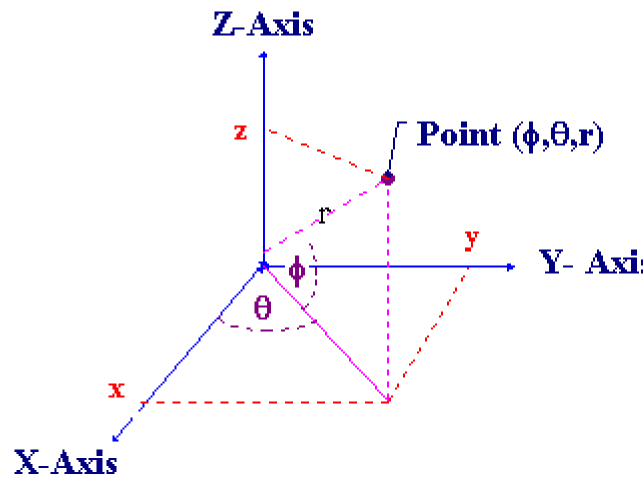


P = (X, Y)

Polar coordinates



P = (θ, r)

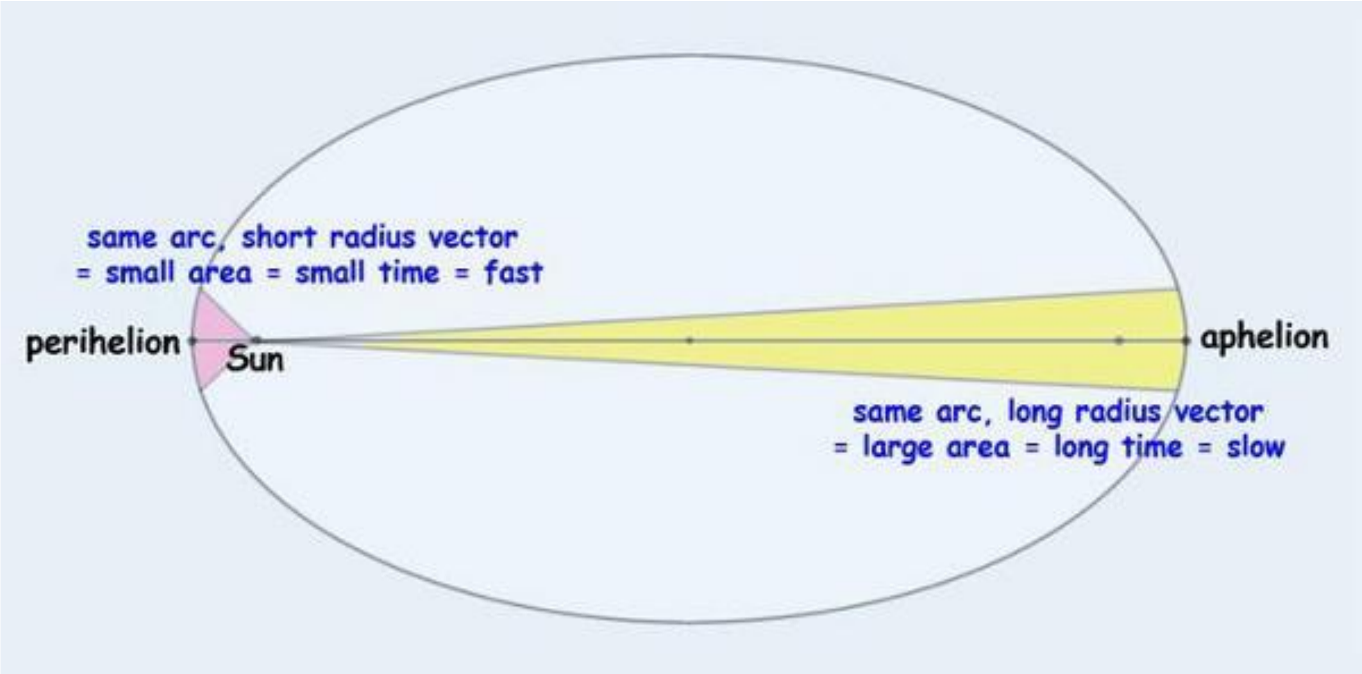


Conversion of
Three-Dimensional Polar Coordinates
(ϕ,θ,r)
to
Three-Dimensional Cartesian Coordinates
(x,y,z)

