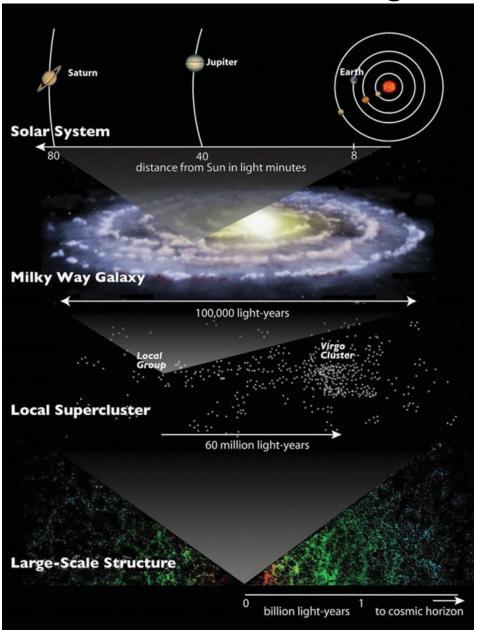
# Cap. 2 – Mecânica do Sistema Solar I

## Nosso Lugar no Universo



1 min luz =  $1,798 \times 10^7 \text{ km}$ 

1 ano-luz = 9.460.800.000.000.00 Km ~10<sup>12</sup> km

100.000 a.l. = 946073047258080000 km = 9.46 x 10 <sup>17</sup> km

1 a.l. = distância que a luz viajou durante 1 ano com v= 300.000 km/s

1 a.l. =  $c \Delta t = 10 \text{ tri km} = 10 \text{ X} 10^{12} \text{ km}$ 

### Observando o Céu

Dia Claro: estabelecido pelo movimento diurno aparente do Sol:

Sol: **nasce** no oriente (leste)

põe-se no "ocaso" no ocidente (oeste)

**Noite:** movimento noturno aparente: do instante em que se põe o Sol até o instante em que volta a nascer novamente

Movimento diário aparente = movimento que os astros "parecem" realizar no céu (abóbada celeste) em ~ 1dia (de L para O)

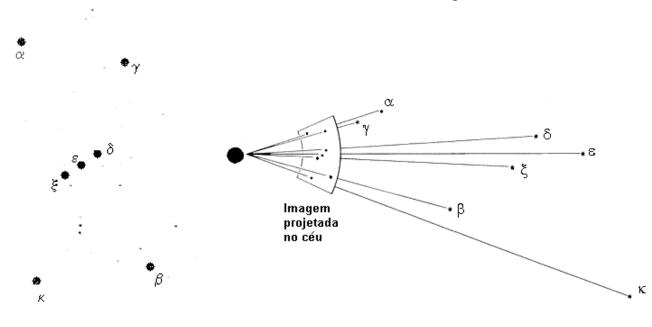
Noite: 3000 pontos fixos vistos no céu a olho nú (+ 3000 do outro lado)

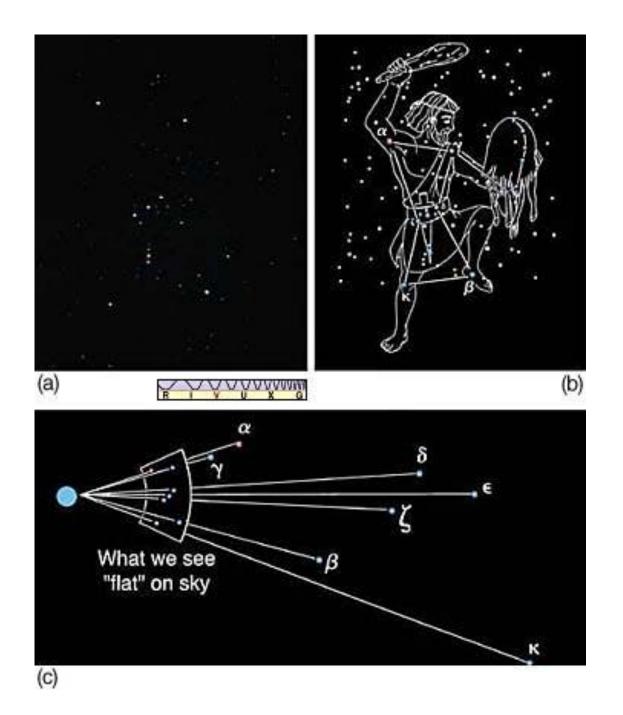
Antigos viam conexões entre estrelas projetadas no céu: que definiam com associações: CONSTELAÇÕES

#### Ex. Constelação de Orion

Estrelas de uma constelação:

Designadas por  $\alpha$ ,  $\beta$ , etc. de acordo com brilho aparente





#### Constelação de Orion

**Hoje** ⇒ 88 constelações catalogadas.

Terminologia usada ainda hoje para especificar largas regiões do céu (como geólogos usam continentes para localizar-se na Terra)

**Noite:** constelacões movem-se de leste para oeste (= Sol), mas posição relativa das constelacões não muda

**Estrelas** (fusão nuclear que faz com que brilhem) x **Planetas** (refletem luz solar)

Na antiguidade: distinção entre eles:

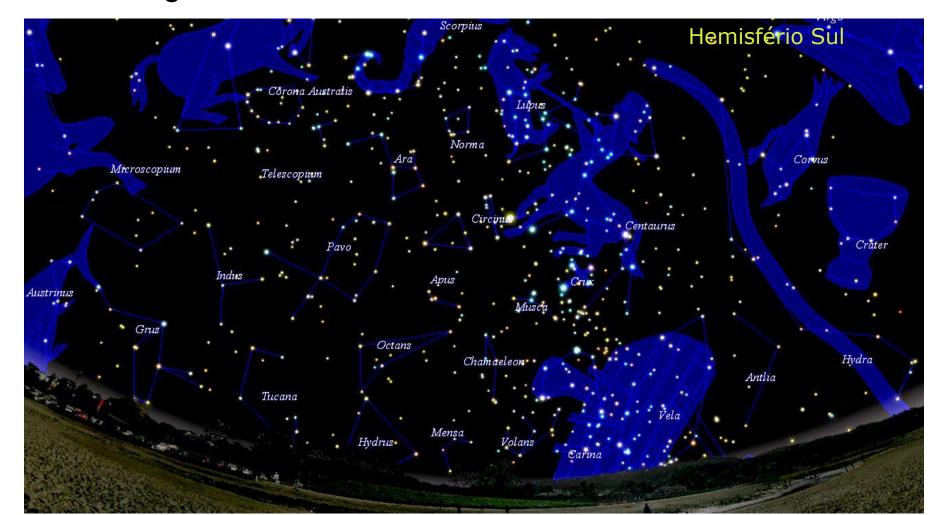
Estrelas pareciam "fixas" nas Constelações

**Planetas** (grego = **errante**): movem-se entre as constelações (5 visíveis a olho nú: Mercúrio, Venus, Terra, Marte, Jupiter, Saturno)

· Hemisfério Sul



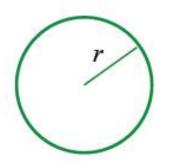
- Posição relativa das estrelas "fixas".
- Mitologia



As constelações aparecem projetadas sobre a Eclíptica



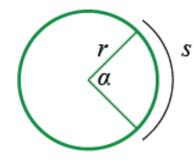
# Revisão rápida: Geometria I



Circle, radius rArea  $A = \pi r^2$ Circum.  $C = 2\pi r$ 



Sphere, radius rSurf.Area  $A = 4\pi r^2$ Volume  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 



Arc of length s on circle, radius r subtends angle  $\alpha$ 

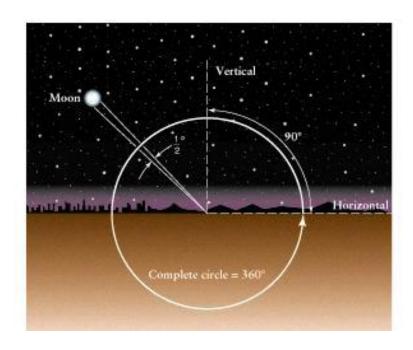
where 
$$\alpha = \frac{s}{r}$$
 in *radians*

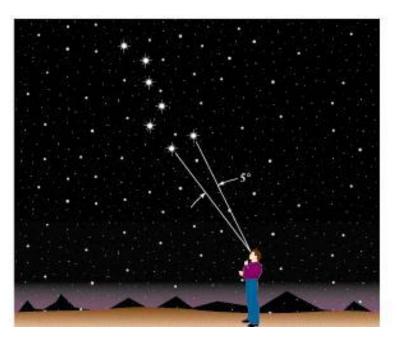
 $2\pi$  radians is equivalent to  $360^{o}$  ...so 1 radian is equivalent to  $180^{o}/\pi$ 

- Círculo tem 360° ou 2 π radianos
- Há 60 min. em 1° e 60 s em 1 min
- Portanto, 1° tem 3600 segundos
- e, 1 rad= 206 265 s (calcule!)