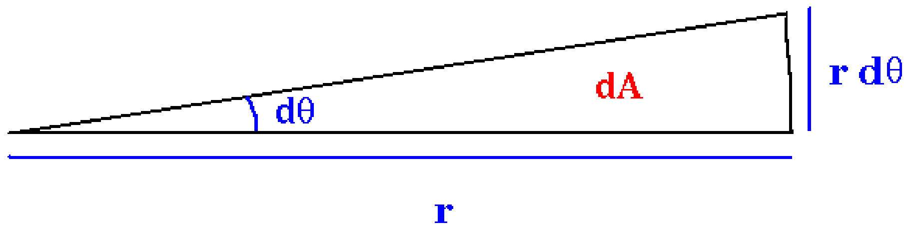
$$x = r\cos(\phi)\cos(\theta)$$
$$y = r\cos(\phi)\sin(\theta)$$
$$z = r\sin(\phi)$$

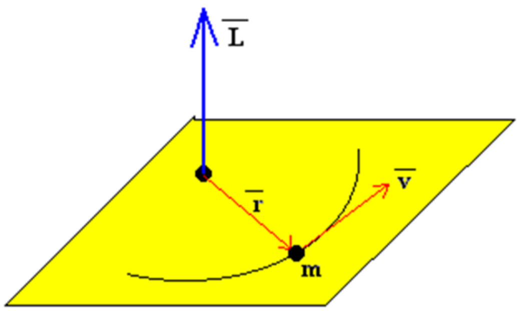
Segunda Lei de Kepler: Lei das Áreas

2ª Lei: *O raio vetor que liga o corpo maciço (Sol, por ex.) ao corpo mais leve (um planeta, por ex.) varre áreas iguais em tempos iguais*



- É uma consequência da conservação do momento angular.
- Considere uma pequena “cunha”da órbita traçada em um tempo dt:





- A área da cunha é : $dA = \frac{1}{2}(r)(rd\theta)$

- A taxa na qual essa área é varrida na órbita é : $\frac{dA}{dt} = (r)\left(r\,\frac{d\theta}{dt}\right)$

- Lembrando a definição de momento angular: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$ ou $L = m\,r\,v_\theta$

- Inserindo na equação anterior: $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{L}{m}$

- “Areas iguais em tempo iguais” significa que a taxa na qual uma área é varrida (dA/dt) é constante.

⇒ LEI de KEPLER revisitada: A taxa na qual o planeta varre uma área em sua órbita é igual a metade de seu momento angular dividido pela sua massa (momento angular específico). Momento angular é conservado.

Lei Harmônica ⇨ Busca de harmonia ⇨ (Kepler a deduziu 10 anos depois)

3ª Lei: *O quadrado do período de um planeta é proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol.*

$$\boxed{\frac{P^2}{a^3} = k}$$

onde, ***P*** é o período sideral do planeta e **a** o semi-eixo maior de sua órbita. A constante ***k*** tem o mesmo valor para todos os corpos orbitando em torno do Sol.