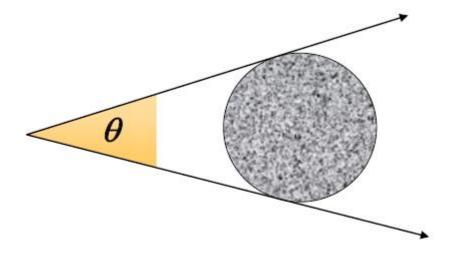
# Medindo ângulos

- Distâncias aparentes no céu são determinadas pela medida do ângulo entre dois objetos.
- Astrônomos medem ângulos em graus, minutos de arco (60 por grau) e segundos de arco (60 por minuto de arco ou 3600 por grau)

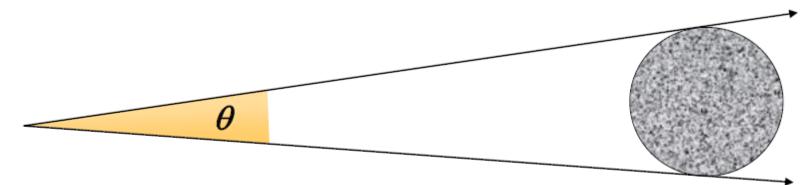




# Tamanho Angular

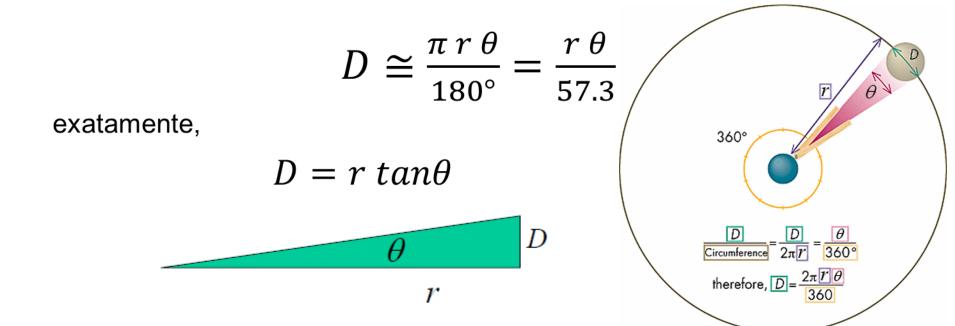


À medida que a distância cresce, o tamanho angular decresce



 O tamanho angular de um objeto está relacionado com sua distância a partir da Terra e com seu diâmetro angular observado:

Diâmetro físico  $\cong$  distância  $\times$  diâmetro angular  $\times$   $\pi$  /180°



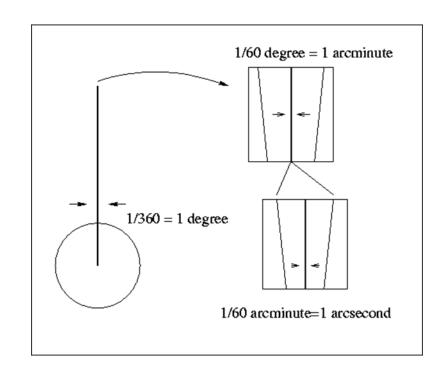
### O parsec (pc) e o segundo de arco (")

#### Parsecs e segundos de arco

Há uma unidade especial de distância chamada parsec

Uma estrela cujo ângulo paralático anual é igual a 1 segundo de arco está a uma distância de 1 parsec.

Círculo completo = 360 X 60 X 60 = 1,296,000 " (seg de arco)



$$1'' = \frac{1}{60} \times \frac{1}{60} \times \frac{1}{360} = \frac{1}{1.296.000} \text{ de um círculo}$$

### Unidades de distância

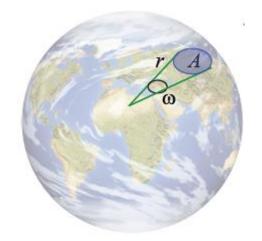
- $1 \text{ AU} = 1.495978 \times 10^{11} \text{ m}$  (ver adjante)
- 1 ly(light year = al) =  $9.46053 \times 10^{15}$  m =  $6.324 \times 10^{4}$  AU
- 1 pc =  $3.085678 \times 10^{16}$  m = 3.261633 ly = 206265 AU

uma unidade preferível para grandes distâncias.

parsec = distância na qual uma UA subtenderia um segundo de arco.

# Revisão rápida: Geometria II

Sobre uma esfera de raio r e área superficial total  $4\pi r^2$ , vamos definir uma área A sobre a superfície.



Então, a partir do centro da esfera podemos definir um ângulo sólido *ω* onde

$$\omega = \frac{A}{r^2}$$
 em steroradianos (sr)

A área superficial de toda a esfera é  $4\pi r^2$ , de modo que o ângulo sólido total é:  $4\pi$ 

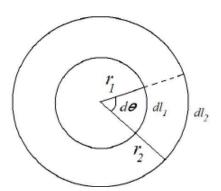
# Revisão rápida: Geometria III

### Elemento diferencial de ângulo sólido $d\Omega$

Sabemos que o comprimento total da circunferência é :

$$C=2\pi r$$

Observe a figura ao lado:



É sabido que se o ângulo total de uma circunferência, um unidades de radianos vale  $2\pi$  e a razão entre o comprimento de circunferência e o raio que lhe deu origem é igual a esta constante, então:

$$\frac{dl_1}{r_1} = \frac{dl_2}{r_2} = \frac{dl}{r} = d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta == 2\pi = \frac{C}{r}$$

- → Podemos fazer o mesmo agora com a superfície de uma esfera.
- → Note que a área da esfera é dada por:

$$A_{esf} = 4\pi r^2$$

 $\rightarrow$  Dessa forma a razão entre a área da esfera e o raio que deu origem a essa esfera, r vale:

$$\Omega_{esf} = \frac{A_{esf}}{r^2} = 4\pi$$

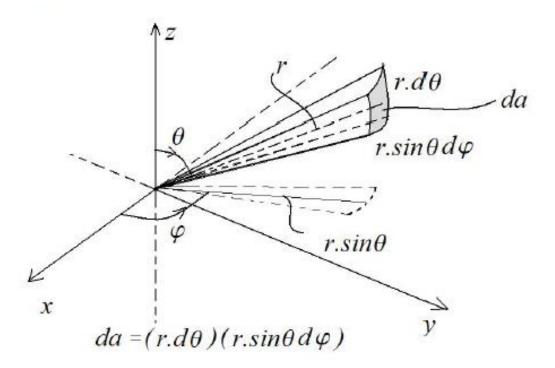
que é uma quantidade adimencional, denominado ângulo sólido total de uma superfície esférica (unidade stero-radiano, str).

Uma vez que a relação vale para toda a superfície da esfera, deve valer para infinitésimos:

$$\frac{da_1}{r_1^2} = \frac{da_2}{r_2^2} = \frac{da}{r^2} = d\Omega$$

 $\rightsquigarrow d\Omega$  é conhecido como elemento infinitesimal de ângulo sólido, e é a razão entre uma casca de superfície esférica infinitesimal e o quadrado do seu raio,  $r^2$ .

#### Observe a figura:



Podemos ver então que:

$$da = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

Em coordenadas esféricas é fácil ver que:

$$d\Omega = \frac{da}{r^2} = \sin\theta d\theta d\phi$$

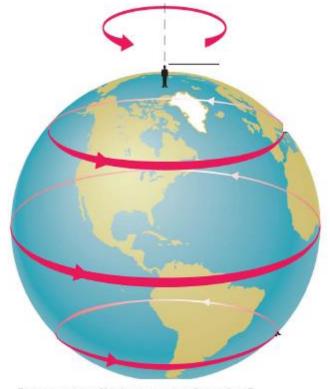
 $\sim$  O elemento diferencial de ângulo sólido é dado pelo produto de dois ângulos lineares  $d\theta$  e  $d\phi$ , mas tem um fator de peso,  $\sin\theta$ . Desse modo em coordenadas esféricas:

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\Omega = \int d\Omega = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi$$

# Rotação da Terra

 Sabemos que a Terra rotaciona uma vez por dia no sentido ANTI-HORÁRIO, com visto a partir do polo norte geográfico.



[Image Credit: Pearson Education]

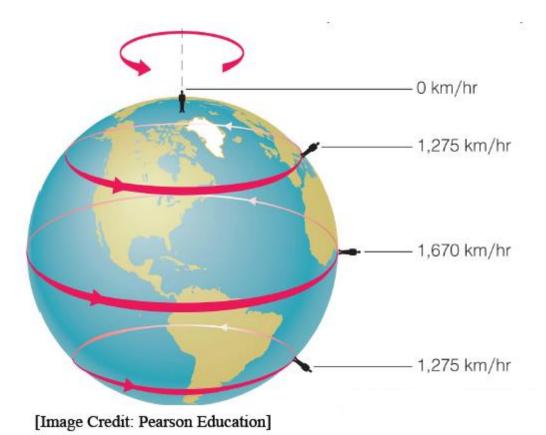
A rotação é utilizada para definir a latitude geográfica.