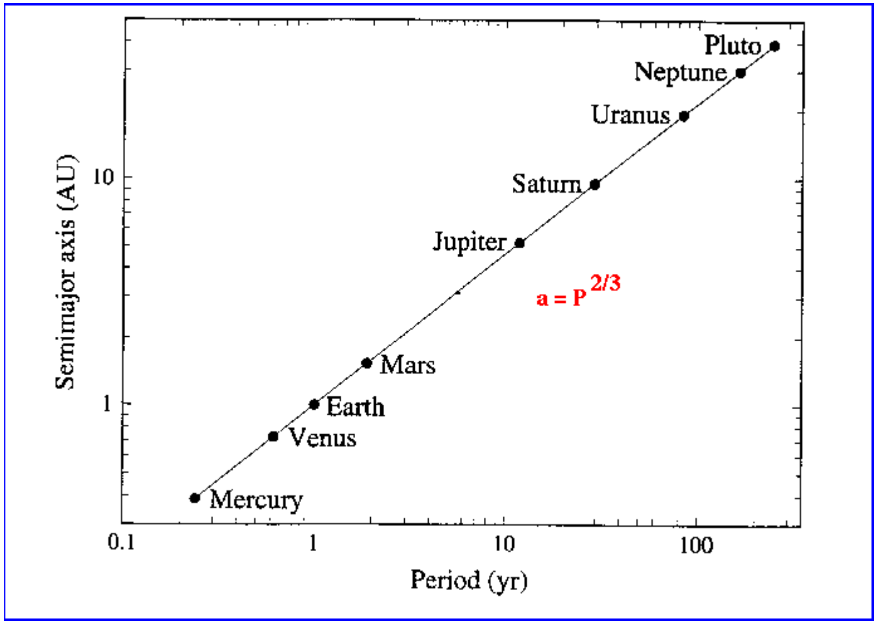


Tabela : Algumas Propriedades dos Planetas

Planet	*Orbital Semi-Major Axis, a*	*Orbital Period, P*	*Orbital Eccentricity*	*P^2/a^3*
	(astronomical units)	*(Earth years)*		
Mercury	0.387	0.241	0.206	1.002
Venus	0.723	0.615	0.007	1.001
Earth	1.000	1.000	0.017	1.000
Mars	1.524	1.881	0.093	1.000
Jupiter	5.203	11.86	0.048	0.999
Saturn	9.539	29.46	0.056	1.000
Uranus	19.19	84.01	0.046	0.999
Neptune	30.06	164.8	0.010	1.000
Pluto	39.53	248.6	0.248	1.001

Logo se:

P : em ANOS Terrestres

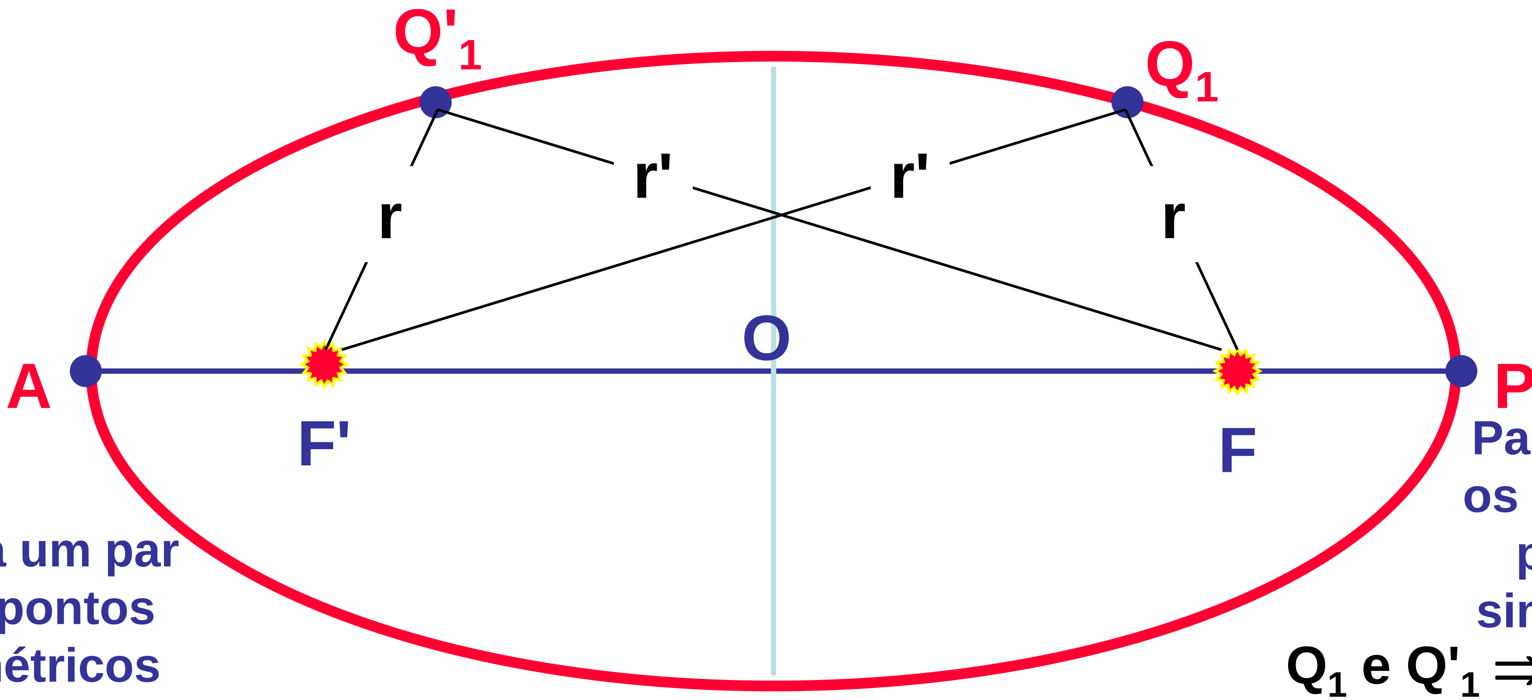
a : em 1UA = distancia Terra-Sol

➔ **K = 1 !**

UNIDADES DE MEDIDAS

- Unidade astronômica: 1 U.A. = $1,496 \times 10^{11}$ m
- Ano-luz: 1 a.l. = $9,5 \times 10^{15}$ m = 63241 UA
- Parsec: 1 pc = 3×10^{16} m = 206 265 UA

Mostrar que a média dos raios orbitais é o semi-eixo maior



Para um par de pontos simétricos

$Q_1 \Rightarrow r + r' = 2a$

$Q'_1 \Rightarrow r' + r = 2a$

$r + r' \;+\; r' + r = 2a + 2a$

$r + r' + r' + r = 4a$

$(r + r' + r' + r) / 4 = a$

$r_1 = a$

Para todos os pares de pontos simétricos

Q_1 e $Q'_1 \Rightarrow r_1 = a$

Q_2 e $Q'_2 \Rightarrow r_2 = a$

...

Q_N e $Q'_N \Rightarrow r_N = a$

$r_1 + r_2 + ... + r_N = N.a$

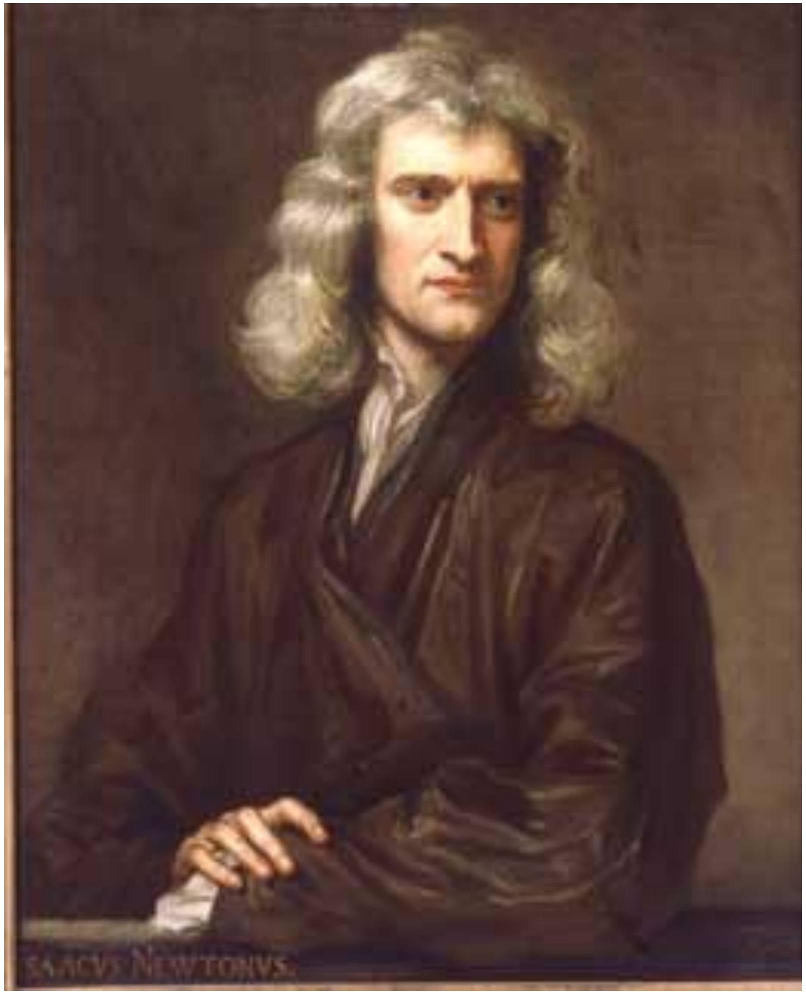
$(r_1 + r_2 + ... + r_N) / N = a$

$r_m = a$

A LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

O que impede os planetas de sairem flutuando pelo espaço? Kepler havia atribuído as órbitas elípticas a uma força de atração magnética.

1643-1727 (Newton com 46 anos de idade)



Newton (sec. XVII) ⇨ linha de raciocínio semelhante

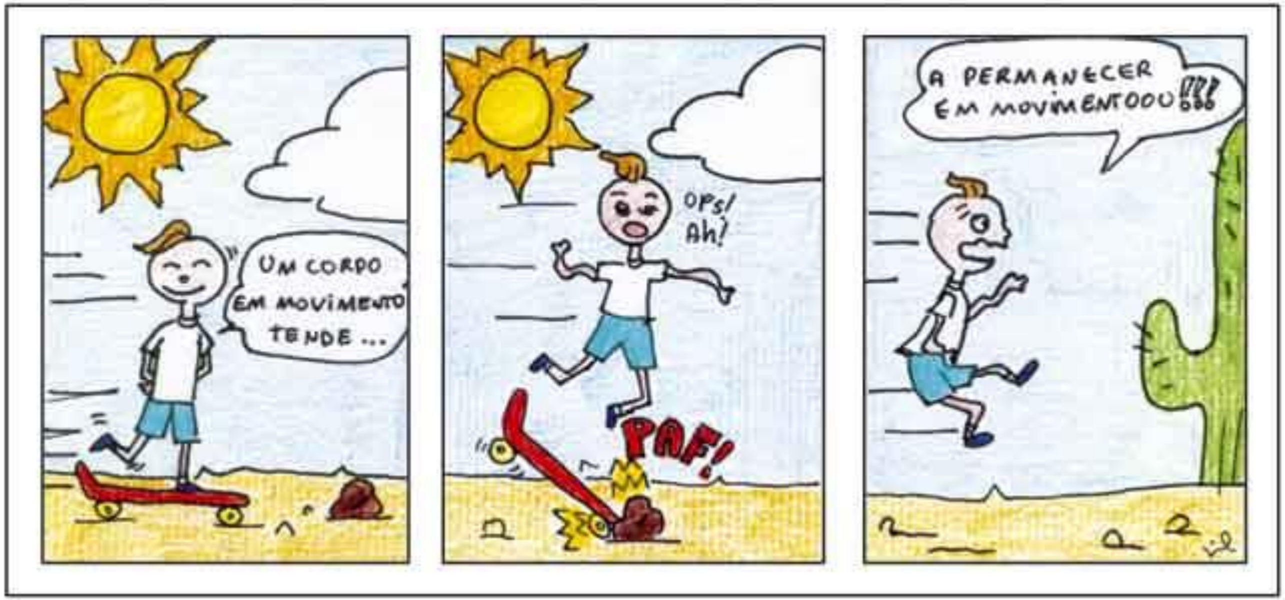
⇨ lei da gravitação universal: demonstrou-a por meio do movimento da Lua, explicou o movimento dos planetas e generalizou as leis de Kepler

Leis de movimento de Newton

Supõe-se: espaço-tempo absoluto, partícula material de massa **m** descrevendo uma trajetória $\vec{x}(t)$ com velocidade $\vec{v}(t)$, com quantidade de movimento $\vec{p}(t) = m\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}(t)$.

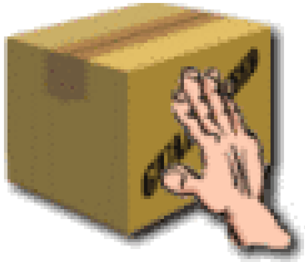
1ª Lei da inércia

Qualquer corpo permanece em seu estado de repouso, ou de movimento retilíneo e uniforme, a menos que seja compelido a mudar de estado por uma força externa.