A **longitude** geográfica é definida a partir do grande círculo que passa por Greenwich (UK).

A latitude e longitude geográficas funcionam como um sistema de coordenadas em rotação para um observador for a da Terra.

... rotaciona para LESTE!

• É trivial calcular a velocidade com a qual um local está se movendo em relação a um observador externo "estacionário".

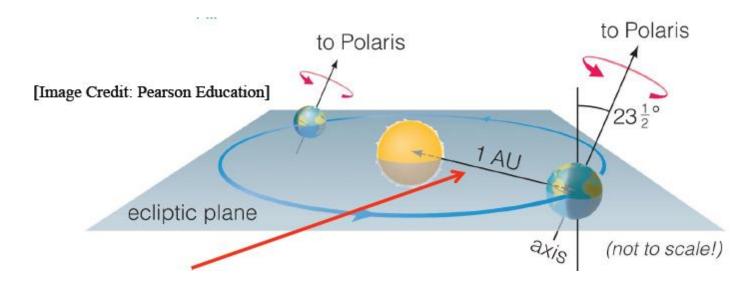


O raio da Terra no equador é 6378 km.

As velocidades são maiores na maiores latitudes.

# Órbita da Terra I

 A Terra orbita ao redor do Sol uma vez por ano, também no sentido ANTI-HORÁRIO num círculo quase perfeito!



 A distância <u>média</u> entre a Terra e o Sol durante um ano é conhecida como "Unidade Astronômica" (UA)

### Unidade Astronômica

 A distância média entre Terra-Sol é chamada de Unidade Astronômica (UA)

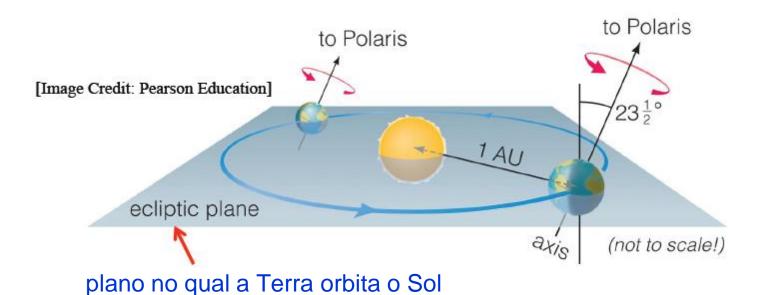
$$1.4959787066 \times 10^{11} \text{ km}$$
 ou ~ 8 minutos-luz

A órbita da Terra não é um círculo 100% perfeito.
 Apresenta uma excentricidade de 0.01671022 (2000.0)
 Daí o uso da palavra média.

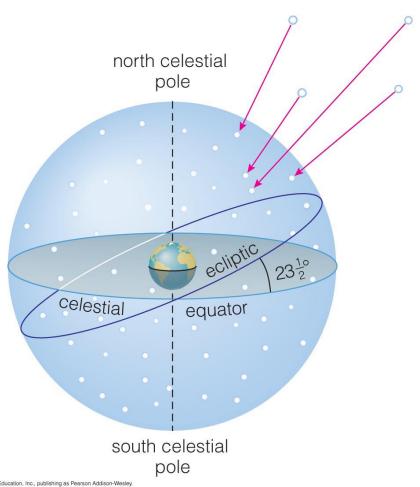
(o número entre parênteses fornece o ano - 01/01/2000 neste caso – já que como muitas coisas em astronomia, **este número muda com o tempo)** 

# Órbita da Terra II

- Velocidade orbital é rápida .... valor médio ~100.000 km/h
- Sabemos também que o eixo de rotação da Terra está inclinado em relação à ecliptica de 23.45° (2000.0)



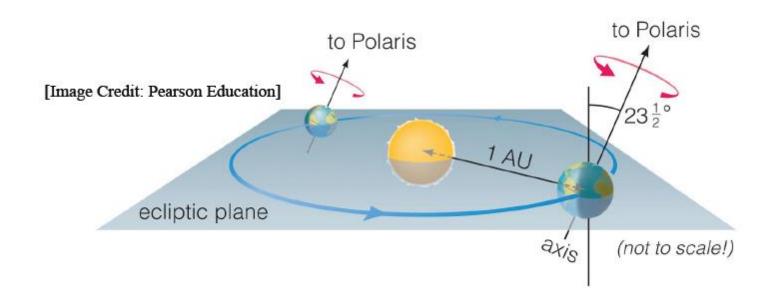
### ...mudando a origem do sistema para a Terra



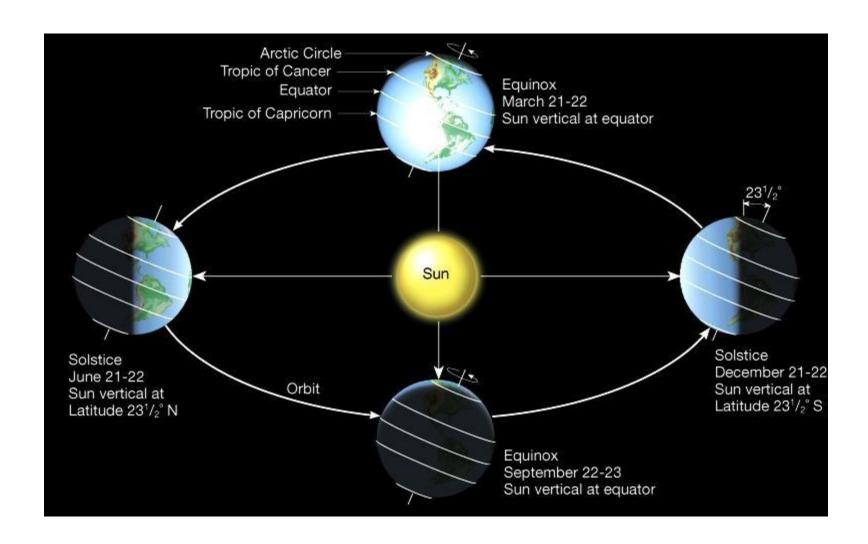
Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

### Estações do ano

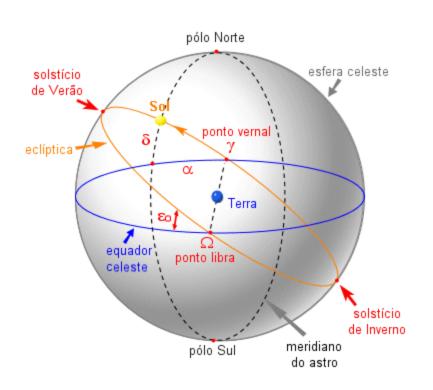
 A inclinação do eixo de rotação da Terra (~ 23.5°) em relação à normal ao plano da eclíptica causa as estações do ano, define trópicos, etc...



### Ou, visualizando de outra forma...



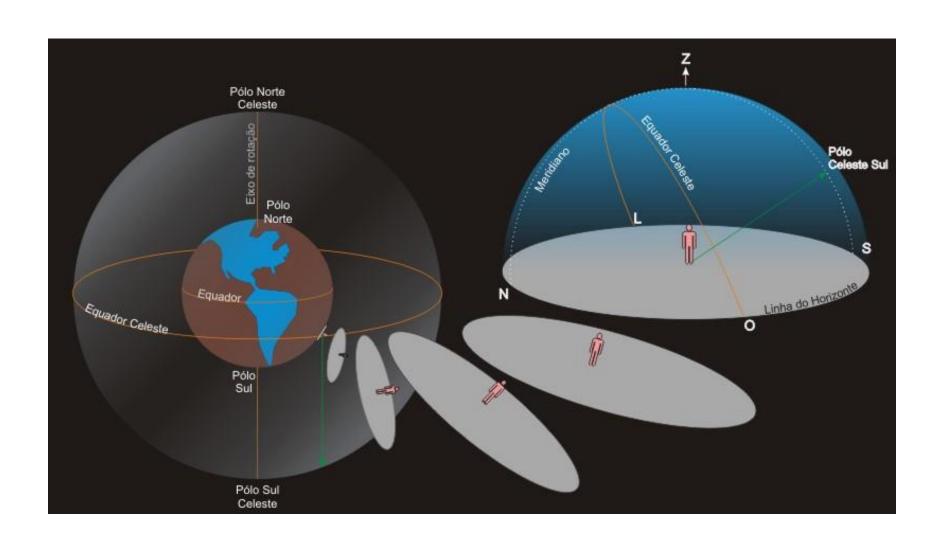
#### Movimento Diurno das Estrelas



Movimento aparente (diurno) das estrelas resultado da rotação da TERRA e não da EC, de OESTE para LESTE