2ª Lei de Newton: da força

A taxa de variação da quantidade de movimento de um corpo é igual à força que atua sobre o corpo.



1. A força da mão acelera a caixa.

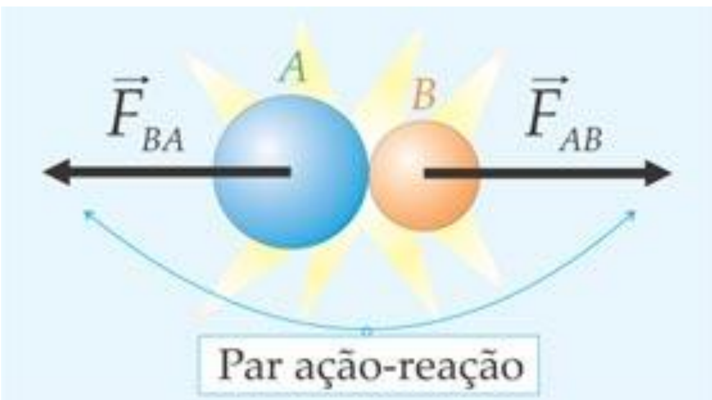
2. Duas vezes a força produz uma aceleração duas vezes maior (a é proporcional à força aplicada)

3. Duas vezes a força sobre uma massa duas vezes maior, produz a mesma aceleração original (a é inversamente prop. a massa)

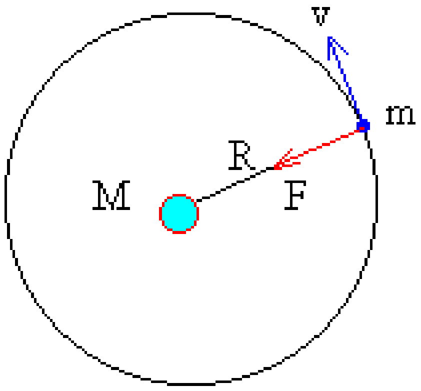
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

3ª Lei da ação e reação

- A cada ação existe sempre uma reação igual e de sentido contrário.



Para simplificar, vamos supor que o corpo possui órbita circular, de raio **r**:



força centrípeta: $$F_{cent} = \frac{m\,v^2}{r}$$

Se P é o período orbital do corpo: $$\mathrm{v} = \frac{2\pi\,r}{P}$$

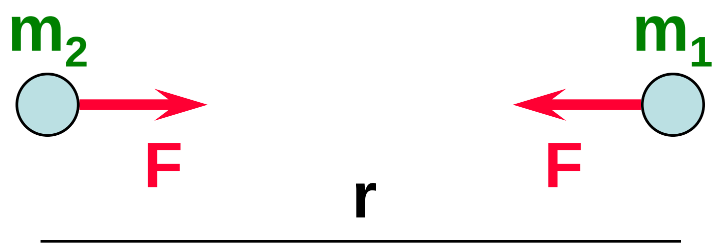
mas, pela terceira lei de Kepler: $P^2 = k\,r^3$, então:

$$F = m\frac{4\pi^2 r^2}{P^2\,r} = m\frac{4\,\pi^2\,r^2}{k\;r^3\,r} = \frac{4\pi^2\,m}{k\,r^2}$$

Assim, a força que mantém a órbita é inversamente proporcional ao quadrado do raio.

Lei da gravitação Universal

Matéria atrái matéria na razão direta das massas e inversa do quadrado da distância.



m_1, m_2 = massas dos corpos envolvidos

r = distância entre as massas

F = força de atração gravitacional

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{G\, m_1\, m_2}{r^2}$$

G a constante universal da gravitação $G = 6{,}67\ 10^{-8}\ cm^3\ g^{-1}\ s^{-2}$.

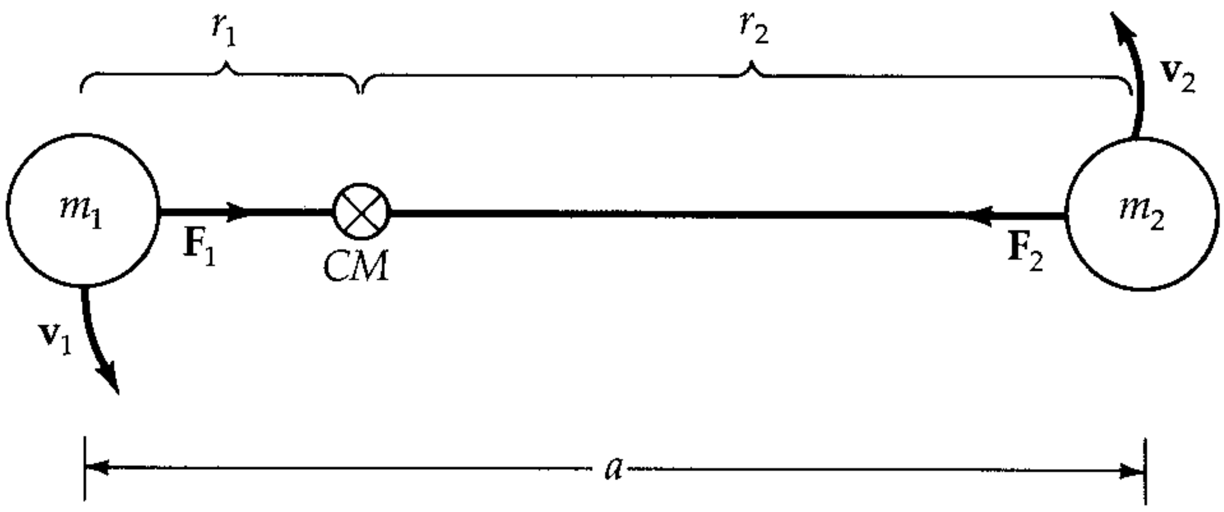
Newton combinou suas três leis do movimento e a lei da gravitação para deduzir as leis empíricas de Kepler.

3ª Lei de Kepler na formulação Newtoniana

Sistema isolado;

dois corpos em órbita circular, sob ação de sua força gravitacional mútua (também se aplica a órbitas elípticas);

massas m_1 e m_2, que orbitam em torno de um centro de massa (CM) suposto estacionário, do qual distam de r_1 e r_2 .



• Uma vez que a

força gravitacional atua ao longo da linha imaginária que os une,

ambos os corpos devem completar uma órbita no mesmo período

P (embora se movam com velocidades diferentes).

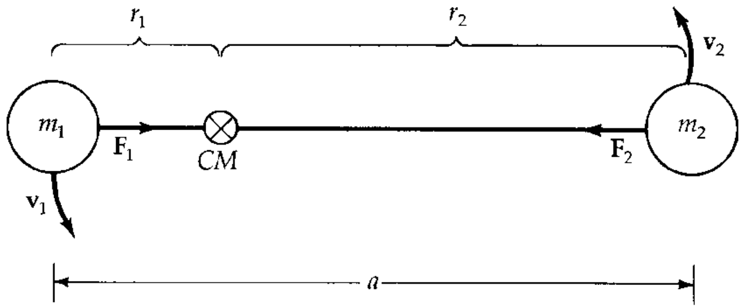
• Para uma órbita circular: $P = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow v = \frac{2\pi r}{P}$.

• A força centrípeta necessária para manter as órbitas é:

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

Lembrando a lei da gravitação universal:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (1)$$



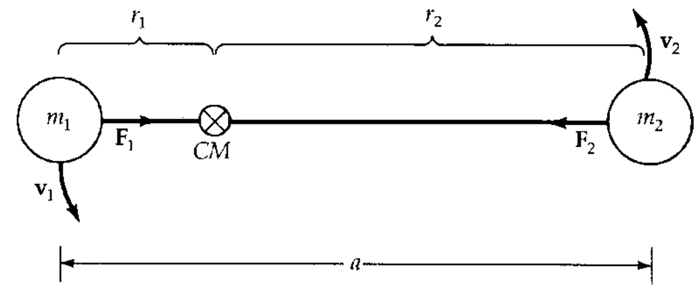
podemos escrever também que:

$$F_1 = m_1\frac{v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2 r_1^2}{P^2}\frac{m_1}{r_1} = \frac{4\pi^2 r_1 m_1}{P^2} \qquad F_2 = m_2\frac{v_2^2}{r_2} = \frac{4\pi^2 r_2^2}{P^2}\frac{m_2}{r_2} = \frac{4\pi^2 r_2 m_2}{P^2} \qquad (1b)$$

mas $F_1 = F_2 \Rightarrow r_1 m_1 = r_2 m_2 \Rightarrow \quad \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{m_2}{m_1}$

O corpo de massa maior permanece mais próximo do centro de massa.