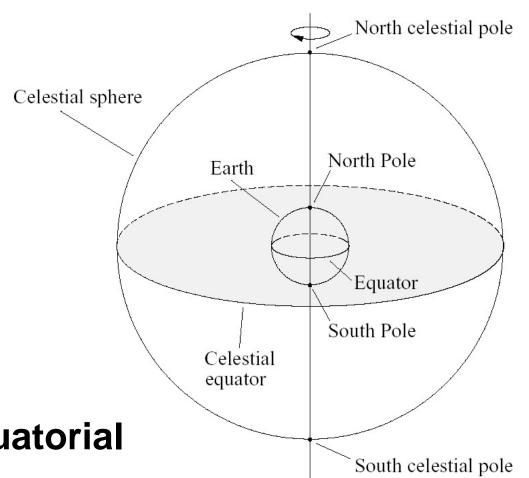
Usamos Esfera Celeste para vizualizar posicões da estrelas no ceu

### Sistemas e Coordenadas Celestes



### A Esfera Celeste

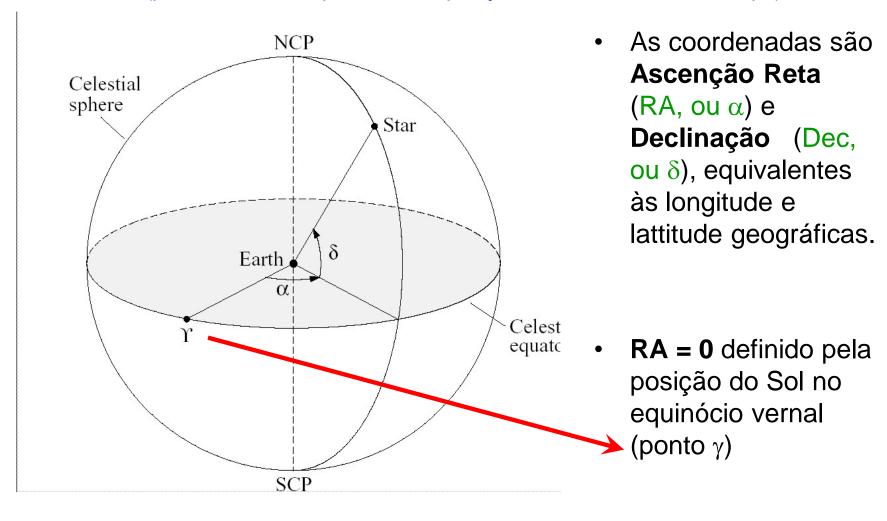
Pense nela como uma projeção "para fora" do sistema de coordenadas terrestres long-lat



→ o Sistema Equatorial

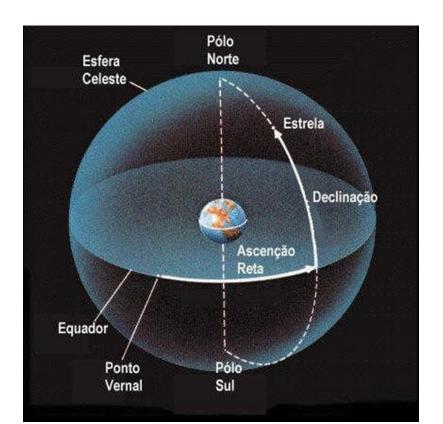
## O Sistema Equatorial

(praticamente independente da posição do observador e do tempo)



#### **COORDENADAS EQUATORIAIS**

- ascensão reta ( α ou AR): ângulo medido sobre o equador, com origem no meridiano que passa pelo ponto Áries, e extremidade no meridiano do astro. A ascensão reta varia entre 0h e 24h (ou entre 0° e 360°) aumentando para leste.
- declinação (δ): ângulo medido sobre o meridiano do astro (perpendicular ao equador), com origem no equador e extremidade no astro. A declinação varia entre 90° e +90°. O complemento da declinação se chama distância polar.



#### Ponto Vernal:

 está na reta definida pela intersecção dos planos da eclíptica e do equador celeste. A direção e sentido são precisamente determinadas pela data do equinócio vernal, em 21 de Março
 (primavera no N, outono no S)

# Ângulos - relembrando

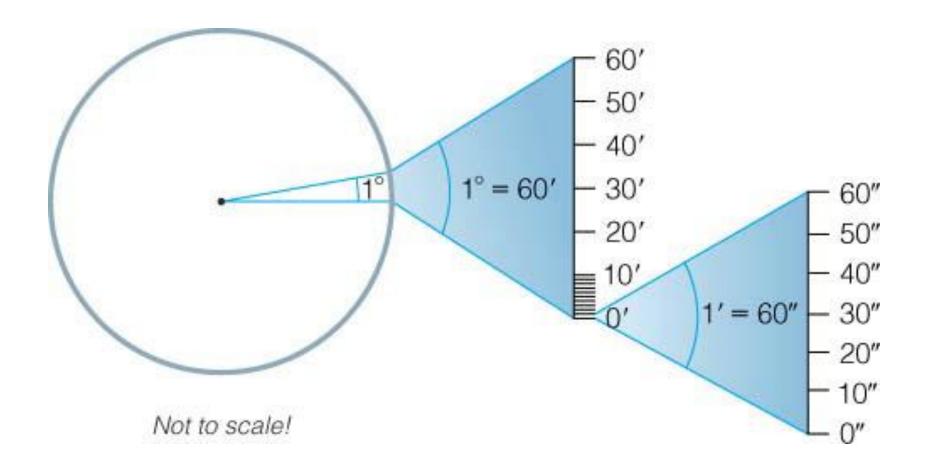
- Na esfera celeste, medimos distâncias e tamanhos dos objetos com ângulos
- 360 graus corresponde a um círculo completo

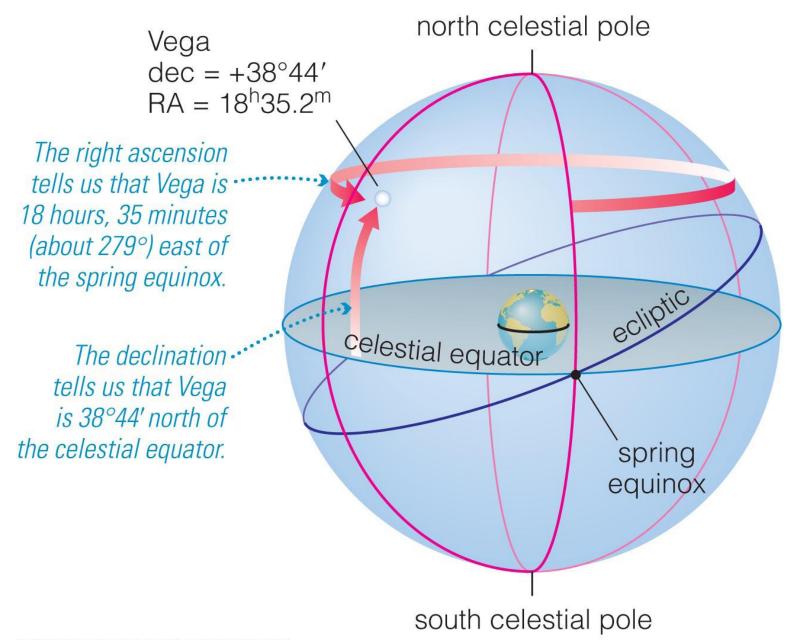
#### Em horas, minutos e segundos:

$$360^{\circ} = 24^{h} = 2 \text{ m rad}$$
  
 $15^{\circ} = 1^{h} = 60^{m} = 3600^{s}$   
 $1^{\circ} = 4^{m} = 240^{s}$ 

#### Em minutos (') e segundos ('') de arco:

- 1 grau (1°) se divide em 60 minutos de arco (60')
- 1 minuto (1') de arco se divide em 60 segundos de arco





## Expressando RA em HH:MM:SS

No sistema equatorial, a ascenção reta (R.A. or  $\alpha$ ) é frequentemente expressa em unidades de tempo ao invés de graus:

#### Especificamente:

360° é equivalente a 24h

 $1 h = 360/24 = 15^{\circ}$ 

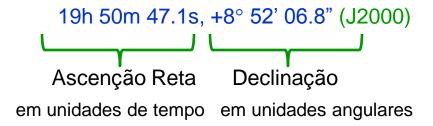
1 min equivale a 15 minutos de arco

1 seg equivale a 15 segundos de arco

Unidades angulares são utilizadas para a declinação (δ)
mas frequentemente é express em termos de graus inteiros,
minutos de arco interios e segundo de srco decimal, ao invés
de grau decimal.

## Exemplo de RA, dec

 A estrela brilhante Altair tem uma posição no catálogo que geralmente é apresentada na forma:



Para converter para grau decimal:

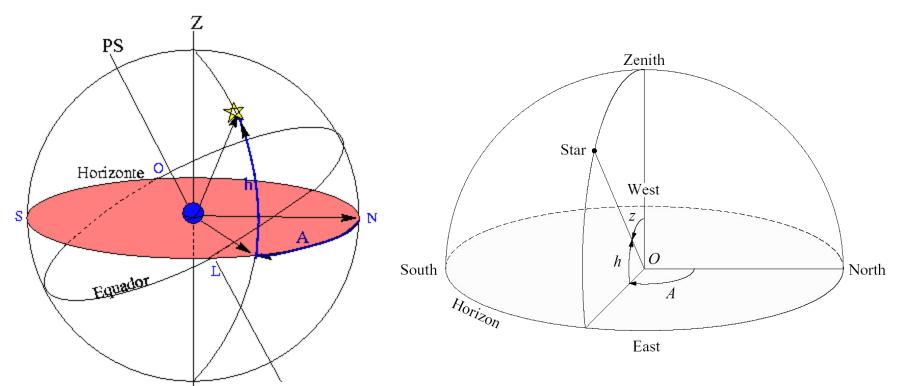
$$\alpha = 19 \times 15 + 50 \left(\frac{15}{60}\right) + 47.1 \left(\frac{15}{60^2}\right)$$
 graus

$$\delta = 8 + 52 \left(\frac{1}{60}\right) + 6.8 \left(\frac{1}{60^2}\right)$$
 graus

## O Sistema de Coordenadas Altazimutais

O <u>Sistema Horizontal</u> utiliza como plano fundamental o Horizonte Celeste. As coordenadas horizontais são <u>azimute (A)</u> e <u>altura (h)</u>.

Obviamente, é dependente da localização



A maior parte dos telescópios hoje em dia apresenta montagem alt-az

#### COORDENADAS ALT-AZ ( A , H ) [ALTAZIMUTAL]

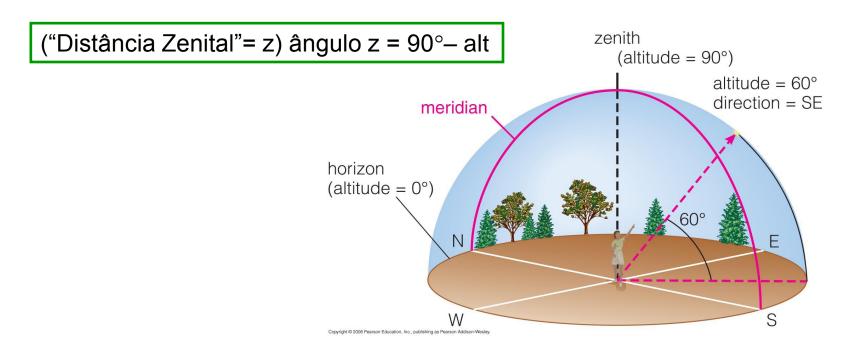
Coordenadas espaciais 2-D

Origem: Observador

Direção-1: **Altitude** (alt), ângulo acima do horizonte (em graus)

Direção-2: **Azimute** (az), ângulo medido ao redor do horizonte no sentido horário partir

do sul (em graus)



[Image Credit: Pearson Education]

## Fazendo uma observação

#### ... admitindo que voce conheça

- a ascenção reta (R.A. or α) e declinação (δ) de um objeto no sistema equatorial (em um tempo definido)

#### ...e

sua longitude, latitude e tempo local

#### ... então,

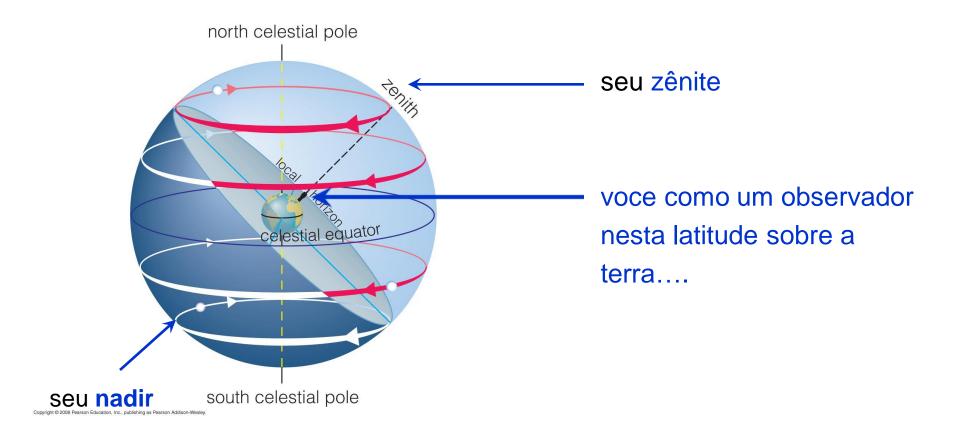
transformações de coordenadas temporais e espaciais

#### ... fornecerão

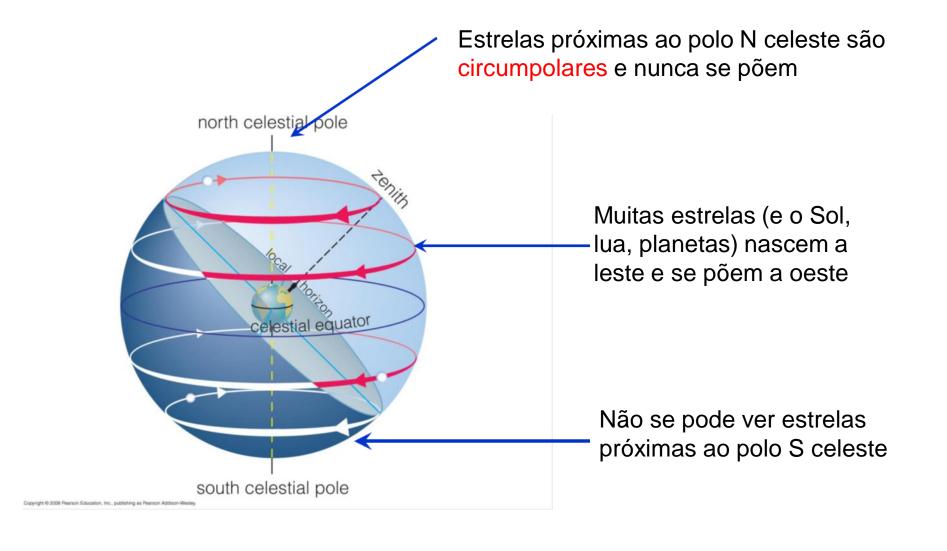
- A altitude (alt) e azimute (az) do objeto no sistema horizontal em qualquer tempo local desejado.

## ... continuando.....

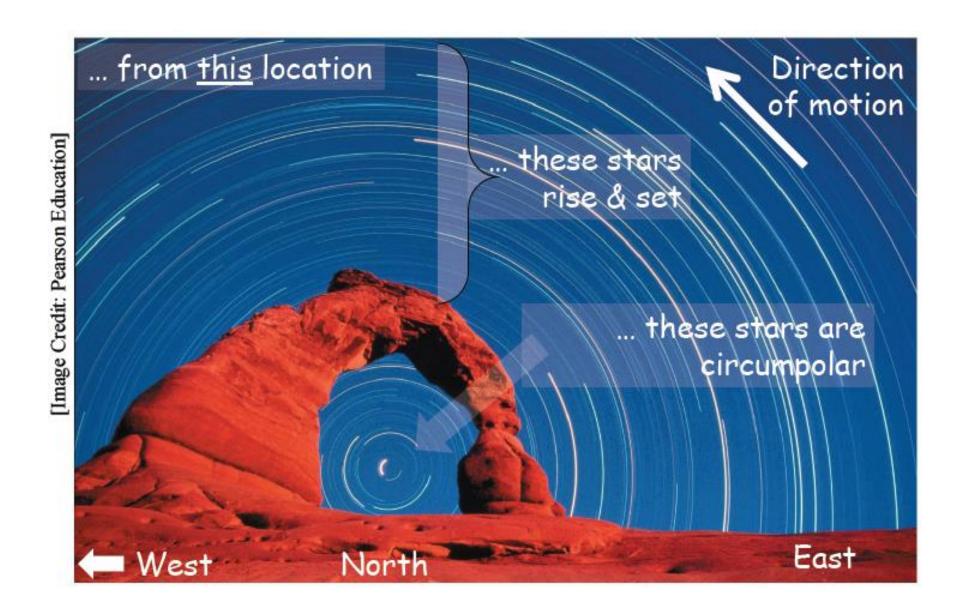
Vejamos esse sistema comparado à Esfera Celeste.