Como $\quad a = r_1 + r_2$



então $\quad r_1 = (a - r_1)\dfrac{m_2}{m_1} = a\dfrac{m_2}{m_1} - r_1\dfrac{m_2}{m_1}$

$$r_1\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right) = a\frac{m_2}{m_1} \quad \Rightarrow \quad r_1 = a\frac{m_2}{m_1 + m_2} \qquad (2)$$

Lembrando que $F_{grav} = F_1 = F_2 = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad F_{grav} = G\dfrac{m_1 m_2}{a^2} \qquad (3)$

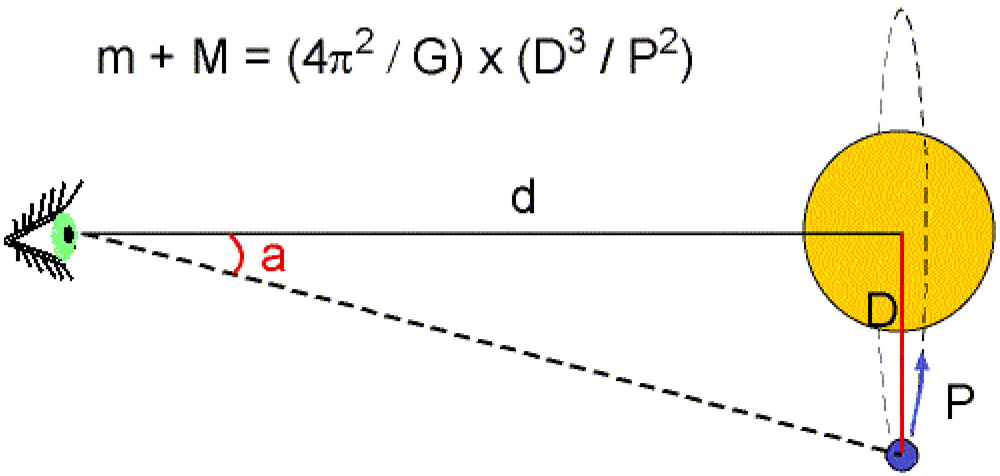
Podemos reformular a 3ª lei de Kepler , combinando (1b), (2), e (3):

$$F_1 = \frac{4\pi^2\, r_1\, m_1}{P^2} \Rightarrow P^2 = \frac{4\pi^2\, r_1\, m_1}{F_1} = \frac{4\pi^2\, a\, m_2\, m_1\, a^2}{(m_1 + m_2)\, G\, m_1\, m_2}$$

$$P^2 = \left[\frac{4\,\pi^2}{G(m_1 + m_2)}\right] a^3$$

K !!

$$m + M = (4\pi^2 / G) \times (D^3 / P^2)$$



Measure: angular distance (a) and orbital period (P).
Derive: orbit size (D) from known distance (d) and angle (a), *then* the planet mass from Kepler's 3rd law.

Ver slide 21

Aplicação ao Sistema Solar

Entre as várias aplicações, podemos calcular, por exemplo, a massa do Sol:

- Se um dos corpos tem massa muito maior que a do outro ($M_{\odot} >> m_P$), então,

$$P^2 = \left[\frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}\right] a^3 = \frac{4\pi^2}{GM_{\Theta}} a^3$$

para o sistema Terra-Sol a distância é de 1U.A. e o período é de 1 ano.

$$M_{\Theta} = \frac{4\pi^2 (1{,}5\text{x}10^{13})^3}{(6{,}67\text{x}10^{-8})(3{,}16\text{x}10^7)^2} \frac{\text{cm}^3}{(\text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2})\,(\text{s}^2)}$$

então $M_{\odot} = 1{,}99\text{x}10^{33}$g.

A Força Gravitacional que um objeto exerce em outro é o método para determinação de MASSAS em Astronomia!