## Mais considerações

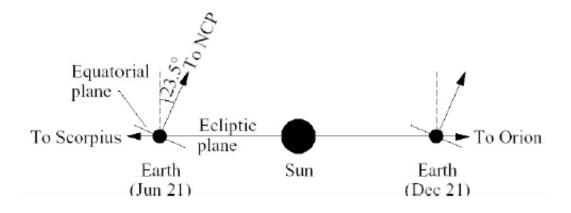


## Estrelas circumpolares e outras....



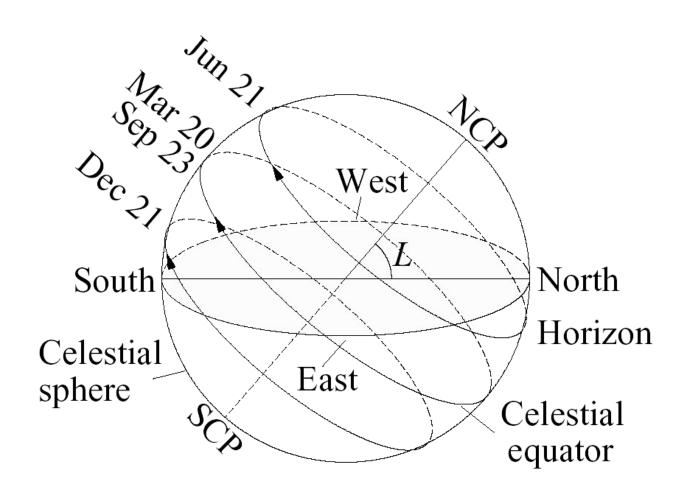
## Outros sistemas de coordenadas celestiais comuns

Eclíptico: projeção do plano da órbita a Terra define o Equador da
 Eclíptica. Sol define a longitude = 0.

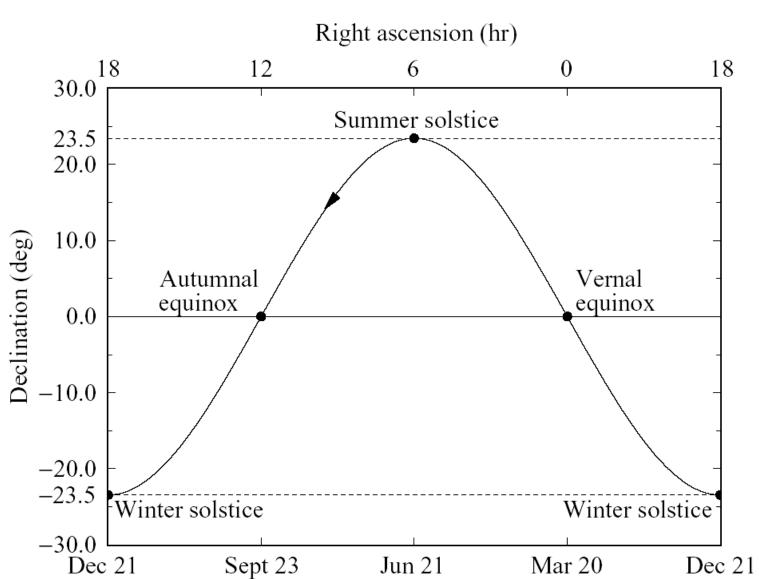


**Galático:** projeção do plano Galático médio é próximo ao Equador Galático; longitude = 0, próximo ao Centro Galático, mas não muito.  $(\alpha, \delta) \rightarrow (l, b)$ 

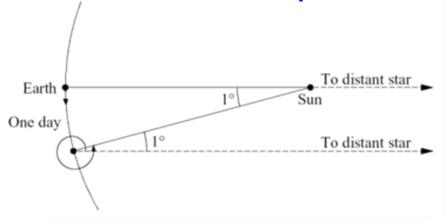
## Mudança sazonal da declinação solar

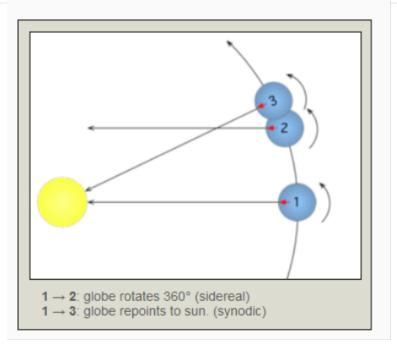


## Caminho Solar Anual



## Tempos Sinódico e Sideral





Sinódico = relativo ao Sol Sideral = relativo às estrelas

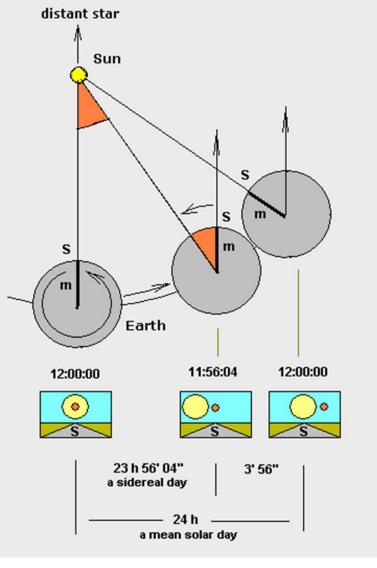
#### DIA SIDERAL

Um dia sideral é o tempo que leva uma estrela no céu para voltar ao mesmo lugar. Como, para todos os efeitos, o céu é fixo, um dia sideral é quando a Terra gira 360° (360° em 1 ano (~365 dias) → ~ 1° por dia).

Um dia sideral são 23h 56' 4.09".

Ano sideral = 366.25 dias (sidereais)

Devido à precessão dos equinócios, o ano sideral é 20 minutosmais longo que o ano sinódico.



#### DIA SINÓDICO

Um dia sinódico ou solar é o tempo que leva o sol para passar sucessivamente o meridiano. Um dia solar médio são 24h. A Terra tem que rodar mais que 360 ° para o sol voltar para o "meio dia".

Ano sinódico (ou tropical) = 365.25 dias (solares)

1 dia solar =  $\Delta t$  entre 2 nasceres de Sol = 24 h

Portanto,

Dia SOLAR (24h) = 361° > dia SIDERAL (verdadeiro periodo da rotação)

Como T demora 4 minutos para girar de 1° em torno de si mesma: Dia SOLAR (24 hs) = 4 min mais longo que o SIDERAL (23 h 56 m 04 s)

- A diferença entre o dia sideral médio e o dia solar médio pode ser derivada aproximadamente como segue abaixo.
- Como no ano tropical o tempo solar médio se atrasa um dia em relação ao tempo sidral médio, então:

$$\frac{24h}{365.2422} \cong 3^m 56^s$$

Portanto, um dia sideral é ~ 3<sup>m</sup>56 mais curto que o dia solar.

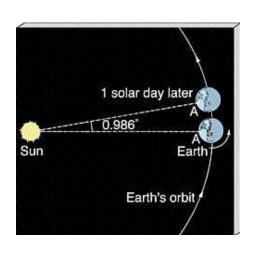
Tempo Universal, UT = relativo ao Sol, em Greenwich

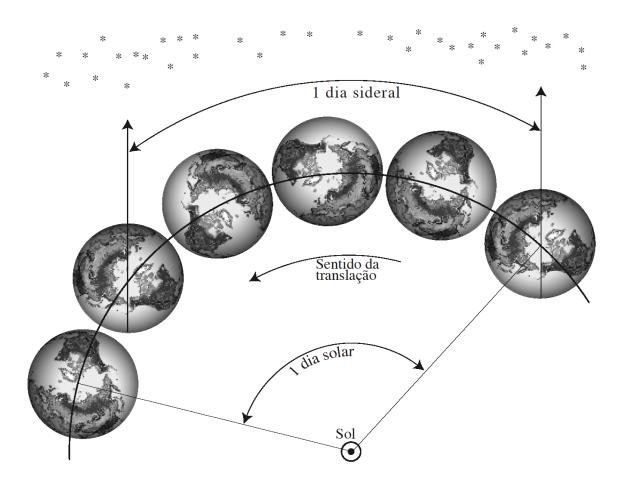
 Tempo Sideral Local (LST) = relativo à esfera celeste = RA agora cruzando o meridiano local (em direção ao Sul),

ou seja,

nesse ponto (isto é,  $\alpha$ = 0°,  $\delta$  = 0°) teremos máximo de culminação em LST  $\Theta$  = 0h

## Rotação da Terra: dia

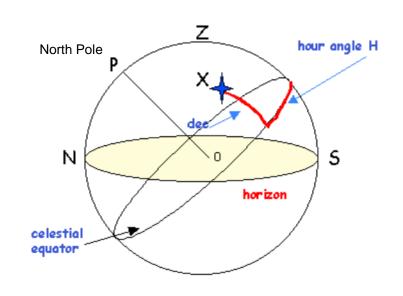




Dia solar: 24h

Dia sideral: 23h 56m 4,1s

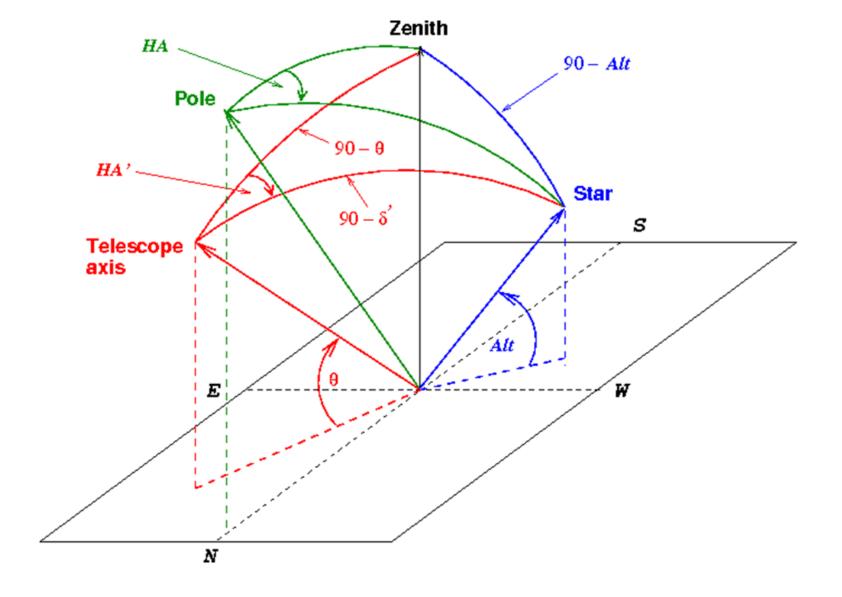
## Ângulo Horário (h)



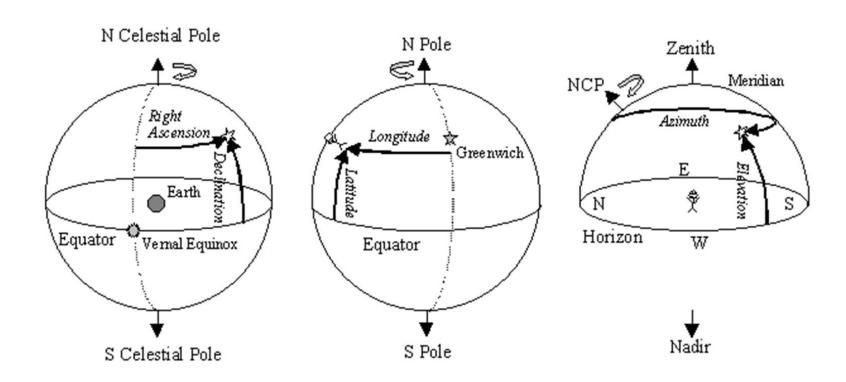
O ângulo horário *h* de um objeto X é o ângulo entre o meridiano local N-S e a projeção da localização do objeto, medido no sentido horário ao longo do equador celeste.

A culminação (ponto mais alto) do objeto ocorre para h = 0h, geralmente expresso em horas!

 Positivo se no sentido horário e negativo no caso oposto.



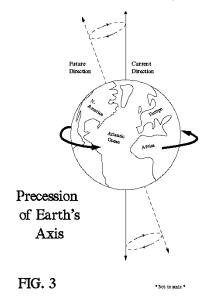
## Resumindo... notem as diferenças e semelhanças



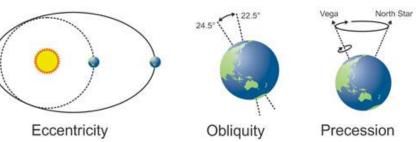
## A precessão dos Equinócios

Equinócio significa o momento em que o sol incide com maior intensidade sobre as regiões que estão localizadas próximo à linha do equador. Quando ocorre o equinócio, o **dia** e a **noite** têm igual duração (exatamente 12 horas). Ocorre durante os meses de março e setembro, quando há mudança de estação.

- O eixo de rotação da Terra precessiona com um período de ~ 26,000 anos
- É causada pela atração de maré da Lua e Sol sobre o equador da Terra que é abaulado devido à força centrífuga da rotação da Terra.
- Existe também a nutação (oscilação do eixo de rotação da Terra) com um período de ~ 19 anos.



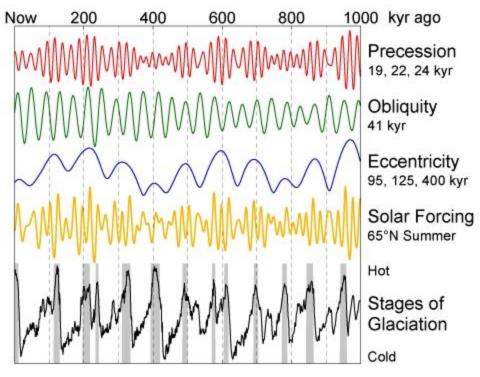
#### Milankovitch Cycles



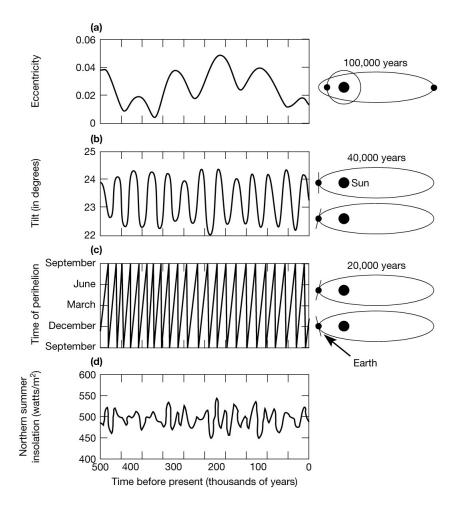
## Órbita da Terra, Rotação e Eras Glaciais.

- Teoria de Milankovich: variações cíclicas na geometria Terra-Sol se combinam para produzir variações na quantidade de energia solar que alcança a Terra, em particular, as regiões de formação de gelo:
  - 1. Mudanças na obliquidade (inclinação do eixo de rotação)
  - 2. Excentricidade da órbita
  - 3. Precessão

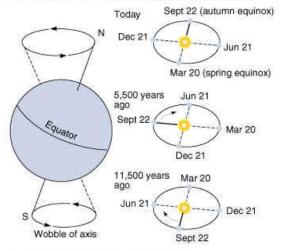
Essas variações se correlacionam muito bem com as eras glaciais!



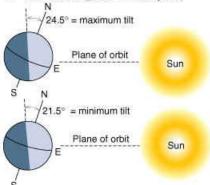
#### Para os mais curiosos...



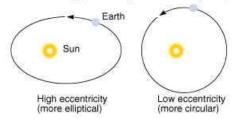
#### A. Precession of the equinoxes (period = 23,000 years)



#### B. Tilt of the axis (period = 41,000 years)



#### C. Eccentricity (dominant period =100,000 years)



## Algumas unidades bastante usadas

#### Distância:

- Unidade astronômica: distância Terra-Sol
   1 au = 1.496 ×10<sup>13</sup> cm
- Ano luz (Light year): c ×1 ano, 1 ly =  $9.463 \times 10^{17}$  cm
- Parsec: distância a partir da qual 1 au subtende um ângulo de1 arcsec,  $1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{18} \text{ cm} = 3.26 \text{ ly} = 206,264.8 \text{ au}$

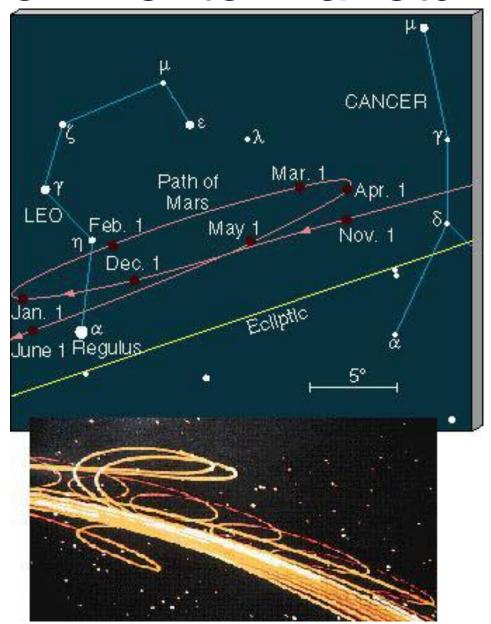
#### Ângulo:

– Geralmente em "hex", i.e., 12° 34′ 56.78″ ou 12.5824389 deg, exceção feita à RA, usualmente dada em unidades de tempo, i.e, 12h 34m 56.789s. Note que  $\Delta\alpha$  [deg] =  $\Delta\alpha$  [h]  $\times$  15 cos  $\delta$ 

#### Massa e Luminosidade:

- Massa solar:  $1 \text{ M}_{\odot} = 1.989 \times 10^{33} \text{ g}$
- Liminosidade solar:  $1 L_{\odot} = 3.826 \times 10^{33} \text{ erg/s}$

## Movimento Planetário

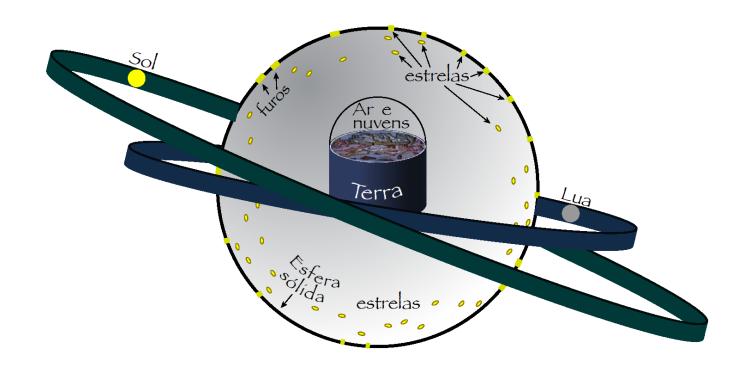


#### **Breve Histórico**

- Pitágoras (550 a.C.) ⇒ números; intervalos musicais; geometria.
- Platão (350 a.C.) ⇒ Universo Geocêntrico movimento dos astros em torno da Terra com velocidade uniforme (cte.) **T centro do Universo**
- Universo Geocentrico: conceito que persistiu ate o sec. XVI (pensamento Aristotelico)
- Hiparcos (150 a.C.) ⇒ planetas se movem em órbitas pequenas (epiciclos) que giravam em torno de órbitas maiores (deferentes).
- Ptolomeu (100 d.C.) ⇒ refinou o sistema de epiciclos ⇒ Terra deslocada do centro do deferente ⇒ compromete o esquema anterior de movimento uniforme.

## Sistema geocêntrico

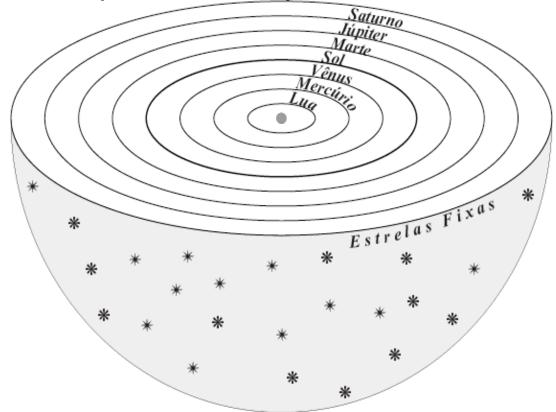
Anaximandro (~560 a.c.)



- Terra (plana) imóvel, no centro do universo
- O Sol, a Lua e os astros se movem em círculos ao redor da Terra

## Sistema geocêntrico

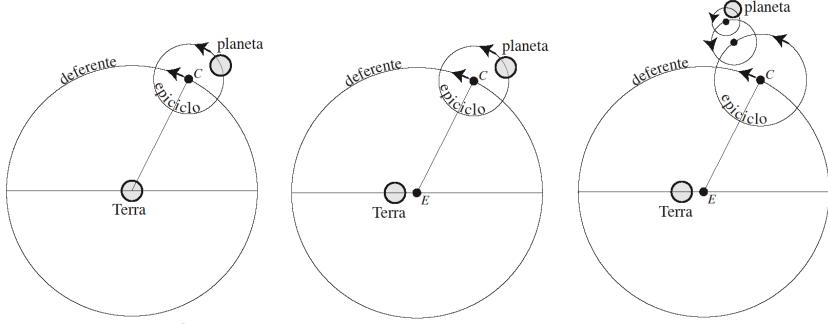
Aristóteles (~320 a.c.)



- Terra imóvel, no centro do universo
- O Sol e os astros se movem em círculos ao redor da Terra
- Inspirou Universo de Dante

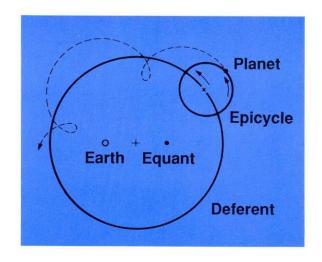
## Sistema geocêntrico

 Apolônio (~230 a.c.); Hiparco (~140 a.c.); Ptolomeu (~130 d.c.)



- Terra imóvel, no centro do universo
- O Sol e os astros se movem em vários círculos ao redor da Terra:
- complexidade do movimento aparente dos planetas: Mercurio e Venus « oscilam em torno do Sol com distâncias angulares maximas de 41° (Venus) e 25° (Mercurio)
  - Teoria dos epicíclos

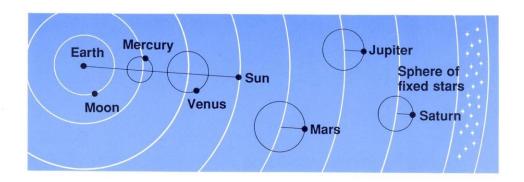
# Epiciclos Modelo Ptolomaico: dezenas de ciclos (perdurou 13 secs.)



#### **Epicycle and deferent**

Seeds/Horizons, 3rd ed., Fig. 4-6; Foundations of Astronomy, 1990 ed., Fig. 4-12

© 1991 Wadsworth, Inc.



#### The Ptolemaic system

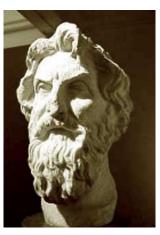
Seeds/Horizons, 3rd ed., Fig. 4-7; Foundations of Astronomy, 1990 ed., Fig. 4-13

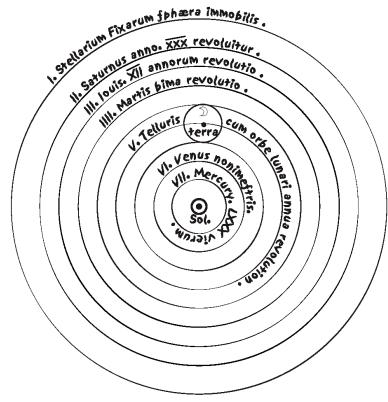
© 1991 Wadsworth, Inc.

## Modelo Heliocentrico

- Aristarco (~260 a.c.)
  - Universo heliocêntrico
  - A Terra se move em torno do Sol
- Nicolau Copérnico (1543)
  - Órbitas circulares em torno do Sol



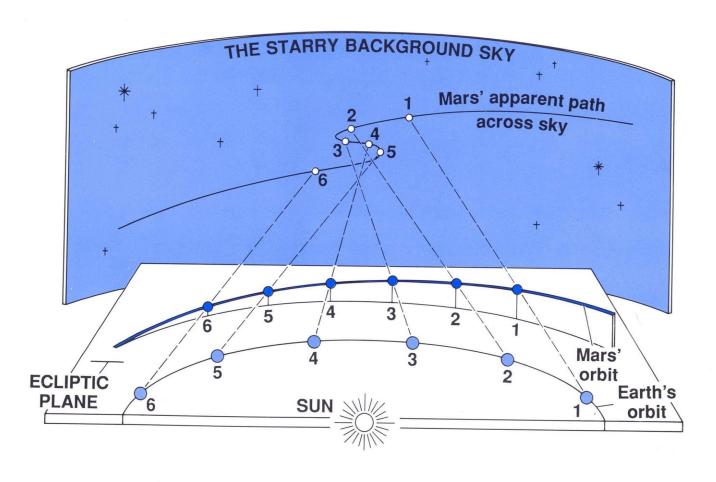




## Modelo Heliocêntrico

- Sol no centro; T gira em torno do próprio eixo e do Sol
- Explica movimentos diurnos e sasonais, e mudancas sasonais no ceu
- Explica movimento dos planetas: circular e uniforme (como convinha aos dogmas da epoca)
- Ordem dos planetas ao redor do Sol: quanto > período da órbita: > distância do planeta
- Explica os loops dos planetas

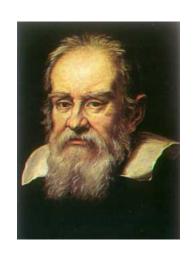
# Modelo Heliocentrico: explica *loops* dos planetas



## Modelo Heliocentrico: era moderna

## Galileu Galilei (1564–1642)

- "Epur si muove":
- Prova irrefutavel do modelo heliocentrico: construiu 1<sup>a</sup> luneta: detectou 4 luas de Jupiter que orbitavam indiscutivelmente em torno de Jupiter e não da T!



## Modelo Heliocentrico: era moderna

## Tycho Brahe (~ 1590)

 observações detalhadas do movimento dos planetas, em particular de Marte. (mas acreditava no universo geocêntrico)



## Johannes Kepler (1609)

- Utiliza dados de Tycho Brahe.
- Inicialmente acredita no universo geocêntrico, mas adota a visão heliocêntrica devido à sua própria análise
- Observando dados: abandona movimento circular do SS: adota elipses

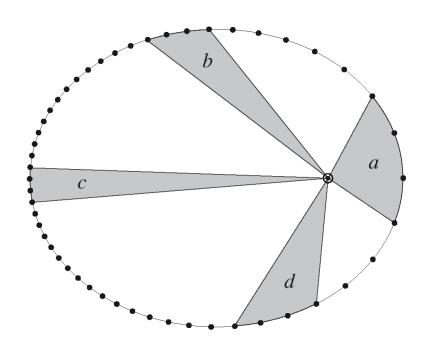


## Movimento Heliocentrico

#### Johannes Kepler

- Órbitas elípticas em torno do Sol
- 3 leis empíricas dos movimentos planetários (entre 1609–1619):
  - Os planetas se movem em elipses, com o Sol em um dos focos;
  - A linha que liga o Sol a um dado planeta varre áreas iguais em tempos iguais;
  - O quadrado da razão dos períodos de translação de 2 planetas é igual ao cubo da razão entre as distâncias dos planetas ao Sol

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$



Explicadas pela teoria da gravitação de Newton (1687)